任意图中的王子与公主问题

作者 郑植匀
指导老师 戴中元
学校 华东师范大学第二附属中学

日期：2021 年 9 月 14 日

摘 要

本文主要研究在无向图上的王子和公主问题 (一个城堡中的房间在图 G 的顶点上，一个住在城堡中的公主每天住在与她前一天相邻的房间。王子们不知道公主所住的房间，每天傍晚他们可以查看几间房间中是否住着公主)，本文定义了能找到公主的最小王子数为 $\rho(G)$，这个概念刻画了图的某种"连通"性质。首先通过邻接矩阵等代数工具对不同图的 $\rho(G)$ 的进行研究，给出了 $\rho(G)=1$ 的图和树之间的差异，然后建立了 $\rho(G)$ 和顶点度、$\chi(G)$ 之间的不等式，计算了不同顶点数且 $\rho(G)=1$ 的图的数量，并且给出了这些图中王子找到公主的具体策略和例子，对于 $\rho(G)>1$ 的情况目前尚在进一步探索中。

关键词: 图论, 母函数, 邻接矩阵, 顶点度, 染色问题

1 引入

1.1 问题介绍

首先，我们考虑以下问题:

> 一个城堡中的房间在图 G 的顶点上。一个住在城堡中的公主每天住在与她前一天相邻的房间。一个王子想要找到公主，但他不知道公主所住的房间。每天傍晚他可以查看一间房间中是否住着公主。请问王子应当遵循什么策略使得他一定可以找到公主?

将图中有"潜在的公主"的顶点标上 P, 对于一张图，我们称每一种标号方法为一个状态 S。

那么，王子和公主的规则便可以表述为: 每天晚上，王子可以在图上的一个顶点摘除一个 P 标签；而每天早上，每个顶点会被标上 P 如果它相邻的顶点在前一天晚上标着 P。

在第一天所有顶点都标上了 P。我们假设第 i 天图的状态为 S_i。显然，王子的目标是将图转移到一个状态 S，其中没有一个顶点被标上了 P。

注意到，有些图 (例如一个环) 需要超过一个王子 (即一天晚上能摘除超过一个 P 标签) 才有必赢策略。

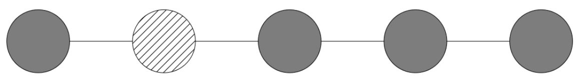
假设第 i 天晚上王子 (们) 查看了 $A_i = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$，每一个 A_i 包含等于王子数的顶点，称为王子们的一个措施。我们称序列 $\{A_i\}$ $(i \in \mathbb{N})$ 为王子 (们) 的一个策略。如果这个序列最终能摘除所有的标签 P，那么称其为必赢策略。必赢策略一定是有限序列。

那么，我们称一个图为"n 王子可寻的"当且仅当王子数为 n 时存在必赢策略。更多的，n 的最小值称为这个图的最小王子数，记为 $\rho(G)$。

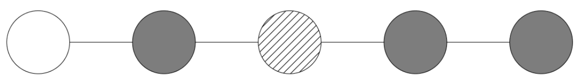
更多的，如果一个策略 $\{A_i\}$ 不是必赢的，那么对于这个策略，必定存在一个序列 $\{e_i\}$，其中对 $\forall i \in \mathbb{N}$ 有 $e_i \in E(G)$ 且 $e_i e_{i+1} \in V(G)$。这个序列的长度与策略 $\{A_i\}$ 相同。若公主在第 i 天晚上在顶点 e_i 上，能够避免被策略 $\{A_i\}$ 找到，则序列 $\{e_i\}$ 称为公主在此图上对策略 $\{A_i\}$ 的一个对策。

例 1 五阶线性图王子找到公主的方法

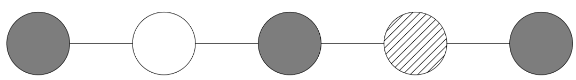
在下图中，阴影表示顶点标上了 P，斜线表示当晚王子查看的房间。



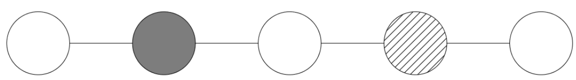
第一天



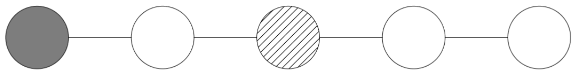
第二天



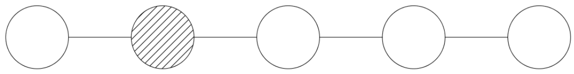
第三天



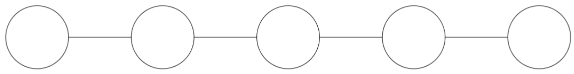
第四天



第五天



第六天



完成

于是对于图 L_5，$V(L_5)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$，$E(L_5)=\{e_1e_2,e_2e_3,e_3e_4,e_4e_5\}$，王子的一个必赢策略 $\{A_i\}$ 为：e_2,e_3,e_4,e_4,e_3,e_2。

1.2 定义

注意 在后文中所提到的矩阵，如无特殊指明，皆为布尔矩阵，矩阵乘法也皆为布尔积。

定义S_V：S_V 表示有且仅有 $V\subseteq V(G)$ 中的顶点被标上 P 的状态。例如 $S_{V(G)}$ 表示所有顶点被标上 P 的状态，又如 S_ϕ 为没有顶点被标上 P 的状态。

定义T_G：将图 G 的邻接矩阵 $(a_{ij})_{|G|\times|G|}$ 记为 T_G, 即

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_iv_j\in V(G)\\0, v_iv_j\notin V(G)\end{cases}\tag{1}$$

定义M_A：对 n 王子的策略中的一项 $A=(v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_n})$，$M_A=(m_{ij})_{n\times n}$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, i=j\ and\ v_i\notin A\\ \quad 0, otherwise\end{cases}\tag{2}$$

定义π_S：对任意一种图 G 的状态 S，$\pi_S=(\pi_{ij})_{|G|\times 1}$，其中

$$\pi_{ij}=\begin{cases}1, v_i\in V(G)\ is\ labeled\ P\\ \quad 0,\ otherwise\end{cases}\tag{3}$$

定义$P\{A_i\}$, $\mathbb{S}(G,n)$: 对图 G 与王子数 n, 任意王子们的策略 $\{A_i\}:A_1,A_2,\ldots,A_k$,

矩阵

$$P\{A_i\} = (T_G \times M_{A_k}) \times (T_G \times M_{A_{k-1}}) \times \cdots \times (T_G \times M_{A_1}) \tag{4}$$

由所有这样的 M 构成的集合为 $\mathbb{S}(G,n)$。

例 2 同样举**例 1** 中的图为例，有

$$T_{L_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

对必赢策略 $\{A_i\}: e_2, e_3, e_4, e_4, e_3, e_2$，有

$$\begin{aligned} P\{A_i\} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

2　一些工具

2.1　$\mathbb{S}(G,n)$ 的性质

性质 1 $\mathbb{S}(G,n)$ 对矩阵的布尔积运算封闭。

证明 $\forall A,B\in\mathbb{S}(G,n)$，$A\times B$ 表示先执行策略 B，再执行策略 A，显然，这也是个策略，因此在 $\mathbb{S}(G,n)$ 中。

性质 2 $\langle\mathbb{S}(G,n),\times\rangle$ 为半群。

证明 由**性质 1** 与布尔积的结合律易得。

性质 3 如果 $n<\rho(G)$，则 $|\mathbb{S}(G,n)\pi_{V(G)}|\le 2^{\nu}-\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{\nu}{i}$

证明 由于 $n<\rho(G)$，那么容易知道有小于 n 个标签的任意状态 S 必定不在 $|\mathbb{S}(G,n)\pi_{V(G)}|$ 中，否则 $\rho(G)\le n$。这些不被允许的状态共有 $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{\nu}{i}$ 个，故 $|\mathbb{S}(G,n)\pi_{V(G)}|\le 2^{\nu}-\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{\nu}{i}$

性质 4 设某一天图 G 处于某状态 S，且当天王子们的措施为 A，第二天的状态为 S'，则有:

$$T_G\times M_A\times\pi_S=\pi_{S'}\tag{7}$$

证明 由规则，一个顶点在状态 S' 里被标上 P 当且仅当在状态 S 存在与其相邻的点被标上 P，且该点当晚未被王子查看。先考察 $M_A\times\pi_S$，设其等于 S''，由定义不难知道其意义为从状态 S 中摘除所有属于 A 的顶点上的 P 标签，于是我们只需证明：第二天所有与 $M_A\times\pi_S$ 表示的状态中被标上 P 的顶点相邻的顶点被标上了 P 即可。若 $\pi_{S'}=[a_{ij}],S''=[s''_{ij}],T_G=[t_{ij}]$，则由布尔积的定义

$$a_{i1}=(t_{i1}\wedge s''_{11})\vee(t_{i2}\wedge s''_{21})\vee\cdots\vee(t_{i|G|}\wedge s''_{|G|1})\tag{8}$$

不难发现，当且仅当存在 $t_{ij}\wedge s''_{j1}$ 为 1 时 a_{i1} 才为 1，而 $t_{ij}=1\Leftrightarrow V_i$ 与 V_j 相邻，$s''_{j1}=1\Leftrightarrow V_j$ 在状态 S'' 中被标上 P，即为规则。

推论 1 图 G 处于某状态 S，王子们的策略为 $\{A_i\}$, 则策略实施后的状态

$$\pi_{S'}=P\{A_i\}\times\pi_S\tag{9}$$

这个推论由**定理 2** 可以快速得到。

性质 5 $\rho(G)\le n\Leftrightarrow O_{|G|\times|G|}\in\mathbb{S}(G,n)$

证明 只需证明：对于任意必赢策略 $\{A_i\}$ 必有 $P\{A_i\}=O_{|G|\times|G|}$。

$P\{A_i\}=(p_{ij})$，由于为布尔矩阵，$p_{ij}\in\{0,1\}$ 。若 $P\{A_i\}$ 的元不全为 0，当图 G 处于初始状态 $S_{V(G)}$（即所有顶点被标上 P），由**推论 1** 可知末状态 $\pi_S=P\{A_i\}\times\pi_{S_{V(G)}}$。又因为 $P\{A_i\}$ 的元不全为 0，那么 $\pi_{S_{V(G)}}$ 的元不全为 0，那么这个必赢策略不能摘除所有的 P 标签，矛盾。

性质 5 的一个很好的例子便是**例 2**。

推论 2$\rho(G)\leq n\Leftrightarrow\pi_\phi\in\mathbb{S}(G,n)\pi_{S_{V(G)}}=\left\{M\times\pi_{S_{V(G)}}|M\in\mathbb{S}(G,n)\right\}$
证明 由**性质 5** 即可得到。

更多的，由于 $\mathbb{S}(G,n)$ 对乘法是封闭的，任何属于 $\mathbb{S}(G,n)$ 的矩阵乘上 $\mathbb{S}(G,n)\pi_{S_{V(G)}}$ 中的元素仍在 $\mathbb{S}(G,n)\pi_{S_{V(G)}}$ 中。

性质 6 若 G 是二分图，设 $V(G)$ 划分为 V_1,V_2，使每个子集内的顶点互不相邻。$\exists P\{A_i\}\in\mathbb{S}(G,n)$ 使得 $P\{A_i\}\times\pi_{S_{V_1}}=O_{|G|\times1}$，等价于 $O_{|G|\times|G|}\in\mathbb{S}(G,n)$

证明

"$\Rightarrow$": 若潜在的公主必在 V_1 中，那么第二天潜在的公主不可能在 V_1 中。这个命题对 V_2 也成立。可见，V_1 中与 V_2 中的潜在的公主是相互独立的。则若 $P\{A_i\}\times\pi_{S_{V_1}}=O_{|G|\times1}$，那么便会有 $P\{A_i\}\times T_G\times\pi_{S_{V_2}}=\pi_\phi$。这表明 $P\{A_i\}$ 可以清除 $T_G\times\pi_{S_{V_2}}$ 表示的状态中的 P 标签，那么 $P\{A_i\}$ 也一定能够清除 $T_G\times M_A\times\pi_{S_{V_2}}$ 中的 P 标签 (其中 A 为任意一个 n 王子的措施)，因为 $M_A\times\pi_{S_{V_2}}$ 中被标上 P 标签的顶点在 $\pi_{S_{V_2}}$ 中必定也被标上。那么 $P\{A_i\}\times T_G\times M_A\times\pi_{S_{V_2}}=\pi_\phi$。由于 $P\{A_i\}\in\mathbb{S}(G,n)$ 且 $T_G\times M_A\in\mathbb{S}(G,n)$，$P\{A_i\}\times T_G\times M_A\in\mathbb{S}(G,n)$，即 $P\{A_i\}\times T_G\times M_A$ 是一个策略，可将 V_2 中的潜在的公主去除。因此，V_1 中的和 V_2 中的潜在的公主都可以被去除，又因为她们独立，可以先后将其去除，即必存在一个必赢策略。

"$\Leftarrow$": 若 $O_{|G|\times|G|}\in\mathbb{S}(G,n)$，那么 $O_{|G|\times|G|}$ 就是满足条件的 $P\{A_i\}$。

2.2 工具

工具 1 如何得到 $\mathbb{S}(G,n)$:

1.$Q=\{T_G\times M_A\}$ 其中 A 为 n 王子措施。不难知道 $|Q|=\binom{\nu}{n}$

2. 计算 $Q^2=\{P_i\times P_j|P_i,P_j\in Q\}$

3. 若 $Q^2\neq Q$, 则执行 4；若 $Q^2=Q$，则 $Q=\mathbb{S}(G,n)$。

4. 从 $n=3$ 开始不断增大 n, 直到 $Q^n=Q^{n-1}$，此时 $Q^n=\mathbb{S}(G,n)$

工具 2 不计算 $\mathbb{S}(G,n)$，得到 $\mathbb{S}(G,n)\pi_V$：

1.$R=\{\pi_V\}$，$Q=\{T_G\times M_A\}$ 其中 A 为 n 王子措施。

2. 将 Q 中每个元素乘上 R 中每一个元素，若得到的矩阵不在 R 中，则将其加入。重复直到 $QR = R$

3. 此时 $R = \mathbb{S}(G, n)\pi_V$

3 主要内容

3.1 $\rho(G)$ 的范围

定理 1 如果 $G'(V', E') \subseteq G(V, E)$，那么 $\rho G' \leq \rho(G)$

证明 假设 $\rho(G') > \rho(G)$，那么在 G' 上，对于任意一个王子数为 $\rho(G)$ 的策略，公主必定存在一个对策。对于任意一个图 G 上的必赢策略，由于 $G'(V', E') \subseteq G(V, E)$，可将其作用于图 G' 上。那么在公主在 G' 上必定存在一个对策。同样可将这个对策作用于 G 上，可使公主逃避这个必赢策略，矛盾。

因此 $\rho(G') \leq \rho(G)$。

推论 1 $\rho(G) < 3 \Rightarrow G$ 为平面图。

定理 2

$$\delta(G) \leq \rho(G) \leq \left\lfloor \frac{\chi(G) - 1}{\chi(G)} \nu \right\rfloor \tag{10}$$

证明 先证明 $\delta(G) \leq \rho(G)$。对于一个 n 王子的策略 $\{A_n\}$，$n < \delta(G)$，我们尝试构造一个公主的对策。取 $e_1 \in V(G) \backslash A_1$，使 e_1 成为公主第一天所在的房间。接着，对于以后每天，必定会存在 $e_i \notin A_i$ 且 $e_i e_i - 1 \in E(G)$(因为 $n < \delta(G)$，这意味着不可能有一个顶点的所有相邻的顶点在同一天晚上被查看)。于是，序列 $\{e_i\}$ 便为一个公主的对策，即 $\rho(G) > n$，又 $n < \delta(G)$，所以 $\delta(G) \leq \rho(G)$。

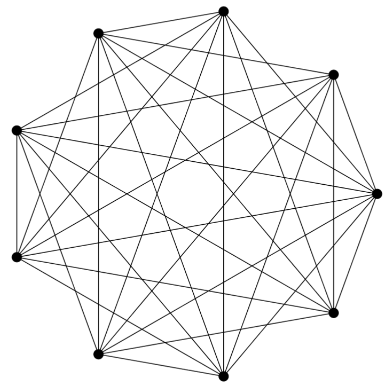
再证明 $\rho(G) \leq \left\lfloor \frac{\chi(G)-1}{\chi(G)} \nu \right\rfloor$。将图 G 的顶点染色使得相邻顶点异色，染色数为最小值 $\chi(G)$。此时取顶点数最小的 $\chi(G) - 1$ 个颜色，使王子每天傍晚查看染上这些颜色的顶点。由于相邻顶点异色，公主必定最终被找到，则此为一个王子的策略。于是有 $\rho(G) \leq \left\lfloor \frac{\chi(G)-1}{\chi(G)} \nu \right\rfloor$

推论 3 $K(G) \leq \lambda(G) \leq \rho(G)$

推论 4 若 G 不是完全图，则

$$\rho(G) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G) - 1}{\Delta(G)} \nu \right\rfloor \tag{11}$$

例 3 判断下图的最小王子数。



由**推论 4** 和**定理 2** 得 $7 \le \rho(G) \le 7$，则 $\rho(G) = 7$

定理 3 若图 G 是哈密顿图，则 $\rho(G) \le min\left\{max\left\{\varepsilon - \nu + 1, 2\right\}, \nu - 1\right\}$

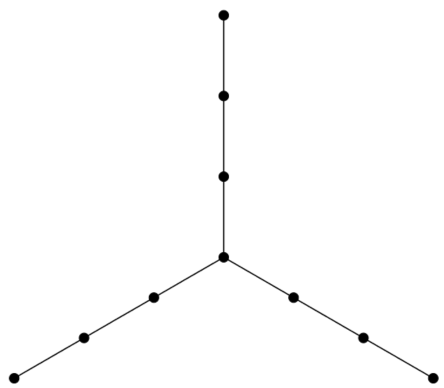
证明 取图 G 的哈密顿回路，则除了回路上还有 $\varepsilon - \nu$ 条边。取这些不在回路上的边的一个顶点，则最多要取 $\varepsilon - \nu$ 个顶点。使一些王子每天查看这些取出来的顶点，这样，公主只能在哈密顿回路上行动。若 $1 \le \varepsilon - \nu$，除去取出的顶点，这张图由一些互不联通的道路构成，易证其最小王子数为 1，因此，图 G 的最小王子数为 1。若 $\varepsilon - \nu = 0$，则图 G 为一个回路，则 $\rho(G) = 2$，因此 $\rho(G) \le min\left\{max\left\{\varepsilon - \nu + 1, 2\right\}, \nu - 1\right\}$

3.2 $\rho(G) = 1$

我们在引子中已经说到，$\rho(C_n) > 1$。由**定理 1** 我们得知一个连通图图若 $\rho(G) = 1$ 则其必为树。那么，自然而然地：

问题 是否所有树的最小王子数都为 1?

答案是否定的，反例如下：



其邻接矩阵为

$$T_G = \begin{bmatrix} & 1 & & & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & & 1 & & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \tag{12}$$

方便起见，直接计算 $\mathbb{S}(G, n)\pi_{V(G)}$。

由**工具 2**, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}(G,n)\pi_{V(G)} = \{&\left(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\right)^T, \left(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1\right)^T,\\
&\left(1,1,1,1,1,1,0,1,1,1\right)^T, \left(1,1,1,1,1,1,1,1,1,0\right)^T,\\
&\left(1,0,1,1,1,1,1,1,1,1\right)^T, \left(1,1,1,1,1,0,1,1,1,1\right)^T,\\
&\left(1,1,1,1,1,1,1,1,0,1\right)^T, \left(0,1,0,1,1,1,1,1,1,1\right)^T,\\
&\left(0,1,1,1,1,1,0,1,1,1\right)^T, \left(0,1,1,1,1,1,1,1,1,0\right)^T,\\
&\left(1,1,1,1,0,1,0,1,1,1\right)^T, \left(1,1,1,1,1,1,0,1,1,0\right)^T,\\
&\left(1,1,1,1,1,1,1,0,1,0\right)^T, \left(0,0,1,1,1,1,1,1,1,1\right)^T,\\
&\left(1,0,1,1,1,1,0,1,1,1\right)^T, \left(1,0,1,1,1,1,1,1,1,0\right)^T,\\
&\left(0,1,1,1,1,0,1,1,1,1\right)^T, \left(1,1,1,1,1,0,0,1,1,1\right)^T,\\
&\left(1,1,1,1,1,0,1,1,1,0\right)^T, \left(0,1,1,1,1,1,1,1,0,1\right)^T,\\
&\left(1,1,1,1,1,1,0,1,0,1\right)^T, \left(1,1,1,1,1,1,1,1,0,0\right)^T\}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

从而不是“一王子可寻的”, 称这个图为 T_1。

定理 4 $\rho(G)=1 \Leftrightarrow C_n \not\subseteq G\ and\ T_1 \not\subseteq G$

证明

"$\Rightarrow$" 因为 $\rho(C_n)>1$ 且 $\rho(T_1)>1$，由**定理 2**，即得。

"$\Leftarrow$" 若 $C_n \not\subseteq G$，则 G 为森林，且森林中每一棵树都不包含 T_1。由于森林中的每颗树不联通，只需证明这样的森林中每一棵树的最小王子数为 1。下证一棵树若不包含 T_1 则其最小王子数为 1。

考虑图 G 中长度最大的道路 $x-y$，称代表这个道路的图为 $P(V,E)$

若 $d(x,y)\le 5$，则显然 $T_1 \not\subseteq G$。值得注意的是，此时对于任何 $v\in V(G)$，都有 $min\, d(v,v_p)\le 2, v_p\in V(P)$。若不然，则 $x-y$ 不是最长道路。

若 $d(x,y)>5$，对于 $v\in V(P)$，若 $d(x,v)\le 2$ 或 $d(y,v)\le 2$，那么对于任何 $v'\in V(G)\backslash V(P)$，必有 $d(v,v')\le 2$，不然，则 $x-y$ 不是最长道路；若 $d(x,v)>2$ 且 $d(y,v)>2$ 那么对于任何 $v'\in V(G)\backslash V(P)$，也必有 $d(v,v')\le 2$，否则 $T_1\in G$。

于是便有任何顶点到最长道路的距离小于 2。

$\forall v\in V(G)\backslash V(P)$，若 $V(P)$ 中到 v 的距离最短的顶点为 v_p，称 v 为 v_p 在道路 $x-y$ 上的“叶子”。

由于树必是二分的，假设 $V(G)$ 划分为 V_1, V_2，每个子集内的顶点互不相邻。假设图的状态为 S_{V_1}。由**性质 6**，只需找到去除 S_{V_1} 中的 P 标签即可找到必赢策略。

接下来阐述如何去除一个道路 $x-y$ 上的顶点 (称其为 v_i) 以及其叶子上的 P 标签。容易知道，奇数天傍晚所有 P 标签在 V_1 中，而偶数天傍晚所有 P 标签在 V_2 中。

1. 若此时为第奇数天以及 $v_i \in V_1$ 或此时为第偶数天以及 $v_i \in V_2$，则查看这个顶点；若不然，则查看这个顶点，后一天再查看一次。

2. 此时，P 标签一定在与 v_i 相邻的顶点中。查看一个有 P 标签且与 v_i 相邻的顶点，后一天再查看 v_i，重复直到 v_i 与 v_i 的"叶子"中都没有 P 标签了。

这样便去除了 v_i 及其"叶子"上的 P 标签。接下来构造能去除 S_{V_1} 中所有 P 标签的策略。不妨设 $x \in V_1$。

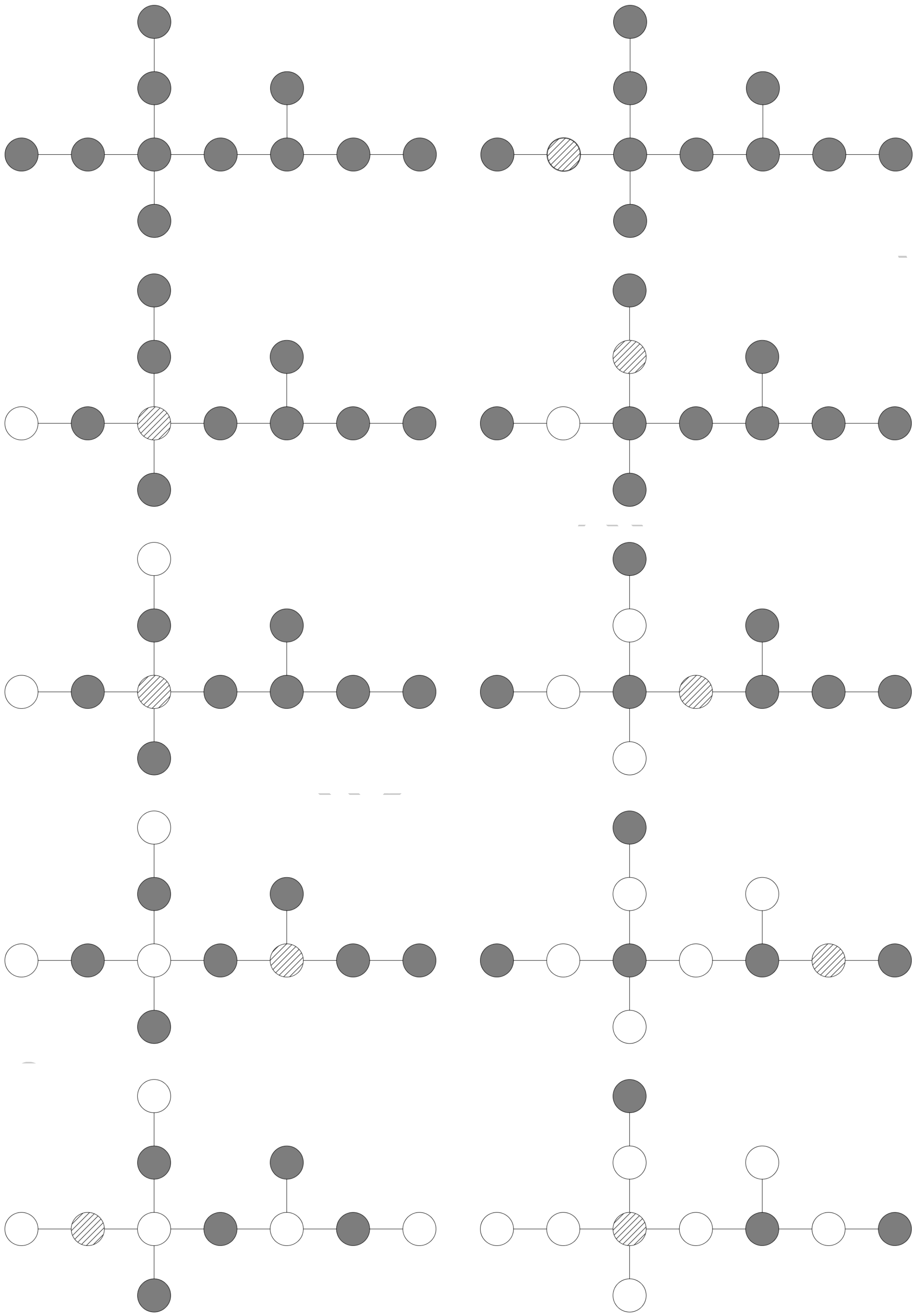
1. 第一天傍晚查看 x，即 $A_0 = x$。

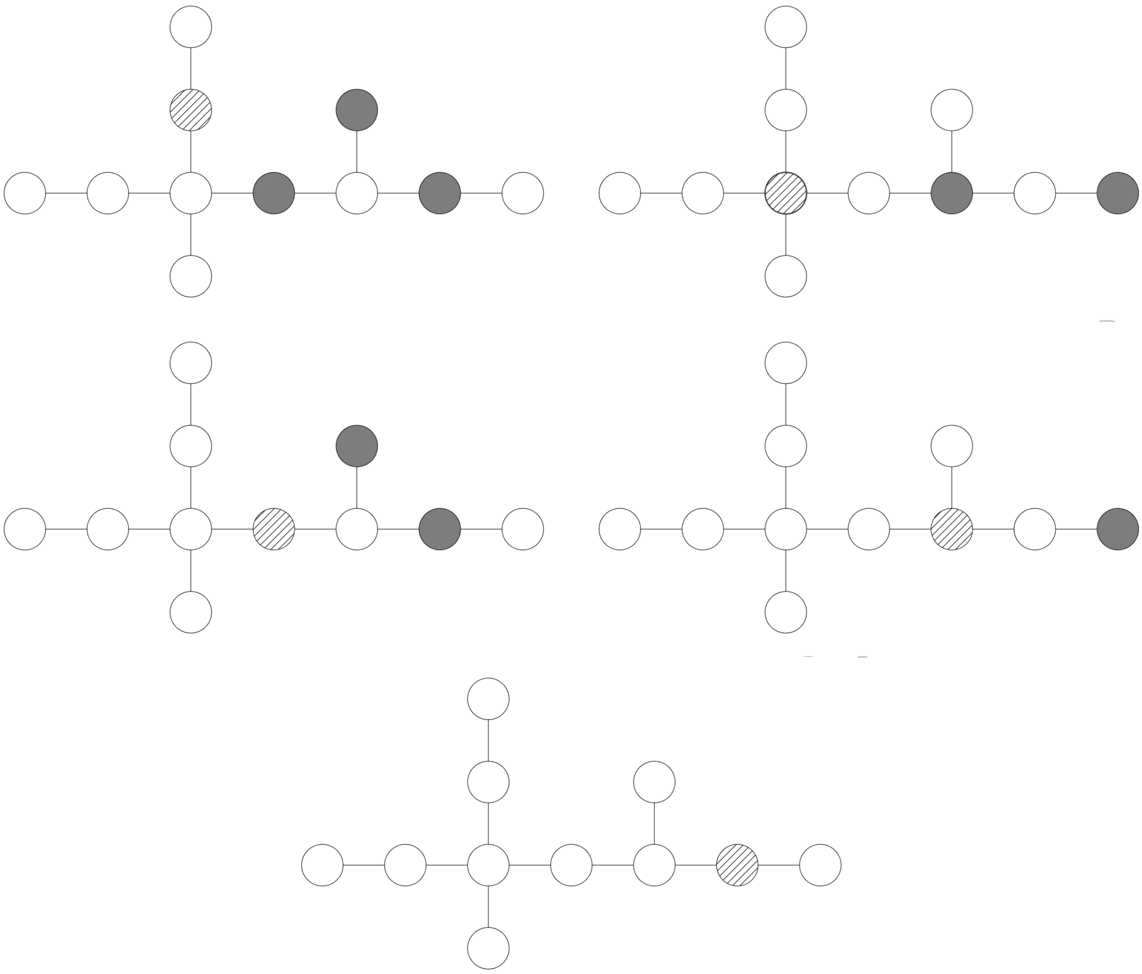
2 去除与 x 相邻顶点及其叶子上的 P 标签。(由于 $x-y$ 是最长道路，x 的度为 1 且只与道路上的点相邻)

3. 每次去除 $v_i(v_i \in V(P))$ 以及其"叶子"上的 P 标签后，接着对与 v_i 相邻且靠近顶点 y 的顶点继续操作，直到道路上所有的点及其叶子的 P 标签都被去除。

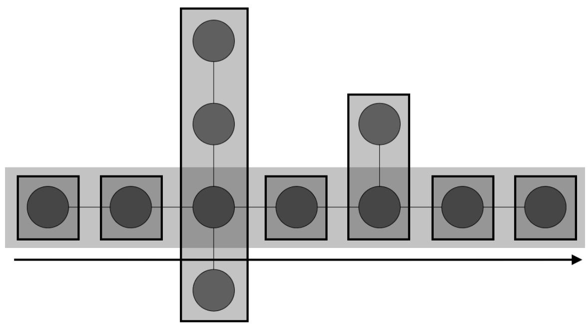
此策略可以去除 S_{V_1} 中所有 P 标签，再由**性质 6**，即得 $\rho(G) = 1$

例 3 找到下图的单王子必赢策略





这个例子阐述了**定理 6** 的证明思路，先通过二分图清除一个部分的公主，再用同样的方式清除另一部分。在清除时，先找到最长的路径，接着从一端依次清除这个顶点及其叶子上的公主。



3.3 计数

问题 给定 $n\in\mathbb{N}^*$，求所有满足 $\nu=n$ 且 $\rho(G)=1$ 的个数。

先计算满足 $\rho(G)=1$ 且 $\nu=n$ 的树的个数。

1° 图的直径大于 4。可将图分为不同的模块，由两个尾端模块和一些中间模块组成。先考虑中间模块，由于 $\rho(G)=1$，一个中间模块必定是一个深度不大于 2 的、顶点个数为 k 的树，则其个数显然为整数 $k-1$ 的分拆数。于是其母函数便为

$$x\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1} \tag{14}$$

相似地，一个尾端模块必须是一个中间模块必定是一个深度为 2 的、顶点个数为 k 的树 (若深度为 1，则与其他情况混淆)，则其生成函数便为

$$A(x)=x\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{1-x}(\prod_{i=2}^{\infty}(1-x^i)^{-1}-1) \tag{15}$$

更多的，一串中间模块的生成函数便为

$$B(x)=\frac{1}{1-x\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}} \tag{16}$$

于是，总情况数的生成函数便为 (排除了对称的情况)

$$\frac{A(x^2)B(x^2)(1+B(x))+A(x)^2B(x)}{2} \tag{17}$$

2° 图的直径 ≤ 4。等价于一个包含最多一个度大于 2 的树，便为 $n-1$ 的分拆数去除分拆时拆为两个数的情况，即

$$C(x)=x\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}-\frac{x^3}{(1-x)^2*(1+x)} \tag{18}$$

综上，满足 $\rho(G)=1$ 且 $\nu=n$ 的树的个数的母函数

$$\begin{aligned}G(a_n;x)&=\frac{A(x^2)B(x^2)(1+B(x))+A(x)^2B(x)}{2}+C(x)\\&=(\frac{x^2}{1-x^2}(\prod_{i=2}^{\infty}(1-x^{2i})^{-1}-1)\frac{1}{1-x^2\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i})^{-1}}\\&\quad(1+\frac{1}{1-x\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}})+(\frac{x}{1-x}(\prod_{i=2}^{\infty}(1-x^i)^{-1}-1))^2\\&\quad+\frac{1}{1-x\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}})\div 2+x\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}-\frac{x^3}{(1-x)^2(1+x)}\end{aligned} \tag{19}$$

接下来计算问题所求，即森林个数，记其为 s_n^1。类似于计算 n 阶森林个数的方法，我们也可以使用欧拉变化来计算最小王子数为 1 的森林个数，即

$$G(s_n^1,x)=exp(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{G(a_n;x^k)}{k}) \tag{20}$$

4 展望

在本文中，仅完全解决了 $\rho(G)=1$ 的情况。接下来的研究工作聚焦 $\rho(G)>1$ 的情况，并对树的最小王子数展开更充分的讨论，并且在计数问题中找到 $\rho(G)>1$ 的较好的上下界。同时，在研究过程中，作者注意到类似问题 (例如 cop-robber 问题) 中所定义的 $c(G)$ 等数可能与 $\rho(G)$ 有内在的关系，可以展开进一步研究。此外，本文仅对无向图展开了讨论，实际上本问题的背景在无向图中也是适用的，即公主只能够沿着边的方向走。

5 附录

5.1 符号

$V(G)$	图 G 的顶点集	$C_n, n\in\mathbb{N}^*$	n 阶圈
$E(G)$	图 G 的边集	$O_{n\times n}$	n 阶零矩阵
$\|S\|$，S 为集合	集合 S 的元素个数	I_n	n 阶单位矩阵
ν	$\|V(G)\|$	$C_n, n\in\mathbb{N}^*$	n 阶完全图
ε	$\|E(G)\|$	K_n	
$\delta(G)$	G 中顶点的最小度		
$\Delta(G)$	G 中顶点的最大度		
$\chi(G)$	使得 G 可 $k-$ 染色的最小整数 k		
$L_n, n\in\mathbb{N}^*$	n 阶线性图		

5.2 一些特殊图的 $\rho(G)$

G	$\rho(G)$
L_n	1
C_n	2
K_n	$n-1$
$K_{n,n}$	n
$K_{n,m}$	$min\{m,n\}$
$Peterson$ 图	4

5.3 计数问题中一些数据的表格

n	a_n	s_n^1
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	6
5	3	10
6	6	20
7	11	37
8	23	76
9	47	153
10	105	328
11	231	705
12	532	1576
13	1224	3551
14	2872	8179
15	6739	18980
16	15955	44559
17	37776	105111
18	89779	249426
19	213381	593484
20	507949	1416269
21	1209184	3384581
22	2880382	8099819
23	6861351	19398194
24	16348887	46487665
25	38955354	111447044
26	92831577	267260387
27	221219963	641022947
28	527197861	1537706522
29	1256385522	3688974818
30	2994200524	8850411933

6 参考文献

[1] 王树禾, 图论 [M]. 北京：科学出版社,2009:91-95
[2] 徐俊明, 图论及其应用 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社,2004:43-48,213-220