

参赛队员姓名: 苏子原 侯懿羚 华炯杰

中学: 南京外国语学校

省份: 江苏

国家/地区: 中国

指导教师姓名: 刘继军 王丽艳

指导教师单位: 东南大学数学学院

论文题目: 新冠肺炎传播模型和预测:

以扬州疫情的发展为例

新冠肺炎传播模型和预测：以扬州疫情的发展为例

苏子原[†] 侯懿羚[†] 华炯杰[†]

[†] 南京外国语学校, 南京, 210008

指导教师: 刘继军[‡] 王丽艳[‡]

[‡] 东南大学数学学院, 南京, 210008

2021 年 9 月 14 日

摘要

2019 年底, 新冠疫情开始在全世界蔓延, 对全人类的健康和生活都带来了巨大的影响。2021 年 7 月, 国内由德尔塔变异毒株带来的新一轮疫情再一次在南京禄口机场爆发, 逐渐发散到多个省市, 其中扬州、张家界情况最为严重, 引起多方关注。由于新冠肺炎的传播机理复杂, 病毒的初始起源、外来感染源的输入都对病毒的传播和扩散具有复杂的影响, 同时病人的收治过程和标准也受到各种客观因素的制约。对这种诸多复杂因素共同作用下的疫情的传播规律的数学建模和分析具有重要的意义。综合考虑病人的隔离效应和外界输入, 病人的确诊、痊愈、死亡等多因素对疫情传播的交互作用。本文在病毒的潜伏期、治愈期、死亡率等服从伽马分布的假定下, 对已有的带有延迟效应的新冠肺炎的动力学传播模型进行了渐近行为分析, 理论上证明了在此分布下疫情的可控性, 即对感染病人充分隔离或者保持感染病人的低传染率, 感染人数最终会消失。此结论表明有效隔离措施对阻断疫情传播具有决定性作用, 支持了政府采取的对人员流通和聚集严格管控措施的必要性和有效性。本文还对模型进行了数值模拟, 并把模拟结果与扬州疫情的实际发展数据做了比较, 验证了模型在适当选择参数后的有效性, 同时也把这个新的分布的预测结果和 2020 年武汉疫情做了对比。由于该模型中的参数选取具有一定的不确定性, 本文还从数值验证的角度对参数作了敏感性分析。我们的工作表明, 带有伽马分布的流型模型能有效刻画具有长潜伏期的传染病的传播机理, 在不同时期多地疫情数据模拟分析中, 算法的数值结果反应了模型能够有效反应变异病毒株的特性。

关键词: 新冠肺炎, 扬州疫情, 传播模型, 伽马分布, 渐近性, 数值预报

1 引言

自 2019 年底首例新型冠状病毒肺炎 (COVID-19, 简称新冠肺炎) 发现以来, 在全球的发展趋势日益迅猛。2020 年 3 月, 世界卫生组织宣布新冠肺炎疫情已经构成全球性大流行。经过中国政府的有效防治和全社会的积极配合, 新冠肺炎在中国的传播已得到有效的控制。但在 2021 年 7 月 20 日, 由俄罗斯入境航班带来的德尔塔变异毒株产生的新一轮疫情又一次在南京爆发, 并延伸出国内多地散发病例, 形成了南京禄口机场、张家界旅游景区和扬州三个疫情严重的地区。截止至 2021 年 9 月 8 日, 南京市累计报告本土确诊病例 235 例, 扬州市 570 例。德尔塔变异毒株具有传播速度快、体内复制快、转阴时间长等特点, 对疫

情防控提出更大挑战,引起全社会的高度关注。地方政府及时展开了多轮全民核酸检测,并且加强对进出城市通道的管控(图1),疫情已得到明显的控制。

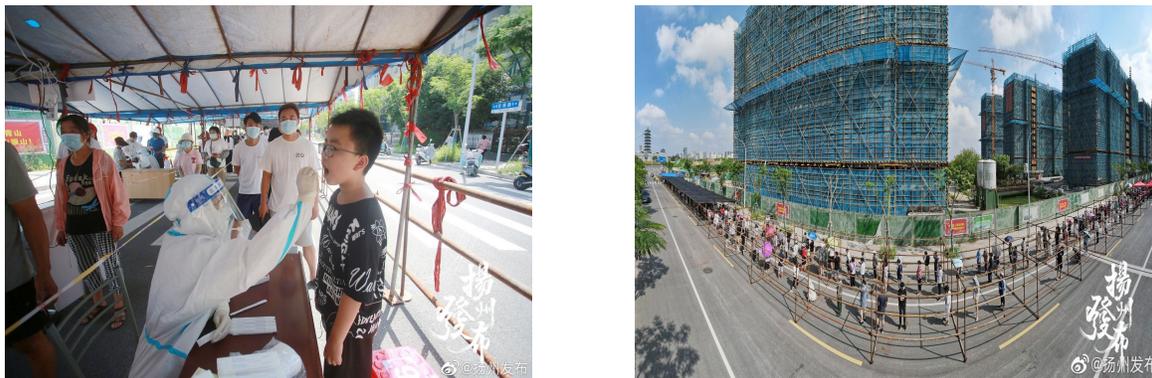


图 1: 扬州市展开全员核酸检测。

新冠肺炎作为一种全新的流行性疾病,又具有多种变异毒株,其传播机理和扩散规律十分复杂。探究新冠肺炎的传播和演化规律,分析疾病的发展过程,预测其变化趋势,是人类社会有效阻断疫情传播、降低疾病对人类危害的一个重要研究内容。国内外学术界从传播模型和数据挖掘两个方向已经有了大量的研究。新冠肺炎虽然是一种全新的传播疾病,但又具有典型的流行病传播特征,目前学术界已基本取得一致的共识,新冠肺炎的发展与传播依赖于如下因素:

- 病毒本身的性质,例如潜伏期的长度、传染率、死亡率;
- 医学对病毒的治疗效果,例如病人的确诊率、治愈率、治愈时间;
- 社会对病毒的防控措施,例如隔离感染者、控制人员流通、控制外界输入病例。

关于一般传染病,已有多种经典的研究模型,如 Legistics 模型, SIS 模型, SIR 模型, SEIR 模型等 [7-9]。但是这些模型都没有考虑人员流通的影响,也没有考虑病毒的潜伏期对感染人群的滞后影响。此次扬州疫情爆发的关键因素之一就是有一个“南京老太”向扬州的输入并在市内移动。2020 年,也有部分研究工作综合考虑了外界输入病人、感染病人的隔离、疾病的潜伏期、病人的治愈率和治愈时间,以及病人的死亡率等因素的影响,建立了一类全新的带有时滞效应的新冠肺炎的动力学传播模型 [1-3, 6]。在假定病人的感染潜伏期、治愈时间、死亡时间等服从 Weibull 分布的统计学意义下, [1] 研究了每日现存感染病人、每日新增感染病人、每日治愈病人之间的约束关系,建立了每日感染人数总量满足的带有延迟效应的积分微分方程模型。并且对模型的渐近行为进行分析。

本文针对此次扬州疫情的发展,对已有的考虑了延迟效应的新型冠状病毒的扩散模型进行了进一步的分析,通过对模型动力学性态的定性、定量分析和数值模拟来揭示扬州疫情的流行规律和发展趋势。由于该模型中的表征潜伏期效应的密度函数和一些参数是人为选取的,还没有明确的标准,本文主要工作是对已有的带有延迟效应的新冠肺炎的动力学传播模型 [1],考虑病人的感染潜伏期、治愈时间、死亡时间等服从一类全新的分布—伽马分布的情况下,研究相应的渐近行为和数值表现。我们的工作证明,对感染病人充分隔离或者保持感染病人的低传染率,感染人数最终会消失,即有效隔离措施对阻断疫情传播具有决定性作用。最后,我们对模型进行了数值模拟和稳定性分析,并把模拟结果与扬州疫情的实际情况做比较,验证了模型在适当选择参数后的有效性。在不同时期多地疫情数据模拟分析中,模型能够有效刻画具有长潜伏期的传染病的传播机理,算法的数值结果反应了模型能够有效表征新型变异病毒株的特性。

2 疫情的基本指标和传播模型

参考已有的带有延迟效应的新冠肺炎的动力学传播模型 [1], 我们假定某地的 COVID-19 是由初始时刻 $t = 0$ 的若干病例引发, 其后的所有病人都是由当地病人的传染扩散和外地病人的输入引起的。分别记

- $I_s(t)$: t 时刻还在感染中的人数;
- $i(t)$: t 时刻由于系统内部传染导致的新增感染人数;
- $j(t)$: t 时刻医院新增确诊人数;
- $c(t)$: t 时刻疾病痊愈的人数;
- $d(t)$: t 时刻因疾病死亡的人数。

基于一般的疫情传播模型, 需要给出 $(I_s(t), i(t), j(t), c(t), d(t))$ 的演化规律, 它们是彼此约束的。由于该疾病传播过程的复杂性, 我们提出一些具体的假定, 基本思想是利用平均化消除不同病人潜伏期、治愈时间等指标的个体差异。假定

- 病人感染 COVID-19 后, 平均潜伏期为 τ_1 , 感染病人处于潜伏期 τ 的概率密度函数为 $h_s(\tau; \tau_1)$ 。并且假定新增感染人群中所有个体的潜伏期是独立同分布的, 则 $h_s(\tau; \tau_1)d\tau$ 就是新增感染人数中潜伏期为 τ 的病人的比例。满足下面关系:

$$h_s(\tau; \tau_1)|_{\tau < 0} = 0, \quad \int_0^{\infty} h_s(\tau; \tau_1)d\tau = 1, \quad \int_0^{\infty} \tau h_s(\tau; \tau_1)d\tau = \tau_1.$$

- 在潜伏期的无症状感染者与有症状的感染者具有相同的传染能力, 记 $\beta > 0$ 为病人的传染率;
- 病人以 $\kappa(t) \in (0, 1)$ 的比例被隔离, 且病人在隔离或者医院治疗期间不具有传染性。

基于上述假定, t 时刻由于系统内部传染导致的新增感染人数

$$i(t) = \beta(1 - \kappa(t))I_s(t), \quad (2.1)$$

为了考虑初始时刻 $t = 0$ 的感染人数 $I_s(0) = I_s^0$ 对疫情传播过程的影响, 我们把它看成是在 $t = 0$ 附近时间区间 $[0, \epsilon_0]$ 上均匀输入的感染源 $s_0(t)$ 。则参与疫情传播的感染源 (由外界输入病例 $s(t)$ 和初始时刻感染人员 I_s^0) 可以描述为

$$S(t) = s(t) + s_0(t), \quad (2.2)$$

其中

$$s_0(t) = \begin{cases} \frac{2}{\epsilon_0} I_s^0(\epsilon_0 - t), & t \in (0, \epsilon_0], \\ 0, & t > \epsilon_0 \end{cases}$$

由于已假定社会对感染病人的隔离比率为 $\kappa(t)$, 从而 t 时刻的实际新增感染病人 $i(t) + S(t)$ 中, $\kappa(t)(i(t) + S(t))$ 的感染病人被隔离, 并开始接受医学诊断, 一旦过了潜伏期这部分病人就马上转为确诊病人, 对任意的潜伏期 $\tau \in [0, t]$, $t - \tau$ 时刻的新增加感染病人 $i(t - \tau) + S(t - \tau)$ 中被隔离的那部分病人 $\kappa(t - \tau)(i(t - \tau) + S(t - \tau))$ 由于在 $t - \tau$ 时刻处于潜伏期 0 (刚感染), 在 t 时刻就变为确诊病人。于是在 t 时刻的新增确诊病人数为

$$\begin{aligned} j(t) &= \int_0^t h_s(\tau; \tau_1) \kappa(t - \tau)(i(t - \tau) + S(t - \tau))d\tau \\ &= \int_0^t h_s(t - \tau; \tau_1) \kappa(\tau)(i(\tau) + S(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

t 时刻的新增痊愈病人包含两部分: 隔离病人中的治愈病人 $c_1(t)$ 和未进入隔离中但自愈的病人 $c_2(t)$ 。对前者, 描述治疗水平的两个指标是对确诊病人的平均治愈时间 τ_2 和病人的平均治愈率 κ_2 , 且记一个病人治愈时间为 τ 的密度函数为 $h_c^{iso}(\tau; \tau_2)$ 。类似于对 $j(t)$ 的分析, t 时刻在隔离部分被治愈的病人数是

$$c_1(t) = \kappa_2 \int_0^t h_c^{iso}(\tau; \tau_2) j(t - \tau)d\tau = \kappa_2 \int_0^t h_c^{iso}(t - \tau; \tau_2) j(\tau)d\tau. \quad (2.4)$$

对后者, 假定新增感染病人中暴露在外的病人的痊愈时间是以 τ_4 为均值, 密度函数为 $h_c^{exp}(\tau; \tau_4)$ 的随机变量, 其痊愈比率为 κ_4 , 则有

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \kappa_4 \int_0^t h_c^{exp}(\tau; \tau_4)(1 - \kappa(t - \tau))(i(t - \tau) + S(t - \tau))d\tau \\ &= \kappa_4 \int_0^t h_c^{exp}(t - \tau; \tau_4)(1 - \kappa(\tau))(i(\tau) + S(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

最后 t 时刻新增的痊愈人数为

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t). \quad (2.6)$$

和 t 时刻的新增痊愈人数一样, t 时刻的新增死亡人数也包含两部分: 一部分是已隔离病人中的死亡人数 $d_1(t)$, 另一部分是未进入隔离但由于自身免疫功能消失或自救失败的死亡人数 $d_2(t)$. 记隔离病人中确诊后到最终死亡的平均死亡时间 τ_3 , 其密度函数为 $h_d^{iso}(\tau; \tau_3)$; 暴露在外的新增病人平均死亡时间为 τ_5 , 其密度函数为 $h_d^{exp}(\tau; \tau_5)$. 从而

$$d_1(t) = (1 - \kappa_2) \int_0^t h_d^{iso}(\tau; \tau_3)j(t - \tau)d\tau, \quad (2.7)$$

$$d_2(t) = (1 - \kappa_4) \int_0^t h_d^{exp}(\tau; \tau_5)(1 - \kappa(t - \tau))(i(t - \tau) + S(t - \tau))d\tau. \quad (2.8)$$

于是 t 时刻新增的死亡人数为

$$d(t) = d_1(t) + d_2(t). \quad (2.9)$$

显然有 $\kappa_2 > \kappa_4$, $\tau_2 < \tau_4$, $\tau_3 > \tau_5$, 表示由于治疗, 死亡率下降了, 平均存活时间延长了。

基于上述分析, [1] 建立了如下疫情扩散模型的耦合系统:

$$\begin{cases} \frac{dI_s(t)}{dt} = s(t) + i(t) - c(t) - d(t), & t > 0 \\ i(t) = \beta(1 - \kappa(t))I_s(t) & t > 0 \\ S(t) = s(t) + s_0(t), & t > 0 \\ s_0(t) = \begin{cases} \frac{2}{\epsilon_0^2} I_s^0(\epsilon_0 - t), & t \in (0, \epsilon_0], \\ 0, & t > \epsilon_0 \end{cases} \\ j(t) = \int_0^t h_s(t - \tau; \tau_1)\kappa(\tau)(i(\tau) + S(\tau))d\tau, & t > 0 \\ c(t) = \kappa_2 \int_0^t h_c^{iso}(t - \tau; \tau_2)j(\tau)d\tau + \kappa_4 \int_0^t h_c^{exp}(t - \tau; \tau_4)(1 - \kappa(\tau))(i(\tau) + S(\tau))d\tau, & t > 0 \\ d(t) = (1 - \kappa_2) \int_0^t h_d^{iso}(t - \tau; \tau_3)j(\tau)d\tau + \\ \quad (1 - \kappa_4) \int_0^t h_d^{exp}(t - \tau; \tau_5)(1 - \kappa(\tau))(i(\tau) + S(\tau))d\tau, & t > 0 \\ I_s(0) = I_s^0. \end{cases} \quad (2.10)$$

该模型本质上是一个关于 $I_s(t)$ 的带有延迟效应的积分微分方程。

对我们考虑的扬州疫情发展的模型, 由于政府对外界人员输入的严格管控措施, 我们后面总是假定外界输入病例 $s(t) = 0$. 对于随机变量 τ 的概率密度函数 $h_s(\tau; \tau_1)$, $h_c^{iso}(\tau; \tau_2)$, $h_c^{exp}(\tau; \tau_4)$, $h_d^{iso}(\tau; \tau_3)$, $h_d^{exp}(\tau; \tau_5)$ 的形式, 它们的选取具有一定的人为性. 除了 [1] 中研究的 Gauss 分布和 Weibull 分布外, 还可以有其它分布, 并没有一个对所有地区疫情发展都适用的统一的形式. 本文考虑密度函数为伽马分布

$$f(t; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, t > 0,$$

其中 $\alpha, \lambda > 0$ 是常数. 直接计算知道,

$$\int_0^\infty f(t; \alpha, \lambda)dt = 1, \quad \int_0^\infty t f(t; \alpha, \lambda)dt = \frac{\alpha}{\lambda},$$

即 $f(t; \alpha, \lambda)$ 是以 $\frac{\alpha}{\lambda}$ 为均值的随机变量 t 的密度函数. 记 $\tau = \frac{\alpha}{\lambda}$, 则 $\alpha = \tau\lambda$. 在我们的模型中, 取上述密度函数为

$$h(t; \tau, \lambda) = \frac{\lambda^{\tau\lambda}}{\Gamma(\tau\lambda)} t^{\tau\lambda-1} e^{-\lambda t} = f(t; \alpha, \lambda).$$

对给定的传染病的扩散,在疫情发展到充分长时间后,新增病人、新增治愈病人、新增死亡病人都应该趋于常数或者消除。这个特征是描述疫情传播的模型适定性一个基本要求。为了证明我们对 Gamma 分布的模型满足此要求,需要已知的 Gronwall 不等式。

定理 2.1 (Gronwall 不等式) 设非负函数 $E(t)$ 在 $[0, T]$ 连续可微, $E(0) = 0$, 且对 $t \in [0, T]$, 有

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq CE(t) + F(t),$$

其中 C 为常数, $F(t)$ 为 $[0, T]$ 上单调增加的非负可积函数, 则有

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq e^{Ct} F(t),$$

和

$$E(t) \leq C^{-1}(e^{Ct} - 1)F(t).$$

下面是我们工作的理论结果。先对一般的外界输入源 $s(t)$ 的情形加以研究。对扬州疫情的发展, 我们假定 $s(t) = 0$, 自然满足下面的结果中的条件。

定理 2.2 对任意给定的 $T > 0$, 微分积分方程系统 (2.10) 存在唯一解 $I_s(t) \in C[0, T]$ 。假定疫情 (潜伏期、治愈期等) 满足的给定的伽马分布 $h(t; \tau, \lambda)$, 并且定输入病人人数满足有限增长性条件

$$\int_0^\infty s(t)e^{\frac{\lambda}{2}t} dt \leq s^* < \infty,$$

其中 λ 是依赖于分布函数的常数。则当传染率 $\beta > 0$ 充分小或者隔离率 $\kappa(t) \in (0, 1)$ 充分接近 1 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_s(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0. \quad (2.11)$$

即对一个具有有限外界输入的封闭系统而言, 整个发展系统趋于稳态, 所有的感染病人最终会消失。

该定理中的两个条件的生物学意义是明确的: $s(t)$ 在整个疫情传播过程 $(0, \infty)$ 中的有限增长条件要求从外界输入的病人总数有限并且增长速度不能超过指数增长 (对实际问题这个条件显然是合理的); $\beta(1 - \kappa(t))$ 充分小的条件表明了有效控制传播的两个途径为保持感染病人的低传播率 $\beta > 0$ 充分小或者隔离率 $\kappa(t) \in (0, 1)$ 充分接近 1。

证明 定义

$$M_1(t) := [\kappa_2 h_c^{iso}(t; \tau_2) + (1 - \kappa_2) h_d^{iso}(t; \tau_3)] * h_s(t; \tau_1),$$

$$M_2(t) := \kappa_4 h_c^{exp}(t; \tau_4) + (1 - \kappa_4) h_d^{exp}(t; \tau_5).$$

由于随机变量的分布是独立的, 可以将卷积去掉, 引入新的随机变量及其对应的概率密度函数 $h_8^{iso}(t; \tau_8)$ 和 $h_{10}^{iso}(t; \tau_{10})$, 则可以得到

$$M_1(t) = \kappa_8 h_8^{iso}(t; \tau_8) + (1 - \kappa_8) h_{10}^{iso}(t; \tau_{10}), \quad (2.12)$$

其中 $\kappa_8 = \kappa_2$ 。为了记号简便, 引进

$$h_8^{iso}(t; \tau_8) = h_8(t), \quad h_{10}^{iso}(t; \tau_{10}) = h_{10}(t), \quad h_c^{exp}(t; \tau_4) = h_4(t), \quad h_d^{exp}(t; \tau_5) = h_5(t).$$

耦合系统 (2.10) 是一个积分微分方程系统, 由于 $(I_s(t), i(t), j(t), c(t), d(t))$ 的各分量耦合关系复杂, 我们消去后面四个分量, 直接验算并利用交换积分次序得到关于仅含 $I_s(t)$ 的微分积分方程

$$\begin{aligned} \frac{dI_s(t)}{dt} &= S(t) - s_0(t) + \beta(1 - \kappa(t))I_s(t) - \\ &\int_0^t \kappa(z)\beta(1 - \kappa(z))I_s(z) \int_z^t [\kappa_2 h_c^{iso}(t - \tau; \tau_2) + (1 - \kappa_2) h_d^{iso}(t - \tau; \tau_3)] h_s(\tau - z; \tau_1) d\tau dz - \\ &\int_0^t (1 - \kappa(z))\beta(1 - \kappa(z))I_s(z) [\kappa_4 h_c^{exp}(t - z; \tau_4) + (1 - \kappa_4) h_d^{exp}(t - z; \tau_5)] dz - \\ &\int_0^t \kappa(z)S(z) \int_z^t [\kappa_2 h_c^{iso}(t - \tau; \tau_2) + (1 - \kappa_2) h_d^{iso}(t - \tau; \tau_3)] h_s(\tau - z; \tau_1) d\tau dz - \\ &\int_0^t (1 - \kappa(z))S(z) [\kappa_4 h_c^{exp}(t - z; \tau_4) + (1 - \kappa_4) h_d^{exp}(t - z; \tau_5)] dz \end{aligned} \quad (2.13)$$

再对上式 (2.13) 两边积分, 并交换积分次序得到

$$I_s(t) = I_s^0 + \int_0^t S(z)M(t-z, z)dz + \beta \int_0^t (1 - \kappa(z))I_s(z)M(t-z, z)dz - \int_0^t s_0(z)dz, \quad (2.14)$$

其中

$$M(t-z, z) := 1 - \kappa(z) \int_z^t M_1(\tau-z)d\tau - (1 - \kappa(z)) \int_z^t M_2(\tau-z)d\tau.$$

利用 $h_j(t)(j = 4, 5, 8, 10)$ 的形式, 直接计算可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^{t-z} M_1(\tau)d\tau &= \int_0^{t-z} [\kappa_8 h_8(\tau) + (1 - \kappa_8)h_{10}(\tau)]d\tau \\ &= 1 - \kappa_8 \int_{t-z}^{+\infty} \lambda_8 \tau^{\lambda_8-1} e^{-\lambda_8 \tau} d\tau - (1 - \kappa_8) \int_{t-z}^{+\infty} \lambda_{10} \tau^{\lambda_{10}-1} e^{-\lambda_{10} \tau} d\tau, \\ \int_0^{t-z} M_2(\tau)d\tau &= \int_0^{t-z} [\kappa_4 h_4(\tau) + (1 - \kappa_4)h_5(\tau)]d\tau \\ &= 1 - \kappa_4 \int_{t-z}^{+\infty} \lambda_4 \tau^{\lambda_4-1} e^{-\lambda_4 \tau} d\tau - (1 - \kappa_4) \int_{t-z}^{+\infty} \lambda_5 \tau^{\lambda_5-1} e^{-\lambda_5 \tau} d\tau, \end{aligned}$$

其中记 $\gamma_j = \frac{\lambda^{\lambda_j}}{\Gamma(\lambda_j)}$, $j = 4, 5, 8, 10$, 是常数. 利用这两个表达式可得

$$\begin{aligned} M(t-z, z) &= \kappa(z) \left[\kappa_8 \int_{t-z}^{+\infty} \gamma_8 \tau^{\lambda_8-1} e^{-\lambda_8 \tau} d\tau + (1 - \kappa_8) \int_{t-z}^{+\infty} \gamma_{10} \tau^{\lambda_{10}-1} e^{-\lambda_{10} \tau} d\tau \right] + \\ &\quad (1 - \kappa(z)) \left[\kappa_4 \int_{t-z}^{+\infty} \gamma_4 \tau^{\lambda_4-1} e^{-\lambda_4 \tau} d\tau + (1 - \kappa_4) \int_{t-z}^{+\infty} \gamma_5 \tau^{\lambda_5-1} e^{-\lambda_5 \tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

对于变量 $\tau > 0$, 由于幂函数在 $[0, +\infty)$ 可以被带有正指数的指数函数界住, 即对 $\lambda \tau_i > 1$, 存在依赖于 τ_i, λ 的常数 $c(\tau_i, \lambda)$ 使得

$$\gamma_j \tau^{\lambda_j-1} \leq c(\tau_i, \lambda) e^{-\frac{\lambda}{2} \tau}.$$

则我们可以得到

$$\int_{t-z}^{+\infty} \gamma_j \tau^{\lambda_j-1} e^{-\lambda \tau} d\tau \leq \int_{t-z}^{+\infty} c(\tau_j, \lambda) e^{-\frac{\lambda}{2} \tau} d\tau = \frac{2c(\tau_j, \lambda)}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)}.$$

引入 $c_0 := \max\{c(\tau_j, \lambda), j = 4, 5, 8, 10\}$, 显然我们有

$$\int_{t-z}^{+\infty} \gamma_j \tau^{\lambda_j-1} e^{-\lambda \tau} d\tau \leq \frac{2c_0}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}(t-\tau)}$$

对 $j = 4, 5, 8, 10$ 成立, 由此导出

$$M(t-z, z) \leq \frac{2c_0}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)}. \quad (2.15)$$

把 (2.15) 代入 (2.14) 中, 得到

$$\int_0^t S(z)M(t-z, z)dz \leq \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^t S(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz, \quad (2.16)$$

$$\int_0^t (1 - \kappa(z))I_s(z)M(t-z, z)dz \leq \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^t (1 - \kappa(z))I_s(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz. \quad (2.17)$$

同时引入 $\kappa_0 := \max_{[0, \infty)}(1 - \kappa(t)) \in (0, 1)$, 则对 $t > \epsilon_0$, (2.14), (2.16) 和 (2.17) 导出

$$\begin{aligned} I_s(t) &\leq I_s^0 + \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^t S(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz + \frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda} \int_0^t I_s(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz - \int_0^{\epsilon_0} s_0(z)dz \\ &= \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^t S(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz + \frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda} \int_0^t (1 - \kappa(z))I_s(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz \\ &= \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^{\epsilon_0} s_0(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz + \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^t s(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz + \frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda} \int_0^t I_s(z)e^{-\frac{\lambda}{2}(t-z)} dz \end{aligned} \quad (2.18)$$

下面据此来估计 $I_s(t)$ 。利用 $s(t)$ 的优先增长性条件很容易证明

$$\begin{aligned} I_s(t)e^{\frac{\lambda t}{2}} &\leq \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^{\epsilon_0} s_0(z)e^{\frac{\lambda z}{2}} dz + \frac{2c_0}{\lambda} \int_0^t s(z)e^{\frac{\lambda z}{2}} dz + \frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda} \int_0^t I_s(z)e^{\frac{\lambda z}{2}} dz \\ &\leq C^*(I_s^0, s(\cdot), \lambda, c_0) + \frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda} \int_0^t I_s(z)e^{\frac{\lambda z}{2}} dz, \quad t > \epsilon_0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

在定理 2.1 中取

$$E(t) = \int_0^t I_s(z)e^{\frac{\lambda z}{2}} dz,$$

则由 Gronwall 不等式, 上述估计推出

$$\int_0^t I_s(z)e^{\frac{\lambda z}{2}} dz \leq \frac{\lambda C^*}{2\beta\kappa_0 c_0} \left(e^{\frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda} t} - 1 \right),$$

及

$$0 \leq I_s(t) \leq C^* e^{-\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{2\beta\kappa_0 c_0}{\lambda}\right)t}, \quad t > \epsilon_0.$$

因此对满足 $0 < \beta\kappa_0 < \frac{\lambda^2}{4c_0}$ 的 $(\beta, \kappa(t))$, 我们有 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_s(t) = 0$ 。有了 $I_s(t)$ 的渐近行为后, 就有了 $i(t)$ 的渐近行为, 从而 $c(t), d(t)$ 的渐近行为可以得到。定理证毕。

对扬州疫情的发展和预报, 由于我们假定 $s(t) = 0$, 上述结果显然是成立的。在下一节的数值实现中, 伽马分布中包含的两个参数我们是固定一个调节另一个, 相当于通过调控分布的均值实现。数学上的这种处理相当于要求有效控制的上限依赖于疾病的平均潜伏期时间平均治愈时间等, 这显然是合理的。

3 数值模拟：模型预测和实际数据

根据前一节的分析, 我们已经建立了一个关于 $(I_s(t), i(t), j(t), c(t), d(t))$ 的耦合系统, 由 (2.14) 可知, 消去后面四个分量可以得到关于 $I_s(t)$ 的第二类积分方程, 因此当其中的所有参数和输入已知时, 由该系统可以完全确定 $I_s(t)$ 。上述模型 (2.10) 中的输入参数可以分为五类:

- 导致疾病蔓延的本质因素: 初始病人数 I_s^0 和动态输入病人数 $s(t)$;
- 疫情传播规律的定量参数: 各类均值 $\tau_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$;
- 疾病本身的定量参数: $\beta, \kappa_2, \kappa_4$;
- 社会对疫情传播控制行为: 对感染病人的隔离率 $\kappa(t)$ 。

由于病毒传播和发展的规律是十分复杂的, 因此上述的参数从理论上来说是未知的。实际中, 我们可以获得的数据是官方公布的每日新增确诊人数 $j(t)$ (或者累计确诊人数, 记为 $J(t)$), 医院公布的每日新增治愈人数 $c_1(t)$ 和每日新增死亡人数 $d_1(t)$ 。根据这类已知数据确定模型参数的问题是一类十分困难的反问题。本节的数值实验主要分为以下两个部分, 一是考虑不同的参数扰动, 对模型做敏感性分析, 验证模型的可适用性; 二是选取合适的模型参数, 针对近期江苏扬州的疫情数据, 验证在伽马分布密度函数下模型的合理性, 同时针对 2020 年的武汉疫情数据调整相应的模型参数, 将扬州的参数与武汉的参数进行对比, 分析差异, 与定性分析的结果进行对比, 验证模型的合理性。

首先考虑在给定初始数据 $I_s^0 = 100$, 外界输入数据 $s(t)$ 具有以下形式

$$s(t) = \begin{cases} 100 - 100 \cos \frac{t}{2}, & t \in [0, 60] \\ 0, & t > 60 \end{cases}$$

时我们模型的数值表现。对疫情 (潜伏期、治愈期等) 满足的伽马分布 $h(t; \tau, \lambda)$, 我们取参数 $\lambda = 0.55$, 模型中的其他参数取为

$$\kappa_2 = 0.9, \kappa_4 = 0.6, \tau_1 = 5.2, \tau_2 = 9, \tau_3 = 15, \tau_4 = 18, \tau_5 = 10.$$

考虑不同的传染率 β 和隔离率 κ 对模型结果的影响, 得到结果如图 2-图4。其中, 图 2 的结果对应 $\beta = 0.2$, $\kappa = 0.85$, 图 3 的结果对应 $\beta = 0.47$, $\kappa = 0.85$, 图 4 的结果对应 $\beta = 0.47$, $\kappa = 0.95$ 。结合图 2 和图 3 可知, 当其他参数保持不变, 若传染率 β 足够小, 则可以将疫情有效控制住, 并且感染人数逐渐趋于 0; 若传染率 β 较大, 则在其他参数不变的情况下, 疫情的发展将失去控制。结合图 3 和图 4 可知, 当其他参数保持不变, 若隔离率 κ 足够大, 则可以将疫情有效控制住, 并且感染人数逐渐趋于 0; 若隔离率 κ 较大 (接近 1), 则在其他参数不变的情况下, 疫情的发展将失去控制。综上, 该数值结果验证了前一节中定理 2.2 给出的结论, 有效控制传播的两个途径为保持感染病人的低传播率 $\beta > 0$ 充分小或者隔离率 $\kappa(t) \in (0, 1)$ 充分接近 1。

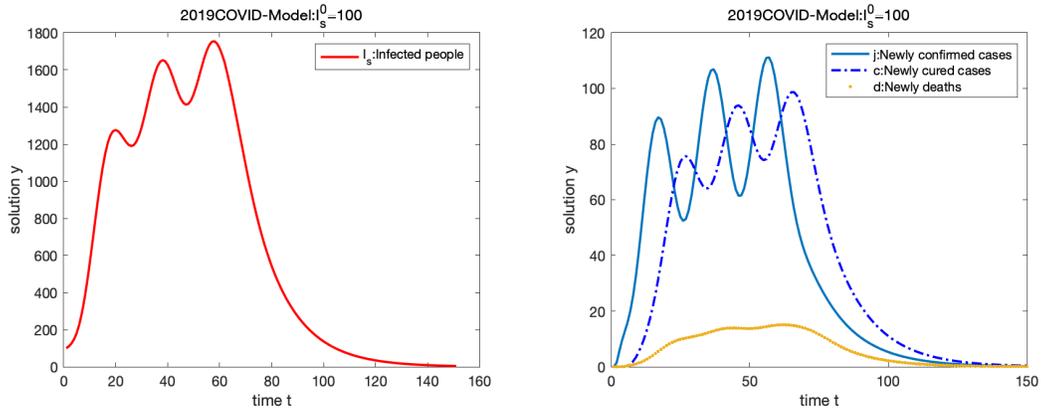


图 2: $\beta = 0.2, \kappa = 0.85$: 每日现存感染人员分布 $I_s(t)$ (左); 每日新增确诊人数 $j(t)$ 、痊愈人数 $c(t)$ 、死亡人数 $d(t)$ (右)。

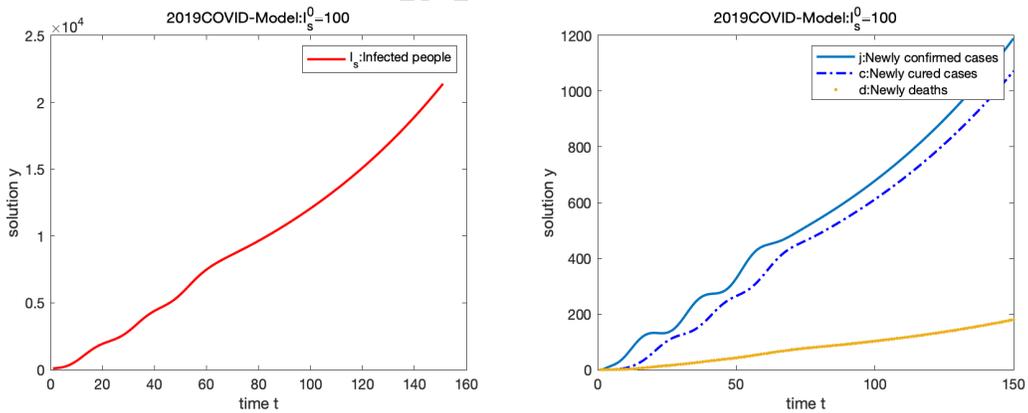


图 3: $\beta = 0.47, \kappa = 0.85$: 每日现存感染人员分布 $I_s(t)$ (左); 每日新增确诊人数 $j(t)$ 、痊愈人数 $c(t)$ 、死亡人数 $d(t)$ (右)。

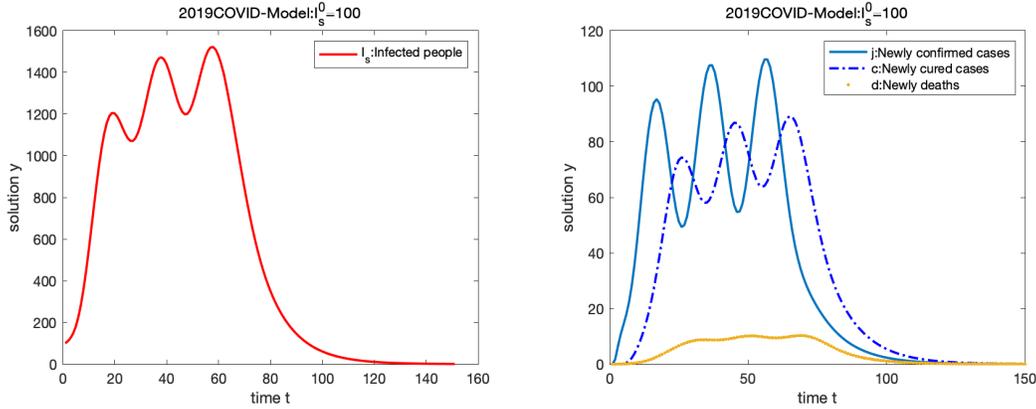


图 4: $\beta = 0.47, \kappa = 0.95$: 每日现存感染人员分布 $I_s(t)$ (左); 每日新增确诊人数 $j(t)$ 、痊愈人数 $c(t)$ 、死亡人数 $d(t)$ (右)。

下面把我们的上述结果用于扬州疫情的建模和预报。2021 年 7 月由南京禄口机场外界输入引发的新一轮疫情中，扬州于 7 月 28 日出现首例确诊病例，我们以 2021 年 7 月 28 日为初始时刻 $t = 0$ ，假定该日的现存感染人数为 $I_s^0 = 554$ 。由 t 的实际意义可知，系统是按天变化的，即 $dt = 1$ ，以步长 1 来离散我们的离散系统 (2.10)，取 $\epsilon_0 = 1.01$ 以考虑初始感染病例在后续时间内的退出。同时，由于出现确诊后，扬州市立刻采取了严控的管制措施，因此我们在模型中不考虑外部输入病例，即取 $s(t) \equiv 0$ ，以医院每日新增确诊病例 $j(t)$ 和累计确诊病例即 $[0, t]$ 上的总量 $J(t) = \int_0^t j(\tau) d\tau$ 作为对比指标，与实际公布的数据进行对比。

定理 2.2 中的 c_0 是依赖伽马分布参数的常数，在本节我们的数值实现中，伽马分布

$$h_j(t; \tau_j, \lambda), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

的两个参数 (τ_j, λ) 是固定一个调节另一个，相当于通过调控分布的均值实现。因此有效控制的上限依赖于疾病的平均潜伏期时间平均治愈时间等，即取定 $\lambda = 0.55$ ，而调节 $\tau_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ 。

传染率、隔离率、隔离病人的治愈率及暴露病人的自愈率取为

$$\beta = 0.864, \kappa(t) = 0.9988, \kappa_2 = 1, \kappa_4 = 0.6,$$

而其余各个指标的均值分别取为

$$\tau_1 = 9.8, \tau_2 = 11, \tau_3 = 15, \tau_4 = 18, \tau_5 = 10.$$

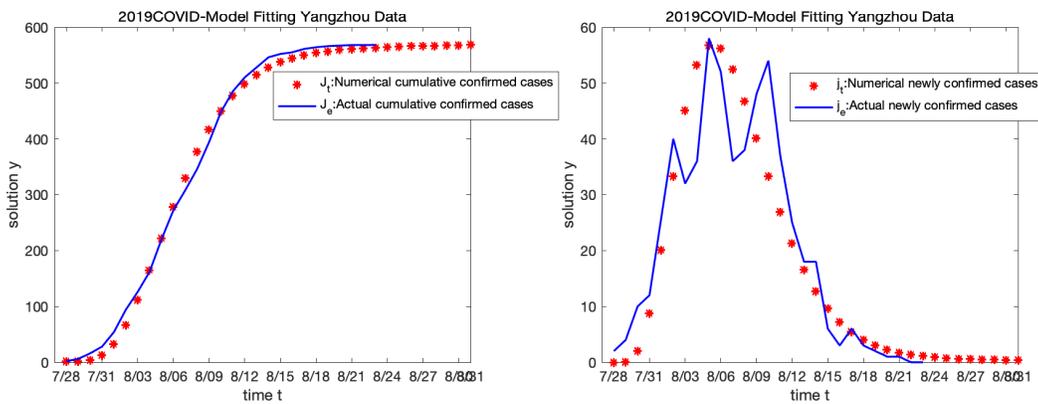


图 5: 应用伽马分布的 COVID 模型拟合 2021 年扬州数据：实际每日累计确诊人数和数值累计确诊人数 (左)；实际每日新增确诊人数和数值新增确诊人数 (右)

对于伽马分布密度函数，我们以 2021 年 7 月 28 日为初始时刻，基于上述参数计算了 7 月 28 日至 8 月 31 日每日新增确诊人数 $j(t)$ 的模拟结果并和媒体公布的扬州实际数据进行了比较，见图 5 (右)。同时我们比较了每日确诊数据在 $[0, t]$ 的累计值 $J(t)$ (左)。可以看出，我们的模型整体上是反映每日新增确诊人数和累计确诊人数的，可以认为该模型很好地描述了扬州疫情的整个走势。

表 1: 2021 年扬州确诊病人人数的数值模拟与实际数据的对比

| 日期 | 07/28 | 07/31 | 08/03 | 08/06 | 08/09 | 08/12 | 08/15 | 08/18 | 08/21 | 08/23 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 公布每日确诊 $j(t)$ | 2 | 12 | 32 | 52 | 48 | 25 | 6 | 3 | 1 | 0 |
| 模拟每日确诊 | 2 | 9 | 45 | 56 | 40 | 21 | 9 | 4 | 2 | 1 |
| 公布累计确诊 $J(t)$ | 2 | 28 | 126 | 272 | 394 | 510 | 552 | 564 | 568 | 568 |
| 模拟累计确诊 | 2 | 13 | 111 | 277 | 417 | 498 | 537 | 554 | 561 | 564 |

为了数值反映我们的预报结果和实际数据的关系，我们列出相关的具体数据(数值结果取整)，见表 1。这些数值定量对比关系表明，在疫情传播和发展的稳定阶段，我们的模型是可以定量地描述疫情的发展状态的。

针对扬州数据，通过合理调整参数，我们得到了很好的模拟结果。但是，由于缺乏实际数据的支持，这些参数的选取是具有一定的人为性的。接下来，我们对不同参数测试分析模型的敏感性。根据定理 2.2 的结论，我们主要考虑 $\beta(1 - \kappa)$ 和 I_s^0 对模型结果的影响。分别进行两组测试，使得 $\beta(1 - \kappa)$ 和 I_s^0 改变的相对大小一致。首先考虑 $\beta(1 - \kappa)$ ，这里我们给定 $\beta = 0.864$ 固定，只改变 κ 的大小，记前面吻合良好的隔离率为 $\kappa^* = 0.9988$ ，令取 $\kappa^1 = 0.99856$ ， $\kappa^2 = 0.9982$ ，则有

$$\frac{|\beta(1 - \kappa^1) - \beta(1 - \kappa^*)|}{\beta(1 - \kappa^*)} = 20\%, \quad \frac{|\beta(1 - \kappa^2) - \beta(1 - \kappa^*)|}{\beta(1 - \kappa^*)} = 50\%.$$

然后同样考虑变化幅度相同的 I_s^0 ，记吻合良好的初始数据为 $I_s^{0*} = 554$ ，令取 $I_s^{01} = 665$ ， $I_s^{02} = 831$ ，则有

$$\frac{|I_s^{01} - I_s^{0*}|}{I_s^{0*}} = 20\%, \quad \frac{|I_s^{02} - I_s^{0*}|}{I_s^{0*}} = 50\%.$$

两组测试的结果如图 6 和图 7 所示。很容易发现，在相同的变化幅度下， $\beta(1 - \kappa)$ 对结果的变化不明显，但是 I_s^0 会对结果造成巨大的影响。这说明了，本文中的模型对不同参数的敏感性不同，对 $\beta(1 - \kappa)$ 的敏感性较低，但对初始数据 I_s^0 敏感性较高。

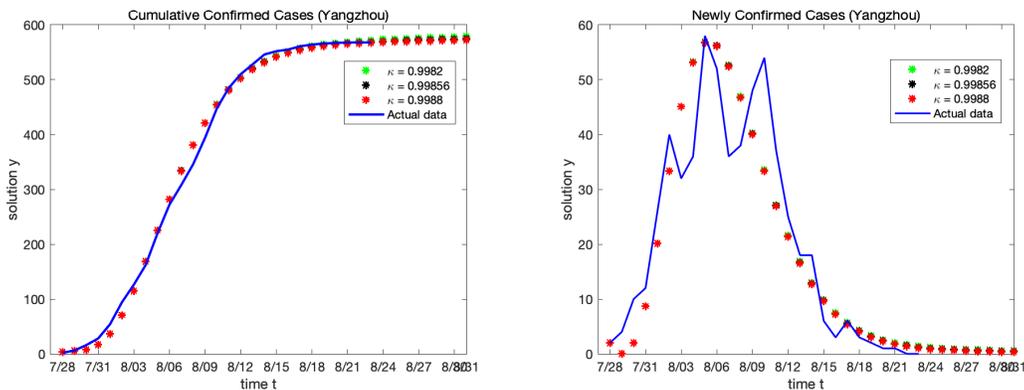


图 6: 固定 I_s^0 ，不同的 $\beta(1 - \kappa)$ (其中 β 不变，只改变 κ) 取值的结果：实际每日累计确诊人数和数值累计确诊人数 (左)；实际每日新增确诊人数和数值新增确诊人数 (右)

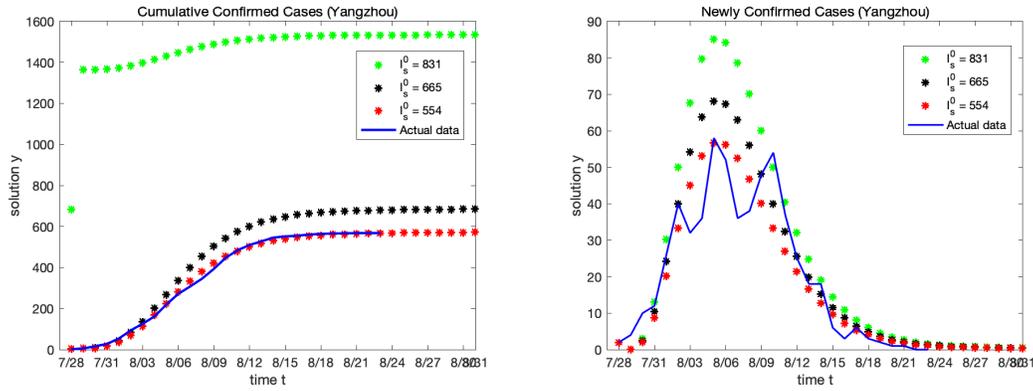


图 7: 固定 (β, κ) , 不同的 I_s^0 取值的结果: 实际每日累计确诊人数和数值累计确诊人数 (左); 实际每日新增确诊人数和数值新增确诊人数 (右)

在 [1] 中, 已对 Weible 分布下的武汉疫情发展的数值预报进行了研究。下面针对 2020 年武汉数据, 我们以 2020 年 1 月 23 日为初始时刻, 假定该日的现存感染人数为 $I_s^0 = 43300$, 仍然取伽马分布的参数为 $\lambda = 0.55$ 。隔离率、隔离病人的治愈率及暴露病人的自愈率取为

$$\beta = 0.467, \kappa(t) = 0.989, \kappa_2 = 0.9, \kappa_4 = 0.6,$$

各个指标的均值分别取为

$$\tau_1 = 15, \tau_2 = 11, \tau_3 = 15, \tau_4 = 18, \tau_5 = 10.$$

同样地, 以医院每日新增确诊病例 $j(t)$ 和累计确诊病例即 $[0, t]$ 上的总量 $J(t) = \int_0^t j(\tau) d\tau$ 作为对比指标, 与实际公布的武汉疫情数据进行对比, 结果如图 8 所示。比较可知, 我们的模型整体上是反映每日确诊人数的, 但是在 1 月 30 日至 2 月 13 日之间高于公布的数字。考虑到 2 月 13 日政府公布的数字有一个脉冲的增加, 这表示政府对前期公布的偏低数据有一个整体的调整。这说明我们的模型在某种意义上回避了公布数据的不准确性, 能比较客观地反映疫情的实际走势。

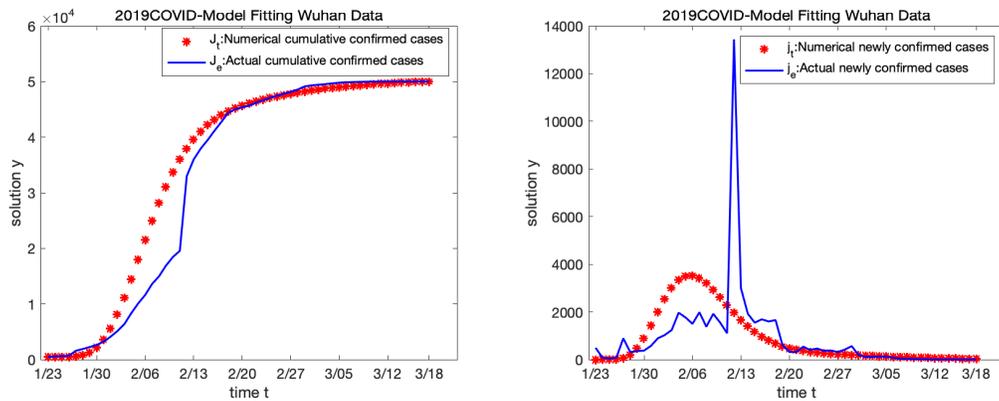


图 8: 应用伽马分布的 COVID 模型拟合 2020 年武汉数据: 实际每日累计确诊人数和数值累计确诊人数 (左); 实际每日新增确诊人数和数值新增确诊人数 (右)

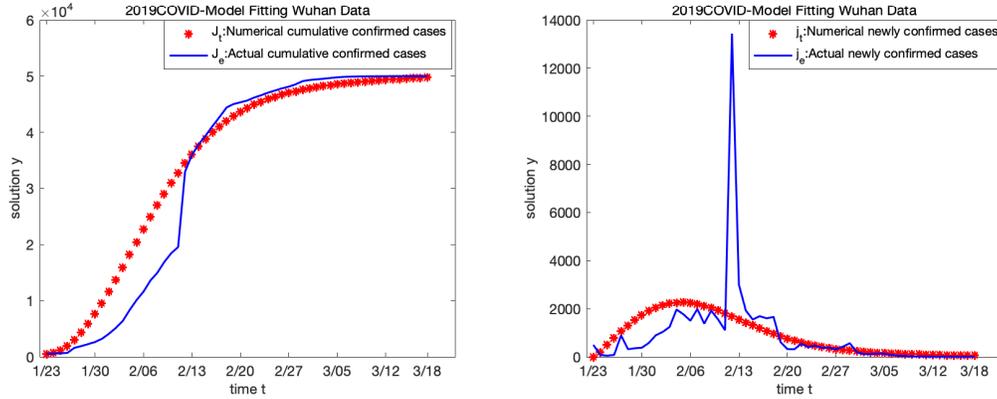


图 9: 应用 Weibull 分布的 COVID 模型拟合 2020 年武汉数据: 实际每日累计确诊人数和数值累计确诊人数 (左); 实际每日新增确诊人数和数值新增确诊人数 (右)

[1] 中应用 Weibull 分布来描述疫情 (潜伏期、治愈期等), 所得到的武汉疫情数据的模拟如图 9 所示, 对比图 8 和图 9 的结果可以看出, 定理 2.2 刻画的结果与选取的不同分布的密度函数关系不是太大, 会得到类似的结果, 只是在峰值和中间的分布上有区别, 整体走势是相同的。因此带有记忆效应的模型反映了疫情传播的本质。

将模拟扬州疫情数据的参数和模拟武汉疫情数据的参数进行对比, 可以发现两者主要差异在传染率 β 和潜伏期 τ_1 上,

$$\begin{aligned}\beta^{YZ} &= 0.864, & \tau_1^{YZ} &= 9.8, \\ \beta^{WH} &= 0.467, & \tau_1^{WH} &= 15.\end{aligned}$$

则显然

$$\beta^{YZ} < \beta^{WH}, \quad \tau_1^{YZ} < \tau_1^{WH}.$$

根据国家公布的信息, 2021 年由南京禄口机场发散的本轮疫情是起源于俄罗斯入境航班带来的德尔塔变异毒株, 这种变异病毒具有传染率高、潜伏期短的特性。而我们定量分析的结果看来, 与这一事实十分吻合, 说明了我们的模型能够有效反应变异病毒株的特性, 从另一方面验证了我们模型的合理性。

4 总结与展望

带有卷积型积分核的积分微分方程系统, 反映了疫情扩散过程的非局部性。总结来说, 本文基于该系统, 完成了以下工作:

1. 考虑了一个新的密度函数并理论证明了渐近性结果;
2. 考虑不同的参数扰动, 对模型做了敏感性分析, 验证了模型的可适用性;
3. 针对近期江苏扬州的疫情数据做了模型拟合, 验证了在新的密度函数下模型的合理性;
4. 利用模型模拟了 2020 年武汉疫情数据, 并把武汉数据和扬州数据所对应的模型参数进行对比, 说明了本文的模型能够有效反应变异病毒株的特性。

综合上述工作, 基于伽马分布的带有延迟效应的新冠肺炎的动力学传播模型能够有效刻画具有长潜伏期的传染病的传播机理, 在不同时期多地疫情数据模拟分析中, 算法的数值结果反应了模型能够有效反应变异病毒株的特性。该模型对不同的参数的敏感性不同, 对 $\beta(1-\kappa)$ 的敏感性较低, 但对初始数据 I_0^0 敏感性较高。

由于人类行为的复杂性和疾病本身的未知性, 理论上讲, 模型中的所有参数都是未知的。我们目前所做的工作都是根据实际公布的少量疫情数据, 人为调整参数, 使得模型尽可能拟合实际数据, 研究重心在如

何对疫情问题进行合理建模。但是利用这些已经发生的和疾病传播有关的数据来尽可能准确地确定模型中的未知参数，则是一类非线性反问题，是十分困难的问题，已经超出了我们的能力，有待后续研究。

数学是寻求自然界真相的科学，它始终是很多科学的基础。根据实际问题建立数学模型，并对模型求解，再根据结果解决问题，数学建模是数学中非常精妙复杂的部分；进一步地，以数学为基础解决生活问题，数学改变了整个世界的文化。丘成桐先生在给北京雁栖湖应用数学研究院的贺词中提到，数学家追求永恒的真理，热爱理论和方程。它比诗章还要华美动人，因为当真理赤裸裸呈现时，所有颂词都变得渺小；它可以富国强兵，因为它是所有应用科学的源泉；它可以安邦定国，因为它可以规划现代社会的经络。学习并应用建模，借以关注社会，充分领悟数学作为自然科学和人文学科的桥梁之美，是我们在理论和公式之后更为深刻恒久的体悟。

2021 S.-T. Yau High School Science Award

参考文献:

- [1] J. J. Liu, L. Y. Wang, Q. Zhang and S. T. Yau, The dynamical model for COVID-19 with asymptotic analysis and numerical implementations, *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 89(2): 1965-1982.
- [2] Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang and K. J. Liu, A time delay dynamic system with external source for the local outbreak of 2019-nCoV, *Applicable Analysis*, 2020, <https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1732357>: 3-6.
- [3] Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang and K. J. Liu, A time delay dynamical model for outbreak of 2019-nCoV and the parameter identification, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2020, 28(2): 243-250.
- [4] W. Wang, J. Tang and F. Wei, Updated understanding of the outbreak of 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) in Wuhan, China, *J. Med. Virol.*, 2020, 92: 441-447.
- [5] Z. F. Yang, et. al, Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions, *Journal of Thoracic Disease*, 2020, 12(3): 165-174.
- [6] 严悦, 陈瑜, 刘可汲, 罗心悦, 许伯熹, 江瑜, 程晋, 基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测, *中国科学: 数学*, 2020, 50(3), 385-392.
- [7] G. Ding, C. Liu, J. Gong, et al, SARS epidemical forecast research in mathematical model, *Chinese Science Bulletin*, 2004, 49(21): 2332-2338.
- [8] B Cantó, Coll C, E Sánchez, Estimation of parameters in a structured SIR model, *Advances in Difference Equations*, 2017, DOI:10.1186/s13662-017-1078-5: 3-6.
- [9] J. Zhou, S. Dong, C. Ma, et al, Epidemic spread simulation in an area with a high-density crowd using a SEIR-based model, *PLoS ONE*, 2021, 16(6): e0253220.

致谢页:

一、论文的选题来源及研究背景

本课题为自选课题。课题设想来源于苏子原同学于 2020 年开展的一项关于中国新冠疫情发展变化及防控措施研究。此项研究主要关注新冠疫情早期中国新冠疫情的防控与发展变化。2021 年以来, 新冠疫情在全球出现进一步变化。新冠疫苗大规模接种, 尤其是德尔塔变异株的出现, 对于疫情防控变化规律带来新的影响。苏子原同学基于对国内外新冠疫情的细致观察和深入思考, 希望继续开展范围更广、程度更深的新研究, 探索发现国内疫情防控新常态下的变化规律。因此, 苏子原同学联系了另外两位同学, 在东南大学数学学院刘继军教授团队的指导下, 构建和利用数学模型组队开展此项研究, 并报名参加丘成桐中学科学奖评选。

二、每个同学在论文中的贡献

苏子原同学: 提出研究设想、构建主要框架, 带领组员合作开展研究, 统计主要疫区数据, 参与数学模型构建;

华炯杰同学: 参与数学建模过程, 负责对所选用的密度函数的分析工作;

侯懿羚同学: 参与数学建模过程, 负责编写 matlab 程序相关工作。

三、指导老师与学生的关系, 在写作过程中所起的作用, 及指导是否有偿

东南大学刘继军教授及几位老师和参赛同学均没有直接亲属或其他利益关系。在论文写作过程中, 教授学生如何建立新冠疫情发展趋势预测的数学模型, 并用此模型来模拟预测在现阶段条件下, 新冠疫情在国内局部地区的变化规律。最后以实际疫情发展数据来验证该模型的价值。老师的指导均是无偿的。

四、他人完成的研究成果

本研究均为本项目团队成员合作完成, 没有他人研究成果。

团队成员简历:

苏子原,男,南京外国语学校高三(5)班学生。教育部2020年英才计划生物学科学员。2021年 ISEF 竞赛 Finalist,作为国家队成员进入全球总决赛; HIMCM 美国高中生数学建模比赛 Finalist 奖; ARML 全美高中数学竞赛华东区前100名,团体银奖; AMC12 美国数学竞赛晋级 ARME。2021年 USABO 美国生物奥赛全国银奖。在 CTB 全球创新研究大奖赛进入全国决赛。另获希望之星英语风采大赛和全国中学生作文大赛江苏省一等奖等。

侯懿羚,女,南京外国语学校高三(6)班学生。Conrad 康莱德挑战赛入围决赛, IJSO 个人金奖、团队银奖。

华炯杰,男,南京外国语学校高二(2)班学生。AMC12 certificate of achievement, certificate of distinction, AIME 的12分选手;热爱钻研大学数学,在清华大学 TACA 考试的大学数学部分中超越96%考生。

指导老师简历:

刘继军,男,1965年1月生,博士。东南大学二级教授,博士生导师,享受国务院政府特殊津贴专家。2009.12-2014.11任东南大学数学系主任、东南大学理学部副主任。现任中国工业与应用数学学会常务理事,全国大学生数学建模竞赛组委会委员,江苏省计算数学学会副理事长,南京应用数学中心常务副主任等。长期从事数学物理反问题、大规模科学计算和介质成像的数学理论与方法研究。主持完成 NSFC 重大研究计划、面上项目、国际合作项目等研究。已在 SIAM 系列杂志, Inverse Problems, Science China Mathematics, J. Comput. Maths., J. Sci. Comput. 等发表学术论文130余篇,出版学术专著2本。现任国际 SCI 刊物 J. Inverse Ill-posed Problems 编委。入选江苏省青蓝工程、省333工程第三层次等,获宝钢教育基金会全国优秀教师一等奖,作为主持人获江苏省教学成果一等奖、省自然科学三等奖、教育部自然科学二等奖。

王丽艳,女,南京理工大学工学博士,现任东南大学副教授,博士生导师。主持完成1项国家自然科学基金青年基金项目,1项江苏省青年基金项目以及1项东南大学青年教师资助计划,参与多项国家自然科学基金重点基金项目。先后承担了多门重点课程教学工作,包括本科生课程《高等数学B》《概率论与数理统计》《概率论与随机过程》《数学物理方法》《数学建模与数学实验》《软件基础》《Matlab 编程与应用》《算法分析与编程》等。