

参赛队员姓名： 谭文礼

中学： 广州市番禺区大石中学

省份： 广东省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 张金波

指导教师单位： 广州市番禺区大石中学

论文题目： 线性 Celtic 纽结的 Kauffman 多项式

线性 Celtic 纽结的 Kauffman 多项式

谭文礼

摘要

纽结不变量及其分辨能力的研究，是纽结理论的核心问题。其中 Kauffman 多项式是通过拆接关系和拧数计算的，它在众多不变量研究中有着非常重要的作用。在本文中，我们以这种方法为基础，通过引入新的纽结单元，发现可通过矩阵的幂运算同时计算三种线性 Celtic 纽结的 Kauffman 多项式。然后，我们还讨论了通项公式的计算方法。最后，我们用 Mathematica 软件编程计算，并列出部分结果。

关键词: 线性 Celtic 纽结; Kauffman 多项式; Mathematica; 矩阵论;

目录

1 介绍	1
2 Laurent 多项式	4
2.1 基础引理	4
2.2 矩阵形式的递归计算	7
2.3 通项公式	8
3 拧数	9
3.1 分支数	9
3.2 拧数	11
4 实验与结果	15
5 总结	17
6 未来的方向	18
7 参考文献	19
8 致谢	20
9 附录	21
9.1 Solomon 纽结的 Kauffman 多项式	21
9.2 右手三叶结的 Laurent 多项式	21
9.3 Mathematica 笔记本程序	22

1 介绍

定义 1.1 纽结是三维空间中的简单闭曲线；链环是由若干条互不相交的简单闭曲线构成的空间图形 [1, 2]。其中每一条简单闭曲线称为该链环的一个分支。纽结就是只有一个分支的链环。纽结和链环都是纽结理论的研究对象。

定义 1.2 两个纽结（或链环）是等价的（或合痕的），如果从其中一个纽结（或链环）出发，通过若干次以下一种或多种 Reidemeister 基本变换，可以变换到另一纽结（或链环） [1, 2]。

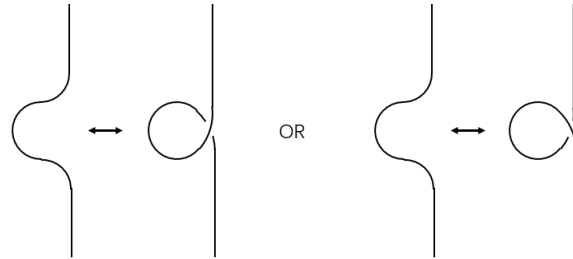


图 1: 第一类型变换

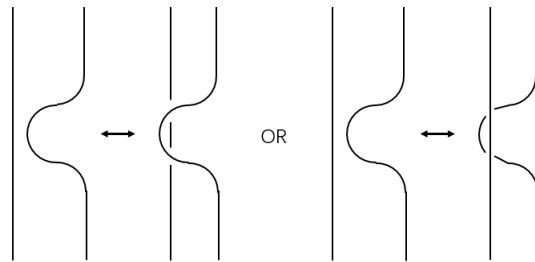


图 2: 第二类型变换

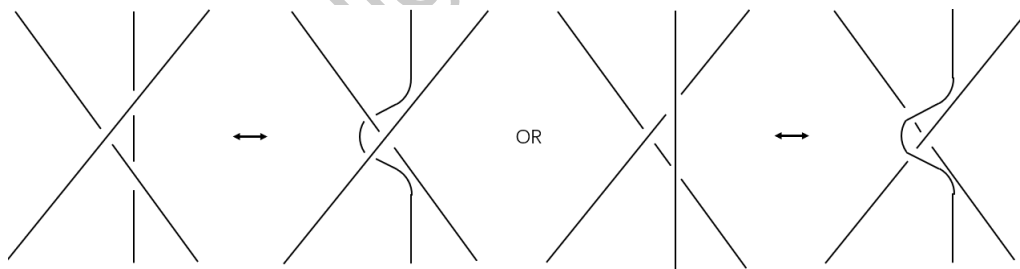


图 3: 第三类型变换

纽结理论的基本问题是，任给两个纽结（或链环）的投影图，怎样判断它们是否等价？在纽结的研究中，不变量是最主要的研究工具。如果两个具体的纽结（或链环）有不同的不变量，它们就一定不等价。

定义 1.3 线性 Celtic 纽结是由以下 A 、 B 和 M 三种单元组成的空间图形 [4]。

一般来说，它们的组合方式可以是 AM^nA 、 AM^nB 和 BM^nB 。其中 M^n 表示连续的前后相连的 n 个 M 单元。




A	B	M
		

表 1: A, B, 和 M 单元

举个例子, 当 $n = 0, 1, 2$ 时, 对应的纽结和链环如表 2 所示。










$n = 0$	AA 	BA 	BB 
$n = 1$	AMA 	BMA 	BMB 
$n = 2$	AM^2A 	BM^2A 	BM^2B 

表 2: $n=0,1,2$ 的线性 Celtic 纽结和链环

我们观察到 $BM^n A$ 组合是纽结, 而 $AM^n A$ 组合则是带有两个分支的链环。当 n 是奇数时, $BM^n B$ 组合是纽结; 而当 n 是偶数时, $BM^n B$ 组合是链环。在本文中, 我们将证明这是个定理。

Kauffman 引入了带有两个变量 a 和 z 的 Laurent 多项式不变量, 并称为 Kauffman 多项式 [3]。在本文中, 我们将计算线性 Celtic 纽结 (和链环) 的 Kauffman 多项式。

定义 1.4 无向纽结和链环的 **Kauffman 多项式** $F(K) \in Z[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$ 定义为

$$F(K) = a^{-w(K)} L(K)$$

其中 $L(K)$ 是由下列拆接关系计算的 Laurent 多项式:

$$(1) L(\bigcirc) = 1$$

$$(2) L(\text{crossing}) = aL(\text{loop})$$

$$(3) L(\text{crossing}) = a^{-1}L(\text{loop})$$

$$(4) L(\text{crossing}) + L(\text{crossing}) = zL(\text{loop}) + zL(\text{loop})$$

$w(K)$ 是 K 的扭数, 它是对 K 的每个交叉点按下图的规定所得的若干 $+1$ 和 -1 的和。

$$w(\text{crossing}) = -1, w(\text{crossing}) = +1$$

定义 1.5 除了 A 、 B 和 M 类型单元，我们还定义如下表 3 所示的单元 C 来帮助计算 *Kauffman* 多项式。

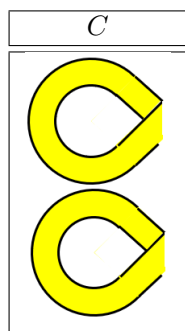



表 3: C 单元

2021 S.-T. Yau High School Science Award

2 Laurent 多项式

2.1 基础引理

引理 2.1 链环  的 Laurent 多项式是

$$L(\text{link}) = a^{-1}z^{-1} + az^{-1} - 1$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{link}) + L(\text{link}) = zL(\text{link}) + zL(\text{link})$$

即

$$aL(\text{link}) + a^{-1}L(\text{link}) = z[L(\text{link}) + L(\text{link})]$$

因此

$$L(\text{link}) = (a + a^{-1})z^{-1} - 1 = a^{-1}z^{-1} + az^{-1} - 1$$

引理 2.2 线性 Celtic 纽结 AA 的 Laurent 多项式是

$$L(AA) = 1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{link}) + L(\text{link}) = zL(\text{link}) + zL(\text{link})$$

即

$$L(\text{link}) + L(\text{link}) = a^{-1}z + az$$

因此

$$L(\text{link}) = (a^{-1} + a)z - L(\text{link}) = (a^{-1} + a)z - (a^{-1} + a)z^{-1} + 1 = 1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az$$

这个结果考虑拧数-2 后就与文献 [7] 所示结果相容了。

引理 2.3 线性 Celtic 纽结 AB 的 Laurent 多项式是

$$L(AB) = a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{link}) + L(\text{link}) = zL(\text{link}) + zL(\text{link})$$

因此

$$\begin{aligned}
 L(AB) &= L(\text{Diagram 1}) = L(\text{Diagram 2}) = zL(\text{Diagram 3}) + zL(\text{Diagram 4}) - L(\text{Diagram 5}) \\
 &= z[a^2 + L(\text{Diagram 6})] - a^{-1} \\
 &= z(1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az + a^2) - a^{-1} \\
 &= a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z
 \end{aligned}$$

证毕。

实际上, AB 是左手三叶结, 考虑拧数-3 后就与文献 [8] 所示结果相同了。文献 [3] 中推导了右手三叶结的 Laurent 多项式是 $(-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$ 。这两个多项式极为相似, 但其实是不同的。这也再一次证明了, 左手三叶结与右手三叶结不合痕。

引理 2.4 线性 Celtic 纽结 BB 的 Laurent 多项式是

$$L(BB) = -1 + (a^{-1} + a)z^{-1} - (3a^{-1} + 2a - a^3)z + (1 + a^2)z^2 + (a^{-1} + a)z^3$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{Diagram 1}) + L(\text{Diagram 2}) = zL(\text{Diagram 3}) + zL(\text{Diagram 4})$$

即

$$L(\text{Diagram 5}) + L(\text{Diagram 6}) = zL(\text{Diagram 7}) + a^3z$$

因此

$$\begin{aligned}
 L(\text{Diagram 8}) &= zL(\text{Diagram 9}) + a^3z - L(\text{Diagram 10}) \\
 &= z(a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z) + a^3z - (1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az) \\
 &= -1 + a^{-1}z^{-1} + az^{-1} - 3a^{-1}z - 2az + a^3z + z^2 + a^2z^2 + a^{-1}z^3 + az^3 \\
 &= -1 + (a^{-1} + a)z^{-1} - (3a^{-1} + 2a - a^3)z + (1 + a^2)z^2 + (a^{-1} + a)z^3
 \end{aligned}$$

文献 [9] 说明了 Solomon 纽结, 而 BB 则是 Solomon 纽结的镜像。附录 9.1 证明了 Solomon 纽结的 Kauffman 多项式。

引理 2.5 纽结 AC 的 Laurent 多项式是

$$L(AC) = a^2$$

证明: 根据拆接关系

$$L(AC) = L(\text{Diagram 1}) = aL(\text{Diagram 2}) = a^2L(\text{Diagram 3}) = a^2$$

引理 2.6 纽结 BC 的 Laurent 多项式是

$$L(BC) = a^3$$

证明: 根据拆接关系

$$L(BC) = L(\text{link}) = aL(\text{link}) = a^2L(\text{link}) = a^3L(\text{circle}) = a^3$$

引理 2.7 假设 k 表示 A 或 B 单元, 并且 $n \geq 1$, 则线性 Celtic 纽结 $kM^n A$ 的 Laurent 多项式是

$$L(kM^n A) = (a^{-1}z^2 - a^{-1})L(kM^{n-1}A) + (az + z^2)L(kM^{n-1}B) - zL(kM^{n-1}C)$$

证明: 根据拆接关系

$$\begin{aligned} L(kM^n A) &= L(\text{link}) = zL(\text{link}) + zL(\text{link}) - L(\text{link}) \\ &= azL(\text{link}) + z[zL(\text{link}) + zL(\text{link}) - L(\text{link})] \\ &\quad - a^{-1}L(\text{link}) \\ &= azL(\text{link}) + z[zL(\text{link}) + a^{-1}zL(\text{link}) - L(\text{link})] \\ &\quad - a^{-1}L(\text{link}) \\ &= azL(\text{link}) + z^2L(\text{link}) + a^{-1}z^2L(\text{link}) - zL(\text{link}) \\ &\quad - a^{-1}L(\text{link}) \\ &= (a^{-1}z^2 - a^{-1})L(kM^{n-1}A) + (az + z^2)L(kM^{n-1}B) - zL(kM^{n-1}C) \end{aligned}$$

引理 2.8 假设 k 表示 A 或 B 单元, 并且 $n \geq 1$ 线性 Celtic 纽结 $kM^n B$ 的 Laurent 多项式是

$$L(kM^n B) = (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z)L(kM^{n-1}A) + (az^2 + a^2z - z + z^3)L(kM^{n-1}B) + (1 - z^2)L(kM^{n-1}C)$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{link}) + L(\text{link}) = zL(\text{link}) + zL(\text{link})$$

其中

$$\begin{aligned} L(\text{link}) &= zL(\text{link}) + zL(\text{link}) - L(\text{link}) \\ &= zL(\text{link}) + a^{-1}zL(\text{link}) - L(\text{link}) \\ &= a^{-1}zL(kM^{n-1}A) + zL(kM^{n-1}B) - L(kM^{n-1}C) \\ L(\text{link}) &= a^2L(\text{link}) = a^2L(kM^{n-1}B) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
L(kM^n B) &= L(\boxed{KM^{n-1}} \text{ with a crossing}) \\
&= z[(a^{-1}z^2 - a^{-1})L(kM^{n-1}A) + (az + z^2)L(kM^{n-1}B) - zL(kM^{n-1}C)] \\
&= +a^2zL(kM^{n-1}B) - [a^{-1}zL(kM^{n-1}A) + zL(kM^{n-1}B) - L(kM^{n-1}C)] \\
&= (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z)L(kM^{n-1}A) + (az^2 + a^2z - z + z^3)L(kM^{n-1}B) + (1 - z^2)L(kM^{n-1}C)
\end{aligned}$$

引理 2.9 假设 k 表示 A 或 B 单元, 并且 $n \geq 1$, 纽结 $kM^n C$ 的 *Laurent* 多项式是

$$L(kM^n C) = a^2 L(kM^{n-1} B)$$

证明: 根据拆接关系

$$L(kM^n C) = L(\boxed{KM^{n-1}} \text{ with a crossing}) = aL(\boxed{KM^{n-1}} \text{ with a crossing}) = a^2L(\boxed{KM^{n-1}} \text{ with a crossing}) = a^2L(kM^{n-1} B)$$

2.2 矩阵形式的递归计算

定理 2.10 假设 k 表示 A 或 B 单元, 并且 $n \geq 1$, 纽结 $kM^n A, kM^n B$ 和 $kM^n C$ 的 *Laurent* 多项式能递归地在矩阵中同时计算。

证明: 归纳引理 2.1 至 2.9, 并根据矩阵乘法的计算法则, 我们可以把 $kM^n A, kM^n B$ 和 $kM^n C$ 的 *Laurent* 多项式计算过程用矩阵表示出来。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} L(kM^n A) \\ L(kM^n B) \\ L(kM^n C) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (a^{-1}z^2 - a^{-1}) & (az + z^2) & -z \\ (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z) & (az^2 + a^2z - z + z^3) & (1 - z^2) \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(kM^{n-1} A) \\ L(kM^{n-1} B) \\ L(kM^{n-1} C) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a^{-1}z^2 - a^{-1}) & (az + z^2) & -z \\ (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z) & (az^2 + a^2z - z + z^3) & (1 - z^2) \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} L(kM^{n-2} A) \\ L(kM^{n-2} B) \\ L(kM^{n-2} C) \end{pmatrix} \\
&= \dots \\
&= \dots \\
&= \begin{pmatrix} (a^{-1}z^2 - a^{-1}) & (az + z^2) & -z \\ (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z) & (az^2 + a^2z - z + z^3) & (1 - z^2) \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} L(kM^0 A) \\ L(kM^0 B) \\ L(kM^0 C) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a^{-1}z^2 - a^{-1}) & (az + z^2) & -z \\ (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z) & (az^2 + a^2z - z + z^3) & (1 - z^2) \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} L(kA) \\ L(kB) \\ L(kC) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

其中

当 $k = A$ 时,

$$\begin{pmatrix} L(kA) \\ L(kB) \\ L(kC) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(AA) \\ L(AB) \\ L(AC) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az \\ a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z \\ a^2 \end{pmatrix};$$

当 $k = B$ 时,

$$\begin{pmatrix} L(kA) \\ L(kB) \\ L(kC) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(BA) \\ L(BB) \\ L(BC) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z \\ -1 + (a^{-1} + a)z^{-1} - (3a^{-1} + 2a - a^3)z + (1 + a^2)z^2 + (a^{-1} + a)z^3 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

2.3 通项公式

如果把 n 在不同取值时的 Kauffman 多项式看作数列, 我们可利用矩阵对角化计算数列的通项公式 [13].

定理 2.11 假设三个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 可表示为

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

D 有三个不相等的特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 , 则

$$a_n = r_{11}\lambda_1^n + r_{12}\lambda_2^n + r_{13}\lambda_3^n \quad (1)$$

$$b_n = r_{21}\lambda_1^n + r_{22}\lambda_2^n + r_{23}\lambda_3^n \quad (2)$$

$$c_n = r_{31}\lambda_1^n + r_{32}\lambda_2^n + r_{33}\lambda_3^n \quad (3)$$

证明:

矩阵 D 有三个不相等的特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 , 则 D 可对角化, 即存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}DP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 则 $D = P\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1}$, $D^n = P\text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)P^{-1}$

$$\text{设 } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = D^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = P\text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1\lambda_1^n \\ q_2\lambda_2^n \\ q_3\lambda_3^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11}q_1\lambda_1^n + p_{12}q_2\lambda_2^n + p_{13}q_3\lambda_3^n \\ p_{21}q_1\lambda_1^n + p_{22}q_2\lambda_2^n + p_{23}q_3\lambda_3^n \\ p_{31}q_1\lambda_1^n + p_{32}q_2\lambda_2^n + p_{33}q_3\lambda_3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

证毕。

我们可以把 $L(AM^nA)$, $L(AM^nB)$ 和 $L(AM^nC)$ 看作三个数列, 并基于上述定理, 就可按下列步骤计算其通项公式

1. 计算转换矩阵 D 的三个特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3
2. 计算 $a_0 = L(AM^0A)$, $a_1 = L(AM^1A)$ 和 $a_2 = L(AM^2A)$ 的值并代入等式 (1), 解三元一次方程组, 可得到 r_{11} , r_{12} 和 r_{13}
3. 计算 $b_0 = L(AM^0B)$, $b_1 = L(AM^1B)$ 和 $b_2 = L(AM^2B)$ 的值并代入等式 (2), 解三元一次方程组, 可得到 r_{21} , r_{22} 和 r_{23}
4. 计算 $c_0 = L(AM^0C)$, $c_1 = L(AM^1C)$ 和 $c_2 = L(AM^2C)$ 的值并代入等式 (3), 解三元一次方程组, 可得到 r_{31} , r_{32} 和 r_{33}

同理也可计算 $L(BM^nA)$, $L(BM^nB)$ 和 $L(BM^nC)$ 的通项公式。

3 拧数

3.1 分支数

由 A 或 (和) B, 和若干 M 单元组成的空间图形, 它的分支数是多少? 在这一节, 我们通过数学方法证明其中的规律。

引理 3.1 由四个 M 组成的图形 (M^4) 构成了一个单位置换。

证明: 我们从左到右扫描由 4 个 M 组成的线性 Celtic 纽结的部分图形, 并考虑曲线的上下位置变化, 一个交叉就是曲线的上下置换。

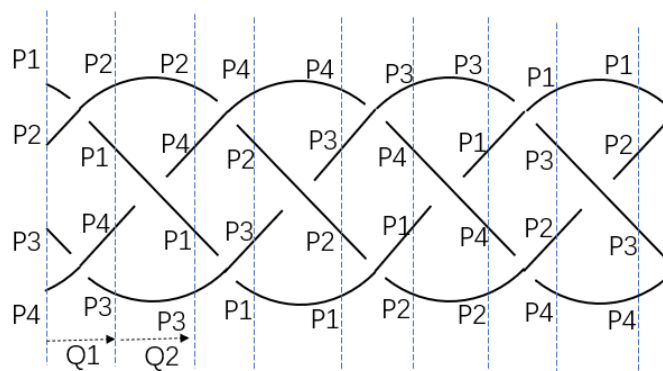


图 4: M^4

由上图可知, 一个 M 单元可由以下两个 Q_1 和 Q_2 置换矩阵表示。从左到右看, 先进行 Q_1 置换, 再进行 Q_2 置换。

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{因为 } Q_2 Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (Q_2 Q_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (Q_2 Q_1)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

所以由四个 M 组成的图形 (M^4) 构成了一个单位置换证毕。

显然 $(Q_2 Q_1)^{n+4} = (Q_2 Q_1)^n$ 。我们在考虑线性 Celtic 纽结中曲线的连接时, 只需考虑 n 取 0 到 3 的情况即可。

引理 3.2 $BM^n A$ 组合总是一个纽结, 分支数为 1。

证明:

$$Q_1(Q_2 Q_1)^0 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_4 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$$Q_1(Q_2 Q_1)^1 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_4 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Q_1(Q_2Q_1)^2 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \\
Q_1(Q_2Q_1)^3 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_2 \\ P_4 \end{pmatrix} \\
Q_1(Q_2Q_1)^4 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \\ P_4 \\ P_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

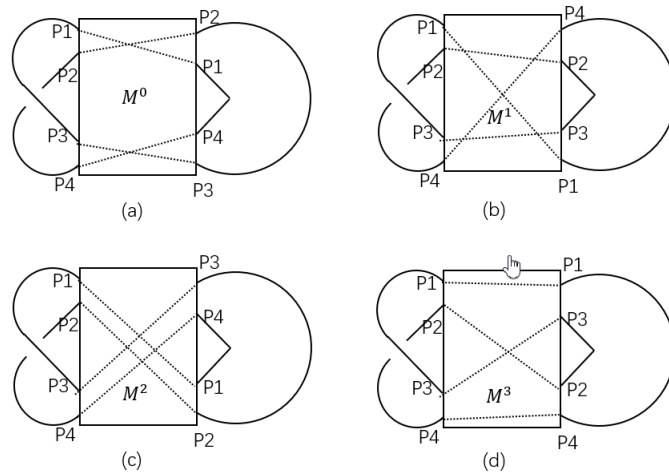


图 5: $BM^n A$ 分支数

从上图可看到，在 B 端， P_1 连接 P_3 , P_2 连接 P_4 ；在 A 端， P_2 连接 P_3 , P_1 连接 P_4 。因此 $BM^n A$ 组合总是一个纽结。

引理 3.3 $AM^n A$ 组合总是有两个分支的链环。

证明：

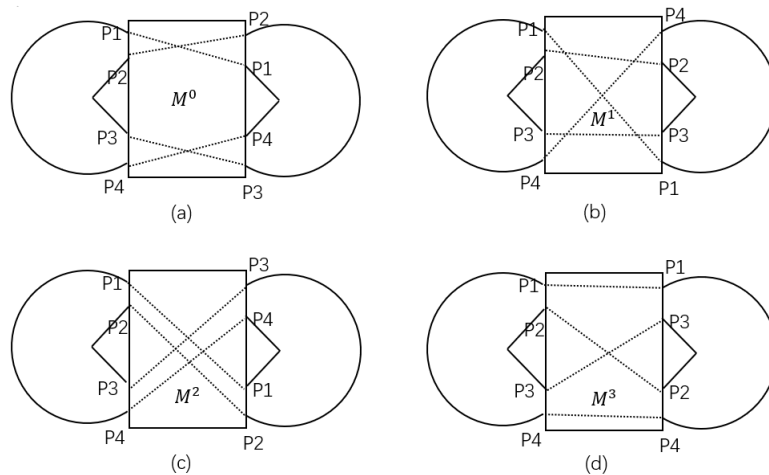


图 6: $AM^n A$ 分支数

从上图可看到，在左 A 端， P_1 连接 P_4 , P_2 连接 P_3 ；在右 A 端， P_2 连接 P_3 , P_1 连接 P_4 。因此 $AM^n A$ 组合总是有两个分支的链环。

引理 3.4 若 n 是奇数， $BM^n B$ 组合的分支数为 1；若 n 是偶数， $BM^n B$ 组合的分支数为 2。

证明：

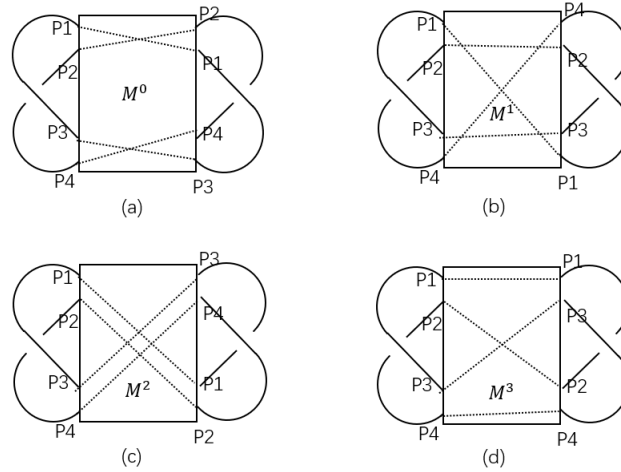


图 7: $BM^n B$ 分支数

从上图可看到，在左 B 端， P_1 连接 P_3 , P_2 连接 P_4 ；在右 B 端， P_2 连接 P_4 , P_1 连接 P_3 ，这样的组合的分支数为 2。

在左 B 端， P_1 连接 P_3 , P_2 连接 P_4 ；在右 B 端， P_1 连接 P_2 , P_3 连接 P_4 ，这样的组合的分支数为 1。

3.2 拧数

引理 3.5 $BM^n A$ 的拧数是

$$w(BM^n A) = -3 - n + 2 * n \bmod 2$$

证明：

我们在考虑线性 Celtic 纽结的拧数时，只需考虑 n 取 0 到 3 的情况即可。

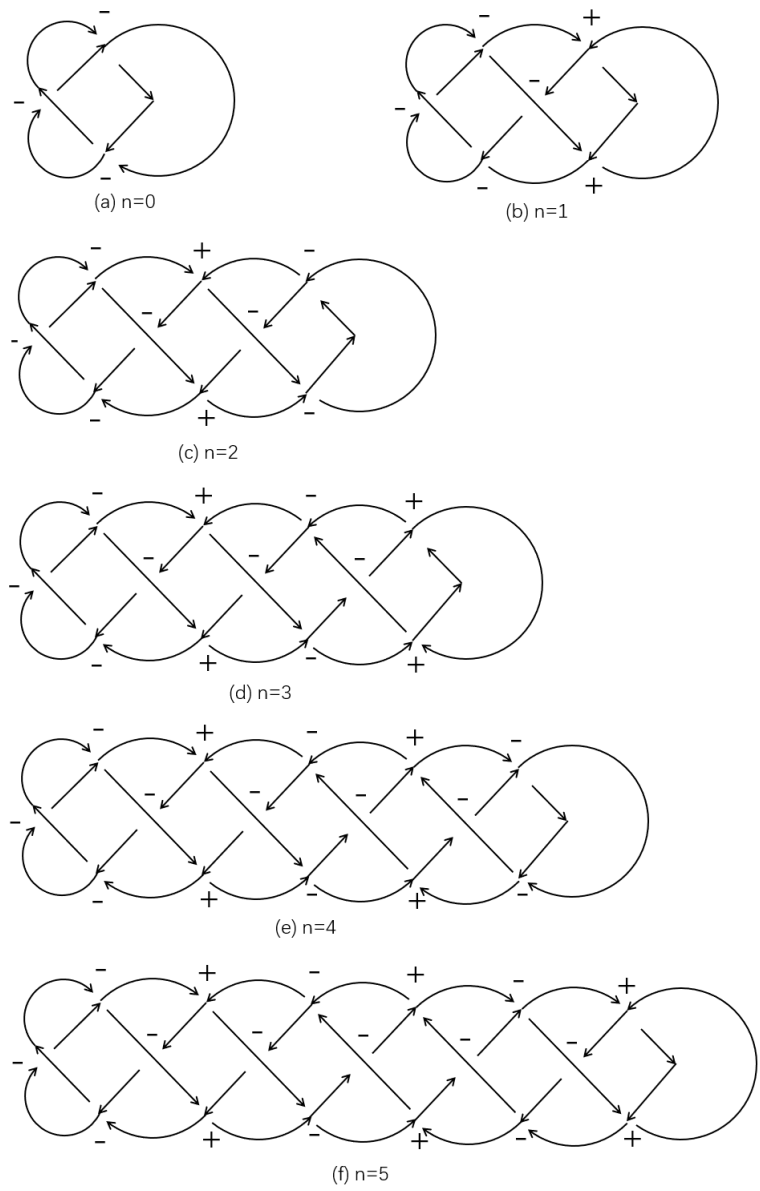


图 8: $BM^n A$ 的拧数

n	0	1	2	3	4	5
拧数	-3	-2	-5	-4	-7	-6

总结规律可得, $w(BM^n A) = -3 - n + 2 * n \bmod 2$

引理 3.6 $AM^n A$ 的拧数是

$$w(AM^n A) = -2 - n + 2 * n \bmod 2$$

证明:

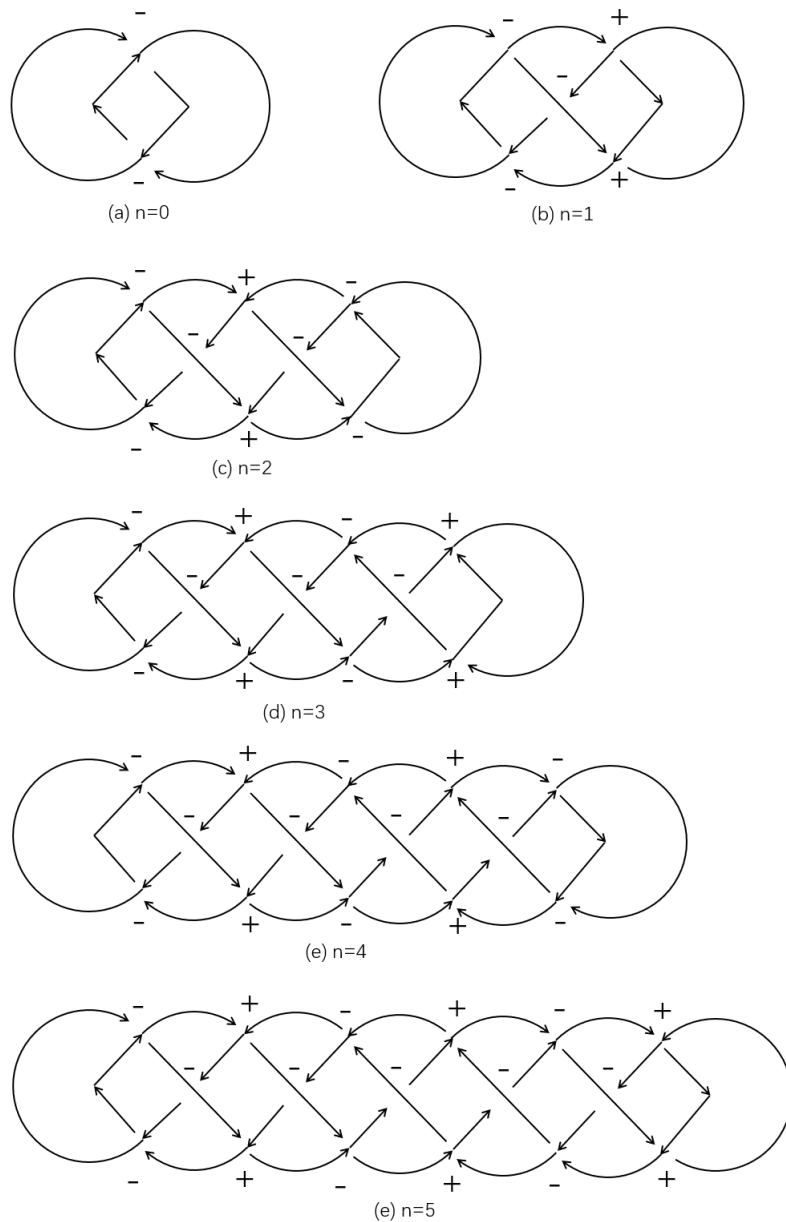


图 9: $AM^n A$ 的拧数

n	0	1	2	3	4	5
拧数	-2	-1	-4	-3	-6	-5

总结规律可得, $w(AM^n A) = -2 - n + 2 * n \bmod 2$

引理 3.6 $BM^n B$ 的拧数是

$$w(BM^n B) = \begin{cases} -4 - n & \text{当 } n \text{ 是偶数} \\ 4 + 3n & \text{当 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

证明:

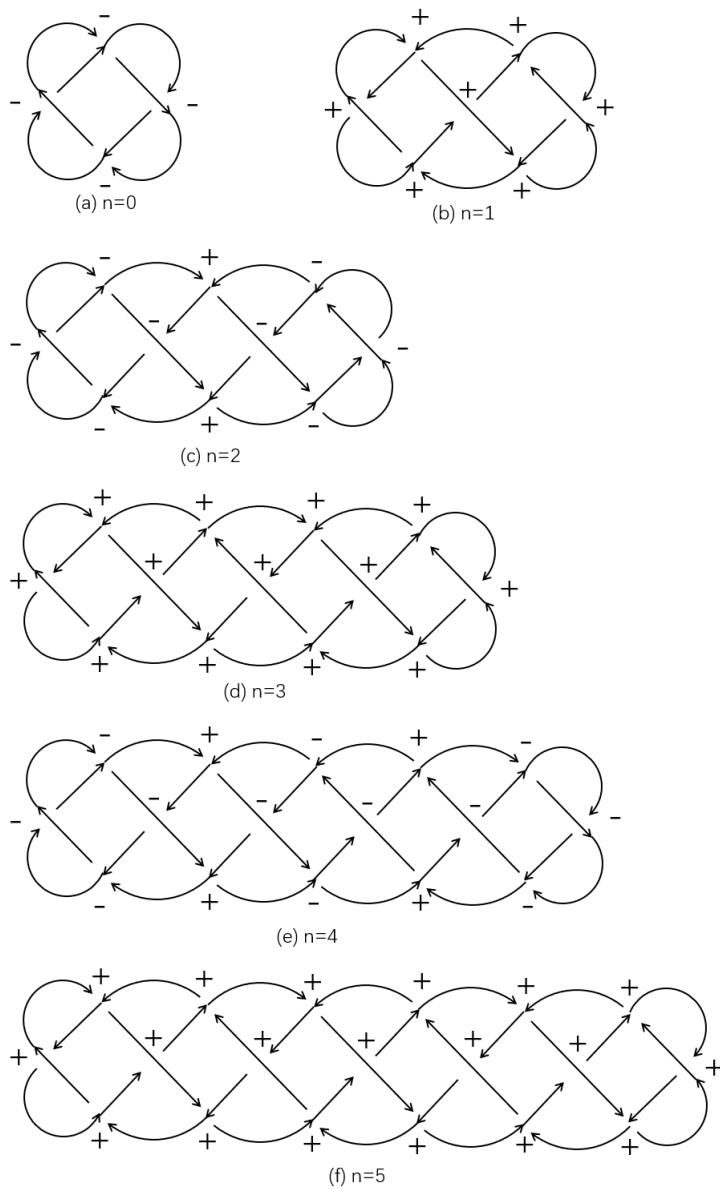


图 10: $BM^n B$ 的拧数

n	0	1	2	3	4	5
拧数	-4	7	-6	13	-8	19

总结规律可得, $w(BM^n B) = \begin{cases} -4 - n & \text{当 } n \text{ 是偶数} \\ 4 + 3n & \text{当 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$

4 实验与结果

我们用 Mathematica 软件 [5] 编写了一个计算线性 Celtic 纽结和链环的程序 (附录 9.3)。

当 $n = 1$ 时, 其结果是

$$\begin{aligned} F(AMA) &= -2a^3z^3 - a^{-1}z^3 - a^4z^2 + 2a^3z + 2a^{-1}z - a^{-1}z^{-1} - a^2z^4 - z^4 + z^2 + 1 - 3az^3 + 4az - az^{-1} \\ F(BMA) &= 2a^4z^4 + z^4 + 2a^5z^3 + a^6z^2 - 2a^4z^2 - 3z^2 - a^5z \\ &\quad + a^4 + 2 + a^3z^5 + az^5 - 2az^3 - a^3z + 3a^2z^4 - 6a^2z^2 + 2a^2 \\ F(BMB) &= 2a^{-5}z^5 + a^{-9}z^5 + 3a^{-4}z^4 + 2a^{-3}z^3 - 2a^{-5}z^3 - 4a^{-9}z^3 + a^{-2}z^2 - 4a^{-4}z^2 + 4a^{-9}z \\ &\quad + 2a^{-4} + a^{-6}z^6 + a^{-8}z^6 - 3a^{-8}z^4 - 3a^{-6}z^2 + 2a^{-8}z^2 - a^{-8} + 3a^{-7}z^5 - 8a^{-7}z^3 + 4a^{-7}z \end{aligned}$$

$F(AMA)$ 、 $F(AMB)$ 和 $F(BMB)$ 的计算结果与文献 [10, 11, 12] 上的 Kauffman 多项式是一致的。

当 $n = 2$ 时, 其结果是

$$\begin{aligned} F(AM^2A) &= 3a^6z^6 + 2a^2z^6 + 4a^7z^5 + az^5 + 3a^8z^4 - a^6z^4 - 5a^2z^4 + a^9z^3 - 4a^7z^3 - 3az^3 \\ &\quad - 2a^8z^2 - 2a^6z^2 + 2a^5z^2 + 2a^7z + 3az - az^{-1} + a^2 + a^5z^7 + a^3z^7 + 5a^5z^5 \\ &\quad + 2a^3z^5 - 12a^5z^3 - 10a^3z^3 + 6a^5z + 7a^3z - a^3z^{-1} + 5a^4z^6 - 9a^4z^4 + 2a^4z^2 \\ F(BM^2A) &= 3a^7z^7 + 2a^7z^7 + 5a^8z^6 + a^2z^6 + 5a^9z^5 - 7a^3z^5 + 3a^{10}z^4 - 6a^8z^4 - 4a^2z^4 \\ &\quad + a^{11}z^3 - 5a^9z^3 - 7a^7z^3 + 6a^3z^3 - a^{10}z^2 + 3a^8z^2 + 5a^2z^2 + 2a^9z + 2a^7z - a^8 \\ &\quad - 2a^2 + a^6z^8 + a^4z^8 + 5a^6z^6 + a^4z^6 - 16a^6z^4 - 11a^4z^4 + 10a^6z^2 + 11a^4z^2 \\ &\quad - 2a^6 - 2a^4 + 5a^5z^7 - 12a^5z^5 + 5a^5z^3 \\ F(BM^2B) &= 3a^8z^8 + 2a^4z^8 + 6a^9z^7 + a^3z^7 + 7a^{10}z^6 + a^8z^6 - 9a^4z^6 + 6a^{11}z^5 - 9a^9z^5 \\ &\quad - 5a^3z^5 + 3a^{12}z^4 - 9a^{10}z^4 - 15a^8z^4 + 12a^4z^4 + a^{13}z^3 - 6a^{11}z^3 + 4a^9z^3 + 8a^3z^3 \\ &\quad + 3a^{10}z^2 + 8a^8z^2 - 4a^4z^2 + 3a^{11}z - 5a^9z - 4a^3z + a^9z^{-1} - a^8 + a^7z^9 + a^5z^9 \\ &\quad + 5a^7z^7 - 21a^7z^5 - 11a^5z^5 + 18a^7z^3 + 15a^5z^3 - 7a^7z - 3a^5z + a^7z^{-1} + 5a^6z^8 \\ &\quad - 15a^6z^6 + 9a^6z^4 + a^6z^2 \end{aligned}$$

当 $n = 10$ 时, 其结果如下 (由于项数太多, 只能显示部分结果)。

$$\begin{aligned}
F(AM^{10}A) &= \\
&a^{13}z^{31} + a^{11}z^{31} + 11a^{14}z^{30} + 10a^{10}z^{30} + 21z^{42} + 64a^{15}z^{29} + 153a^{13}z^{29} + 134a^{11}z^{29} + 45a^9z^{29} \\
&+ 255a^4z^{28} + 667a^2z^{28} + 415a^{10}z^{28} + 120a^8z^{28} + 707z^{28} + 771a^5z^{27} + 2026a^3z^{27} \\
&2172a^{13}z^{27} + 1382a^{11}z^{27} + 675a^9z^{27} + 210a^7z^{27} + 1866a^{18}z^{26} + 4580a^{16}z^{26} + 4082a^{14}z^{26} \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&-508a^5z^3 - 246a^3z^3 - 55a^3z^3 - 10a^{24}z^2 - 18a^{22}z^2 - 14a^{20}z^2 - 10a^{18}z^2 - 6a^{16}z^2 - 2a^{14}z^2 \\
&+ 6a^{10}z^2 + 10a^8z^2 + 14a^6z^2 + 18a^4z^2 + 10a^2z^2 + 2a^{12}z^2 + 2a^{23}z + 6a^{21}z + 10a^{19}z + 14a^{17}z \\
&+ 18a^{15}z + 22a^{13}z + 26a^{11}z + 30a^9z + 34a^7z + 38a^5z + 31a^3z + 11az + a^{-2} - a^3z^{-1} - az^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(BM^{10}A) &= \\
&a^{14}z^{32} + a^{12}z^{32} + 11a^{15}z^{31} + 10a^{11}z^{31} + 21a^{13}z^{31} + 65a^{16}z^{30} + 153a^{14}z^{30} + 133a^{12}z^{30} \\
&+ 45a^{10}z^{30} + 265a^{17}z^{29} + 676a^{15}z^{29} + 405a^{11}z^{29} + 120a^9z^{29} + 696a^{13}z^{29} + 825a^{18}z^{28} \\
&+ 2096a^{18}z^{28} + 2144a^{14}z^{28} + 1293a^{12}z^{28} + 630a^{10}z^{28} + 210a^8z^{28} + 2067a^{19}z^{27} + 4869a^{17}z^{27} \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&+ 60a^{14}z^3 - 15a^{26}z^2 + 11a^{24}z^2 + 56a^{22}z^2 + 75a^{20}z^2 + 101a^{18}z^2 + 119a^{16}z^2 + 129a^{14}z^2 \\
&+ 131a^{12}z^2 + 125a^{10}z^2 + 111a^8z^2 + 89a^6z^2 + 59a^4z^2 + 21a^2z^2 + 6a^{25}z + 6a^{23}z - a^{24} \\
&- 2a^{22} - 2a^{20} - 2a^{18} - 2a^{16} - 2a^{14} - 2a^{12} - 2a^{10} - 2a^8 - 2a^6 - 2a^4 - 2a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(BM^{10}B) &= \\
&a^{15}z^{33} + z^{13}z^{33} + 11a^{16}z^{32} + 10a^{12}z^{32} + 21a^{14}z^{32} + 66a^{17}z^{31} + 153a^{15}z^{31} + 132a^{13}z^{31} \\
&+ 45a^{11}z^{31} + 275a^{18}z^{30} + 685a^{16}z^{30} + 395a^{12}z^{30} + 120a^{10}z^{30} + 685a^{14}z^{30} + 880a^{19}z^{29} \\
&+ 2165a^{17}z^{29} + 2115a^{15}z^{29} + 1205a^{13}z^{29} + 585a^{11}z^{29} + 210a^9z^{29} + 2277a^{20}z^{28} + 5157a^{18}z^{28} \\
&\dots \dots \\
&\dots \dots \\
&+ 284a^9z^3 + 204a^7z^3 + 108a^5z^3 + 40a^3z^3 + 21a^{26}z^2 + 96a^{24}z^2 + 15a^{22}z^2 - 20a^{20}z^2 \\
&- 16a^{16}z^2 - 12a^{12}z^2 - 8a^8z^2 - 4a^4z^2 + 21a^{27}z - 27a^{25}z - 33a^{23}z - 5a^{21}z - 20a^{19}z \\
&- 16a^{17}z - 16a^{15}z - 12a^{13}z - 12a^{11}z - 8a^9z - 8a^7z - 4a^5z - 4a^3z - a^{24} + a^{25}z^{-1} + a^{23}z^{-1}
\end{aligned}$$

5 总结

线性 Celtic 纽结的 Kauffman 多项式的计算可分为 Laurent 多项式和拧数两部分：

$$F(K) = a^{-w(K)}L(K)$$

其中 Laurent 多项式可用如下矩阵形式递归计算。并且可以通过计算矩阵特征值和解三元一次方程组，得到其通项公式，具体过程可参考 2.3 节内容。

$$\begin{pmatrix} L(AM^n A) \\ L(AM^n B) \\ L(AM^n C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^{-1}z^2 - a^{-1}) & (az + z^2) & -z \\ (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z) & (az^2 + a^2z - z + z^3) & (1 - z^2) \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az \\ a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L(BM^n A) \\ L(BM^n B) \\ L(BM^n C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^{-1}z^2 - a^{-1}) & (az + z^2) & -z \\ (a^{-1}z^3 - 2a^{-1}z) & (az^2 + a^2z - z + z^3) & (1 - z^2) \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a^{-1}z^2 + az^2 - 2a^{-1} - a + z + a^2z \\ -1 + a^{-1}z^{-1} + az^{-1} - 3a^{-1}z - 2az + a^3z + z^2 + a^2z^2 + a^{-1}z^3 + az^3 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

而拧数部分则须根据具体单元组合分别讨论计算。

$$w(BM^n A) = -3 - n + 2 * n \bmod 2$$

$$w(AM^n A) = -2 - n + 2 * n \bmod 2$$

$$w(BM^n B) = \begin{cases} -4 - n & \text{当 } n \text{ 是偶数} \\ 4 + 3n & \text{当 } n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

6 未来的方向

纽结理论是拓扑学中引人入胜的分支，还与群论、矩阵论、代数几何和微分几何等众多数学分支相互交汇。它的思想和方法广泛应用于理论物理、分子化学、生物学等领域。

本文主要采用矩阵论研究线性 Celtic 纽结的 Kauffman 多项式。对于数字矩阵的相关定理和算法，不少教科书和论文已有介绍。但对于符号矩阵，我们掌握得并不多。因此，研究符号矩阵的性质和算法以简化 Celtic 纽结通项公式的推导，将是我们下一步的研究方向。

2021 S.-T. Yau High School Science Award

7 参考文献

参考文献

- [1] Adams C C . The Knot Book[J]. american mathematical society providence ri.
- [2] 姜伯驹. 绳圈的数学 [J]. 1991.
- [3] Kauffman L H . An Invariant of Regular Isotopy[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1990, 318(2):417-471.
- [4] 线性 Celtic 纽结的网页<https://mathcurve.com/courbes3d.gb/celtic/celtic.shtml>
- [5] Mathematica 软件主页 (<https://www.wolfram.com/mathematica/>)
- [6] The Knot Atlas 主页 (http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page)
- [7] Hopf 链环 (AA 组合) 的网页 (<http://katlas.math.toronto.edu/wiki/L2a1>)
- [8] 三叶结 (AB 组合) 的网页 (http://katlas.math.toronto.edu/wiki/3_1)
- [9] L4a1 链环 (BB 组合) 的网页 (<http://katlas.math.toronto.edu/wiki/L4a1>)
- [10] L5a1 链环 (AMA 组合) 的网页 (<http://katlas.math.toronto.edu/wiki/L5a1>)
- [11] L6a2 链环 (AMB 组合) 的网页 (http://katlas.math.toronto.edu/wiki/6_2)
- [12] L7a4 链环 (BMB 组合) 的网页 (http://katlas.math.toronto.edu/wiki/7_4)
- [13] 方保镕, 周继东, 李医民. 矩阵论. 第 2 版 [M]. 清华大学出版社, 2013.

8 致谢

我非常感谢张金波老师。他有着二十多年的生物科教学经验，也是我的班主任，被评为“2021 年番禺区优秀教师”。他首先给我们介绍了纽结与生物 DNA 研究的关系，把我引入到纽结理论的奇妙世界中。他与我一起确定有关纽结的研究课题，还在论文写作过程中无偿给予支持和鼓励。在此，本人对他的耐心教导和专业知识表示衷心感谢！

参赛队员介绍

谭文礼，男，广州市番禺区大石中学初二学生。思维活跃，学习能力强，善于计算机编程和数学，正在自学高中和大学数学内容，并通过计算机编程解决实际问题。

- 2020 年 12 月，参加全国青少年信息学奥林匹克联赛 NOIP 2020（广东赛区），成绩高于二等奖分数线。
- 2020 年 10 月，CCF CSP-S2 组认证二等奖
- 2020 年 10 月，CCF CSP-J2 组认证一等奖
- 2021 年 2 月，参加美国计算机奥林匹克竞赛金组比赛 (USACO)，并晋级铂金组 (最高级别)
- 2021 年 2 月，参加美国数学思维活动 AMC12(主要面向高三学生)，成绩接近 AIME 入选分数线。
- 2020 年 9 月，提交论文《基于快速傅里叶变换变换和光学渲染的水体模拟》参加丘成桐中学科学奖计算机奖。
- 2021 年 2 月，参加北京航空航天大学冯如书院和广东省航空学会共同举办的“点亮心灯——筑起航空梦”航空科普培训。
- 2021 年 1 月，参加中山大学智能工程学院线上科技营。

9 附录

9.1 Solomon 纽结的 Kauffman 多项式

定理 9.1 Solomon 纽结的 Kauffman 多项式是

$$F(\text{Solomon}) = a^5 z^3 - 3a^5 z + a^5 z^{-1} + a^4 z^2 - a^4 + a^3 z^3 - 2a^3 z + a^3 z^{-1} + a^2 z^2 + az$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{Diagram 1}) + L(\text{Diagram 2}) = zL(\text{Diagram 3}) + zL(\text{Diagram 4})$$

即

$$L(\text{Diagram 1}) + L(\text{Diagram 5}) = zL(\text{Diagram 3}) + a^{-3}z$$

因此

$$\begin{aligned} L(\text{Diagram 1}) &= zL(\text{Diagram 3}) + a^{-3}z - L(\text{Diagram 5}) \\ &= z[(-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2] + a^{-3}z - (1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az) \\ &= -2az - a^{-1}z + z^2 + a^{-2}z^2 + az^3 + a^{-1}z^3 + a^{-3}z - 1 + a^{-1}z^{-1} + az^{-1} - a^{-1}z - az \\ &= -3az - 2a^{-1}z + z^2 + a^{-2}z^2 + az^3 + a^{-1}z^3 + a^{-3}z - 1 + a^{-1}z^{-1} + az^{-1} \end{aligned}$$

易知拧数为 -4, 所以

$$\begin{aligned} F(\text{Solomon}) &= a^4(-3az - 2a^{-1}z + z^2 + a^{-2}z^2 + az^3 + a^{-1}z^3 + a^{-3}z - 1 + a^{-1}z^{-1} + az^{-1}) \\ &= a^5 z^3 - 3a^5 z + a^5 z^{-1} + a^4 z^2 - a^4 + a^3 z^3 - 2a^3 z + a^3 z^{-1} + a^2 z^2 + az \end{aligned}$$

证毕

这个结果与文献 [9] 是相容的。

9.2 右手三叶结的 Laurent 多项式

引理 2.3 右手三叶结的 Laurent 多项式是 [3]

$$(-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2$$

证明: 根据拆接关系

$$L(\text{Diagram 1}) + L(\text{Diagram 2}) = zL(\text{Diagram 3}) + zL(\text{Diagram 4})$$

因此

$$\begin{aligned}
L(\text{trefoil}) &= zL(\text{trefoil}) + zL(\text{trefoil}) - L(\text{trefoil}) \\
&= z[a^{-2} + L(\text{trefoil})] - a \\
&= z(1 - a^{-1}z^{-1} - az^{-1} + a^{-1}z + az + a^{-2}) - a \\
&= z - a^{-1} - 2a + a^{-1}z^2 + az^2 + a^{-2}z \\
&= -a^{-1} - 2a + z + a^{-2}z + a^{-1}z^2 + az^2 \\
&= (-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2
\end{aligned}$$

证毕。

9.3 Mathematica 笔记本程序

```

LAA = 1 - a^(-1)*z^(-1) - z^(-1)*a + a^(-1)*z + a*z
LAB = a^(-1)*z^2 + a*z^2 - 2*a^(-1) - a + z + a^2*z
LBA = LAB
LAC = a^2
LBB = -1 + a^(-1)*z^(-1) + a*z^(-1) - 3 a^(-1)*z - 2*a*z + a^3*z + z^2 + a^2*z^2 + a^(-1)*z^3
+ a*z^3
LBC = a^3
T = {{a^(-1)*z^2 - a^(-1), a*z + z^2, -z}, {a^(-1)*z^3 - 2*a^(-1)*z, a*z^2 + a^2*z - z + z^3, 1 -
z^2}, {0, a^2, 0}}
BM0 = {{LBA}, {LBB}, {LBC}}
AM0 = {{LAA}, {LAB}, {LAC}}
n = 10
Expand[Nest[Function[q, T.q], AM0, n]]
TeXForm[%]
Expand[Nest[Function[q, T.q], BM0, n]]
TeXForm[%]

```