

参赛队员姓名： 谢责成, 孙月异, 何浩华

中学： 福州第一中学

省份： 福建省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 1 杨标桂, 2 危志刚

指导教师单位： 1 福建师范大学, 2 福州第一中学

论文题目： 几类特殊中心对称凸体的最优分割问题

2021 S.-T. Yau High School Science Award

论文题目 几类特殊中心对称凸体的最优分割问题

作者 谢责成, 孙月异, 何浩华

论文摘要 本文研究了几类特殊中心对称凸体的最优分割问题. 首先研究了 KLS 猜想的特殊情形: 二维 p -球的最优分割问题, 证明了当 $p=1, 2$ 时, Hamilton 等周量在截面通过二维单位 p -球的中心时取到最优值; 其次, 通过类比欧氏几何和非欧几何, 研究了球面或 Poincare 圆盘上的测地圆盘的测地分割, 也证明最优分割测地线必过测地圆盘的中心. 最后, 由 2 维 p -球推广到 3 维 p -球, 我们研究了正方体的最优截面问题, 证明了正方体的 Hamilton 等周量的优截面必过正方形的中心且与某个底面平行.

关键词 中心对称凸体; p -球; Poincare 圆盘; Hamilton 等周量; 最优分割

1. 论文的选题来源、研究背景

1984年,著名数学家 J. Bourgain 提出了一个猜想:“一个任意维数的凸体,用一个低一维的超平面去平分该凸体,那么存在一个常数 c ,使得凸体的截面中至少存在一个截面的面积大于 c 。”换句话说,如果用一刀平分“任意维度空间的西瓜”,总有一个切面的面积大于 c 。在3维空间中,这个结论似乎很好理解,因为无论西瓜(凸体)长成什么奇形怪状,总不可能在每个角度都细长。

1993年, R. Schneider^[6]研究了中心对称的凸体的最大截面问题:所有的平行的截面当中,通过凸体的对称中心的截面的面积取到最大值。2000年, E. Makai, H. Martini, & T. Ódor. 证明了一个包含坐标原点的凸体,如果它的任意平行截面中,取到体积最大的截面都通过坐标原点,则该凸体一定是关于原点中心对称。

1995年,为证明平面嵌入曲线在曲线收缩流下保持嵌入性, R. Hamilton 研究了平面单连通区域的最优分割问题:设 D 为一个平面上的单连通区域,一条直线 l 把 D 分割成面积分别为 S_1, S_2 的两个区域 D_1, D_2 , 截线段的长度为 L , 求 $\inf G(l) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 。我们受到了这种函数形式启发,决定研究一些欧氏平面上简单二维中心对称图形以及非欧平面上的单位圆盘的最优切割问题。最后我们进一步拓展,研究三维单位正方体的最优切割问题。

2. 每一个队员在论文撰写中承担的工作以及贡献

小组三位成员在完成论文中扮演了同等重要的角色,本篇论文的完成离不开三位成员的通力协作和配合。小组中解决问题分工明确,三位成员共同讨论问题研究方向和解决思路及方法、分工计算和画图。此外,本论文写作过程中,各成员相互细致核对纠错,提高了论文的写作质量。

3. 指导老师与学生的关系,在论文写作过程中所起的作用,及指导是否有偿

危志刚老师为学生们的校内指导老师,杨标桂老师为校外指导老师,两位老师在写作过程中主要负责拓展学生们对问题的理解以及检查写作规范的问题。

4. 他人协助完成的研究成果

无

目录

1. 引言	1
2. 二维单位 p -球的最优截面	3
2.1 正方形的最优分割 ($p=1$)	4
2.2 单位圆盘的最优分割 ($p=2$)	5
3. 球面上测地圆盘的最优测地截线	6
4. Poincare 圆盘的测地圆盘的最优平截线问题	9
5. 正方体的最优截面问题	10
5.1 截面形状为三角形	12
5.2 截面为四边形	13
5.2.1 情形 I	13
5.2.2 情形 II	14
5.3 截面为五边形	15
5.4 截面为六边形	17
6. 结论	18
7. 存在问题与展望	19
参考文献	19

几类特殊中心对称凸体的最优分割问题

谢责成, 孙月异, 何浩华

福州第一中学

摘要 本文研究了几类特殊中心对称凸体的最优分割问题. 首先研究了 KLS 猜想^[4]的特殊情形: 二维 p -球的最优分割问题, 证明了当 $p=1, 2$ 时, Hamilton 等周量^[3]在截面通过二维 p -球的中心时取到最优值; 其次, 通过类比欧氏几何和非欧几何, 研究了球面或 Poincare 圆盘上的测地圆盘的测地分割, 也证明最优分割测地线必过测地圆盘的中心. 最后, 由 2 维 p -球推广到 3 维 p -球, 我们研究了正方体的最优截面问题, 证明了正方体的 Hamilton 等周量的优截面必过正方形的中心且与某个底面平行.

关键词 中心对称凸体; p -球; Poincare 圆盘; Hamilton 等周量; 最优分割

1. 引言

1984 年, 著名数学家 J. Bourgain 提出了一个猜想: “一个任意维数的凸体, 用一个低一维的超平面去平分该凸体, 那么存在一个常数 c , 使得凸体的截面中至少存在一个截面的面积大于 c .” 换句话说, 如果用一刀平分“任意维度空间的西瓜”, 总有一个切面的面积大于 c . 在 3 维空间中, 这个结论似乎很好理解, 因为无论西瓜(凸体)长成什么奇形怪状, 总不可能在每个角度都细长.

1993 年, R. Schneider^[6] 研究了中心对称的凸体的最大截面问题: 所有的平行的截面当中, 通过凸体的对称中心的截面的面积取到最大值. 2000 年, E. Makai, H. Martini, & T. Ódor. ^[5] 证明了一个包含坐标原点的凸体, 如果它的任意平行截面中, 取到体积最大的截面都通过坐标原点, 则该凸体一定是关于原点中心对称.

1995 年, 为证明平面嵌入曲线在曲线收缩流下保持嵌入性, R. Hamilton^[3] 研究了平面单连通区域的最优分割问题: 设 D 为一个平面上的单连通区域, 一条直线 l 把 D 分割成面积分别为 S_1, S_2 的两个区域 D_1, D_2 , 截线段的长度为 L , 求 $\inf G(L) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$. 我们称几何量 G 为 Hamilton 等周量. Hamilton 等周量和 Poincare 不等式密切相关, 它的类似几何量在 Hamilton 之前被 Cheeger, Cianchi 等数学家研究, 受这些工作的启示, 本文将研究二维 p -球的最优切割问题:

问题 I 如图 1.1, 二维单位 p -球定义为: $B_p^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^p + |y|^p \leq 1\}$. 用一条直线分割二维 p 球, 得到的两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 截线段的长度为 L . 研究 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 的最值问题和确定最优截线的几何位置.

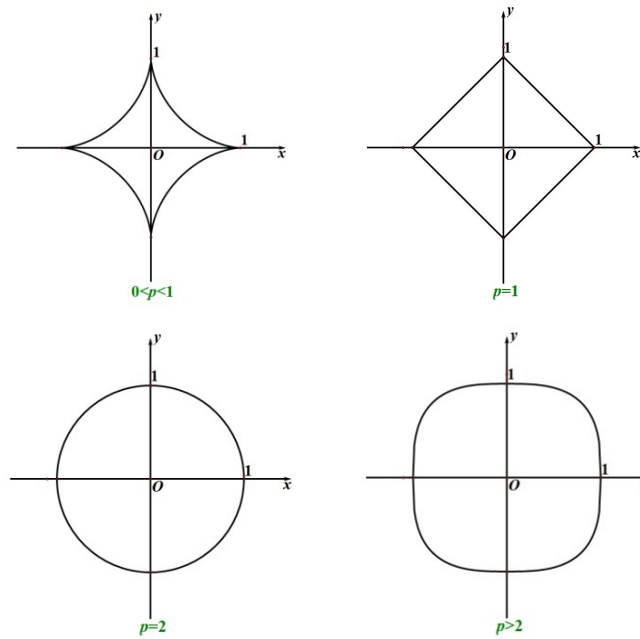


图 1.1 二维单位 p -球

我们将在本文第二节研究问题 I.

由欧氏几何与非欧几何类比, 我们还可以考虑球面上的测地圆盘和双曲圆盘(Poincare disc)上的测地圆盘的最优分割问题:

问题 II 假设球心与小圆的圆心距为 h ($0 \leq h \leq 1$), 用一个过球心的平面与球冠的表面交于一条曲线 Γ , 这条曲线 Γ 将球冠表面分为两部分, 记面积为 S_1, S_2 , 截线 Γ 的长度为 L . 求 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 的最小值和确定最优截线的几何位置.

我们将在本文第三节研究问题 II.

问题 III 用一条测地线分割 Poincare 圆盘上测地圆盘, 得到的两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 截线段的长度为 L , 求 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 的最小值(下确界)和确定最优截线的几何位置.

我们将在本文第四节研究问题 III.

最后, 考虑把 2 维空间中 Hamilton 等周量的问题推广到 3 维空间, 我们将在本文第五节研究 3 维立方体的 Hamilton 等周量的等周问题:

问题 IV 单位正方体被一个平面分割成两部分, 记两部分体积分别为 V_1, V_2 , 截面面积为 S , 找出一种最优截面 σ_0 , 使得 $G(\sigma_0) = S^3(V_1^{-1} + V_2^{-1}) = \bar{G}$, 其中 $\bar{G} = \inf_{\sigma} S^3(V_1^{-1} + V_2^{-1})$.

为了问题求解, 我们需要引入多元对称函数的如下概念和性质(见[2]):

定义 1.1 对于定义在对称连通域 D 上的多元函数 $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若对任意点 $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \in D$, 总有 $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, ($i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$), 则称 $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是标准对称函数.

标准对称函数 $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 所表示的超曲面关于超平面 $X_i = X_j$ 对称.

引理 1.2 若标准对称函数 $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 导出的一阶偏导数方程组

$$\begin{cases} f'_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f'_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f'_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

有解, 则必有 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 型的解.

2. 二维 p -球的最优截面

本节讨论 2 维欧氏平面上的圆盘或更一般的二维 p -球的 Hamilton 等周量的最优问题. 如图 1.1, 二维 p 球定义为: $\mathbf{B}_p^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^p + |y|^p \leq 1\}$, 其中 $p \geq 1$. 用一条直线分割二维 p -球, 得到的两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 截线段的长度为 L . 同样可以研究 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 的最优问题.

由于 $S_1 + S_2 = S_0$, 故 $G = L^2 S_0 / S_1(S_0 - S_1)$, 其中 S_0 是 p -球面积: $S_0 = 4 \int_0^1 \sqrt[p]{1 - x^p} dx$,

$$\text{设 } x^p = u, \text{ 则 } x = u^{\frac{1}{p}}, \text{ 于是 } S_0 = \frac{4}{p} \int_0^1 u^{\frac{1}{p}-1} (1-u)^{\frac{1}{p}} du = \frac{4}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p} + 1\right) = \frac{4 \Gamma(\frac{1}{p} + 1) \Gamma(\frac{1}{p})}{p \Gamma(\frac{2}{p} + 1)},$$

其中 $B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$ 是 Beta 函数. 一般地, 我们定义不完全 Beta 函数: $B(x, a, b) = \int_0^x u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$. 如果 x 取 $(-1, 0)$, 补充定义 $B(x, a, b) = -B(|x|, a, b)$. 当 $x=1$ 时, 不完全 Beta 函数就是 Beta 函数. 而 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du$ ($x > 0$) 是 Γ 函数.

假设最优分割线 A_0 与 p 球的边界 C 交于点 P_1, P_2 , 记 C 在 P_1, P_2 处的切线分别为 ℓ_1, ℓ_2 , 且它们与 \tilde{x} 的夹角分别记为 θ_1, θ_2 . 于是我们有如下结论:

引理 2.1 $\theta_1 = \theta_2$.

证明 如图 2.0, 选取新的坐标 $\tilde{x}\tilde{y}$, 使得最优分割线 A_0 位于 \tilde{y} 轴上, 则 C 在 P_1, P_2 附近的部分可表示为函数 $\tilde{y} = \tilde{y}_{\pm}(\tilde{x})$ 的图像. 考虑最优分割线 A_0 的单参数变分族 A_u , 设 A_u 与 $\tilde{y} = \tilde{y}_{\pm}(\tilde{x})$ 的图像的交点的横坐标分别为 $\pm u$, 则

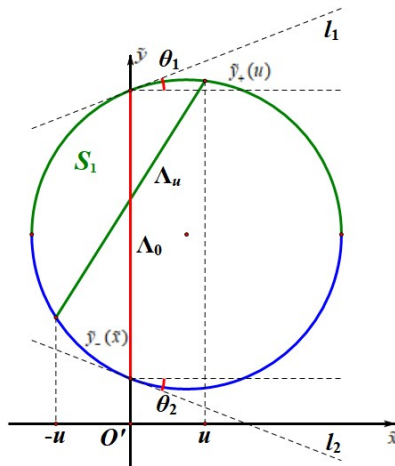


图 2.0

(1) A_u 的长度 $L(u)$ 满足 $L^2(u) = 4u^2 + [\tilde{y}_+(u) - \tilde{y}_+(-u)]^2$. 计算可得

$$\frac{dL}{du} \Big|_{u=0} = \tan\theta_1 - \tan\theta_2.$$

(2) A_u 左侧的面积 $A_1(u)$, 右侧面积 $A_2(u) = A - A_1(u)$.

$$A_1(u) = \int_0^u \tilde{y}_+(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{-u}^0 \tilde{y}_-(\tilde{x}) d\tilde{x} - u[\tilde{y}_+(u) - \tilde{y}_+(-u)],$$

求导可得 $\frac{dA_1}{du} \Big|_{u=0} = 0$. 类似可得 $\frac{dA_2}{du} \Big|_{u=0} = 0$.

由假设得 $G(u) = L^2(u) \left(\frac{1}{A_1(u)} + \frac{1}{A_2(u)} \right)$ 在 $u = 0$ 处取最小值, 可得

$$0 = \frac{dG}{du} \Big|_{u=0} = \tan\theta_1 - \tan\theta_2,$$

由此可知, $\theta_1 = \theta_2$.

因此研究二维单位 p -球的最优分割问题时, 我们只需考虑截线的斜率是 0 或 1 或过 p -球的中心的情形.

一般的二维单位 p -球的 Hamilton 等周量计算比较复杂, 目前初等方法难以得到最优值. 下面我们研究两种简单的二维单位 p -球的最优分割问题.

2.1 正方形的最优分割 ($p=1$)

下面我讨论特殊的单位 p -球, 当 $p=1$ 时, 它是一个边长为 $\sqrt{2}$ 正方形, $S_0 = 2$. 当截线过中心时, 则截线必平分正方形的面积, 故截线最短时 (截线的斜率为 ± 1), G 取到最小值.

情况 2.1.1 截线斜率为 0.

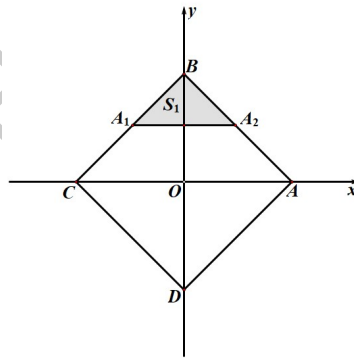


图 2.1.1

设水平直线为 $y = c$, $c \in [0, 1]$, 容易计算得

$$L = 2(1 - c), S_1 = (1 - c)^2, S_2 = 2 - (1 - c)^2,$$

$$G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \frac{8}{2 - (1 - c)^2} \geq 4.$$

情况 2.1.2 截线斜率为 1.

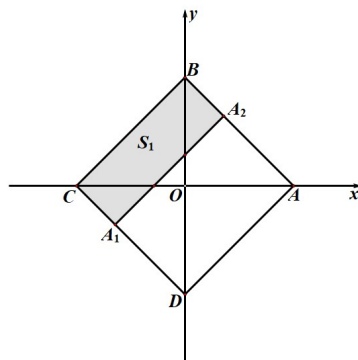


图 2.1.2

此时, 设直线为 $y = x + b, b \in [0, 1]$. 容易计算得

$$L = \sqrt{2}, S_1 = \frac{1-b}{\sqrt{2}}L = 1 - b, S_2 = 1 + b,$$

$$G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \frac{4}{1 - b^2} \geq 4.$$

因此我们得到如下结论:

定理 2.1 $\mathbf{B}_1^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 其中 $p \geq 1$. 用一条直线分割二维 1-球 \mathbf{B}_1^2 , 得到的两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 截线段的长度为 L . 则 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 的最优值为 4, 且最优分割线方程为 $y = \pm x, y = \pm 1, x = \pm 1$.

2.2 单位圆盘的最优分割 ($p=2$)

我们再研究欧氏平面上的二维 2-球, 即圆盘的最优分割问题. 如图 2.2, 设 OA_2 与 y 轴的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

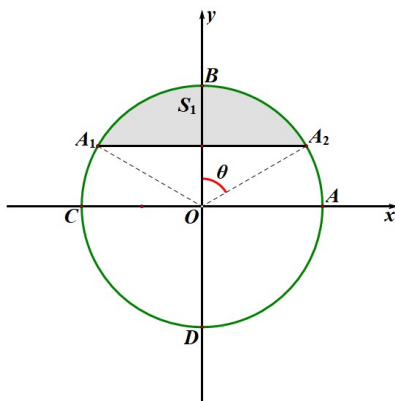


图 2.2

则我们计算有

$$L = 2\sin\theta,$$

$$S_1 = S_{\text{扇形}A_1OA_2} - S_{\Delta A_1OA_2} = \frac{2\theta}{2\pi} \cdot \pi - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

$$G(\theta) = L^2 \cdot \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{\pi - S_1} \right) = 4\pi \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{S_1(\pi - S_1)},$$

$$\begin{aligned}
 G'(\theta) &= 4\pi \cdot \frac{S_1(\pi - S_1)\sin 2\theta - S_1'(\pi - 2S_1)\sin^2 \theta}{S_1^2(\pi - S_1)^2} \\
 &= 4\pi \cdot \frac{S_1(\pi - S_1)\sin 2\theta - 2(\pi - 2S_1)\sin^4 \theta}{S_1^2(\pi - S_1)^2},
 \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
 H(S_1) &= S_1(\pi - S_1)\sin 2\theta - 2(\pi - 2S_1)\sin^4 \theta \\
 &= -S_1^2 \sin 2\theta + (\pi \sin 2\theta + 4 \sin^4 \theta)S_1 - 2\pi \sin^2 \theta,
 \end{aligned}$$

其中 $S_1 \in (0, \pi/2]$, 把 H 看作是 S_1 的二次函数, 对称轴为 $S_1 = \frac{\pi \sin 2\theta + 4 \sin^4 \theta}{2 \sin 2\theta} > \pi/2$. 当 $S_1 = \pi/2$ 时, $H(\pi/2) = 0$, 故 $H(S_1)$ 在区间 $(0, \pi/2]$ 上满足 $H(S_1) \leq 0$, 从而 $G'(\theta) \leq 0$, 故当 $\theta = \pi/2$ 时, $G(\theta)$ 取到最小值 $16/\pi$.

于是, 我们有如下结论:

定理 2.2 用一条直线分割单位圆盘, 得到的两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 截线段的长度为 L . 若 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 取到最小值, 则截线必通过单位圆盘的中心, 且最优值为 $16/\pi$.

3. 球面上测地圆盘的最优测地截线

通过类比欧氏平面上的圆盘, 本节研究非欧平面上的测地圆盘的 Hamilton 等周量的最优问题. 如图, 设 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, 令 $\Omega = S^2 \cap \{(x, y, z) | h \leq z \leq 1\}$ 是 S^2 的测地圆盘(球冠). 假设平面 $\Pi: ax + by + cz = 0$ 将 Ω 分为两部分 $\Omega_1 \cup \Omega_2$, 分割线 $\gamma = \Pi \cap \Omega$. 记 $S_i = A(\Omega_i)$ 为 Ω_i 的面积 ($i=1, 2$), L 为分割线(大圆弧) γ 的长度. 令

$$G(\Pi) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}), \quad G_0 = \inf_{\Pi} G(\Pi).$$

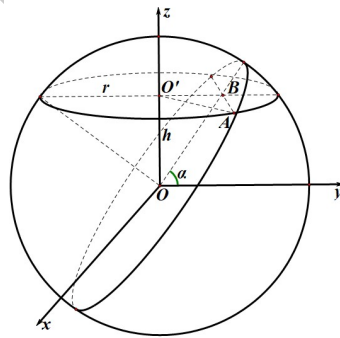


图 3.1

定理 3.1 $\inf_{\Pi} G(\Pi) = G(\Pi_0)$, 其中 Π_0 是过 z 轴的平面, 即 Π_0 的方程为 $ax + by = 0$, a, b 不全为 0, 且

$$G(\Pi_0) = \frac{4 \arccos^2 h}{\pi^2 (1-h)^2}.$$

证明 首先说明最优分割的平面 Π_0 必过 z 轴, 我们利用反证法. 假设最优分割 $\Pi_0 = \Pi_0 \cap \Omega$

不过点 $N(0, 0, 1)$. 由于 $G(\Pi)$ 在伸缩变换下不改变, 故可考虑将测地圆盘 Ω 以 $N(0, 0, 1)$ 为中心“放大”, 即 $\forall P(x, y, z) \in \Omega$,

$$\bar{d}(N, P) = \lambda d(N, P) = \lambda \arcsin \sqrt{1 - z^2}.$$

显然, 按上述新定义后距离 \bar{d} , 当 λ 趋于正无限时, Ω 将变得越来越“平坦”, $\partial\Omega$ 将变成半径越来越大的圆周, 最优分割线 Γ_0 将变得越来越接近平面圆盘上一条不过圆心的弦, 由此推知, 对于欧氏圆盘, 实现最优分割的弦可以不是直径. 另一方面, 根据二维 p -球的结论, 欧氏圆盘实现最优分割的弦必为直径, 由此得到矛盾, 在球面 S^2 , 测地圆盘 Ω 的最优分割线必过 Ω 的中心, 由于截线过圆盘中心, 由立体几何知识容易计算得到 $G(\Pi_0) = \frac{4 \arccos^2 h}{\pi^2 (1-h)^2}$.

下面我们利用微积分方法计算相关的几何量, 并给出定理 3.1 的另一种证明方法.

假设截面与赤道平面的夹角为 α , α 的取值范围为 $(\arcsin h, \frac{\pi}{2})$. 我们将用球坐标的方法, 计算面积 S_1 , 以球心为原点建立直角坐标系, 同时引入球面坐标系:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad \theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi), \\ z = R \cos \theta, \end{cases}$$

这里 $R=1$, 所以目标是确定 θ, φ 的积分上下限. 球冠中的下底圆的半径 $r = \sqrt{1-h^2}$, 由图 3.1 可以看出: $\tan \alpha = \frac{h}{O'B}$, 所以 $O'B = h \cdot \cot \alpha$, $\sin \varphi = \frac{O'B}{O'A} = \frac{h \cdot \cot \alpha}{\sqrt{1-h^2}}$, 所以 $\varphi \in (\arcsin \frac{h \cdot \cot \alpha}{\sqrt{1-h^2}}, \frac{\pi}{2})$ (由对称性, 只需考虑到 $\frac{\pi}{2}$ 即可).

下面考虑给定一个 φ , 求 θ 的范围, θ 的上界为 $\arccos h$, 下面需要知道点 A 的坐标. 设 $A(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, 点 A 在截面上, 可以令截面绕着 x -轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{2} - \alpha$, 用三维

坐标旋转矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$, 旋转后坐标 $y = 0$, 且 $x^2 + z^2 = 1$. 由坐标旋转公式得 $\sin \alpha \sin \varphi \sin \theta = \cos \theta \cos \alpha$, $\tan \theta \sin \varphi = \cot \alpha$, 所以

$$\theta = \arctan \frac{1}{\sin \varphi \tan \alpha}, \quad \theta \in (\arctan \frac{1}{\sin \varphi \tan \alpha}, \arccos h).$$

下面可以计算剖分部分的面积, 即计算积分:

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{2} &= \int_{\arctan \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\arctan \frac{1}{\sin \varphi \tan \alpha}}^{\arccos h} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= - \int_{\arctan \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \cos \theta \Big|_{\arctan \frac{1}{\sin \varphi \tan \alpha}}^{\arccos h} \, d\varphi \\ &= \int_{\arctan \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi \tan^2 \alpha}}} - h \right) \, d\varphi \\ &= \int_{\arctan \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}} \, d\varphi - h \cdot \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \\ &= - \int_{\arctan \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} - \cos^2 \varphi}} \, d\cos \varphi - h \cdot \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\arctan \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \varphi}{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}}} d\cos \varphi - h \cdot \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \\
&= - \arcsin \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}}} \Big|_{\arcsin \frac{h}{\tan^2 \alpha \sqrt{1-h^2}}}^{\frac{\pi}{2}} - h \arccos \frac{h}{\tan^2 \alpha \sqrt{1-h^2}} \\
&= \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}}} \sqrt{1-\frac{h^2}{\tan^2 \alpha (1-h^2)}} - h \arccos \frac{h}{\tan \sqrt{1-h^2}} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{(1-h^2) \tan^2 \alpha - h^2}{(\tan^2 \alpha + 1)(1-h^2)}} - h \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \\
&= \arccos \sqrt{1 - \sin^2 \alpha + \frac{h^2}{(\tan^2 \alpha + 1)(1-h^2)}} - h \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \\
&= \arccos \sqrt{\cos^2 \alpha \left(1 + \frac{h^2}{(1-h^2)}\right)} - h \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \\
&= \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-h^2}} - h \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} \\
&= \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-h^2}} - h \arccos \frac{h}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$

其次计算测地截线长度:

$$L = 2h \arccos \frac{h}{\sqrt{1-h^2} \tan \alpha} = 2 \arccos \frac{h}{\sin \alpha}.$$

于是

$$G = \frac{L^2}{S(S_0-S)} = \frac{\left(\arccos \frac{h}{\sin \alpha}\right)^2}{\left[\arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-h^2}} - h \arccos \frac{h}{\sin \alpha}\right] \left[\pi(1-h) - \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-h^2}} + h \arccos \frac{h}{\sin \alpha}\right]}.$$

我们发现当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan \alpha$ 无意义, 作三角变换 $\frac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow \alpha$, 则 G 的表达式为:

$$G = \frac{L^2}{S(S_0-S)} = \frac{\left(\arccos \frac{h}{\cos \alpha}\right)^2}{\left[\arccos \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}} - h \arccos \frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right] \left[\pi(1-h) - \arccos \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}} + h \arccos \frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right]}.$$

求导可得

$$\begin{aligned}
G' &= \frac{2h \sin \alpha \arccos \left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)}{\sqrt{1-\frac{h^2}{\cos^2 \alpha}} \cos^2 \alpha \left(\arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right) - h \arccos \left(\frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right)\right) \left(h \arccos \left(\frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right) - \arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right) - \pi h + \pi\right)} \\
&\quad \frac{\left(\frac{h^2 \sec^2 \alpha}{\sqrt{1-h^2-h^2 \tan^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - h^2}}\right) \arccos^2 \left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)}{\left(\arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right) - h \arccos \left(\frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right)\right)^2 \left(h \arccos \left(\frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right) - \arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}}\right) - \pi h + \pi\right)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - h^2}} - \frac{h^2 \sec^2 \alpha}{\sqrt{1-h^2-h^2 \tan^2 \alpha}} \right) \arccos^2 \left(\frac{h}{\cos \alpha} \right)}{\left(\arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}} \right) - h \arccos \left(\frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}} \right) \right) \left(h \arccos \left(\frac{h \tan \alpha}{\sqrt{1-h^2}} \right) - \arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-h^2}} \right) - \pi h + \pi \right)^2}.$$

由 $G' = 0$ 解得 $\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 于是 $\alpha = 0$, 截线过圆盘中心, 同样可知 G 取到最小值为

$$\frac{4 \arccos^2 h}{\pi^2 (1-h)^2}.$$

4. Poincare 圆盘的测地圆盘的最优平截线问题

同样类比欧氏空间的圆盘, 本节研究 Poincare 圆盘上的测地圆盘的 Hamilton 等周量的最优问题.

考虑复平面 \mathbf{C} 上单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z = x + iy \mid |z| < 1\}$, 在 \mathbb{D} 上赋予度量

$$ds^2 = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} dzd\bar{z} = \frac{4(dx^2+dy^2)}{[1-(x^2+y^2)]^2}.$$

于是, 我们便得到双曲几何的 Poincare 圆盘(Poincare disc)模型, 记作 \mathbb{D}_p . 关于 Poincare 圆盘 \mathbb{D}_p 的以下事实是熟知的, 其证明参见[1].

\mathbb{D}_p 中的双曲直线(测地线)是和 $\partial\mathbb{D} = \{z \mid |z| = 1\}$ 的垂直的直线(直径)和圆弧(见图 4.1).

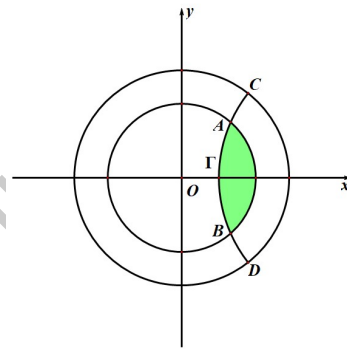


图 4-1

设 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_p$ 是 Poincare 圆盘中的两点, 则 z_1, z_2 间的双曲距离为

$$d_{\mathbb{D}_p}(z_1, z_2) = 2 \tanh^{-1} \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} = \log \frac{1 + \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}}{1 - \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}}.$$

下面考虑 Poincare 圆盘上的测地圆盘 $\Omega = \{z \mid |z| \leq r_0\}$, $0 < r_0 < 1$.

设双曲直线 ℓ 将 Ω 分为两部分为 Ω_1, Ω_2 记 $\Gamma = \Omega \cap \ell$, L 为 Γ 的双曲直线的长度, S_i 为 Ω_i 的双曲面积 $i = 1, 2$, 定义 $G(\Gamma) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \inf G(\Gamma)$.

我们有如下结果:

定理 4.1 用一条测地线分割 Poincare 圆盘上的测地圆盘, 得到的两部分的面积分别为 S_1, S_2 , 截线段的长度为 L . 若 Hamilton 等周量 $G = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})$ 取到最小值(下确界), 则截线必通过 p -球的中心.

证明 由于 Hamilton 等周量在度量的伸缩变换下不变, 故可以对 Poincaré disc 作伸缩变换, 使得其测地圆盘变得越来越接近平坦圆盘, 则最优分割截线会越来越接近直线段. 如果最优分割截线不过对称中心, 则它会趋近于平坦圆盘上的一条不是直径的弦, 由此推出平坦圆盘上的非直径的弦实现最优分割, 从而导出矛盾! 故最优截线必过对称中心.

下面我们计算 Hamilton 等周量 G 的最优值.

定理 4.2 $\inf G(\Gamma) = G(\Gamma_0)$, 其中 $\Gamma_0 = \Omega \cap \ell$ 垂直于 Ω (也垂直于 $\partial\mathbb{D}$) 且

$$G(\Gamma_0) = 4 \left(\log \frac{1+r_0}{1-r_0} \right)^2 \frac{1+r_0^2}{\pi r_0^2}.$$

证明 由定理 4.1 可知最优截线 ℓ 必过测地圆盘 Ω 的中心, 且 ℓ 必垂直于 $\partial\Omega = \{z : |z| = r_0\}$.

计算测地圆盘 $\Omega = \{z : |z| \leq r_0\}$ 的面积 $A(\Omega)$. Poincaré 度量

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1-r^2)^2} = E dr^2 + H d\varphi^2,$$

其中 $E = \frac{4}{(1-r^2)^2}$, $H = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}$. 于是

$$A(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sqrt{EH} \, dr d\varphi = 2\pi \int_0^{r_0} \frac{4r}{(1-r^2)^2} \, dr = \frac{4\pi r_0^2}{1-r_0^2},$$

$$L^2 = 2 \log \frac{1+r_0}{1-r_0},$$

$$G_0 = \inf_{\Gamma} G(\Gamma) = L_0^2 \cdot \frac{4}{A(\Omega)} = 4 \left(\log \frac{1+r_0}{1-r_0} \right)^2 \frac{1+r_0^2}{\pi r_0^2}.$$

5. 正方体的最优截面问题

考虑把 2 维中心对称几何体的 Hamilton 等周量的问题推广到 3 维中心对称几何体, 我们将在本节展开研究一类特殊的 3 维 p -球, 即 (3 维) 立方体的 Hamilton 等周量的等周问题.

设单位正方体被平面切割成两部分, 记两部分体积分别为 V_1, V_2 , 截面面积为 S , 找出一种切割 σ_0 , 使得 $G(\sigma_0) = S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1}) = \bar{G}$, 其中 $\bar{G} = \inf_{\sigma} S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1})$. 由于 $V_1 + V_2 = 1$, 故

$$G(\sigma) = S^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{V_1(1-V_1)} \right).$$

我们考虑截面的形状和位置, 分以下 5 种情况分别进行讨论.

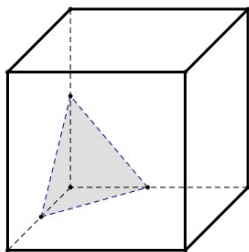


图 5.1 三角形

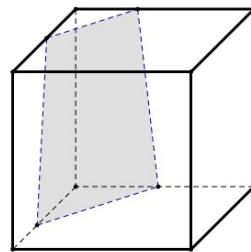


图 5.2 四边形 A

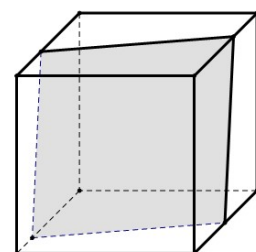


图 5.3 四边形 B

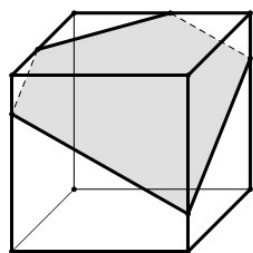


图 5.4 五边形

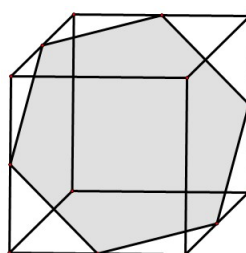


图 5.5 六边形

为了描述截面的位置, 我们建立统一坐标系. 我们以正方体的某一个顶点为原点, 以正方体交于该顶点的三条棱为坐标轴建立空间直角坐标系, 如下图 5.6 所示:

设截面 σ 与 x 轴, y 轴, z 轴分别交于点 A_0, B_0, C_0 , 连接 A_0B_0, B_0C_0, A_0C_0 , 设 $A_0O = a, B_0O = b, C_0O = c$. 则截面完全由参数 a, b, c 确定, 因此截面可记为 $\sigma(a, b, c)$.

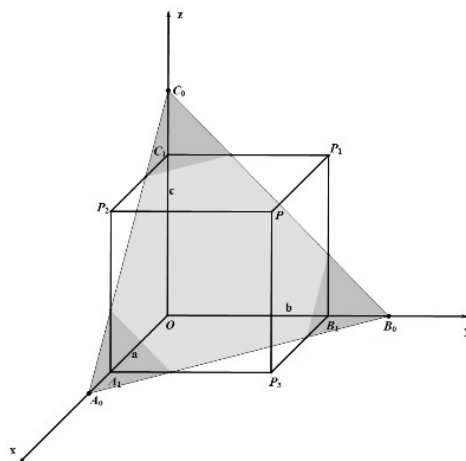


图 5.6

根据参数 a, b, c 的不同取值范围, 我们可以得到如下命题:

命题 5.1 (1) 如图 5.1, 当参数 a, b, c 满足 $\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 0 < b \leq 1, \\ 0 < c \leq 1 \end{cases}$ 时, 截面 $\sigma(a, b, c)$ 为三角形;

(2) 如图 5.2, 当参数 a, b, c 满足 $\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 0 < b \leq 1, \text{ 或} \\ c > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ b > 1, \\ c > 1 \end{cases}$ 时, 截面 $\sigma(a, b, c)$ 为四边形;

(3) 如图 5.4, 当参数 a, b, c 满足 $\begin{cases} 0 < \frac{(a-1)c}{a} < 1, \\ 0 < \frac{(b-1)c}{b} < 1, \text{ 且 } a, b, c \in (1, +\infty) \text{ 时, 截面 } \sigma(a, b, c) \\ \frac{b(a-1)}{a} \geq 1 \end{cases}$

为五边形;

(4) 如图 5.5, 当参数 a, b, c 满足 $\begin{cases} \frac{b(a-1)}{a} < 1, \\ \frac{c(a-1)}{a} < 1, \\ a, b, c \in (1, +\infty) \end{cases}$ 截面 $\sigma(a, b, c)$ 为六边形.

5.1 截面形状为三角形

此种情形的截面图如下:

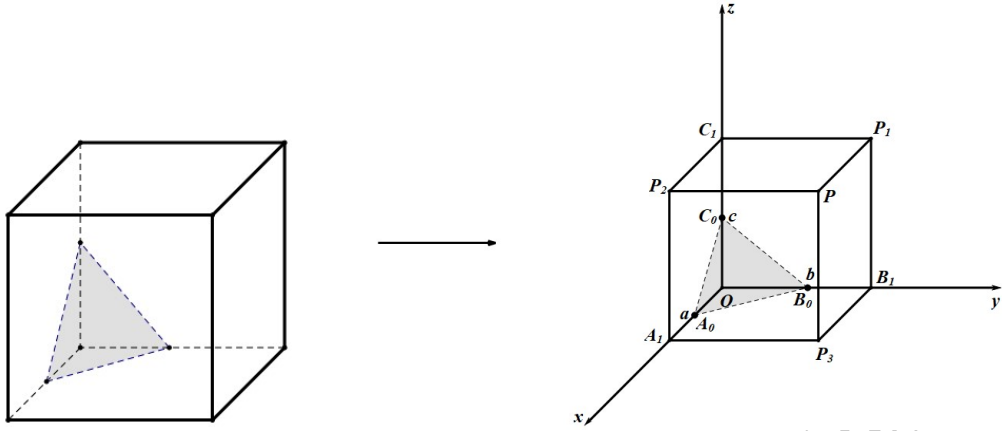


图 5.7

在三棱锥 $O-A_0B_0C_0$ 中, $OA_0 \perp OB_0, OA_0 \perp OC_0, OB_0 \perp OC_0, OA_0 = a, OB_0 = b, OC_0 = c$, 其中 $a, b, c \in (0, 1]$, 以 $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OC_0}$ 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A_0(a, 0, 0), B_0(0, b, 0), C_0(0, 0, c)$, 于是 $\overrightarrow{A_0B_0} = (-a, b, 0), \overrightarrow{B_0C_0} = (-a, 0, c)$,

$$S_{\Delta A_0B_0C_0} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{B_0C_0}| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}, \quad (5.1)$$

$$V_1 = V_{O-A_0B_0C_0} = \frac{1}{6} abc, \quad V_2 = 1 - V_1 = 1 - \frac{1}{6} abc,$$

$$G(a, b, c) = S^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\frac{1}{6}abc} + \frac{1}{1 - \frac{1}{6}abc} \right).$$

令 $F(a, b, c) = G^4(a, b, c) = \left(\frac{1}{2} \right)^6 \cdot 6^4 \cdot (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^3 \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{6-abc} \right)^4$, 其中 $a, b, c \in (0, 1]$.

于是可得

$$F'_a(a, b, c) = \frac{6^5}{2^6} (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^2 \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{6-abc} \right)^3 \left\{ a(b^2 + c^2) \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{6-abc} \right) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \left[\frac{-1}{a^2bc} + \frac{bc}{(6-abc)^2} \right] \right\} = 0; \quad (5.2)$$

$$F'_b(a, b, c) = \frac{6^5}{2^6} (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{6-abc} \right)^3 \left\{ b(a^2 + c^2) \left(\frac{1}{abc} + \frac{1}{6-abc} \right) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \left[\frac{-1}{ab^2c} + \frac{ac}{(6-abc)^2} \right] \right\} = 0. \quad (5.3)$$

由(5.2), (5.3)得 $a=b=c=0$ 或 $a=b$, 分析可知, 必有 $a=b$.

由对称性可知 $a=b=c$, 故 $F(a, b, c) = \frac{6^5}{2^6} (3a^4)^3 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{6-a^3} \right)^4$.

$$F'_a(a, b, c) = 72a^{11} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{6-a^3} \right)^3 \frac{1}{(6-a^3)^2} \geq 0, \quad a \in (0, 1].$$

所以 $F(a)$ 在 $(0, 1]$ 单调递增, $\inf F(a, b, c) = \lim_{a=b=c \rightarrow 0} F(a, b, c) = \frac{3^7}{4}$, 从而

$$G_1 = [\inf F(a, b, c)]^{\frac{1}{4}} = \frac{3^{\frac{7}{4}} \sqrt{2}}{2}.$$

于是可得如下结论:

命题 5.1 当截面为 $\sigma_0 = \sigma(0, 0, 0)$, $G_1 = G(\sigma_0) = \inf_{\sigma} S^2 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = \frac{7}{2} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

5.2 截面为四边形

此时存在两种情况, 对它们分开进行研究.

情形 5.2.1

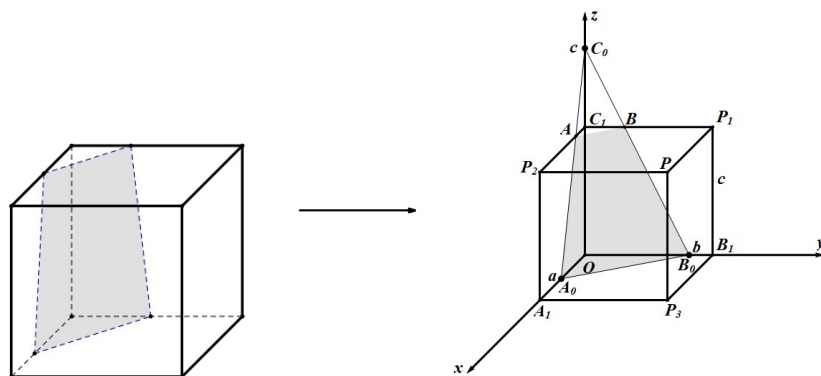


图 5.8

设 $A_0O = a, B_0O = b, C_0O = c$, 由几何关系可以推知: $\frac{AC_1}{A_0O} = \frac{C_0C_1}{C_0O} = \frac{c-1}{c} \Rightarrow AC_1 = \frac{a(c-1)}{c}$. 同理

可得 $BC_1 = \frac{b(c-1)}{c}$. 由于 $AC_1 \leq 1, BC_1 \leq 1, C_0C_1 > 0$, 即 $\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 0 < b \leq 1, \\ c > 1. \end{cases}$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right) \cdot c - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}AC_1 \cdot BC_1\right) \cdot C_0C_1 = \frac{1}{6} \left(abc - \frac{ab(c-1)^3}{c^2}\right),$$

$$\text{由(2.1)知 } S_{\Delta A_0B_0C_0} = |\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{B_0C_0}| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2},$$

$$\frac{S_{\text{四边形}ABB_0A_0}}{S_{\Delta A_0B_0C_0}} = 1 - \frac{S_{\Delta ABC_0}}{S_{\Delta A_0B_0C_0}}, \frac{S_{\Delta ABC_0}}{S_{\Delta A_0B_0C_0}} = \left(\frac{c-1}{c}\right)^2, S_{\text{四边形}ABB_0A_0} = \frac{2c-1}{2c^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}.$$

$$\text{令 } F(a, b, c) = S_{\text{四边形}ABB_0A_0}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{V_1(1-V_1)} = \left(\frac{2c-1}{2c^2}\right)^{\frac{3}{2}} (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^{\frac{3}{4}} \frac{6}{[abc - \frac{ab(c-1)^3}{c^2}][6 - abc + \frac{ab(c-1)^3}{c^2}]}.$$

$F(a, b, c)$ 关于 a, b 轮换对称,

$$\begin{cases} F'_a(a, b, c) = \frac{3c(2c-1)^{\frac{3}{2}} (b(c^2+b^2))(3c^2-3c+1)a^3 + 6c^2(c^2+b^2)a^2 + 4b^3c^2(3c^2-3c+1)a - 12b^2c^4}{2^{\frac{3}{2}}b(3c^2-3c+1)a^2(b(3c^2-3c+1)a - 6c^2)^2 \sqrt[4]{c^2a^2 + b^2a^2 + b^2c^2}}, \\ F'_b(a, b, c) = \frac{3c(2c-1)^{\frac{3}{2}} (a(c^2+a^2))(3c^2-3c+1)b^3 + 6c^2(c^2+a^2)b^2 + 4a^3c^2(3c^2-3c+1)b - 12a^2c^4}{2^{\frac{3}{2}}a(3c^2-3c+1)b^2(a(3c^2-3c+1)b - 6c^2)^2 \sqrt[4]{c^2b^2 + a^2b^2 + a^2c^2}}. \end{cases}$$

$$\text{令 } \begin{cases} F'_a(a, b, c) = 0, \\ F'_b(a, b, c) = 0. \end{cases} \text{ 由 } F'_a(a, b, c) - F'_b(a, b, c) = 0 \text{ 可得}$$

$$3(2c-1)^{\frac{3}{2}} \cdot c^3 \cdot (b-a)(b+a)[(3c^2-3c+1)ab - 18c^2] = 0.$$

故 $a = b$ 或 $(3c^2 - 3c + 1)ab - 18c^2 = 0$. 由于

$$(3c^2 - 3c + 1)ab - 18c^2 \leq -15c^2 - 3c + 1 < 0,$$

所以 $F(a, b, c)$ 存在唯一驻点满足 $a = b$. 于是我们考虑目标函数

$$F(a, b, c) = \left(\frac{2c-1}{2c^2}\right)^{\frac{3}{2}}(a^4 + 2a^2c^2)^{\frac{3}{4}} \left[\frac{6}{\left(\frac{3c^2-3c+1}{c^2}a^2\right)\left(6 - \frac{3c^2-3c+1}{c^2}a^2\right)} \right].$$

令 $f(a, c) = \left(\frac{2c-1}{2c^2}\right)^{\frac{3}{2}}(a^4 + 2a^2c^2)^{\frac{3}{4}} \left[\frac{6}{\left(\frac{3c^2-3c+1}{c^2}a^2\right)\left(6 - \frac{3c^2-3c+1}{c^2}a^2\right)} \right]$, 则有

$$f'_a(a, c) = \frac{9\sqrt{2} \cdot c \cdot (2c-1)^{\frac{3}{2}} [(3c^2-3c+1)a^4 + (15c^4-15c^3+11c^2)a-6c^4]}{(3c^2-3c+1)a[(3c^2-3c+1)a-6c^2]^2(a^4+2c^2a^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$f'_c(a, c) = \frac{9\sqrt{2}c(2c-1)^{\frac{1}{2}}[(45a^2-18)c^4 + (21a^4-156a^2+30)c^5 + (21a^4-64a^2)c^3 + (3a^4+11a^2)c^2 - 5a^4c+a^4]}{(3c^2-3c+1)^2 \cdot (2a^2c^2+a^4)^{\frac{3}{4}} [3a^2-6c^2-3a^2c+a^2]^2}$$

令 $c = \frac{k}{k-1}$, 或 $k = \frac{c}{c-1}$, 把 k 代入 $f(a, c)$, 可得

$$f(a, k) = \frac{36}{2^{\frac{3}{2}}}(1+k)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(2+a^2(k-1)^2)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}(k^2+k+1)[6-a^2(k^2+k+1)]}$$

因为驻点为可疑的极值点, 联立 $\begin{cases} f'_a(a, k) = 0, \\ f'_c(a, k) = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{2}{5}}, \\ k = 1, \end{cases}$ 经检验得 $(\sqrt{\frac{2}{5}}, 1)$ 为 $f(a, k)$

定义域内的极小值点. 比较边界, 得 $G_2 = f(\sqrt{\frac{2}{5}}, 1) = \frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{5}{2}}}$. 于是可得如下结论:

命题 5.2A 当截面为 $\sigma_0 = \sigma\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \infty\right)$, $G_2 = G(\sigma_0) = \inf_{\sigma} S^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right) = \frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{5}{2}}}$.

情形 5.2.2

设平面分别交 x 轴, y 轴, z 轴于 A_0, B_0, C_0 , 交正方形于点 A_0, B, C, D , 分别作 A_0, B 在面上的投影 E, F , 连接 EF, A_0E, BF . 设 $OA_0 = a, OB_0 = b, OC_0 = c, a \in (0, 1], b \in [1, +\infty), c \in (1, +\infty), PF = x, P_2E = y, CF = DE = z, x, y, z \in [0, 1], (x+z) \in [0, 1]$, 由几何关系知 $x = \frac{a+b-ab}{b}$, $y = 1 - a, z = \frac{a}{c}, BC = \sqrt{z^2 + 1}, CD = EF = \sqrt{(x-y)^2 + 1}$.

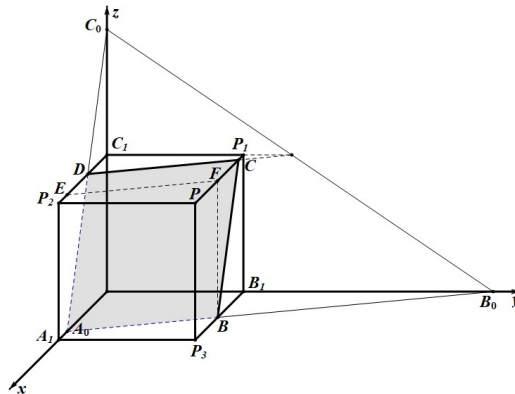


图 5.9

设 $\angle BCD = \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \cdot CD} = \frac{z(x-y)}{\sqrt{[(x-y)^2+1](z^2+1)}}$, 所以 $\sin \theta = \sqrt{\frac{[(x-y)^2+1](z^2+1) - z^2(x-y)^2}{[(x-y)^2+1](z^2+1)}}$,

则 $S_{\text{四边形 } A_0BCD} = \sqrt{(x-y)^2 + z^2 + 1}$. 令

$$V_1 = V_{\text{凸六面体 } A_1P_3BA_0-P_2PCD} = V_{\text{四棱柱 } A_1P_3BA_0-P_2PFE} + V_{\text{三棱柱 } BCF-A_0DE} \\ = (S_{\text{四边形 } P_2PFE} + S_{\triangle BCF}) \cdot 1 = \frac{x+y+z}{2}.$$

$$\text{令 } F(x, y, z) = G^4 = [(x-y)^2 + z^2 + 1]^3 \cdot \frac{4^4}{(x+y+z)^4 [2-(x+y+z)]^4}.$$

令 $F(x, y, z) = G^4 = [(x-y)^2 + z^2 + 1]^3 \cdot \frac{4^4}{(x+y+z)^4 [2-(x+y+z)]^4}$. 得到

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z) = \frac{(x+z+y-2) \left(1536(x-y)(x+z+y) \left((x-y)^2 + z^2 + 1 \right)^2 - 1024 \left((x-y)^2 + z^2 + 1 \right)^3 \right) - 1024(x+z+y) \left((x-y)^2 + z^2 + 1 \right)^3}{(x+z+y-2)^5 (x+z+y)^5}, \\ F'_y(x, y, z) = \frac{(y+z+x-2) \left(1536(y-x)(y+z+x) \left((y-x)^2 + z^2 + 1 \right)^2 - 1024 \left((y-x)^2 + z^2 + 1 \right)^3 \right) - 1024(y+z+x) \left((y-x)^2 + z^2 + 1 \right)^3}{(y+z+x-2)^5 (y+z+x)^5}. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} F'_x(x, y, z) = 0, \\ F'_y(x, y, z) = 0, \end{cases}$ 由 $F'_x(x, y, z) - F'_y(x, y, z) = 0$ 可得

$$(x-y)(x+y+z-2)(x+y+z)[(x-y)^2 + z^2 + 1]^2 = 0.$$

因为 $x+z \in [0, 1]$, $y < 1$, 可得 $x+y+z-2 < 0$, $x+y+z > 0$, $(x-y)^2 + z^2 + 1 > 0$.

故 $F(x, y, z)$ 存在唯一驻点满足 $x = y$, 所以我们有

$$F(x, y, z) = 4^4 \cdot (z^2 + 1)^3 \cdot \frac{1}{(2x+z)^4} \cdot \frac{1}{(2-2x-z)^4}.$$

$$\text{再令 } f(x, z) = 4(z^2 + 1)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{(2x+z)(2-2x-z)}.$$

因为驻点为可疑的极值点, 再由 $\begin{cases} f'_x(x, z) = 0, \\ f'_z(x, z) = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$ 经检验得 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 为 $F(x, y, z)$

在定义域内的最小值点, 此时 $G_3 = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = 4$.

于是可得如下结论:

命题 5.2B 当截面为 $\sigma_0 = \sigma(\frac{1}{2}, \infty, \infty)$, $G_3 = G(\sigma_0) = \inf_{\sigma} S^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}) = 4$.

5.3 截面为五边形

设 $A_0(a, 0, 0), B_0(0, b, 0), C_0(0, 0, c)$, 则由相似原理可知 $A_0A_1 = a-1$, $AA_1 = \frac{(a-1)c}{a}$,

$A_1N = \frac{(a-1)b}{a}$. 由于 $AA_1 < 1$, 即 $\frac{(a-1)c}{a} < 1$. 同理有 $\frac{(b-1)c}{b} < 1$. 又由于 $BP_3 \geq 0$, 即 $ab \geq a+b$.

设 $S_1 = S_{\triangle AA_0N} = \frac{(a-1)^2}{2a^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$, 同理有:

$$S_2 = S_{\triangle CMB_0} = \frac{(b-1)^2}{2b^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad S_3 = S_{\triangle DEC_0} = \frac{(c-1)^2}{2c^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

又由 $MP_3 = \frac{ab-a-b}{b}$, $NP_3 = \frac{ab-a-b}{a}$, $BP_3 = \frac{c(ab-a-b)}{ab}$, 可得

$$S_4 = S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2} \left(\frac{ab-a-b}{ab} \right)^2 \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \quad S = S_{\Delta A_0B_0C_0} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

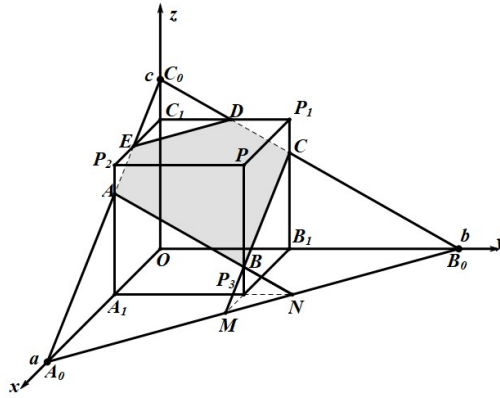


图 5.10

$$\text{令 } W = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{c}\right)^2, \quad P = \left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + \left(\frac{c-1}{c}\right)^3, \quad Q = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\text{设 } S' = S_{\text{五边形}ABCDE} = S - S_1 - S_2 - S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \left[1 - W + \left(\frac{ab-a-b}{ab}\right)^2 \right] \sqrt{Q},$$

$$V_1 = V_{\text{三棱锥}A-A_0NA_1} = \frac{(a-1)^3}{6a^2}, \quad V_2 = V_{\text{三棱锥}C-B_0MB_1} = \frac{(b-1)^3ac}{6b^2}, \quad V_3 = V_{\text{三棱锥}C_0-GED} = \frac{(c-1)^3ab}{6c^2},$$

$$V_4 = V_{\text{三棱锥}B-P_3MN} = \frac{(ab-a-b)^3c}{6a^2b^2}, \quad V = V_{\text{三棱锥}O-A_0B_0B_0} = \frac{abc}{6}.$$

平面将正方体截为前后两部分, 分别记为 $V_{\text{前}}, V_{\text{后}}$, 则有

$$V_{\text{后}} = V - V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = \frac{abc}{6} \left[1 - P + \left(\frac{ab-a-b}{ab}\right)^3 \right],$$

$$V_{\text{前}} = 1 - V_{\text{后}} = 1 - \frac{abc}{6} \left[1 - P + \left(\frac{ab-a-b}{ab}\right)^3 \right],$$

$$\text{设 } F(a, b, c) = G^4 = \frac{6^4}{2^6} Q^3 \left[1 - W + \left(\frac{ab-a-b}{ab}\right)^2 \right]^6 \left\{ \frac{1}{abc[1 - P + (\frac{ab-a-b}{ab})^3]} + \frac{1}{6 - abc[1 - P + (\frac{ab-a-b}{ab})^3]} \right\}^4.$$

因为 W, P, Q 为关于 a, b 的轮换对称函数, 由引理 1.2 得若方程组 $\begin{cases} F'_a(a, b, c) = 0, \\ F'_b(a, b, c) = 0 \end{cases}$ 有实数

解, 则必有 $a=b$. 经计算分析可知驻点是唯一的, 所以

$$F(a, c) = \frac{6^4}{2^6} a^6 (2a^2 + c^2)^3 \left[1 - 2\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 - \left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \left(\frac{a-2}{a}\right)^2 \right]^6 \left\{ \frac{1}{a^2c[1 - 2(\frac{a-1}{a})^3 - (\frac{c-1}{c})^3 + (\frac{a-2}{a})^3]} + \frac{1}{a^2c[1 - 2(\frac{a-1}{a})^3 - (\frac{c-1}{c})^3 + (\frac{a-2}{a})^3]} \right\}^4.$$

由 $\begin{cases} F'_a(a, c) = 0, \\ F'_c(a, c) = 0 \end{cases}$ 得, 方程组在定义域内无实数解, 所以 $\inf F(a, b, c)$ 只能在边界取到, 检验边

界得, $\inf[F(a, b, c)] = \lim_{a, b, c \rightarrow 2} F(a, b, c), G_4 = [\inf F(a, b, c)]^{\frac{1}{4}} = \frac{9}{5} \sqrt[4]{108}$. 于是可得如下结论:

命题 5.3 当截面为 $\sigma_0 = \sigma(2, 2, 2)$, $G_4 = G(\sigma_0) = \inf_{\sigma} S^2(V_1^{-1} + V_2^{-1}) = \frac{9}{5} \sqrt[4]{108}$.

5.4 截面为六边形

设平面分别交 x 轴, y 轴, z 轴于点 A_0, B_0, C_0 , 交正方体 $A_1P_3B_1O - P_2PP_1C_1$ 于点 A, B, C, D, E, F . 设 $OA_0=a, OB_0=b, OC_0=c$, 由相似原理可得 $BA_1=\frac{b(a-1)}{a}, AA_1=\frac{c(a-1)}{a}, A_0A_1=a-1$.

由于 $BA_1 < 1, AA_1 < 1, A_0A_1 > 0$, 即
$$\begin{cases} \frac{b(a-1)}{a} < 1, \\ \frac{c(a-1)}{a} < 1, \\ a-1 > 0. \end{cases}$$

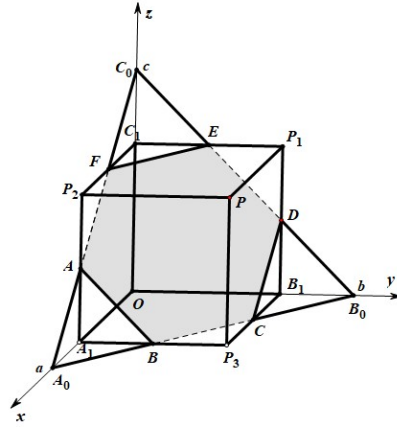


图 5.11

平面将正方体截为前后两部分, 它们的体积分别记为 $V_{前}, V_{后}$. 由于

$$S_1 = S_{\Delta A_0AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^4 \frac{b^2}{a^2} + (a-1)^4 \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2c^2}{a^4} (a-1)^4} = \frac{(a-1)^2}{2a^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$S_2 = S_{\Delta B_0CD} = \frac{(b-1)^2}{2b^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad S_3 = S_{\Delta C_0EF} = \frac{(c-1)^2}{2c^2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$S = S_{\Delta A_0B_0C_0} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$S' = S_{\text{六边形 } ABCDEF} = S - S_1 - S_2 - S_3 = \frac{1}{2} [1 - (\frac{a-1}{a})^2 - (\frac{b-1}{b})^2 - (\frac{c-1}{c})^2] \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

$$\text{令 } V_1 = V_{\text{三棱锥 } A_0-A_1AB} = \frac{bc(a-1)^2}{6a^2}, \quad V_2 = V_{\text{三棱锥 } B_0-B_1CD} = \frac{ac(b-1)^2}{6b^2}, \quad V_3 = V_{\text{三棱锥 } C_0-C_1EF} = \frac{ab(c-1)^2}{6c^2},$$

$$V = V_{\text{三棱锥 } O-A_0B_0C_0} = \frac{1}{6} abc. \text{ 则}$$

$$V_{后} = V - V_1 - V_2 - V_3 = \frac{1}{6} abc [1 - (\frac{a-1}{a})^3 - (\frac{b-1}{b})^3 - (\frac{c-1}{c})^3],$$

$$V_{前} = 1 - V_{后} = 1 + \frac{1}{6} abc [(\frac{a-1}{a})^3 + (\frac{b-1}{b})^3 + (\frac{c-1}{c})^3 - 1].$$

$$\text{又记 } P = (\frac{a-1}{a})^3 + (\frac{b-1}{b})^3 + (\frac{c-1}{c})^3, \quad Q = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2, \quad W = (\frac{a-1}{a})^2 + (\frac{b-1}{b})^2 + (\frac{c-1}{c})^2,$$

$$\text{故 } G = S^2 \left(\frac{1}{V_{前}} + \frac{1}{V_{后}} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 (1-W)^2 Q^3 \left[\frac{1}{1 - \frac{abc}{6}(1-P)} + \frac{1}{\frac{abc}{6}(1-P)} \right]. \text{ 令}$$

$$F(a, b, c) = G^4 = \frac{6^4}{2^6} (1-W)^6 Q^3 \left[\frac{1}{6-abc(1-P)} + \frac{1}{abc(1-P)} \right]^4,$$

由于 W, P, Q 为轮换对称函数, 故 $F(a, b, c)$ 为轮换对称函数, 由引理 1.2 可知方程组

$$\begin{cases} F'_a(a, b, c) = 0, \\ F'_b(a, b, c) = 0, \\ F'_c(a, b, c) = 0. \end{cases}$$

的解必有 $a = b = c$. 经计算分析可知驻点是唯一的, 所以函数可以简化为 $P = 3(\frac{a-1}{a})^3$, $Q = 3a^4$,

$W = 3(\frac{a-1}{a})^2$. 于是目标函数可化为 $F(a, b, c) = G^4 = \frac{6^4}{2^6}(1-W)^6 Q^3 [\frac{1}{6-a^3(1-P)} + \frac{1}{a^3(1-P)}]^4$.

$$\text{由 } \begin{cases} F'_a(a, b, c) = 0, \\ F'_b(a, b, c) = 0, \\ F'_c(a, b, c) = 0 \end{cases} \text{ 解得所有在定义域内的极小值点分别为 } a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

由于 $a=b=c$ 所以由 $\begin{cases} \frac{b(a-1)}{a} < 1, \\ \frac{c(a-1)}{a} < 1, \\ a-1 > 0, \end{cases}$ 且 $a, b, c \in (1, +\infty)$ 得 $a, b, c \in (1, 2)$, 所以边界为 $a_4 = 1$,

$a_5 = 2$. 代入 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 得最小值点为 $a_4 = 1$ 和 $a_5 = 2$. 所以 $\inf F(a, b, c) = F(1, 1, 1) = F(2, 2, 2)$,

因此 $G_5 = [\inf F(a, b, c)]^{\frac{1}{4}} = \frac{9}{5} \sqrt[4]{108}$. 于是可得如下结论:

命题 5.4 当截面为 $\sigma_0 = \sigma(2, 2, 2)$, $G_5 = G(\sigma_0) = \inf_{\sigma} S^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}) = \frac{9}{5} \sqrt[4]{108}$.

综上所述, 一种最优分割方式如图所示:

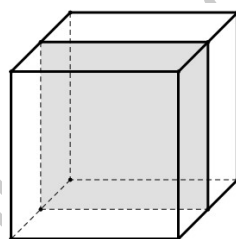


图 5.12

最优值为 $\bar{G} = \min\{G_i\} (i=1, 2, 3, 4, 5) = 4$. 因此我们得到如下结果:

定理 5.5 正方体的 Hamilton 等周量的最优截面必过正方形的中心且与某个底面平行, 最优值为 4.

6. 结论

本文研究了几类特殊对称凸体的最优截面问题. 首先研究了 *KLS* 猜想的特殊情形二维 p -球的最优截面问题, 证明了 Hamilton 等周量在截面通过二维 p -球的中心且截线段长度最小时取到最小值; 其次, 类比的欧氏几何和非欧几何, 研究了球面或 Poincare 圆盘上的测地圆盘的测地分割, 也证明最优分割测地线必过测地圆盘的中心. 最后, 研究了特殊的 3 维 p -球, 即三维 1-球: 正方体的最优截面问题, 即找一个平截面把一个正方体分成两部分, 记两部分体积分别为 V_1, V_2 , 截面面积为 S , 使得函数 $S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1})$ 取到最小值. 我们利用一种统一的初等方法找出一种最优切割使得函数 $S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1})$ 取到下确界并计算出下确界为 4, 此时截面也通过正方体的中心, 且截面积最小.

7. 存在问题与展望

本文研究了几类特殊中心对称凸体的最优分割问题, 包括欧氏空间中的特殊的 2 维、3 维 p -球, 非欧氏空间中的球面和 Poincare 圆盘的 Hamilton 等周量的测地线最优分割问题. 关于二维 p -球的研究, 由于目标函数比较复杂, 目前初等方法难以求解. 对于一般的 n 维欧氏空间中的 p -球的 Hamilton 等周量的最优分割是否一定过中心呢? 进一步, 还可以研究一般凸体的 Hamilton 等周量的最优分割问题. 这些问题有待我们进一步学习新的理论知识和新的方法后, 再做深入地探讨探究.

参考文献

- [1] Andrew Pressley, Elementary Differential Geometry, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer London Dordrecht Heidelberg New York, 2010, Second Edition.
- [2] DU Zhong-cheng, CHEN Li-xin, A Study of the Fixed-point of Multivariate Symmetric Functions. 21(2). 29-32, 2001. doi: 10.3969/j.issn.1671-1114.2001.02.008.
- [3] R. Hamilton. Isoperimetric estimates for the curve shrinking flow in the plane. Ann. of Math. Stud. 137, 1995.
- [4] R. Kannan, L. Lovász, Simonovits, M., Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma. Discrete Comput. Geom., Vol. 13, No. 3-4, 541-559, 1995.
- [5] E. Makai, H. Martini, & T. Ódor., Maximal sections and centrally symmetric bodies. Mathematika, 47(1-2), 19-30, 2000. doi:10.1112/S0025579300015680.
- [6] R. Schneider. Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory. Encyclopedia of Math. and its Appls., 44, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.