

参赛队员姓名： 唐铭钟 杨静悠 华硕彦

中学： 南京外国语学校

省份： 江苏省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 王思慧 肖林涛

指导教师单位： 南京大学物理学院

论文题目： 琴键上的回声

## 丘成桐中学科学奖-学术诚信声明

本参赛团队郑重声明：

1. 参赛团队提交的参赛队员和指导老师信息完整且属实无误。
2. 所提交的研究报告是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。
3. 尽本团队所知，除文中加以标注和致谢中所罗列的内容外，研究中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，不存在代写或其他违规行为。

以上，若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任，并服从丘成桐中学科学奖组织委员会的裁决。

参赛学生（签字）：唐韵钟 杨静悠

学校名称（加盖学校或教务处公章）：南京外国语学校

外校指导老师（签字）：

单位名称（加盖单位公章）：

2021年9月13日

# 琴键上的回声

唐铭钟 杨静悠 华硕彦

## 摘要

本文以“招鹤回鸣”、“水鸣天梯”等现象为启发，研究了台阶作为周期性声学反射体对入射声波中特定频率干涉增强的现象。理论上参考光栅公式以及闪耀光栅原理，分析了干涉增强的回鸣音频率，给出了计算频谱的近似公式，并讨论了布拉格公式适用的条件。

实验上，自主设计并搭建了类似于台阶的木板阵列，重现了“招鹤回鸣”、“水鸣天梯”现象。由于实验装置参数灵活可调，声源和观察者的位置也可以任意调整，我们探究了不同参数对现象的影响，并且优化了装置，在此基础上初步尝试了声学景观设计。

**关键词：** 招鹤回鸣；水鸣天梯；光栅公式；闪耀光栅；声学景观



招鶴回鳴，听天籟之音；仙台凌空，沐鶴山秀色



隔篁竹，闻水声，如鸣佩环，心乐之

# 目 录

摘要.....	4
目录.....	6
0 引言.....	7
1 理论分析.....	9
1.1 反射“光栅”与回鸣音频率.....	9
1.2 反射波的频谱.....	11
2 实验.....	16
2.1 预实验 1.....	16
2.2 预实验 2.....	17
2.3 击掌回鸣.....	21
2.4 踏歌而行.....	23
2.5 频率响应.....	25
2.6 调控音频.....	27
2.7 优化设计.....	30
2.8 水鸣天梯.....	33
2.9 墙中之琴.....	35
3 总结与展望.....	37
参考文献.....	38
致谢.....	39
实验时间和地点.....	40
后记 实验花絮.....	41
附录 1 部分实验记录.....	42
附录 2 实验音频.....	49
附录 3 实验视频.....	49
附录 4 考虑衰减因子的公式修正.....	50
参赛队员简历.....	51

## 0 引言

在青岛即墨市鹤山，三清殿东墙后修筑了如图 1.1 所示的一组 47 级的石阶，当站在距石阶底部 16m 处的石碑附近拍掌时，会听到“鹤鸣”一般的回声，构成了一处奇特的声学景观“招鹤回鸣”<sup>[1]</sup>。作为中国道教文化的重要发源地之一，孕育了道教中的“鹤山派”。在道教文化中，仙鹤象征长寿，是为仙人的坐骑，而藏于此山“回鸣”却不现身的“仙鹤”，数百年来也引发了无数浪漫遐想。遐想固然美丽，现象的解释却需要回归科学。林建恒等人<sup>[2]</sup>在研究“招鹤回鸣”时，认为此声学现象背后的原因是三清殿东墙后的台阶构成了周期性反射体，由于布拉格共振原理，特定频率的声波形成干涉增强，引起了这样的声学奇观。布拉格散射原理考虑了台阶作为反射体，导致每一级与声源的距离都不同，通过在声波波程中造成声程差，使特定频率声波的振幅增强，从而使得接收到的回声中被加强的频率的声音响度变大。

无独有偶，坐落于江苏镇江茅山的苏南抗战胜利纪念碑的碑前有宽 16m 的 317 级石阶，台阶共六层，如图 1.2 所示，每当在台阶底端的纪念碑广场上空燃放鞭炮时，会响起嘹亮的军号。军号声是由六个高低不同的回声组成的一段旋律，不少当地居民相信这回声来自 70 年前在战斗中牺牲的小号手，每当鞭炮引起的“战火”燃起，他不屈的灵魂便会回到世上，吹响鼓舞人心的军号。然而，陈旭等研究<sup>[3]</sup>的目光却聚焦在了与“六个回声”数目一致的“六层台阶上，他们认为神秘的“军号声”实际上归因于声波再台阶上反射时的干涉和衍射，而实验数据也很好地印证了他们的想法。

结合两处声学奇观的几个特点：(1) 地点都位于石阶前；(2) 现象都是回声相对于原声的音调变化；(3) “茅山军号”现象中回声音符数量与台阶层数“恰好”吻合；我们从理论书籍中得到了启发——不难推测，以上神秘的声学现象的形成都是由于整组石阶作为规则的周期性反射体对于声音起到类似光学中光栅的作用，从而对于特定频率的声音有干涉增强的作用，并得到与声源截然不同、浑然天成的乐音作为回声。

在理论分析中，我们首先参考反射光栅的原理给出了回鸣音的波长和频率公式。由于声源离台阶较近不能视为平面波，我们还考虑每级台阶自身衍射的影响，得到频谱计算的近似公式，用于分析、解释实验现象。

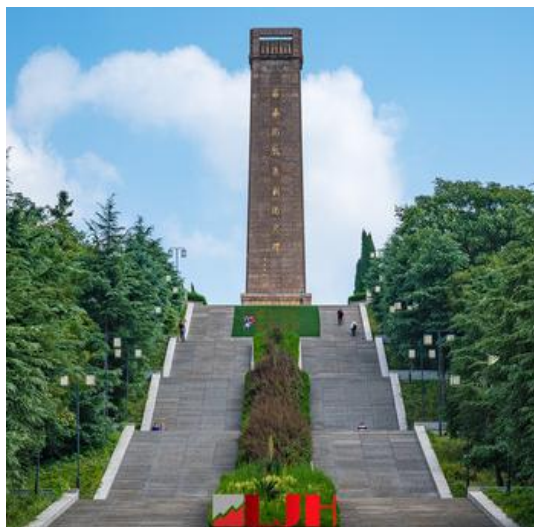
在实验部分，由于 2021 年 7 月底南京爆发新冠疫情，我们放弃了原定前往即墨市实地考察的计划，临时更改方案，购买木板在家门口临时搭建了一个阶梯状实验装置。实验成功再现了“招鹤回鸣”的现象。在预实验中，精度不足构成了问题，而我们通过优化实验装置和环境解决了这一问题。在正式实验中，我们探究了不同声源、入射角对现象的影响，进行了扫频验。此外，由于参数方便可调，自主设计的“招鹤回鸣”装置还可以实现对此类声学现象的优化。

在鹤山的“招鹤回鸣”景点的同样一组台阶上，还存在着“水鸣天梯”的现象，文献<sup>[4]</sup>将其解释为声表面波滤波效应的结果。在我们自主搭建的装置上也成功还原了“水鸣天梯”现象。在我们诸多实验的基础上，也可以根据这些现象的原理进行回鸣墙乐音设计。

图 1.1 鹤山招鹤回鸣景点（图片来自网络）



图 1.2 茅山苏南抗战纪念碑（图片来自网络）



2021 S.-T. Yau High School Science Award



# 1 理论分析

## 1.1 反射“光栅”与回鸣音频率

我们参考了理论书籍<sup>[5]</sup>中关于反射光栅的公式以及闪耀光栅原理，结合招鹤回鸣文献<sup>[2]</sup>中的台阶参数，用于计算台阶的选频的声波频率公式，此处我们简称其为回鸣音频率。

在如图 1.1 中所示的台阶模型中，我们先与文献一样将声波当成平面波分析。参考闪耀光栅模型，定义闪耀角  $\beta$  为台阶所在斜面 AB 面与台阶竖直面 OA 面（平行于声波的各个反射面）的夹角。 $N_1$  为 AB 面的法线，P、Q 分别为入射的平面波的两个反射点，台阶参数  $a$  表示台阶宽度，也即两个相邻反射面所在平面之间的距离， $b$  表示台阶高度，将  $d$  为台阶的声栅周期，即类似于“闪耀光栅”的周期。反射面法线为  $N_2$ ，与 OA 面的法线平行， $\alpha$  表示声波进行反射时的入射角， $\alpha'$  表示声波的衍射角。考虑最一般的情况，即声波在台阶上反射时不是正入射（即入射角  $\alpha \neq 0^\circ$  时）也不满足反射定律（即衍射角  $\alpha' \neq$  入射角  $\alpha$  时）的情况。

定义了台阶参数以后，我们就能够通过几何关系算得相邻两个台阶反射的波程差  $\Delta$ （图 1.3 中浅蓝色加粗部分）。通过倒角可得，

$$\angle N_1 P N_2 = \beta$$

根据三角函数关系易得

$$\Delta = d(\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha')) \quad (1)$$

关于上式，值得说明的是反射角  $\alpha'$  的正负号的意义。当反射角  $\alpha'$  与入射角  $\alpha$  在斜面法线  $N_1$  异侧时，反射角  $\alpha' > 0$ ，反之，当反射角  $\alpha'$  与入射角  $\alpha$  在斜面法线  $N_1$  同侧时，反射角取负值， $\alpha' < 0$ 。

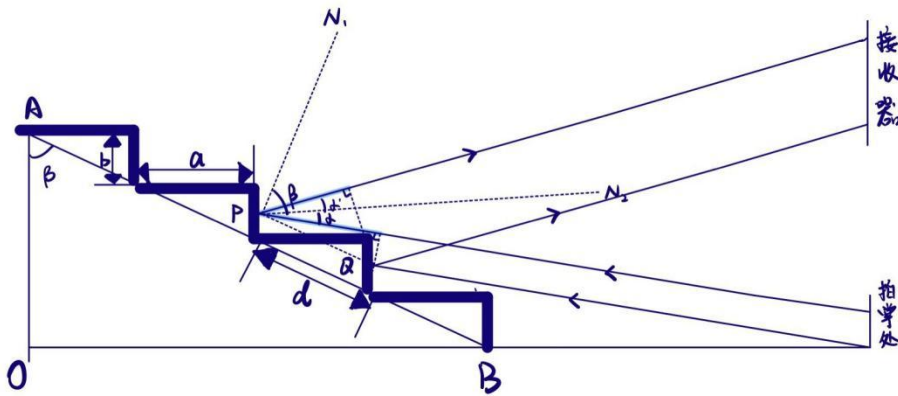


图 1.3 声波在台阶上的衍射

又因为发生相长干涉时

$$\Delta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

结合式(1)(2)得到反射波干涉加强的公式

$$d(\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha')) = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

其中  $\lambda$  即为回鸣音波长，再由  $\lambda = \frac{c}{v}$  易推得回鸣音频率，其中声速  $c$  与环境温度有关。导出公式后，我们可以代入具体情况进行应用。

### ①应用一：鹤山招鹤回鸣实验 $\alpha' = -\alpha$

我们将公式(3)应用于建筑于地面的台阶模型。与图 1.3 的情况不同，招鹤回鸣实验中<sup>[4]</sup>，入射角  $\alpha$  与拍手处发出声波传播方向的仰角相等（如图 1.4 所示）。人的拍手处和接

收器在同一位置,所接收到的反射声波波程即为发射声波波程原路返回,所以衍射角 $\alpha'=-\alpha$ ,其中负号表示反射角与入射角在反射面法线 $N_2$ 的同侧。由公式(3)得

$$\Delta = 2d \sin(\beta + \alpha) = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

声栅周期  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。文献<sup>[4]</sup>测得的台阶参数,台阶共47级,  $a = 0.26\text{m}$ ,  $b = 0.18\text{m}$ ,  $\beta = \tan^{-1} \frac{0.26 \times 47}{0.18 \times 47} = 55^\circ$ , 代入数据,因此招鹤回鸣实验中的回鸣音波长为

$$0.63 \sin(\alpha + 55^\circ) = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

如果忽略仰角取平入射,即 $\alpha = 0^\circ$ ,即可近似得到 $\Delta = 2d \sin \beta = 2a = k\lambda$ 的条件。这和文献<sup>[4]</sup>采用布拉格公式得到的条件一致。代入可得相长干涉的频率为 $\nu = \frac{c}{\lambda} = 659\text{Hz}, 1318\text{Hz}, 1977\text{Hz}$ 等,此处声速取为 $340\text{m/s}$ 。

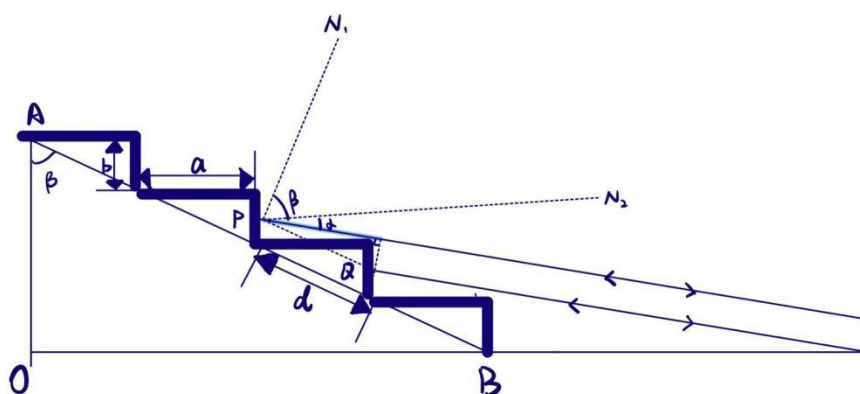


图 1.4 招鹤回鸣实验中衍射角与入射角在法线 $N_2$ 同侧

### ②应用二: 对称方案 ( $\alpha' = \alpha$ )

我们还将通过搭建木板阵列还原这样的选频作用(具体的实验方案、实验过程和结果分析都会在实验部分阐明)。通过采取搭建木板阵列的方案,很容易在满足反射定律( $\alpha' = \alpha$ )的位置观测现象。按照这个方案,我们将 $\alpha' = \alpha$ 代入公式(1),得到

$$\Delta = d(\sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta - \alpha)) \quad (6)$$

由三角恒等变换的和差化积公式可得

$$\Delta = 2d \sin \beta \cos \alpha \quad (7)$$

如图 1.4 所示,由几何关系可得

$$d \sin \beta = a \quad (8)$$

因此将式(8)代入式(7),易得

$$\Delta = 2a \cos \alpha \quad (9)$$

故

$$2a \cos \alpha = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

需要指出,推导得出的式(10)与布拉格公式不谋而合,这说明布拉格公式适用于我们所构建模型的对称方案,而不严格适用于招鹤回鸣实验中 $\alpha' = -\alpha$ 的情况,除非强行令 $\alpha = 0$ 。对于我们所搭建的实验装置,参数 $a = 0.20\text{m}$ ,入射角 $\alpha$ 可以方便地取为零或者其他值。当 $\alpha = 0^\circ$ 时,得到 $\nu = \frac{c}{\lambda} = 850\text{Hz}, 1700\text{Hz}, 2550\text{Hz}$ 等。

公式(3)可以根据实际台阶参数、声波发射器和声波接收器的位置灵活应用,适用于较为一般的台阶式结构选频的计算。然而,在实际应用时会面临一个问题,声波到达不同

台阶面构成的反射面时入射角都有所不同。我们很难取一个合理的等效入射角数值，只能通过尽量远的地方发射声波，将入射声波近似为平面波来处理。这样声音信号的强度会有减弱，影响实验现象的观察效果。同时，公式（3）也无法得到台阶结构对频谱的影响。因此，下一节将引入频谱的计算公式，更完整地描述现象。

## 1.2 衍射波的频谱

石阶作为一种周期性的声学反射结构，对在石阶上反射会接收器的声波起到一种选择作用，最终在接收器上产生带有频率选择性的频谱。因此，要研究一组特定声学反射体对声音频谱中不同频率的声音的增强与减弱作用，我们可以引入一个“台阶因子 $\chi$ ”，用来反映一组特定的台阶反射体（如鹤山石阶或我们所搭建的模型）当声源在不同位置时对频谱中不同频率的声音产生的选择作用，其定义式为

$$\chi = \frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \quad (11)$$

其中  $A$ ,  $A_0$  分别表示接收、发射某频率声波的总振幅， $I$ ,  $I_0$  分别表示接收、发射某频率声波的强度。这里，不同于简单地通过波程差确定增强峰的频率，我们参考衍射光栅原理，尝试导出不同频率声波的振幅，以期得到衍射波的频谱分布。

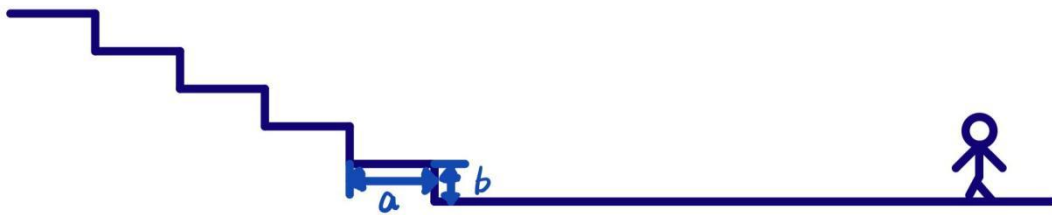


图 1.4 (a) 任意一组台阶示意图

### 各级台阶衍射波的干涉效果

第一步，仅考虑声音相位差 $\phi$ 构成的影响时，在如图 1.4 所示的任意一组台阶从下往上的第  $i$  台阶上反射时，由于声源与台阶距离相对于台阶高度  $b$  很大，从声源到反射面波程  $s$  近似表示为

$$s_i = \sqrt{(x + ia)^2 + (ib)^2} \quad (12)$$

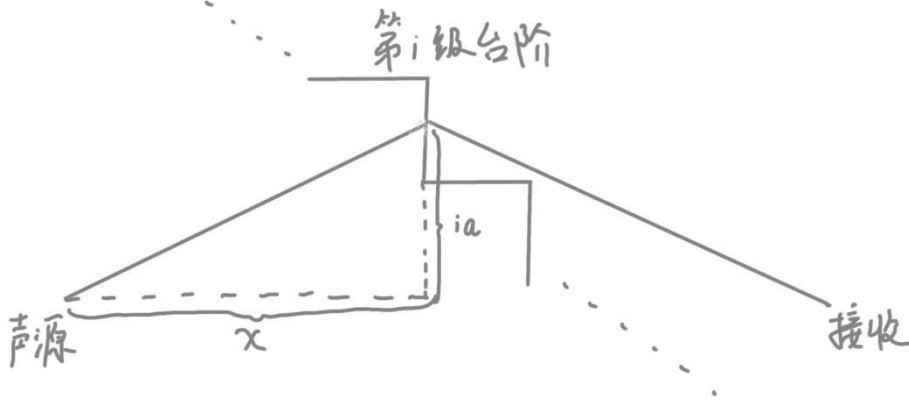


图 1.4 (b) 任意一级台阶几何关系示意图

其中  $i$  表示台阶级数， $a$  表示台阶宽度， $b$  表示台阶高度， $x$  表示声源到第一个台阶底部的距

离。对于一个往返过程，实际波程  $r$  表示为

$$r_i = 2s = 2\sqrt{(x + ia)^2 + (ib)^2}$$

如果声源和接收者在不同位置，则有

$$r_i = s + s' = \sqrt{(x + ia)^2 + (ib - y)^2} + \sqrt{(x' + ia)^2 + (ib - y')^2} \quad (13)$$

这里  $x, y, x', y'$  分别是声源和接收器离台阶底部的水平距离和高度。

故传播过程中造成的相位差  $\phi$  表示为

$$\phi_i = \frac{2\pi r_i}{\lambda} \quad (14)$$

声波是不同频率的简谐分量的叠加，为了推导理论公式，我们可以将接收器处接收到的声波中每个频率的简谐分量用一个旋转的矢量表示出来（如图 1.5(a)），接收器处接收的第  $i$  级台阶衍射声波可以如下方式表示

$$\vec{A}_i = A_i(\cos(\omega t - \phi_i), \sin(\omega t - \phi_i))$$

其中  $\phi_i$  表示经第  $i$  级台阶衍射的声波在接收器处产生的相位差。由于我们关注的是相位差，而时间项不影响各项之间的相位差，故在后续推导中可以略去时间项，将第  $i$  级台阶衍射声波振幅简化为

$$A_i = A_i(\cos \phi_i, \sin \phi_i)$$

此处对于相位的符号做了相反处理，这是由于符号仅表示方向，这样的处理并不影响矢量叠加求得的各级台阶衍射波的合振幅大小。

接下来，可以求得该频率的声波经过各个台阶衍射后在接收器处得到的所有回声的总振幅。同频率不同台阶对应的简谐分量的叠加用矢量法计算，可以先将接收器处接收到的每一级台阶衍射声波振幅矢量  $\vec{A}_i$  正交分解为如图 1.6(a) 所示的水平和竖直的分量；再通过如图 1.5(b) 所示的振幅矢量相加的方式得到合振幅和强度，最后除以发射声波总振幅强度  $A_0$ ，此处  $A_i$  受到衰减因子、倾斜因子等因素影响，这都是由于不同台阶与声源和接收器的位置和取向关系而造成的。这样可以得出只考虑干涉因子的台阶因子  $\chi$  公式

$$\chi = \frac{\sqrt{(A_i \sum_{i=1}^k \cos \phi_i)^2 + (A_i \sum_{i=1}^k \sin \phi_i)^2}}{A_0}$$

由于我们的模型中声源与接收器都和台阶距离很远，为了得到台阶声学性质的主要规律，<sup>(15)</sup> 以忽略一级台阶内入射波的方向差异，只考虑不同台阶间入射波的夹角差异，即将每级台阶的入射波都处理为平面波，但是不同台阶的平面波方向不同，衍射波也做如上处理；则对于每一级台阶而言，均可以采用夫琅禾夫衍射理论研究，不考虑衰减因子、倾斜因子等因素的影响。

这一小节，我们在上述近似的基础之上，着重分析各级衍射波的干涉效果，并将接收器处各级台阶衍射波振幅视做相同，即  $A_i = A' (i = 1, 2, 3, \dots)$ 。这样可以得出只考虑干涉因子的台阶因子  $\chi$  公式

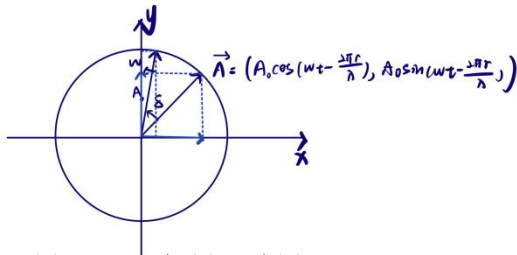


图 1.5(a) 正交分解示意图

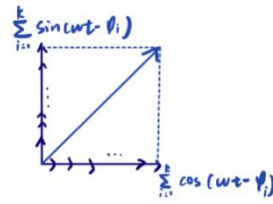


图 1.5(b) 矢量相加示意图

$$\chi = \frac{\sqrt{(A_i \sum_{i=1}^k \cos \varphi_i)^2 + (A_i \sum_{i=1}^k \sin \varphi_i)^2}}{A_0} = \frac{A' \sqrt{(\sum_{i=1}^k \cos \varphi_i)^2 + (\sum_{i=1}^k \sin \varphi_i)^2}}{A_0} \quad (15)$$

### 各级台阶单缝衍射的影响

第二步，参考理论书籍<sup>[5]</sup>中的推导，我们再加入声源在每级台阶自身的衍射因子对于不同频率声音造成的影响。

首先介绍衍射因子的推导。由于台阶有一定宽度，每一级台阶衍射其实是单缝衍射的效果。将每一个台阶面的衍射看作一个所示的入射角为  $\theta_1$  平行光入射、衍射角为  $\theta_2$  平行出射的夫琅和费单缝透射衍射。

波程差  $\Delta$  为

$$\Delta = a(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \quad (16)$$

每个台阶衍射叠加的结果分为无数无穷小的台阶面衍射的叠加。引入相位差

$$\phi = 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \quad (17)$$



图 1.6 衍射因子推导的矢量示意图

如图 1.6 所示，通过矢量相加首尾相连，最后求合向量的模长与各分量模长之和的比值，可以求得表示每级台阶的衍射对于回声振幅的影响的衍射因子  $m$ 。各分量矢量模长之和可以通过求图中圆弧的弧长求得。因此

$$m = \frac{A}{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} = \frac{2R \sin \alpha}{2R\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

这里假设圆弧半径为  $R$ ，弧长为  $l = 2\alpha R$ ，而合矢量的模长则可以通过求圆弧的弦长  $2R \sin \alpha$  求得。衍射因子的表达式也可以通过将矢量波以复数形式表达并求积分的方式求得，这里不再赘述。

每个台阶都有一个  $\alpha$  的值，记为  $\alpha_i$ ，由 (17) 决定，其相应的角度  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  由声源、接收

者到该台阶的方向决定。将衍射因子  $m$  引入台阶因子  $\chi$  公式的方式，是在正交分解每一个矢量那一步中，在每个矢量波分量上乘以这级台阶的衍射因子再进行求和，操作如下所示：

引入衍射因子  $m$  后，每级台阶的回声产生的接收器处接收到的矢量波表示为

$$\vec{A}_i = \left( A_i \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi r_i}{\lambda}, A_i \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)$$

可以推得考虑了衍射因子  $m$  的台阶因子公式，

$$\chi = \frac{A}{A_0} = \frac{\sqrt{\left( A_i \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)^2 + \left( A_i \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)^2}}{A_0} \quad (18)$$

其中  $\sqrt{\left( A_i \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)^2 + \left( A_i \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)^2}$  是各级台阶衍射波的叠加波的振幅大小。

我们也可以给出自变量为声音频率  $\nu$  的函数  $A(\nu)$  或  $I(\nu)$  的公式

$$I(\nu) = \left( A_i \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi \nu r_i}{c} \right)^2 + \left( A_i \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi \nu r_i}{c} \right)^2 \quad (20)$$

其中  $A_i$  的大小和声源发射某频率声波的  $A_0$ 、声源台阶接收器的相对位置和取向关系相关。从能流的角度，近似认为  $A_i$  与台阶和接收器、声源张开的立体角大小正相关，在距离较远的条件下，可以认为各级台阶张开的立体角相同，则  $A_i$  均为  $A'$ 。得到台阶因子为

$$\chi = \frac{A}{A_0} = \frac{A' \sqrt{\left( \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi r_i}{\lambda} \right)^2}}{A_0}$$

至此，我们推导出了计算频谱的近似公式。代入具体数据计算就能计算出并绘制成频谱，呈现台阶作为周期性声学反射体的选频效果。具体应用将在后文实验部分中介绍。此处，为了计算方便，又由于我们模型中声源与接收器都与台阶距离很远，我们可以不考虑声波在传播到衍射面上时的衰减程度不同构成的影响，在公式的应用中体现为在台阶因子的公式中取  $A_i=A_0$ ，这样的近似会造成与实际频谱的偏差，不过频谱计算依然能为我们设计装置提供参考依据。

### 验证招鹤回鸣频谱

为了验证公式 (20)，我们参考文献<sup>[2]</sup>中招鹤回鸣的台阶尺寸代入公式，如图 1.7 所示。设声源高度 1.4 米，距离台阶 16 米，台阶数目分别取 50, 30, 10 级。按照公式 (20) 绘制接收频谱，如图 1.8 所示。

对比理论导出的频谱<sup>[2]</sup>与实验中的接收频谱，我们发现理论导出的 50 级的频谱与文献中实验所测得的结果基本吻合，印证了理论推导的正确性。此外，计算表明在台阶级数减少到 30 级、甚至 10 级时，也有明显的回鸣峰，不过强度有所减弱。但是倍频峰反而衰减较少，且随着级数减少，理论与实验峰值的频率反而更加接近，这是由于在实际实验中，由于衰减因子等受到距离影响的因素，前几级台阶的在干涉和衍射作用中实际的贡献比后面更远的台阶要大，而理论公式中的近似弱化了前几级台阶的贡献，强化了后面台阶的贡献。我们会在后面实验中验证不同级数的情况是否成立，因为理论公式没考虑声音振幅随距离的衰减，可

能也需要进一步修正。

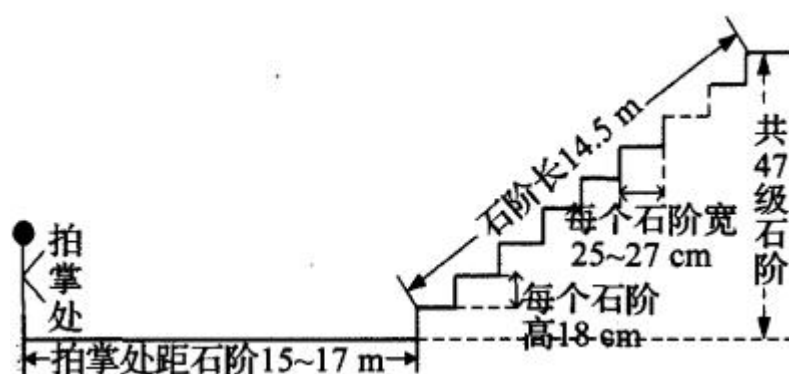


图 1.7 招鹤回鸣的台阶尺寸 (来自文献<sup>[2]</sup>)

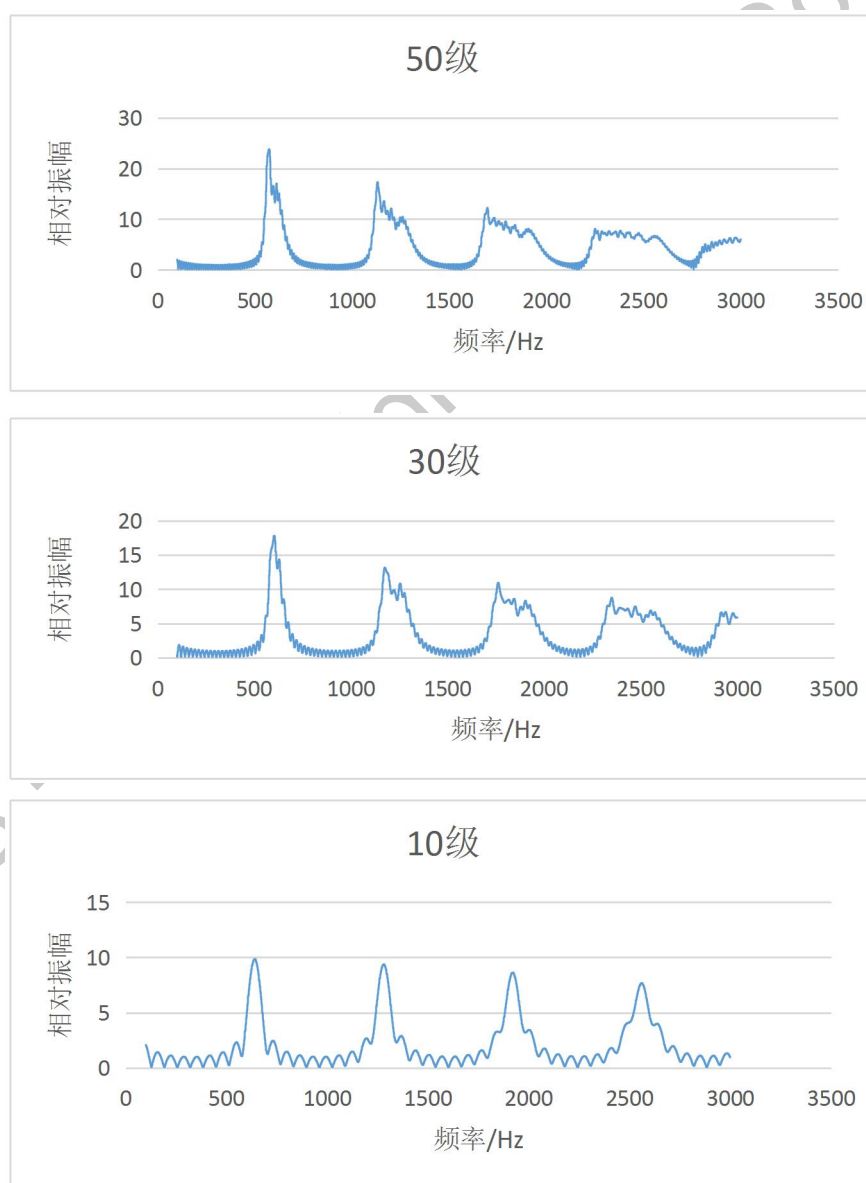


图 1.8 招鹤回鸣理论计算频谱

## 2 实验

2021 年新冠疫情持续肆虐全球，7 月底南京爆发疫情。无奈之下，我们放弃了原定前往山东省即墨市进行实地考察的计划，原计划去尝试实验的一些其他景点也纷纷关闭，只能临时更改方案，购买建材动手搭建一个阶梯状结构，力图再现“招鹤回鸣”的现象。然而由于疫情愈加严重，网购平台也拒绝往南京配送。因此我们只能在本地的家具市场购买所需的材料，并将组内成员所居住的小区作为实验场地。

为了降低建造难度，方便搭建和调节参数，我们把原来从地面水平向上铺设的台阶构造改为直立于地面的木板阵列。这样木板的数量、距离、排列方式都灵活可调。还把台阶简化为平行的木板阵列，大大节约了人力物力。

### 2.1 预实验 1

我们先在室内进行了预实验。实验时间：2021 年 8 月 17 日

实验场地：南京市秦淮区金城一号小区八栋 202 室，实验区域宽 4.6m，进深 8m。30 块木板的排列方式如图：每块木板直立，下端用角铁固定，相互平行放置。相邻木板平面之间相距  $a=10\text{cm}$ 。（如图 2.1）

器材：用于录音和分析音频信号的笔记本电脑，卷尺，直尺，激光测距仪等。

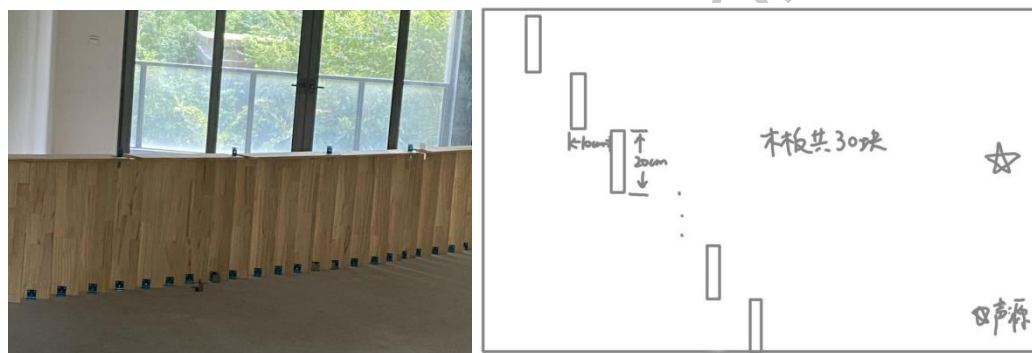


图 2.1 室内实验场地及木板阵列排放（俯视）图

我们在正对木板阵列，距离 8m 的位置用拍掌的方式发出声音，用电脑录音，接收拍掌后的声音信号，其中包括经木板阵列反射后的回声。用 audacity 软件对比分析掌音和其后 0.04-0.06s 的回声信号的频谱（附录 1 图 1），回声的频谱图中没有明显的反射峰出现，人耳也听不见任何单纯的音调。

实验分析：由于角铁固定不够精确，木板略有倾斜，因此即使我们保证木板下端排列整齐，其上端依旧容易偏离，估计两板间距的误差可以达到 1cm。由公式 (10) 可得，木板阵列干涉加强的基频波长  $\lambda = 2a = 20\text{cm}$ ， $v = c/2a = 340/0.2 = 1700$  赫兹。考虑木板排列不整齐造成的误差， $\Delta v / v = \Delta a / a$ ， $a = 10\text{cm}$ ，若板间距达到 1cm 的误差，就是 10%，对于频率来说，其偏离也是 10%，就能达到 170 赫兹。所以此时不可能有明显的干涉极大出现。

室内实验失败的经验总结：本实验对木板排列精度要求高，为了解决精度问题，我们又购买了木条，在木板上端下端定位，固定木板，期望达到毫米的精度。



## 2.2 预实验 2

根据前期的研究探索和上述失败过程的经验总结，我们决定放弃室内场地中已经初步搭建完成的实验装置，转到室外进行实验。我们对实验装置和设计，实验场地，实验方式进行了改进，最终制定了以下的实验方案：

实验地点：江苏省南京市秦淮区金城一号小区室外

实验时间：2021 年 8 月 21 日

实验目的：定量探究经过木板阵列反射后返回声音的频谱情况，探究木板是否能加强特定频率的声音

实验器材：50 块规格为 80cm\*20cm\*1.7cm 的松木板，20 根 2cm\*4.7cm\*2m 的木条，型号为 DL4168 的激光测距仪，苹果 MAC 笔记本电脑，audacity 频谱分析软件，蓝牙音箱，卷尺，绳子，角铁，螺丝钉，螺丝刀，双面胶，透明胶带，隔音板等。

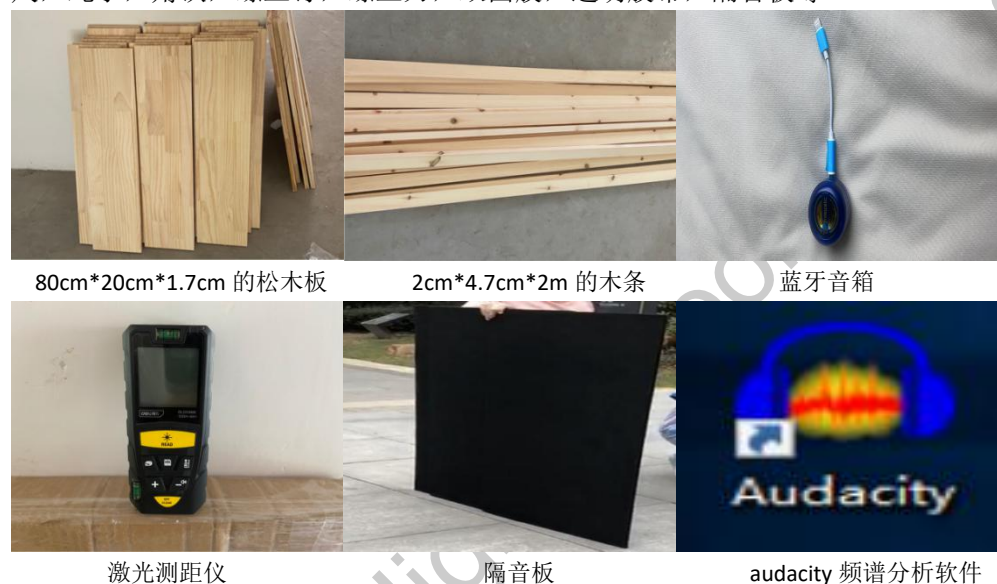


图 2.2 实验器材

如图 2.3 所示的木板阵列由四组拼接而成，每组长 2 米，由 7-8 块木板组成，总共 29 块木板，长 8 米。

为了提高木板阵列的搭建精度，我们改进了木板的搭建方式：

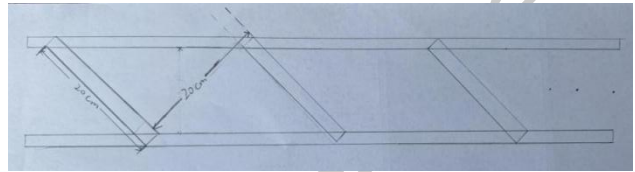
- 1) 我们先在地面上放置了两条互相平行的长木条，按照图 2.3(c)所示的尺寸（木板之间平行排列，间距为 20cm，木板与定位的木条之间夹角为  $45^\circ$ ），在木条上划线定位。
- 2) 利用地面上的地砖（60cm\*60cm），使木条穿过地砖缝隙交点处，从而保证木条与地砖缝隙成 45 度角。两条木条在地面平行放置。
- 3) 将木板依次按照定位直立在木条上，下方利用角铁固定。
- 4) 在一组木板上方再加固一根木条，定位准确后，用角铁和双面胶固定上端。
- 5) 重复上述操作，将四组装置相连，得到完整的木板阵列装置



(a)



(b)



(c)

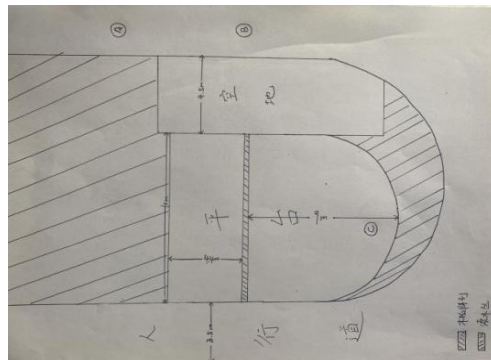
图 2.3 木板阵列 (a) 搭建过程 (b) 局部实物图 (c) 设计图

实验场地如图 2.4 所示，由高于地面的平台，铺有地砖的空地和四周的人行道构成。平台最大宽度为 10 米，长度为 13.4 米，距地高度约 0.5 米；空地宽约 4.5 米；人行道宽 3.5 米，环绕场地四周。该场地周围有草地树木和高大的建筑。

我们将木板阵列构成的反射面放置在距离平台两端分别为 4.4 米和 9 米，与平台宽度方向平行的位置处（图 2.4 右图平台中的阴影），用于接收声音的笔记本电脑摆放在距木板阵列中点直线距离约为 17 米的人行道上的点 A 处，击掌者位置为图中 A，C 等。



(a)



(b)

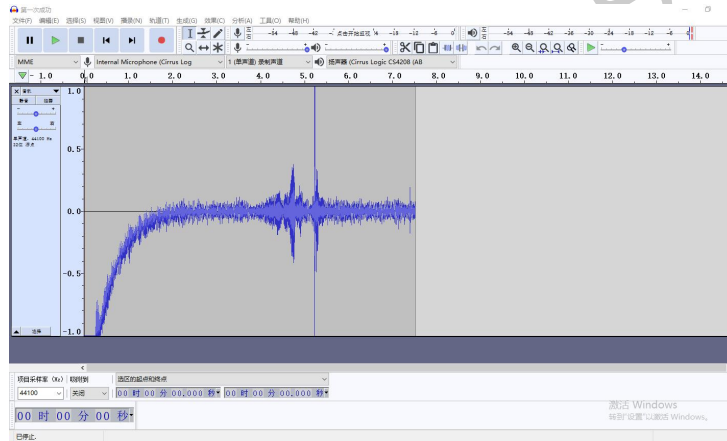
图 2.4 实验场地环境图 (a) 及俯瞰图 (b)

我们首先将笔记本电脑（用来接收和分析频谱）和声源同时放在图 2.4 中的 A 处，声音从发出到反射到再被接收往返时间大约为 0.1s。为了防止电脑收到的击掌声太强，我们在电脑和声源中间放置了隔音板（如图 2.5）。

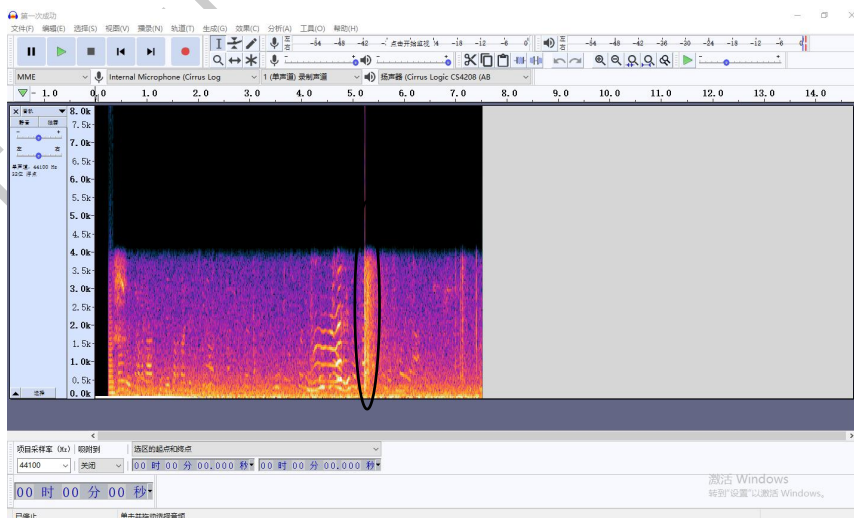


图 2.5 在 A 位置进行实验

我们在 A 点进行了实验，图 2.6 是第一次实验的声音脉冲图像和该音频完整的时频图。



(a)

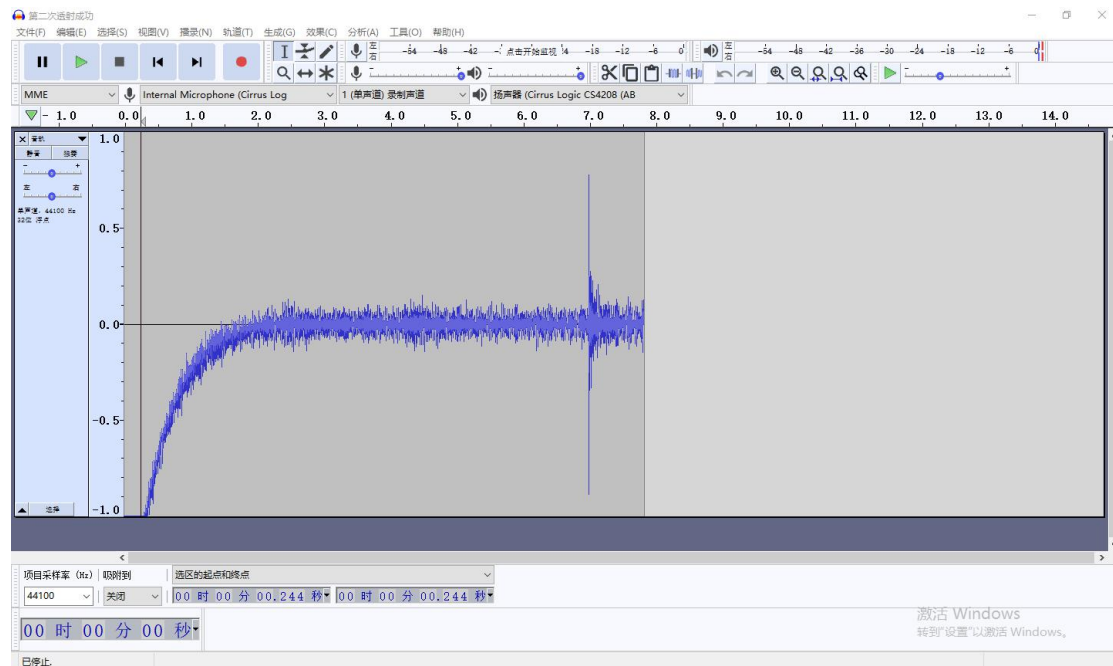


(b)

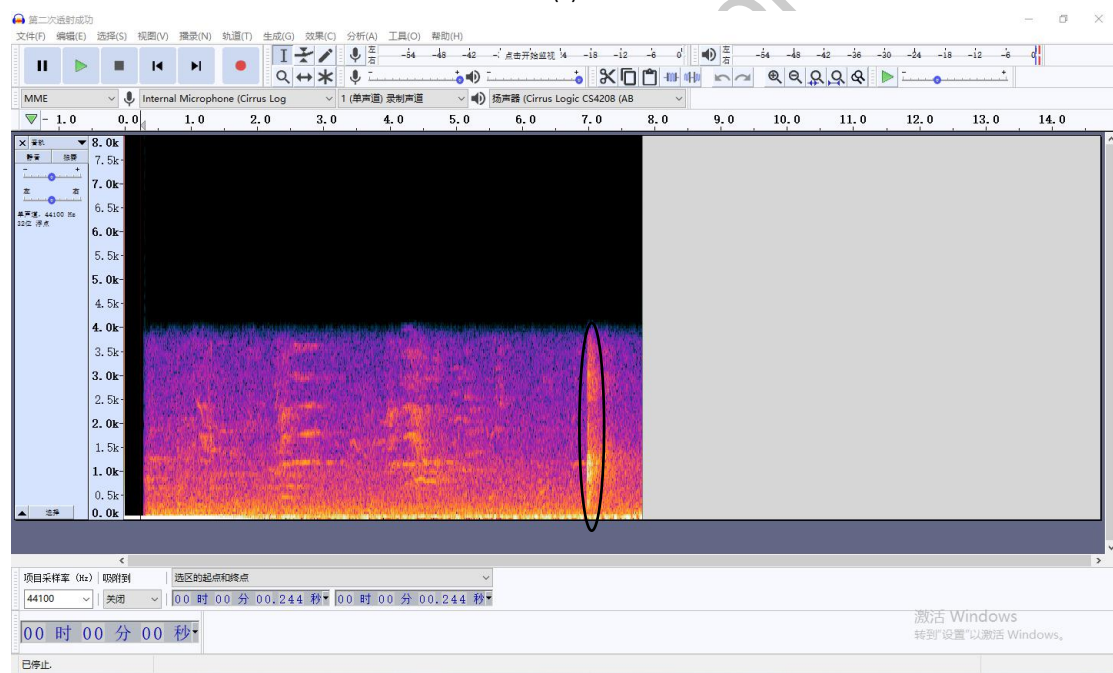
图 2.6 第一次实验的声音脉冲图像(a)和完整时频图(b)

我们又改变声源的位置，将击掌位置其移动至图 2.4 中的 C 位置，以透射的方式再次进

行实验，接收位置不变。结果如图 2.7 所示：



(a)



(b)

图 2.7 C 点击掌实验（透射）的脉冲图（a）和时频图（b）

我们找到了在 A 和 C 点拍掌后回声的一小段信号，并调出了收到回声的频谱图（如图 2.8，左、右分别对应两次实验）

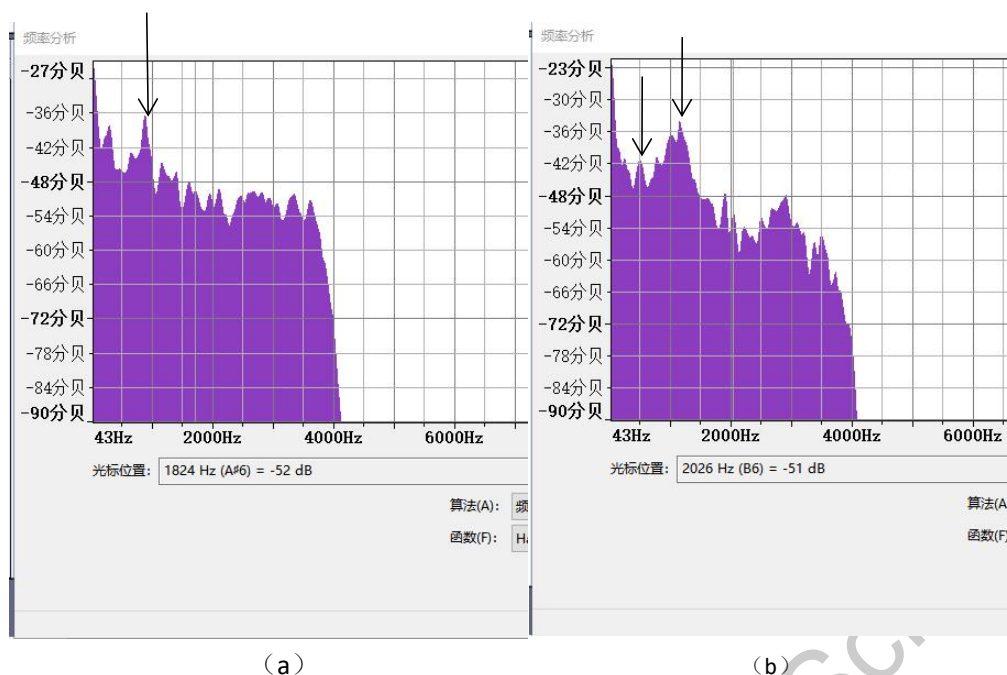


图 2.8 A 点 (a) 和 C 点 (b) 拍掌后回声的频谱图

A 点的反射实验峰值出现在 887 赫兹处，跟理论值 870 赫兹很接近；C 点的透射方式的波长参照正入射光栅公式估算，衍射角约为  $45^\circ$ ，得到理论峰频率约为 1740 赫兹，然而实际峰却在 511 赫兹，1164 赫兹处，与预期相去甚远；由此可见，透射的实验效果不理想，可能是由于木板正对声源，声音被遮挡，透过的部分能量很小，因此这个装置更适合于做反射实验。

为了确认现象，我们又重复了声源和接收器同在 A 点的实验，仍观察到有峰出现在 870 赫兹附近，说明木板阵列的确对选频起到了一定的作用。但是人耳没有听见明显的单纯音色，而且图像上峰值过多，所以需要再对实验设计进行再次优化，从而得到更明显、更理想的实验效果。

在 8 月 21 日的实验过程，我们曾经误判了实验结果，闹了一次乌龙事件（详见后记实验花絮）。第一次观察频谱时误以为捕捉到了鸟鸣，当时判断为回鸣音频谱。“实验现象”出现的那一刻，最强烈地感受到了实验中正向反馈的幸福感和成就感。第二天一大早忽然发现错误，又如梦方醒，瞬间失落、迷惘，后来经过反复调试、优化后才真正确认现象。比起一蹴而就的成功，彼时的满足感是我们整个实验过程最难忘的经历和财富。图 2.8 的回鸣峰是我们后来在正确的时间点截取的频谱。

### 2.3 击掌回鸣

此后实验时间为 2021 年 8 月 22 日至 2021 年 9 月 2 日

我们对 21 日实验效果不明显的原因进行了分析：1) 如图 2.4 所示，声源、接收处和木板阵列的水平高度不一致，木板阵列所在的平台位置比地面高 0.5 米左右 2) 木板阵列与接收器间存在三级台阶，可能会对实验造成干扰 3) 实验场地环境相对复杂，远处时常有居民及小孩叫喊声；正值夏季，鸟鸣、蝉叫声也相对频繁。

综合上述分析，我们决定再次转移阵地，想方设法寻找一个地面水平，居民活动少，能放置得下 8 米长的木板阵列且能保证声源与反射面距离较远的实验场地。最终我们来到了如图 2.9 所示的区域，该环境能基本满足实验需求。

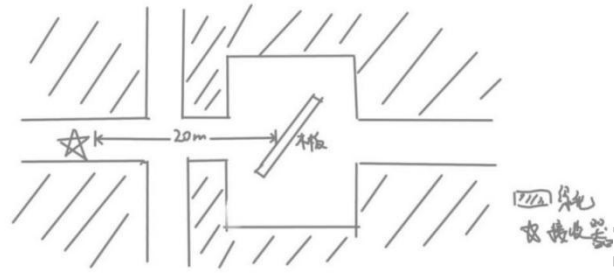


图 2.9 理想的实验场地

如图 2.9 所示，该场地中道路呈对称的十字形，四周为绿化，场地中央有较大的一片空地，空地宽约 18 米，人行道宽约为 3.5 米，道路纵向延伸距离很远，能够满足实验需求。此外，该地位于小区边缘地带，居民活动较少，无较大背景音。

我们仍是先将声源和接收器放在同一位置（图 2.9 中五角星处），木板阵列距声源 20m，进行第一次实验。得到如下声音脉冲图像和时频图（如图 2.10）：

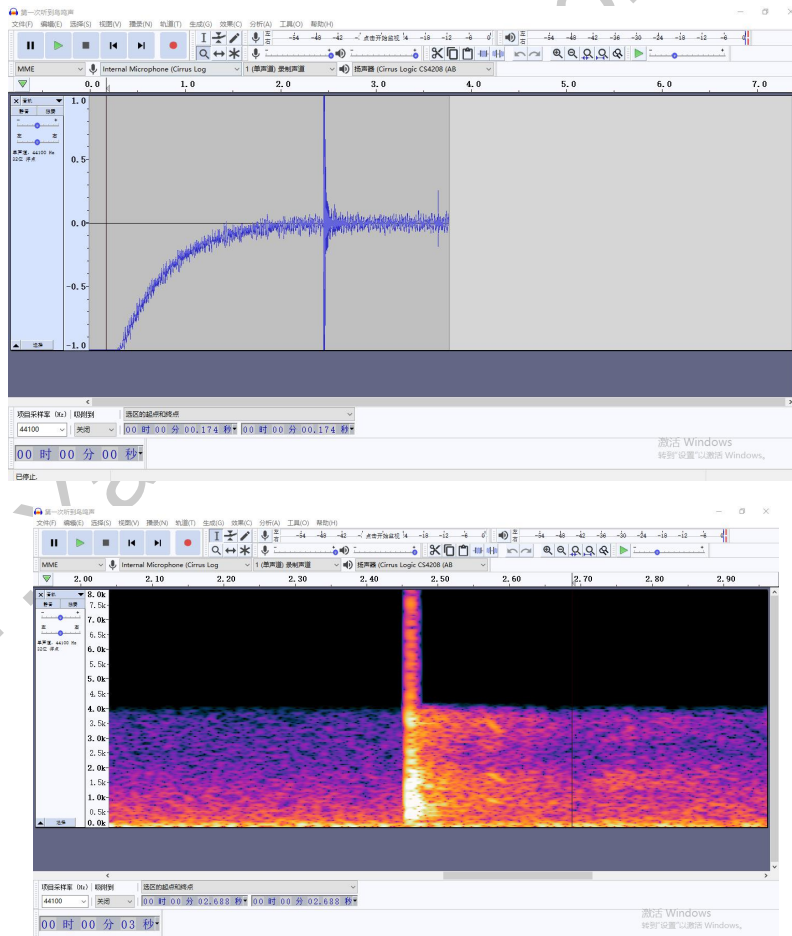


图 2.10 第一次听见鸟鸣声时的声音脉冲和时频图

可以明显地发现，相比先前几次实验，背景音有明显的减少（拍掌前的声音脉冲幅度更

小），这说明我们选择的新的实验地点确实能有效的减除环境杂音的干扰。

就在此时，有小组成员注意到，拍掌声中混杂着不同寻常的声音！我们立刻带上耳机仔细倾听此次拍掌的录音——在拍掌过后的很短时间内，居然有一声清脆的“鸟鸣”声！我们立刻对时频图中的出现鸟鸣时的频谱进行观察（如图 2.10）。可以清晰的发现，在大约 2.57 秒的位置有规则的条带状图样，且该图样出现在拍掌声（2.45 秒）之后 0.1s 左右，这不禁让我们格外兴奋与激动，我们立刻选取条带状图样（2.57 秒附近）位置进行频谱分析（如图 2.11）。

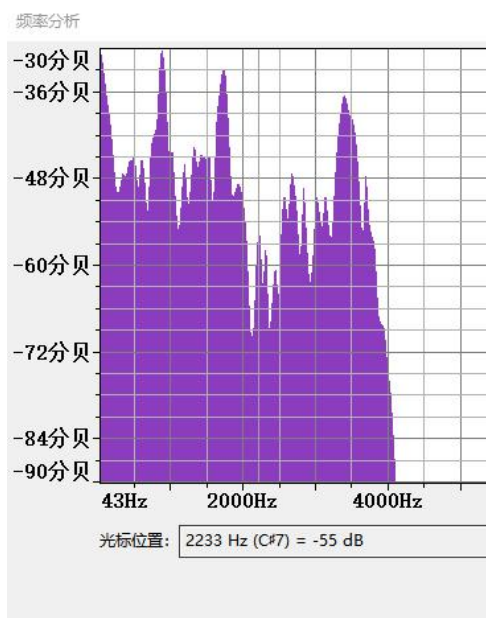


图 2.11 第一次听见击掌回鸣声时频谱

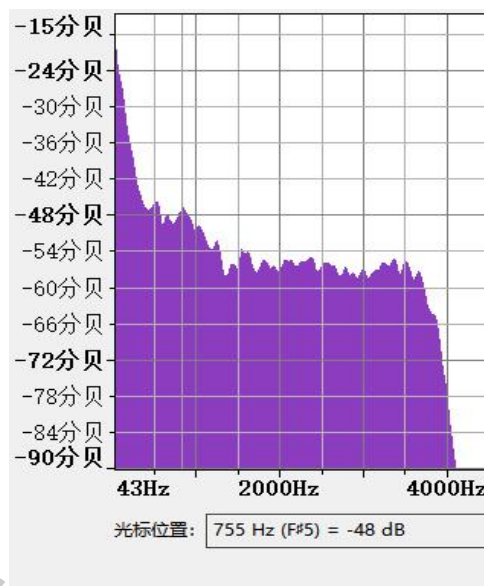


图 2.12 空场地拍掌的回声频谱

频谱分析图上出现了极其规律的峰形！波峰分别出现在 884 赫兹，1736 赫兹，3391 赫兹的位置，与我们之前预计的 870 赫兹非常接近，且另外两个峰频率约为 884 赫兹的两倍和四倍。

人耳可听的鸟叫声、时频图上规则的图样、频谱分析图中与预期吻合的波峰，这已经足以证明，我们的实验成功了！

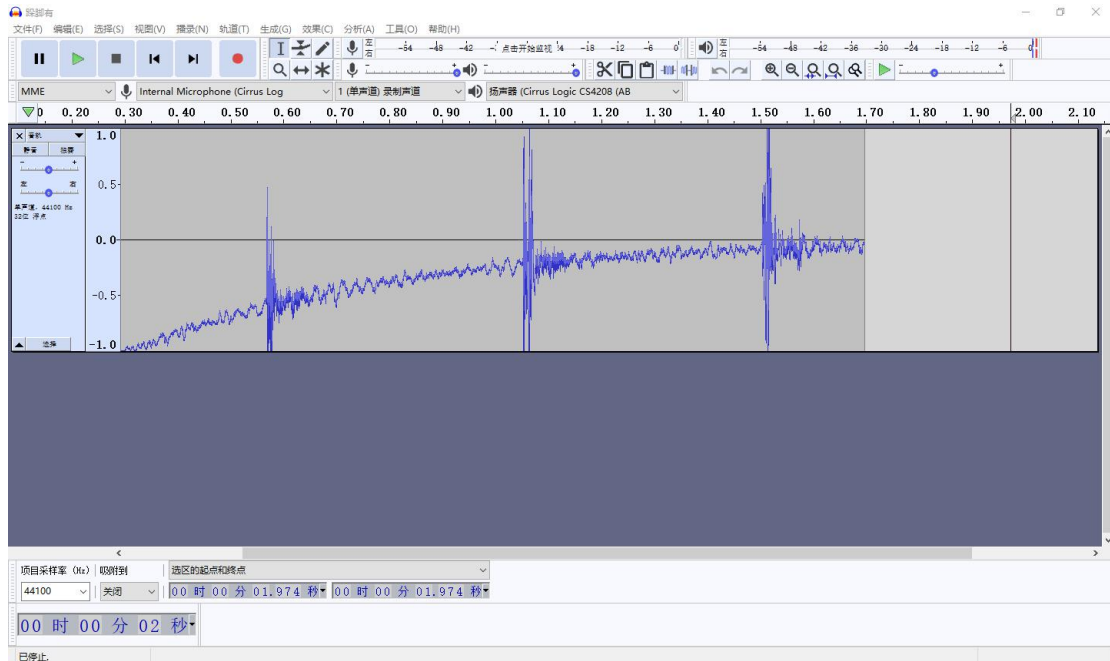
为了验证实验的可靠性，我们决定再次重复上述实验。第二次实验的脉冲图和时频图（附录一附图 2.）频谱分析图上（附录一附图 3.）再次出现了衍射峰，分别对应 374 赫兹（后经考量此处为背景声），869 赫兹的位置，与理论得到的 870 赫兹非常接近。两次均成功且明显的实验现象有力地证明我们的实验宣告成功！为了对比，我们还录制了撤去木板阵列后，在同一位置拍掌回声的频谱（如图 2.12）。我们发现，撤去木板阵列以后，回声无明显的干涉峰出现，说明环境背景对实验没有无影响，先前两次实验中出现的波峰均为木板反射的结果。进一步证实了我们实验结果的可靠性。

## 2.4 踏歌而行

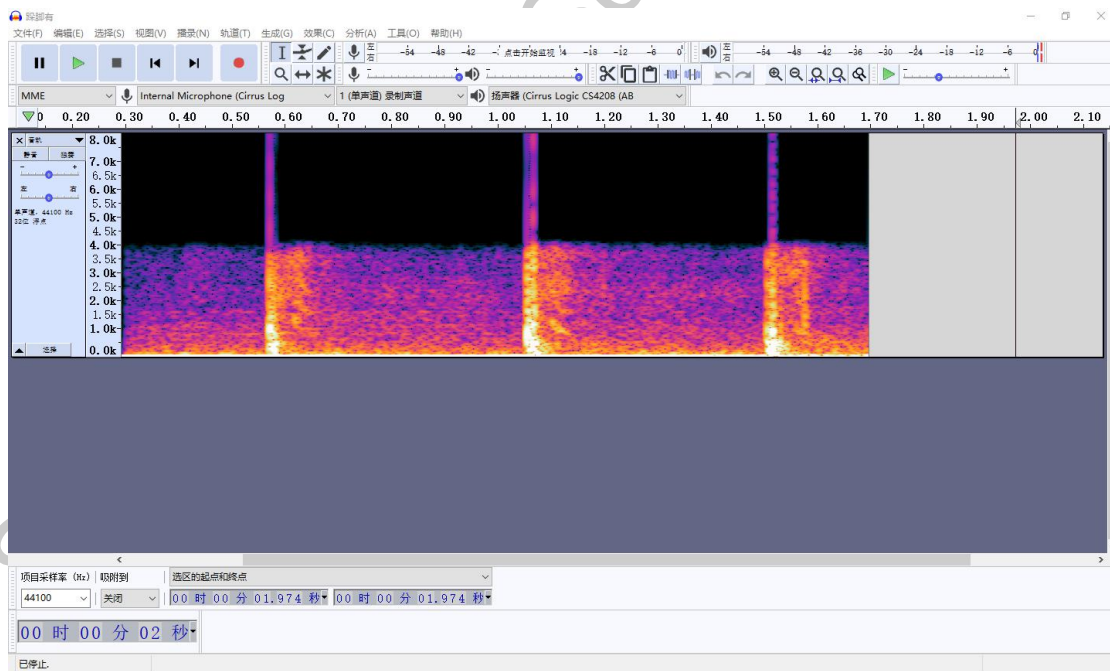
我们几位实验者和家长、路过的邻居先后都清晰地分辨出了击掌的回鸣音，拍掌实验成功获得人耳和器材的确认。就在我们沉浸在兴奋和喜悦之时，一位女士从木板阵列前经过，脚下的硬底鞋踢踏作响，紧随其后的是更为清晰明亮的回鸣声，这给我们带来新的发现。我们激动地在阵列前来回行走，并邀请路过的大人孩子参与体验，这才是真正的“踏歌而行”！我们对几次木板阵列前踏步的实验，穿着不同材质的鞋子的多个不同实验者录下了多组视频，

见附录中视频部分。每一组拍摄了正对木板阵列（x 方向）踏步行走、以及在十字形步道垂直方向上（y 方向）踏步行走的视频。

视频附录 1、2 是其中一组视频：视频 1 沿着正对阵列行走的视频中，能听到明显的高频回声，视频 2 在垂直的步道上则听不到。于是我们利用跺脚声作为声源，进一步分析跺脚后的音频信号。我们选取了连续跺脚三次的声音脉冲图像和时频图（图 2.13）如下：



(a)



(b)

图 2.13 (a) 跺脚的声音脉冲信号 (b) 跺脚的时频图

可以明显看出，第二次和第三次跺脚后时频图上有规则的图案出现，然而由于跺脚后地面产生振动的影响，第三次的图案显得过于聚集，略显杂乱，我们采用第二次跺脚后的数据进行频谱分析（如图 2.14）。图中波峰位于 888 赫兹，与理论的 870 赫兹相近；然而相比先



前鼓掌声的图像，该频谱分析图显得有些杂乱，我们猜测是与地面振动有关。

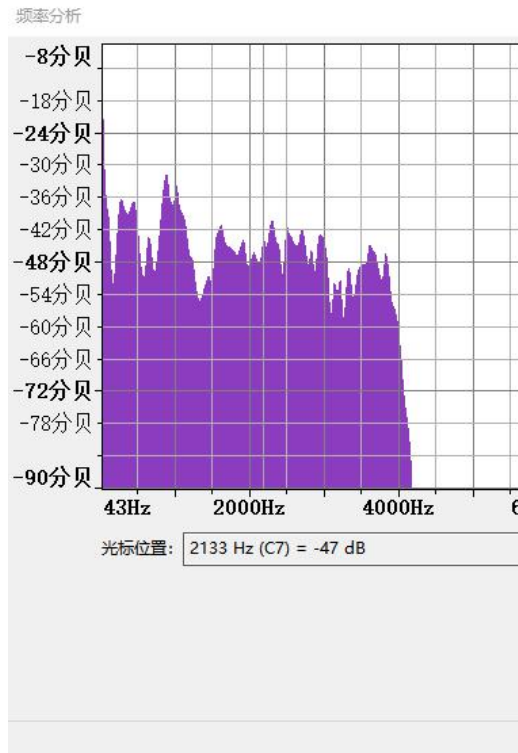


图 2.14 木板阵列前跺脚回声的频谱

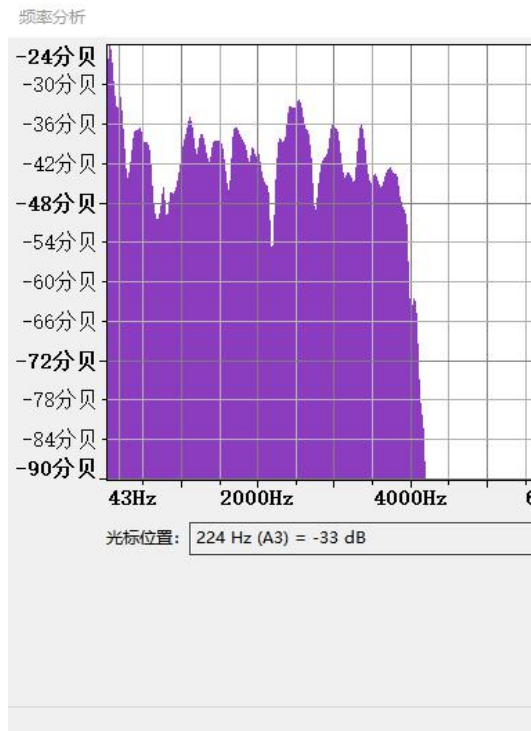


图 2.15 空场地跺脚回声的频谱分析

为了对比，我们到实验场地旁边的一条由相同材质的地砖铺设而成的空旷人行道上进行对跺脚声音的分析，来与本次实验进行对比，我们仍然截取了跺脚后 0.1s 位置的声音，进行频谱分析，如果 888 赫兹的峰不存在，而其它杂乱无章的峰仍有出现，那么就足以说明声音经木板阵列反射后的确发生了变化，频谱分析如图 2.15。800-1000 赫兹范围内没有峰存在，其他频率处仍有很多波峰。

## 2.5 频率响应

为了验证木板阵列的滤波效果，我们测量了 300-2000 赫兹的范围对不同频率的正弦信号反射强度以及入射强度。声源和接收者都在图 2.9 中五角星处。正弦信号由手机应用软件 phyphox 产生，由蓝牙音箱每次播放一个短暂的信号，我们还用纸筒卷成一个简易的喇叭以加强信号的指向性。结果见表 2.1 所示。回声强度与声源强度差值反映了木板阵列的频率响应，如图 2.16。图中，频率在 870 赫兹和 1620-1780 赫兹附近由明显的峰值，与理论预期相符。750 附近的峰值可能跟噪声干扰有关。

频率（赫兹）	声源强度（分贝）	回声强度（分贝）	差值（分贝）
300	-16	-45	-29

400	-1	-33	-32
500	-6	-35	-29
600	-5	-34	-29
650	-6	-32	-26
700	-12	-37	-25
750	-2.5	-26	-23.5
800	-5	-31	-26
810	-10	-33	-23
820	-7	-35	-28
830	-5	-32	-27
840	-7	-33.5	-26.5
850	-6.5	-30.5	-24
860	-12	-36	-24
870	-8.5	-28.5	-20
880	-10	-34	-24
890	-11.5	-38.5	-27
900	-11	-40	-29
1000	-8	-41	-33
1100	-9.5	-44	-34.5
1200	-9	-40	-31
1300	-2	-42	-40
1400	-2.5	-41.5	-39
1500	-19	-44	-25
1600	-22	-46	-24
1620	-11	-29	-18
1640	-21	-38	-17
1660	-20	-33	-13
1680	-14.5	-29.5	-15
1700	-8.5	-25.5	-17
1720	-15	-33	-18
1740	-13.5	-27	-13.5
1760	-19	-39	-20
1780	-19	-38.5	-19.5
1800	-22	-47.5	-25.5
1900	-14.5	-38	-23.5
2000	-13	-37	-24

表 2.1

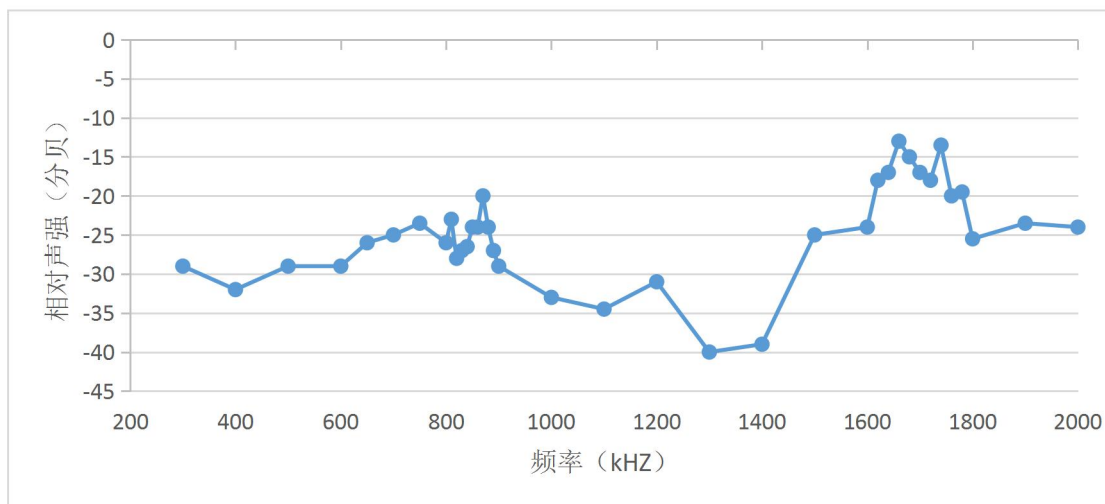


图 2.16 频率响应

## 2.6 调控音频

### 1) 对称方案

通过控制入射角和衍射角，可以得到对不同频率的干涉加强。实验中，我们移动声源与接收器的位置，使得到达反射面的入射角和衍射角（观察者所在位置）均为  $\alpha$ （之前实验正对反射面，即夹角为  $0^\circ$ ），如图 2.17 所示。

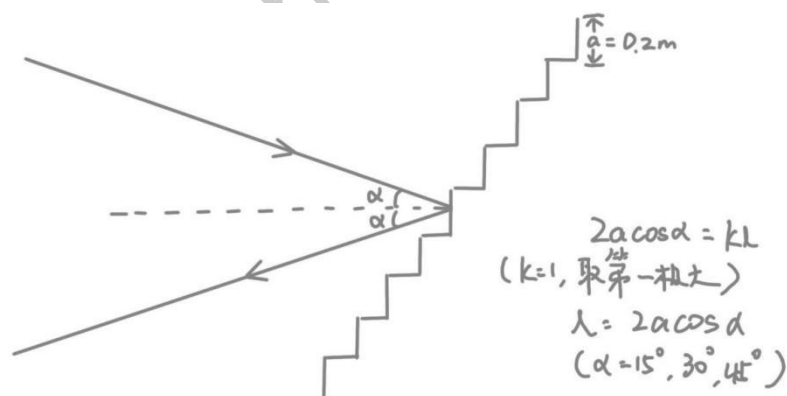


图 2.17 斜入射示意图

由理论公式 (10) 得， $2a \cos \alpha = k \lambda$ ，取第一极大位置，即  $k=1$ ，因为  $a=0.2\text{m}$ ，气温  $30^\circ$  时空气中声速约为  $348.7\text{m/s}$ ，则  $v = c / \lambda = 348.78 / 0.4 \cos \alpha = 869.5 / \cos \alpha$ 。当  $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ，频率理论值见表 2.2。

实验时， $\alpha = 15^\circ$  时声源与接收器位置如图 2.18 所示。

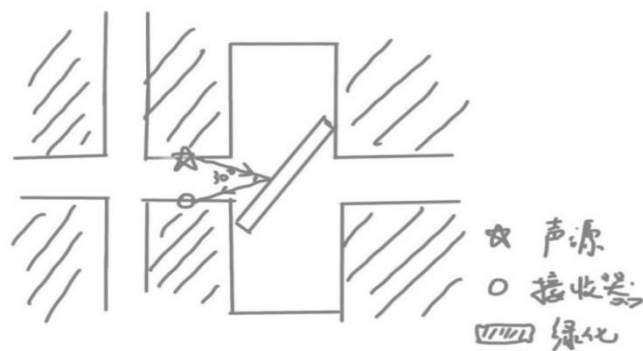


图 2.18 斜入射实验示意图

取  $\alpha = 15^\circ$  ,  $30^\circ$  ,  $45^\circ$  进行三次实验。拍掌后的回声分别进行频谱分析如图 2.19。

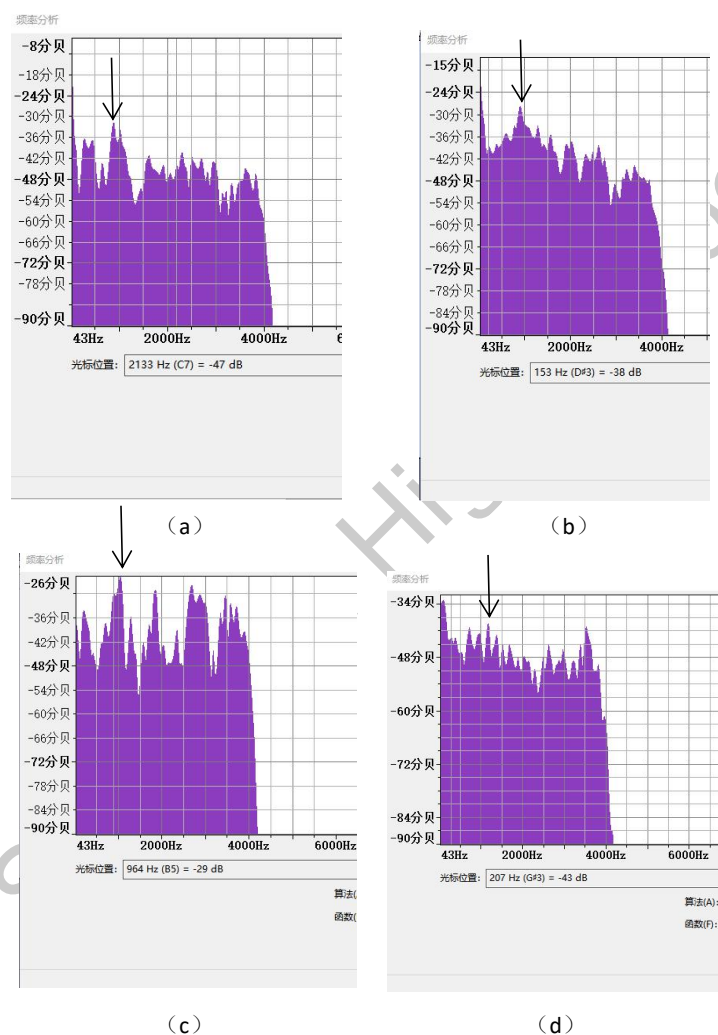


图 2.19 (a)(b)(c)(d)分别为  $0^\circ$  、  $15^\circ$  、  $30^\circ$  、  $45^\circ$  时拍掌回声频谱图

频谱图中对应峰的测量值也列入表 2.2 以及图 2.20, 发现入射和衍射角度较小时实验测量的峰值频率与理论符合良好, 随着角度增大, 声音音调增高, 同时衍射峰数量越来越多, 回鸣音变得不明显。

$\alpha$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
v (理论值)	870 赫兹	900 赫兹	1004 赫兹	1230 赫兹
v (测量值)	869 赫兹	903 赫兹	1051 赫兹	1179 赫兹

表 2.2

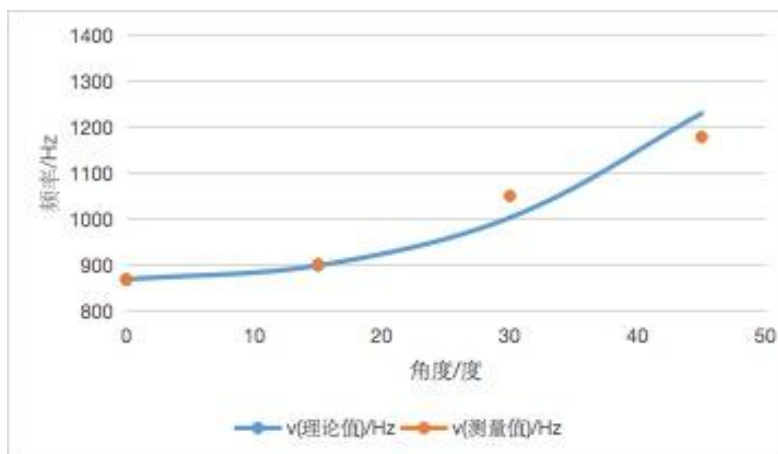


图 2.20 角度与回声频率的关系

通过以上实验，我们提出设想：接收者在同一位置，通过改变演奏者所在位置击掌或跺脚，某一位置的观察者可以听到不同的音调和音色，甚至可以实现音乐演奏。

## 2) 反对称方案

为了模仿招鹤回鸣实地观测情形，我们又在木板同一端发射接收，即关于木板阵列法线反对称位置进行实验（如图 2.21）。将声源和接收器移动至与木板阵列最左端木板迎面对，距离该木板大约 10 米的位置，将声源和接收器用隔音板隔开，收集并分析在该处击掌反射所得的声音信号。我们再次听见了清脆的“鸟鸣声”，这说明即使在木板一端拍掌，我们仍能实现“招鹤回鸣”现象。

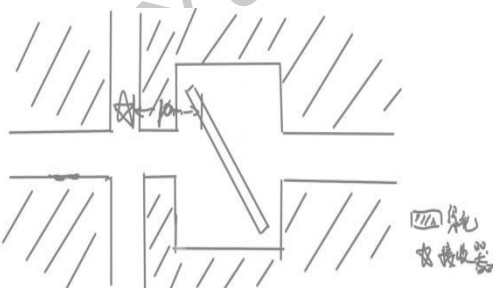


图 2.21 木板一端发射接收

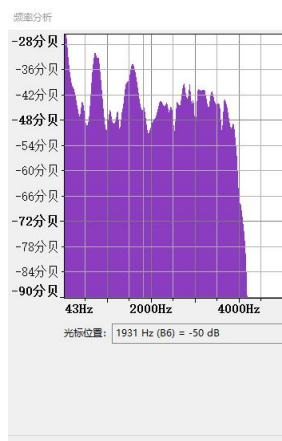


图 2.22 木板一端发射接收的频谱

我们对回声片段进行频谱分析（如图 2.22）。频谱图上存在清晰的反射峰，分别位于 729 赫兹，1584 赫兹的位置，但是与中心位置观察得到的 870 赫兹相差较大。我们认为是

因为声源距离木板过近，有效入射角发生改变，应用理论公式（4），即 $2d\sin(\beta + \alpha) = k\lambda$ ，考虑一个有效入射角 $\alpha$ ，频率降低是必然的。

我们在理论部分 1.2 节曾按照招鹤回鸣台阶参数计算得到的频谱图 1.8，其中 50 级台阶频率为 580Hz，台阶数 10 级为 650Hz，而正入射的频率约为 650Hz。与我们这里的实验现象趋势是一致的：即在台阶一端观测，且台阶级数较多时，回鸣峰频率明显低于理论值。招鹤回鸣实地回鸣峰的频率的偏移需要进一步测量确认。

## 2.7 优化设计

### 1) 木板组数对回声频率的影响

为了使实验装置更加轻便，我们尝试拆掉四组木板其中的几组，观察是否还能听见“鸟鸣声”。为了尽可能保留现象，我们还是选择声源与接收器同位，中间用隔音板隔挡的方式进行实验。我们依次拆掉一组木板，对剩下三组、两组、一组木板拍掌产生的回声的频谱分析图（如图 2.23）。

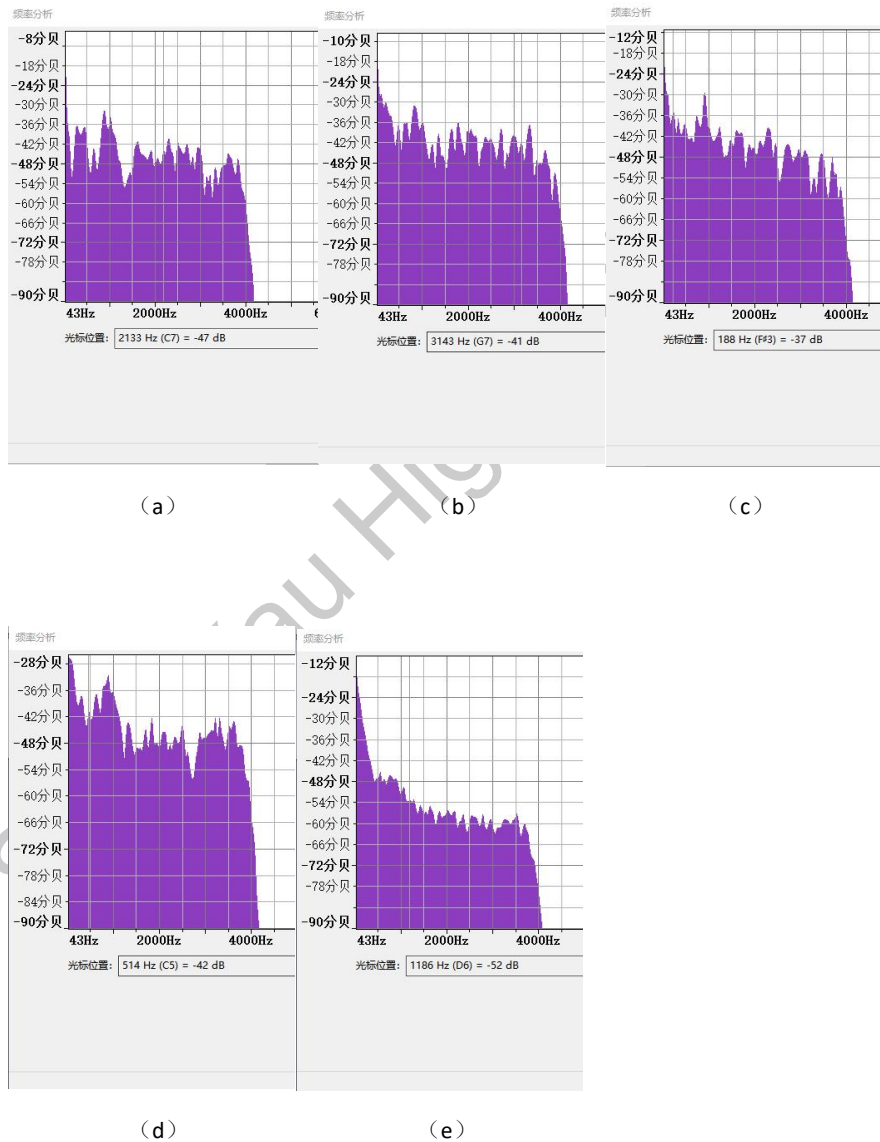
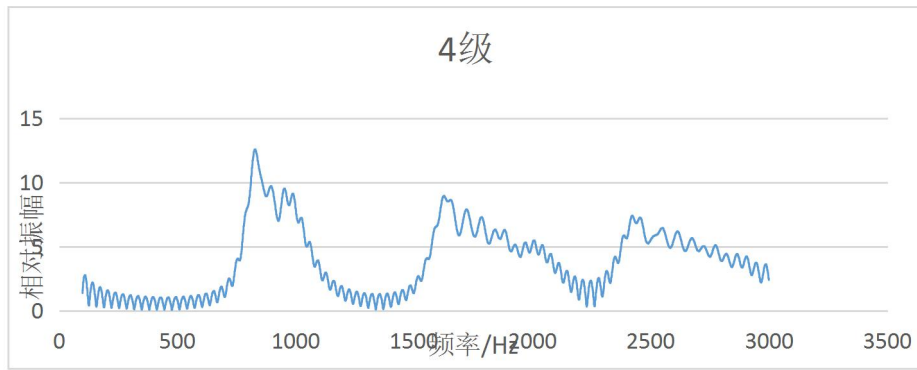
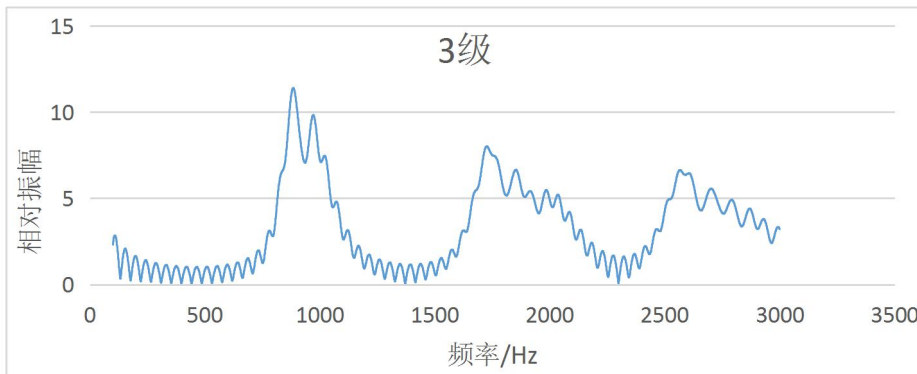


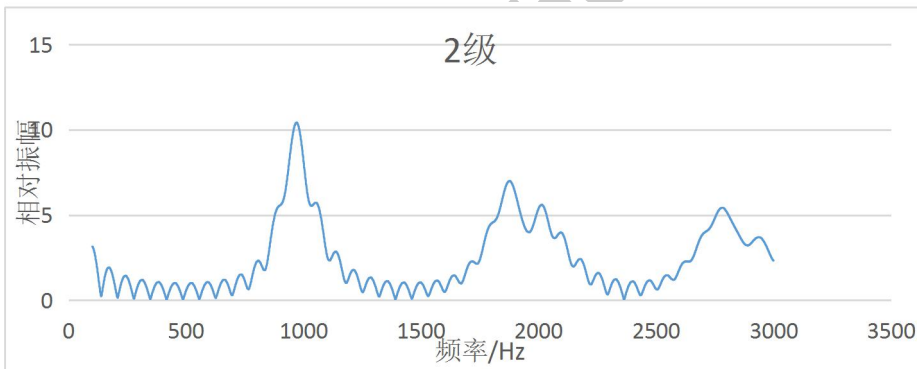
图 2.23(a) 四组、(b)三组、(c)两组、(d)一组木板、(e)无木板阵列的频谱对比



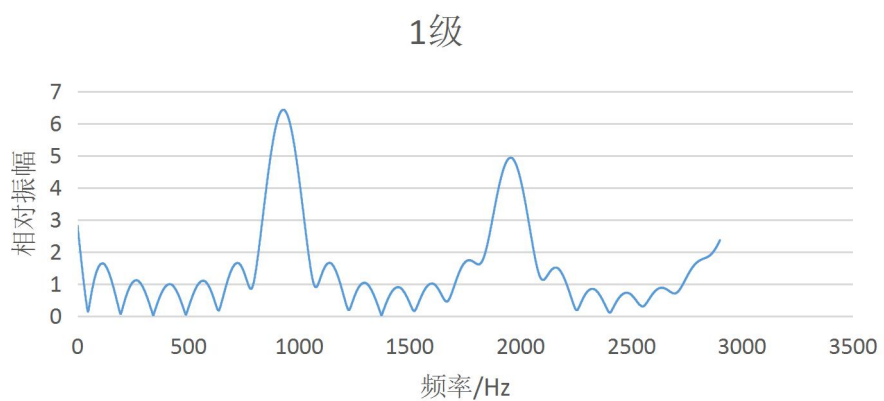
(a)



(b)



(c)



(d)

图 2.24(a) 四组、(b)三组、(c)两组、(d)一组木板理论频谱

我们在实验过程中依旧听到了清脆的鸟叫声。由图可见，波峰出现在 864 赫兹，1389 赫兹的位置（后经确认，1389 赫兹及之后的小波峰均为背景声），与理论值 894 赫兹相近，说明三组木板仍具有选频作用。

我们再拆掉一组台阶，只剩下两组，实验过程中仍能听见清晰的鸟鸣，回声频谱分析图的波峰出现在 920 赫兹的位置，理论值为 982 赫兹，相差较小，这说明即使木板只剩下两组，仍具有一定的选频能力。之后我们再将剩余的两组依次拆完，仅剩一组时耳朵听起来鸟叫声已不明显，但频谱分析图上还有明显的峰出现，位于 888 赫兹处，其分贝数明显降低。在清空场地后，而没有木板阵列的频谱分析图也见 2.23e。频谱分析图变得没有明显的波峰存在。

由此我们得知，实验装置并不需要四组木板，三组、两组（十几块木板）对于人耳已经足够了，使用仪器观察甚至一组（7 块）也有明显效果。以后倘若还有使用此装置进行展示的机会的话，仅用十块左右木板，可大幅提高搬运装置的便捷性，提高实验和展示的效率。

进一步理论计算的频谱图见图 2.24。频率值见表 2.3。对比发现，理论和实验峰值的变化趋势相同。

	三组	两组	一组	四组
v（理论值）	894 赫兹	982 赫兹	945 赫兹	840
v（测量值）	864 赫兹	920 赫兹	888 赫兹	测量不在同一天

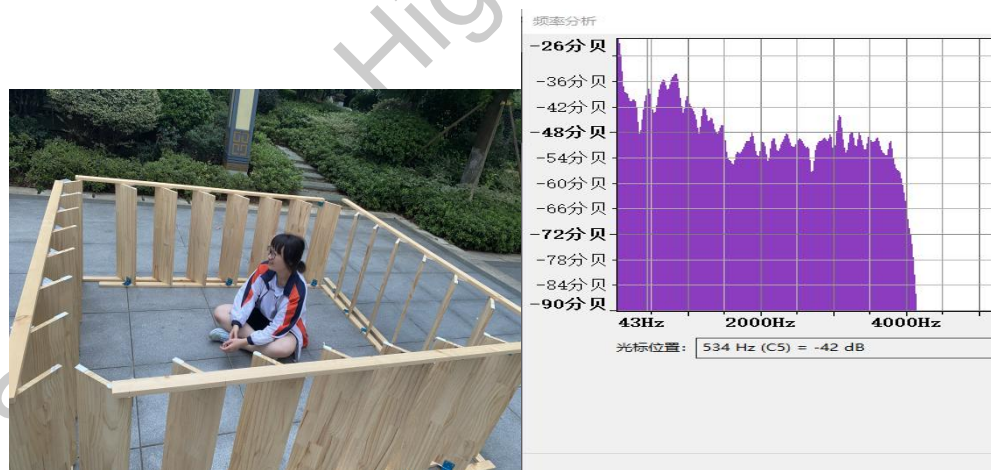
表 2.3

## 2) 木板阵列排列方式对回声频率的影响

为了让声源更加聚集，实验效果更明显，我们重新设计了几种木板阵列的排列方式：

### 1. 正方形排列：

如图 2.25(a)所示，我们将四组木板拆开，每组木板作为正方形的一条边进行排列，声源和接收器位于正方形内部中央。击掌后，我们再次听到清晰的鸟鸣声。



(a)

(b)

图 2.25 正方形排列及得到的频谱

我们测出拍掌回声的频谱图（如图 2.25(b)）。可以发现，声音信号在 841 赫兹的位置出现了反射峰。这说明将木板排列成正方形的形式也是可行的。



## 2. “V”形排列:

我们将四组木板，两组一条，排放成“V”形。声源和接收器朝向“V”的张口处，距离大约 20 米，如图 2.26 所示。拍掌后我们再次听见鸟鸣声，我们对其进行频谱分析（如图 2.27）。频谱在 1087 赫兹的位置存在最强的反射峰，这可能是在调整了木板排放方式以后，声波与木板间的入射角和衍射角大小发生改变，从而导致木板选出的频率变大。但是该方式的优点是能获得更强的鸟鸣声，从而使现象更明显。



图 2.26 “V”形排列

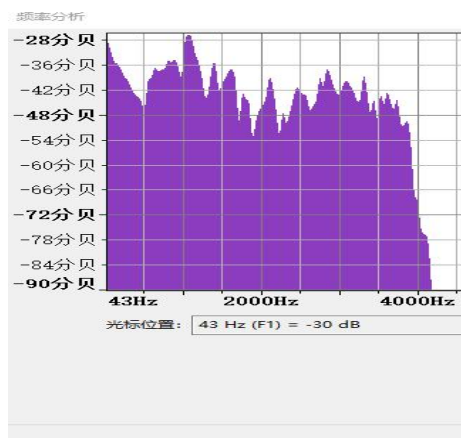
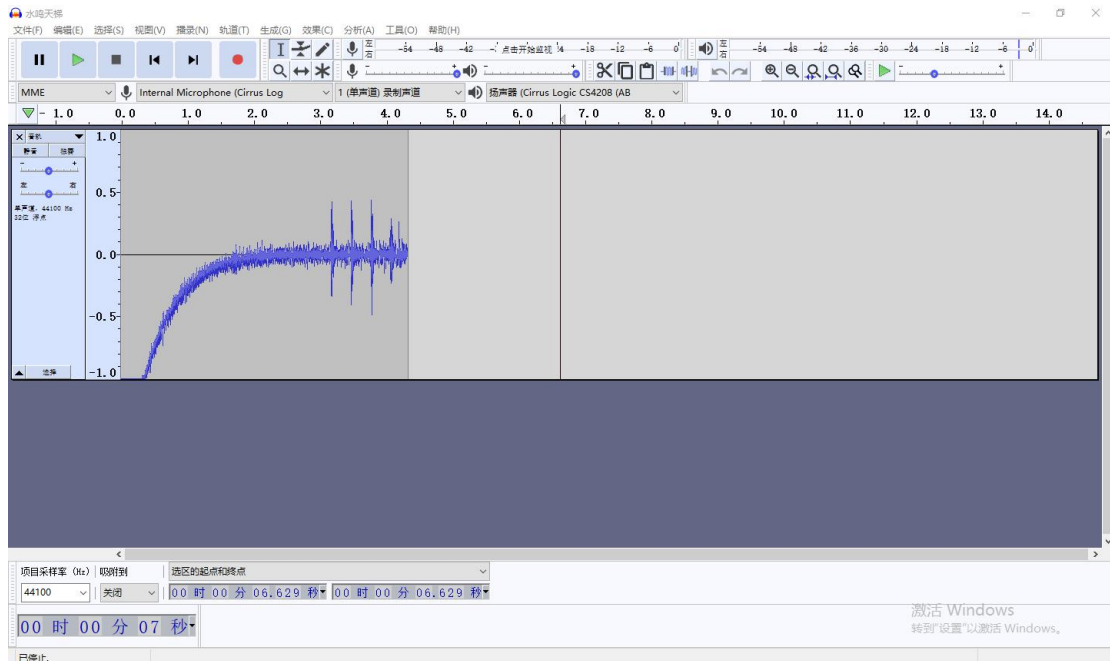


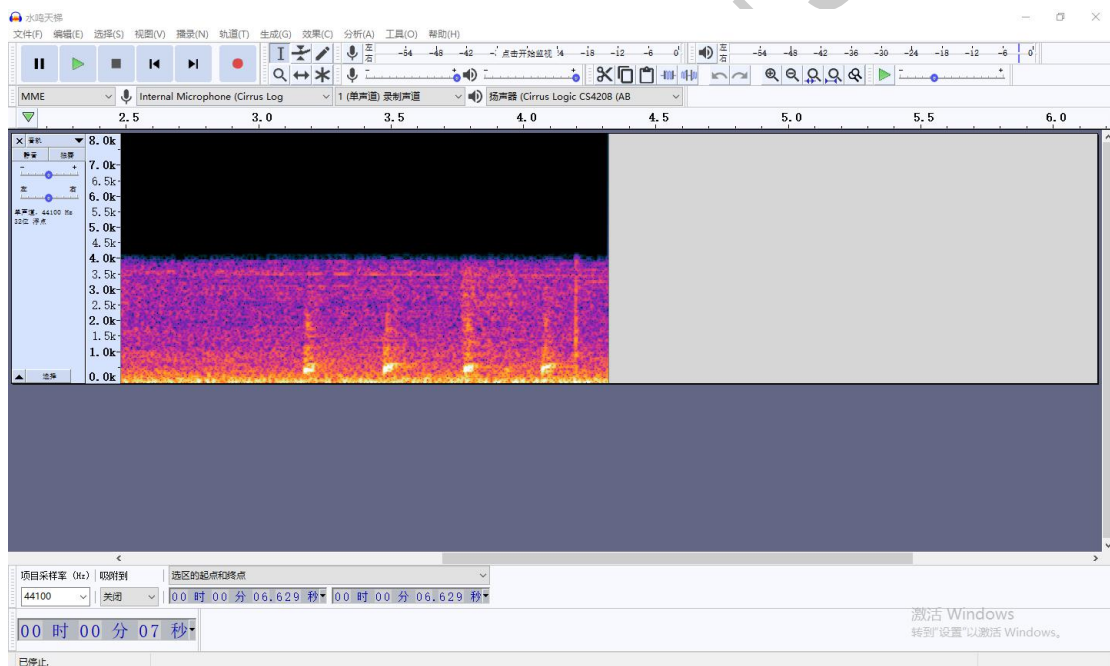
图 2.27 “V”形排列的频谱图

## 2.8 水鸣天梯

在鹤山除了招鹤回鸣以外，在同一景点的这组 47 级石阶上，还有另一著名的声学奇观——水鸣天梯。一人站在上端，另一人拾级而上，上端的人便会听到叮咚悦耳的水鸣声。我们决定分别利用现有装置中的 7 级、14 级木板来尝试再现“水鸣天梯”的现象。小组成员一人站在木板阵列一端用螺丝刀敲击，另一人带着电脑在另一端靠近木板处接收声音。很幸运，我们第一次敲击就听见了敲击声中伴随着明显的水声。经木板传播所得的声音信号脉冲图和时频图如图 2.28。



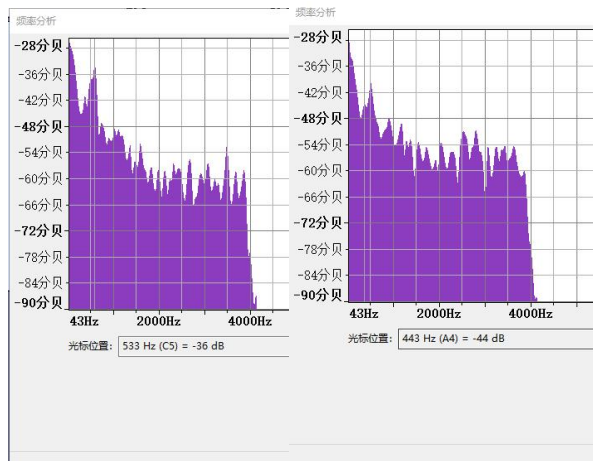
(a)



(b)

图 2.28 水鸣天梯实验的声音脉冲和时频图

我们选取了其中中间两次敲击后的声音进行频谱分析（如图 2.29）。在频谱图上，频谱低频部分明显得到加强，特别是在 568，510 赫兹处有明显的干涉峰，按照台阶周期干涉加强推算， $\lambda = 2d$ ，频率大约为 590 赫兹，与 568 赫兹很接近。



(a) (b)  
图 2.29 水鸣天梯频谱 (a) 为 7 级台阶, (b) 为 14 级台阶

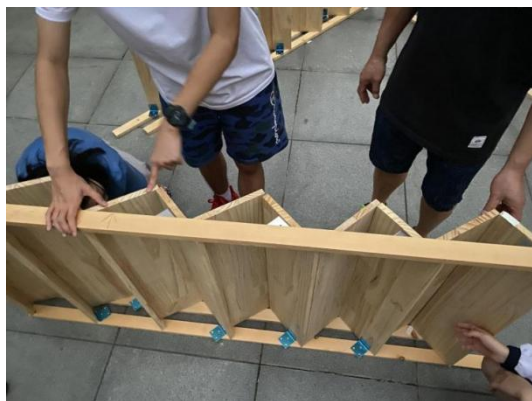


图 2.30 改进装置

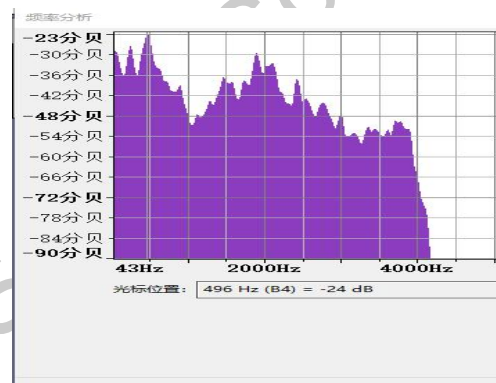


图 2.31 改进后的水鸣天梯频谱

然而图 2.29 上的波峰显得比较杂乱, 为了使现象更清晰, 改进实验效果, 我们用木板填补了原先的空缺形成“台阶”, 总共 14 级木板, 再次重复该实验 (如图 2.30), 频谱如图 2.31。这次我们又听见了明显的水鸣声! 波峰位于 472 赫兹处, 低频部分依然明显的得到了加强, 并且图像相比上次更加清晰。

根据李波波等人的关于水鸣天梯的研究<sup>[4]</sup>, 水鸣天梯的成因是在台阶底部脚踏石阶或者发射脉冲声波, 声波经过台阶表面作用, 到达台阶顶部时只有低频部分的声能量得到了较大保留, 即周期台阶的表面滤波效应使得脚踏声转变为悦耳的水滴声。在此频谱图中低频峰的出现与文献中的描述一致。

我们的实验还证明, 无论台阶材质是木板还是石阶, 甚至相邻木板之间没有完全相连, 都可以呈现“水鸣天梯”的现象。

## 2.9 墙中之琴

根据公式 (10), 我们得出入射角和衍射角对回声音调的影响满足  $v = c/\lambda = c/2a\cos\alpha$ 。因此只要改变入射角的大小, 就能在不同位置发出音调不同的声音, 多人按照乐谱依次拍手, 跺脚, 就能实现音乐“演奏”。

查阅相关资料后，我们了解了一些特定音高的发声频率（如表 2.4）。

由于  $\cos \alpha$  始终小于 1 大于 0，且回声以倍频形式出现，代入木板的参数可知我们可以产生 870 赫兹-1740 赫兹范围内的音调。由于实验场地不够宽阔，我们最终决定尝试演奏中音 6（880 赫兹），高音 1（1046 赫兹）和高音 3（1318 赫兹），分别对应入射角衍射角为  $8^\circ$ ， $34^\circ$ ， $49^\circ$ ，对应的频谱图如图 2.32。实际接收到回声的峰值分别出现在 888 赫兹，1005 赫兹，1299 赫兹处，与预期接近。然而由于背景环境过于嘈杂，设计的音频不是特别突出，人耳没能成功识别这些音调。相信经过进一步优化是可能实现的。

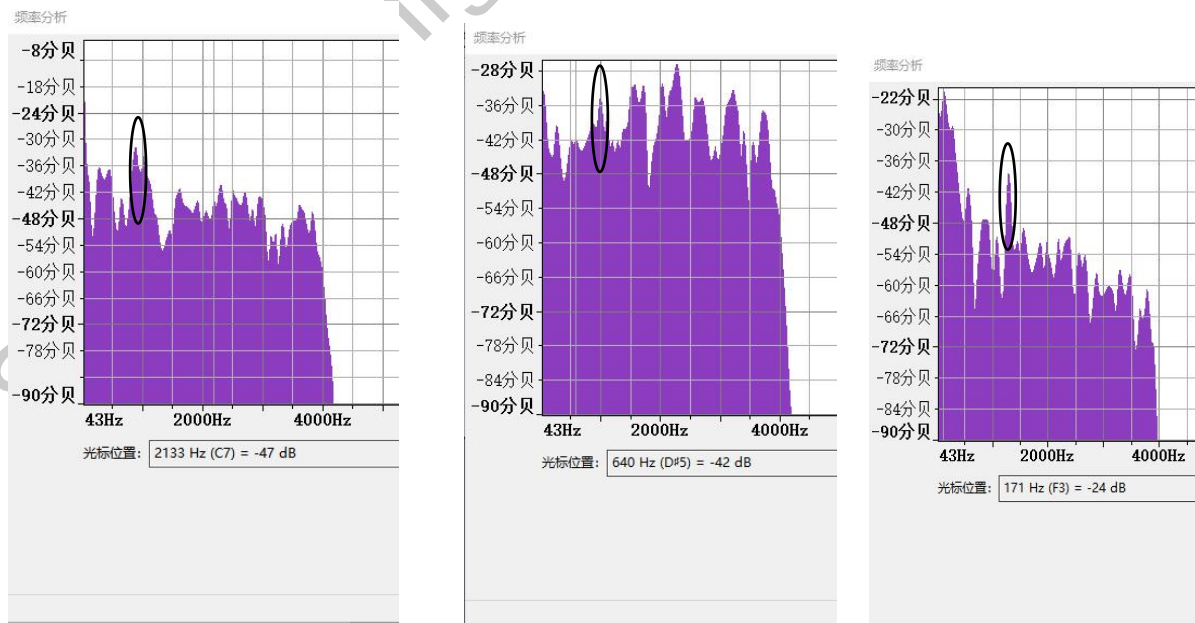
**C调音符与频率对照表**

音符	频率/Hz	音符	频率/Hz	音符	频率/Hz
低音1	262	中音1	523	高音1	1046
低音1#	277	中音1#	554	高音1#	1109
低音2	294	中音2	587	高音2	1175
低音2#	311	中音2#	622	高音2#	1245
低音3	330	中音3	659	高音3	1318
低音4	349	中音4	698	高音4	1397
低音4#	370	中音4#	740	高音4#	1480
低音5	392	中音5	784	高音5	1568
低音5#	415	中音5#	831	高音5#	1661
低音6	440	中音6	880	高音6	1760
低音6#	466	中音6#	932	高音6#	1865
低音7	494	中音7	988	高音7	1976

每两个半音频率之比为  $\sqrt[12]{2}$ ，

1#（升半音）和2b（降半音）的频率相同

表 2.4（本表格来自网络 [https://blog.csdn.net/weixin\\_51012937/article/details/112911747](https://blog.csdn.net/weixin_51012937/article/details/112911747)）



(a)

(b)

(c)

图 2.32  $8^\circ$ ， $34^\circ$ ， $49^\circ$  对应的频谱图

### 3 总结与展望

基于“招鹤回鸣”“茅山军号”等类似现象的研究，理论上我们从两方面分析问题。

一方面，参考光栅公式将台阶这一具有周期性的声学反射体作为“声栅”考虑，得到出回鸣音频率的一般公式。公式可以直接应用于计算每种模型（如提到的青岛即墨招鹤回鸣台阶、新提出的对称方案）回鸣音频率，同理，该一般公式也可以通过简单的几何关系推导，广泛地应用于其他台阶模型；我们还讨论了布拉格公式的适用条件。

另一方面，为了计算出衍射波的频谱，我们应用类似于衍射光栅强度分布的公式，在此基础上构造其响应函数，将不同的台阶参数代入其中，则可以达到计算频谱的目的。

实验上，由于7月底新冠疫情在南京突然爆发，我们被迫取消了前往青岛即墨等地实地考察的计划。我们调整实验方案，通过DIY设计搭建了一个木板阵列结构，成功再现了“招鹤回鸣”和“水鸣天梯”现象。

在预实验中，精度不足也成为了棘手的问题。我们通过优化实验装置和实验环境，克服了困难。我们的实验装置参数灵活可调，还可以进行优化设计。我们通过击掌、跺脚等多种发声和反射方式，进行了对实验的模拟，还原并优化了“招鹤回鸣”的现象。为了验证理论的正确性，我们还进行了频率响应的实验。此外，我们结合理论公式，可以做到通过控制入射角和接收方位来调节音频，并以此为基础进行了“墙中藏琴”的回鸣墙乐音设计，最后还原了“水鸣天梯”的现象。

对于本文所论述的现象的成因原理具有科学性，现象明显、装置简单且容易实现，具有推广价值。例如在科技馆、科技节中作为生动的科普教育，或者在公园、小区等地点进行独特的声学景观设计，为生活增添趣味和文化氛围。这样的声学景观，集科学与音乐为一体，同时具有教育和娱乐的功能，是令人喜闻乐见的综合实验艺术。

最后，以一首小诗来纪念我们暑假的实验历程：

击屐复唧唧，石城搭木梯。一击闻鹤鸣，一步一声犀。

一踏歌载欣，再踏入青云。天梯听水声，何需遇真宫。

好奇之心付以信，科学之鹤鸣以应。



图 3.1 实验过程中附近的小朋友们好奇地聚集围观

## 参考文献

- [1] <https://tv.cctv.com/2015/01/22/VIDE1421926067225648.shtml>
- [2] CHEN X, QIN M, WANG S, et al. Unraveling the mystery of the “Maoshan Bugle”[J]. American Journal of Physics, 2014, 82(2): 135-141.
- [3] 林建恒, 高大治, 衣雪娟, 等. “招鹤回鸣”: 布拉格共振声学景观 [J]. 声学技术, 2016, 35(2): 87-90.
- [4] 李波波, 李桦林, 刘昊华, 王少华. “水鸣天梯”声景观成因分析[J]. 声学技术, 2018, 37(3):217-221.
- [5] 赵凯华. 新概念物理教程: 光学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004: 208-209.

2021 S.-T. Yau High School Science Award

## 致 谢

在论文的最后，将最诚挚的感恩和敬意致以所有在理论分析、实验模型设计与搭建、提供实验器材、实验启发与灵感的人们：

致谢研究过程中自始至终都给予了我们耐心指导，且在指导研究以外还时常关注我们日常生活与成长的王思慧教授。在我们因为装置精度问题和乌龙事件感到些许迷惘时，她却始终保有着一种“信念”——对于正确的理论推导出的实验现象一定值得去尝试和探索的信念、对于不断的调整和优化一定能找到方向的相信、对于我们这群在科学研究方面乏于经验的孩子也能做出些什么的相信。老师还告诉我们，实验多多少少是一种冒险，哪怕原理确认的现象，也未必能做出来，但是花时间冒这种险是值得的。

致谢在学习相关知识时帮助我们排除障碍的肖林涛老师，为面对未知的迷雾时的我们点亮了一盏明灯。

致谢在实验中提供了器材使用和软件使用指导的何兆钦老师，让我们掌握了实验中基本的能力，我们才得以迈出科学实践探索的第一步。

致谢王焯飞老师对于实验设备稳定的一些关键问题提供的指导以及更换试验场地的关键建议。

致谢各位同学的父母在大型实验装置的搭建过程中付出的陪伴与心力、实验场所的提供以及关注和关心。

致谢在实验过程中在器材旁偶然踩脚踩虫却让我们捕捉到了清晰的实验现象的金城一号小区居民路人甲。

## 实验时间和地点

在确定研究课题后，并对其原理和影响因素进行理论分析后，我们从8月17号开始进行预实验，根据预实验的结果对实验场地和实验装置进行改良。8月18日确定了理想实验地点并完成了实验装置的搭建，然后进行了“击掌回鸣”的实验，记录实验结果并撰写实验报告，但不幸闹了一次乌龙事件。8月20日第一次成功完成击掌回鸣的实验，并得到了理想的频谱。8月23日完成了跺脚的实验并收获成功，还进行了扫频。8月27日进行了反对称方向的实验，拆掉部分台阶的优化，并初次尝试水鸣天梯。9月2日完成了不同排列方式的优化以及成功得到“水鸣天梯”的理想结果。之后对论文进行了整体补充和多次修改。

研究期间指导老师召集我们进行了多轮线上以及6次线下集中实验，讨论改进原理机制，修正完善实验验证方案，协调整理理论与实验结果，并将理论和实验结果进行对比总结。

所有实验均在南京市秦淮区金城一号小区内完成。

我们三人在研究过程中团结协作、密切配合，共同完成了整个论文的研究工作。杨静悠负责撰写了理论分析部分、总结与展望和论文的汇总成稿，唐铭钟负责在实验中使用电脑记录和分析频谱并进行了实验部分的写作，最后完成了论文的整体修订、校对和排版，华硕彦进行了各种频谱的计算以及图表绘制。



## 后记 实验花絮

正如在实验部分中提到过的，我们在实验搭建模型的过程中曾经遭遇过一次乌龙事件。

当我们第一次看到那张时频图漂亮的纹样时，心里是种若有若无的确认和谨慎保守的试探，这是种由实验经历的浅薄而产生的心理不确定性，而由王教授辨认后，这份突如其来的狂喜才得以释放、充斥。而那种初尝实验正向反馈的感受，也有其危险之处，也即，我们会无意识地放弃质疑、放弃推翻重来的可能。那天，回家的脚步都是轻飘飘、轻飘飘的。

然而，当第二次的实验中发现了错误时，发现了从时间轴上体现出的、无法辩驳的错误时，那种迷茫和无措是极具压迫性的，更可怕的是动摇的信念——理论上能推出的现象，现实中真的能重现么？我不敢想象，心里也增添了几分怀疑，但仍然在大家的鼓励和推动下一起继续进行着实验。最令我印象深刻的是王教授的坚定，正如我在本文“致谢”部分所言，

“在我们因为装置精度问题和乌龙事件感到些许迷惘时，她却始终保有着一种‘相信’——对于正确的理论推导出的实验现象方向上的确信、对于不断的调整和优化一定能克服困难的相信、对于我们这群在科学研究方面乏于经验的孩子也能做出些什么的相信。”老师后来告诉我们“你们的实验是幸运的，做实验多多少少是一种冒险，哪怕原理确认的现象，也未必能实现，但是花时间冒这种险是值得的。”

每个人都出谋划策。我们将距离拉到能达到的最远、设备搭建到能达到的最精确、原声的隔离达到能达到的最强以后.....

“唧.....唧”

“唧.....唧唧”

击掌后高频的鹤鸣回声起初是难以辨认的，直到一位路人偶然跺脚，让我们中的一些人清晰地意识到神奇回声的存在。反复的实验演示之后，终于大家都意识到了鹤鸣的存在，可谓：

击履复唧唧，石城搭木梯。一击闻鹤鸣，一步一声犀。

一踏歌载欣，再踏入青云。天梯听水声，何需遇真宫。

好奇之心付以信，科学之鹤鸣以应。

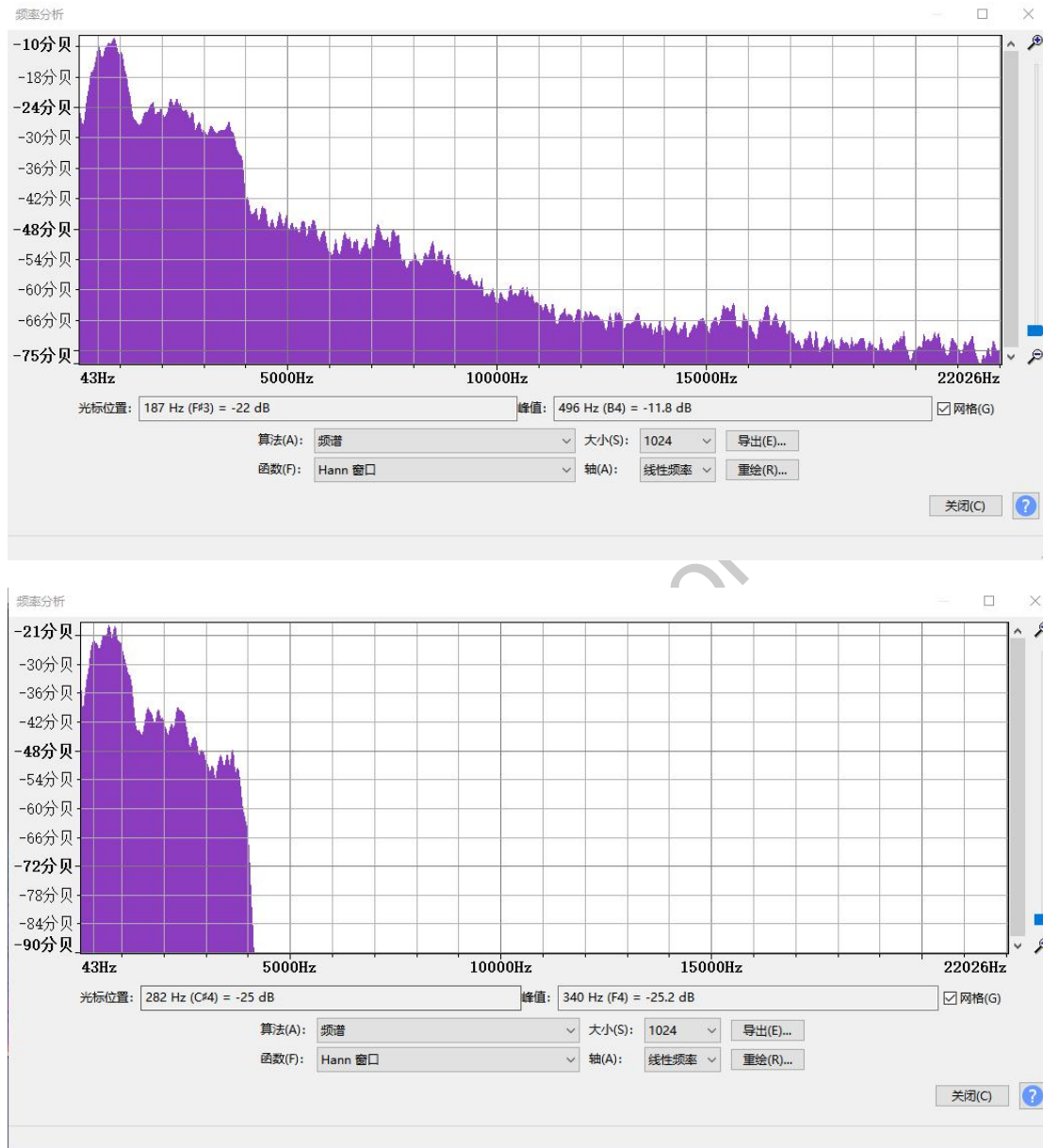
最后一天的结尾，我与王教授同行到地铁站的路上，她对我说：“在我的经历中，我总是相信自己想做的事情，只要坚持去做，最后总能成功。”

我想，这种“相信”，大概是从事科学的人们最基本的品质，也是我在此次乌龙事件中，甚至是整个研究过程中学到的最重要的一课——相信科学的理论，相信自己的教授和队友，相信探索的过程，还有，相信自己，相信冒险的价值。

心有热爱，且请相信。

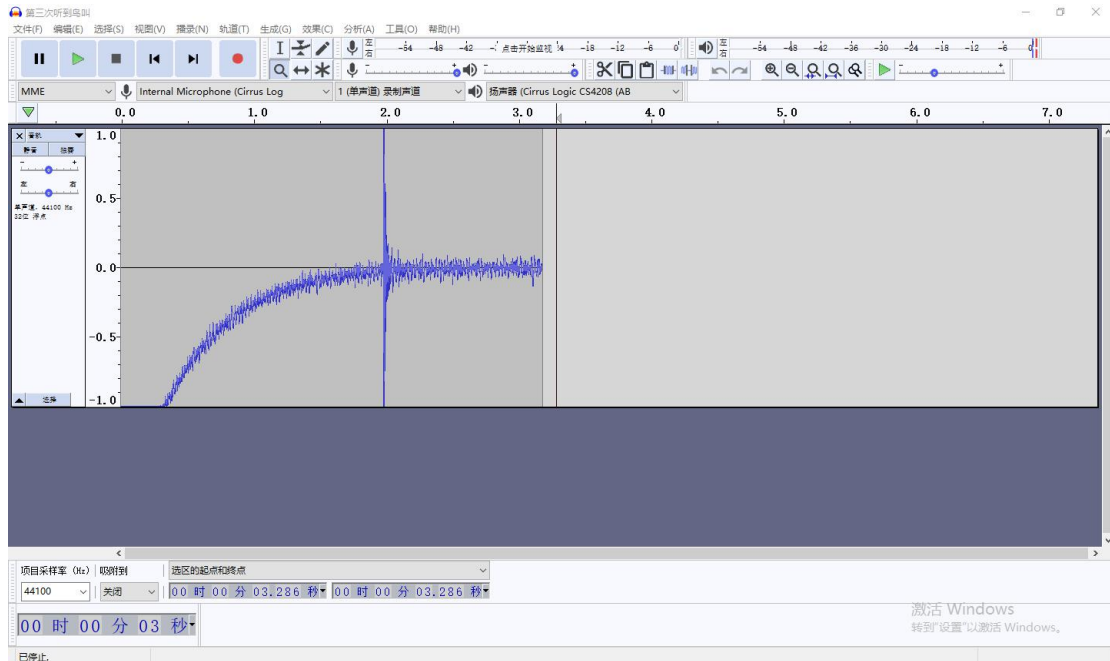
# 附录 1：部分实验记录

## 2.1 预实验 1 2021 年 8 月 17 日 室内进行的预实验图像

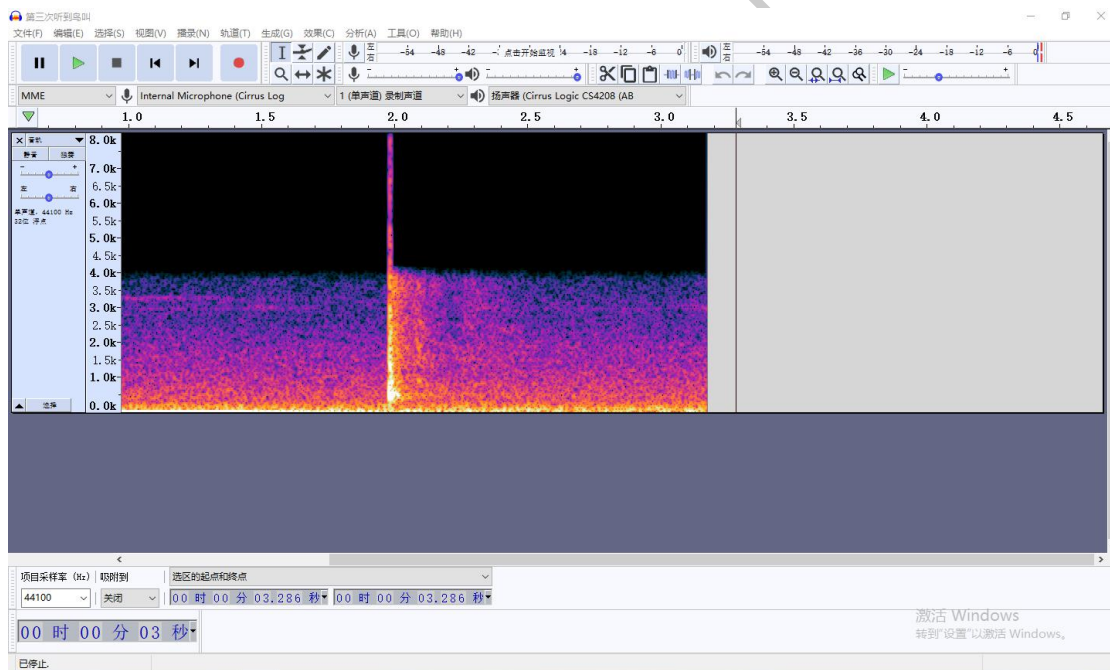


附图 1 掌音（上）和其回声（下）的频谱分析图

## 2.3 节击掌回鸣 提到的 2021 年 8 月 22 日第二次成功听见的实验图像：

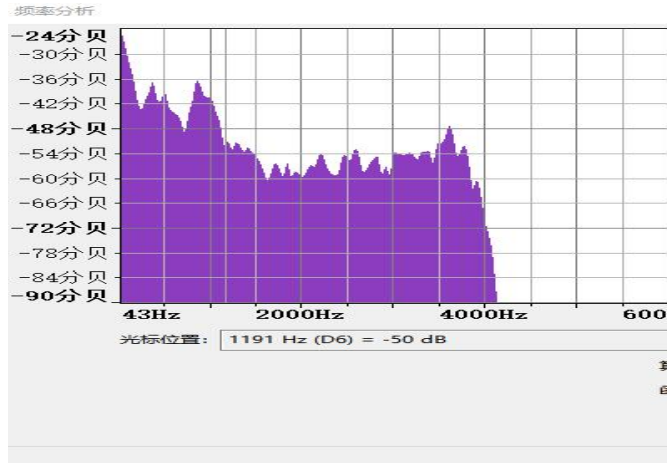


第二次的脉冲图



附图 2 第二次的时频图

我们再次听到了清脆的鸟鸣声，此外在时频图中可以发现，拍掌过后约 0.1 秒的位置再次出现了条带状纹样，我们继续对此位置进行频谱分析



附图 3 第二次实验频谱图

8月21日乌龙事件记录

8月27日的预实验中曾经闹出乌龙，我们所经历的大起大落写在文章最后以作纪念。经过一个上午的搭建。实验从下午开始。我们首先将笔记本电脑（用来接收和分析频谱）和声源同时放在图 2.4 中的 A 处，声音从发出到反射到再被接收往返时间大约为 0.1s。为了防止电脑收到的击掌声太强，我们在电脑和声源中间放置了隔音板（如图 2.5）。

经过实验，我们获取了如下声音脉冲图像（如图 2.6）：

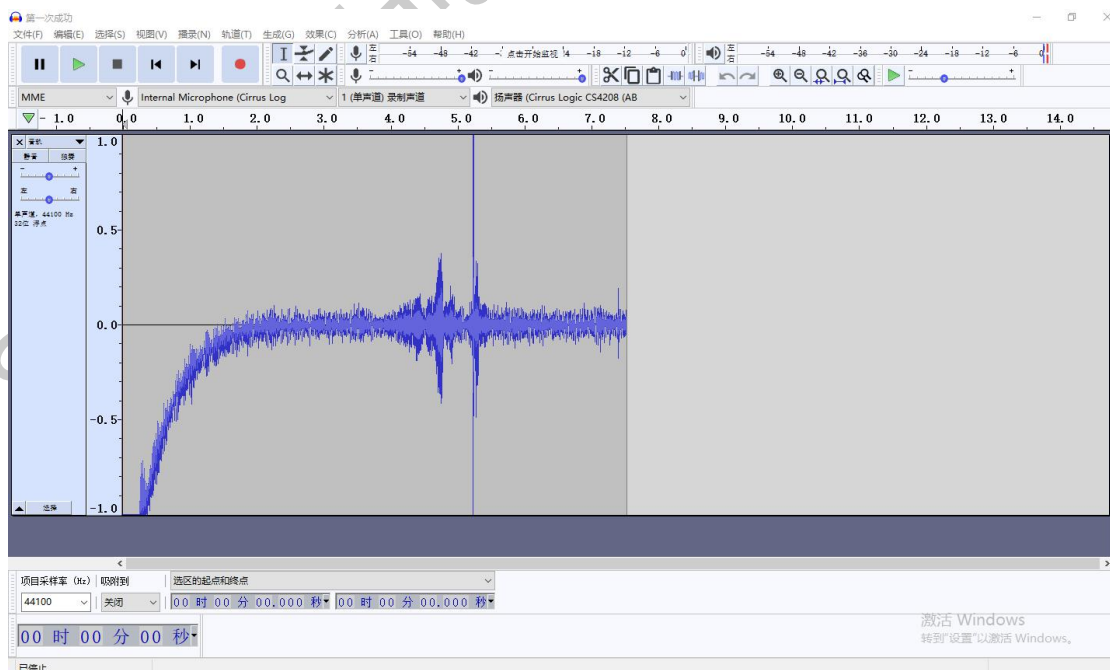


图 2.6 第一次实验的声音脉冲图像

该音频完整的时频图（如图 2.7）：

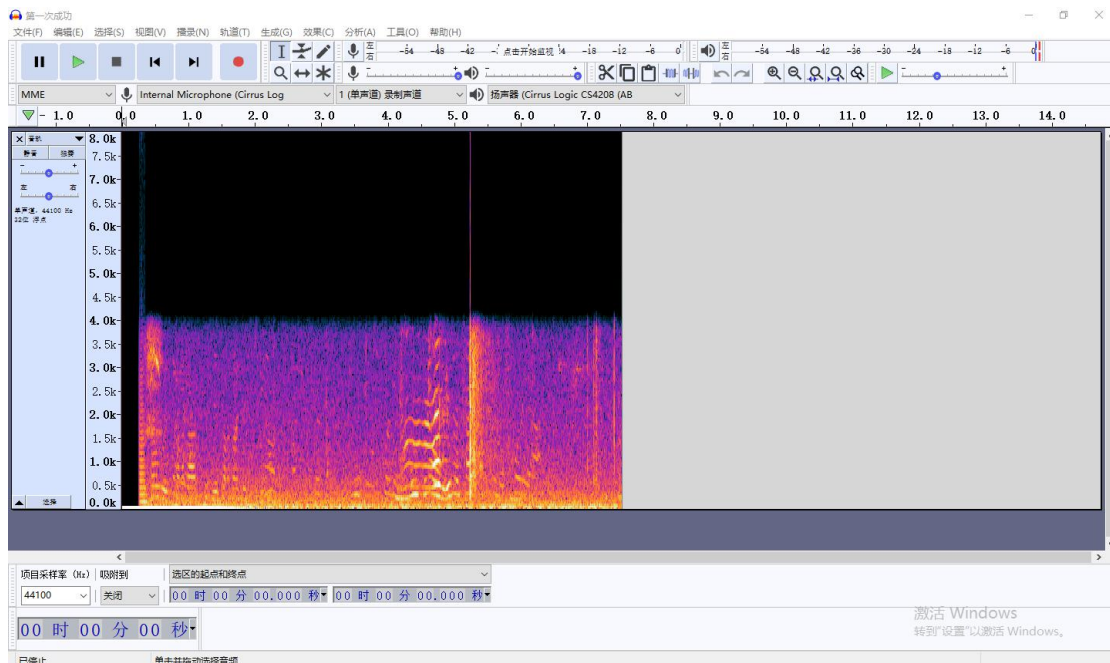


图 2.7 第一次实验的完整时频图

我们惊喜地发现，时频图上出现了一段规则的梳状频谱（图 2.7 上 4 到 5 秒之间位置），我们当时认为这便是经过木板反射后的声音图像，于是对其进行了频谱分析（如图 2.8）：



图 2.8 第一次实验得到回声的频谱分析图

不难发现，频谱分析图上出现了规则的峰：分别对应 289 赫兹，507 赫兹，1006 赫兹，1357 赫兹，2003 赫兹的位置。这不禁让我们产生了疑惑：按照  $v = c/2a$ ，当时环境温度  $30^{\circ}\text{C}$ ，声速约为  $348.7\text{m/s}$ ，木板间距  $a=20\text{cm}$ ，在 870 赫兹左右的位置应该有峰出现，然而频谱分析图上却没有任何体现。我们又改变声源的位置，将其移动至图 2.2.3 中的 C 位置，以透射的方式再次进行实验。结果如图 2.2.8 所示：

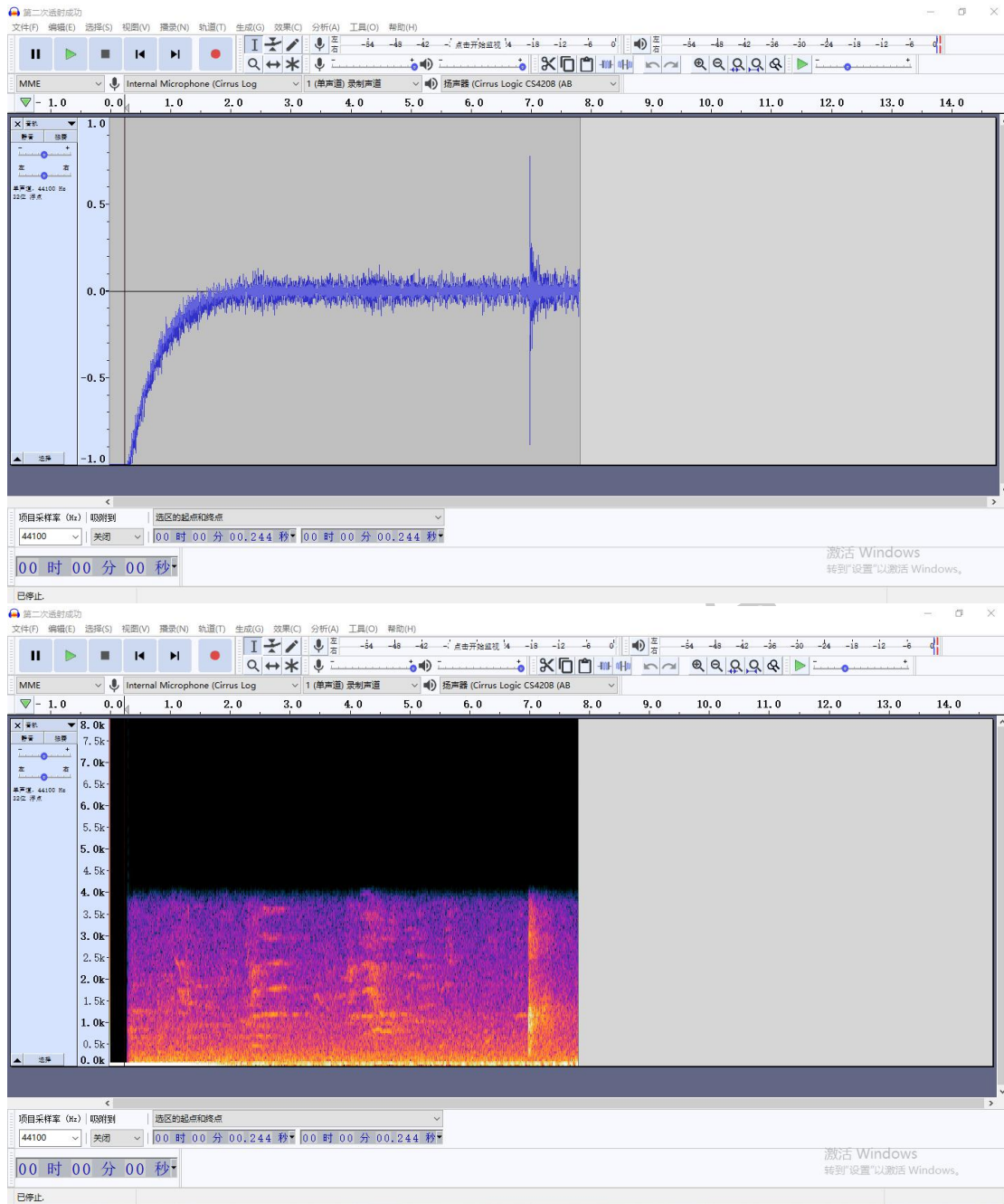


图 2.2.8 第二次实验（透射）的脉冲图（上）和时频图（下）

时频图上再次出现了规则的图像，我们再次对规则区域进行频谱分析（如图 2.2.9）：

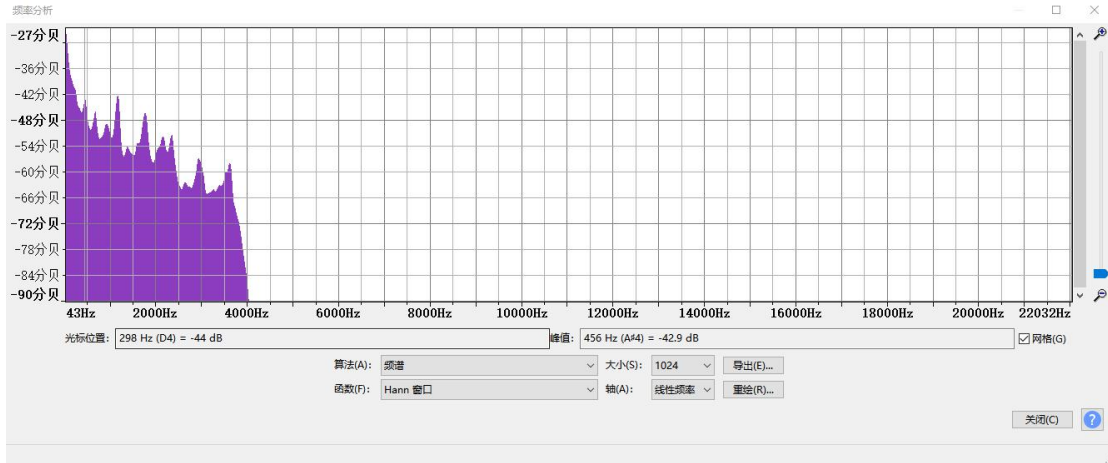


图 2.2.9 第二次实验规则区域的频谱分析图

这次频谱分析图上的峰出现在 456 赫兹，1177 赫兹，1776 赫兹的位置。按照透射的情况，入射角为  $0^\circ$ ，衍射角为  $45^\circ$  的时候，估算一级干涉极大的波长  $\lambda = d \sin 45^\circ = a = 20\text{cm}$ ，频率  $\nu = c/a = 1740$  赫兹，该透射的频谱中存在 1776 赫兹的峰，可能是透射的极大位置。

为了寻找第一干涉峰，我们又回到 A 点重复了第一个实验，时频图上再次出现了规则的图案（如图 2.2.10），我们对规则区域再次进行频谱分析（如图 2.2.11）。

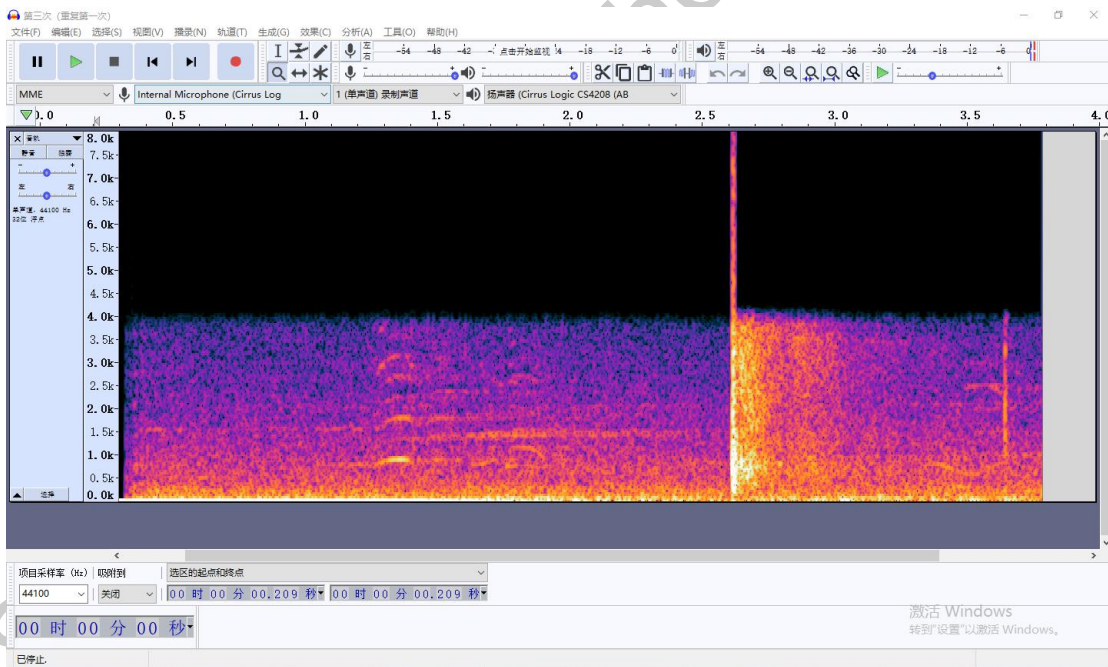


图 2.2.10 第三次实验的时频图

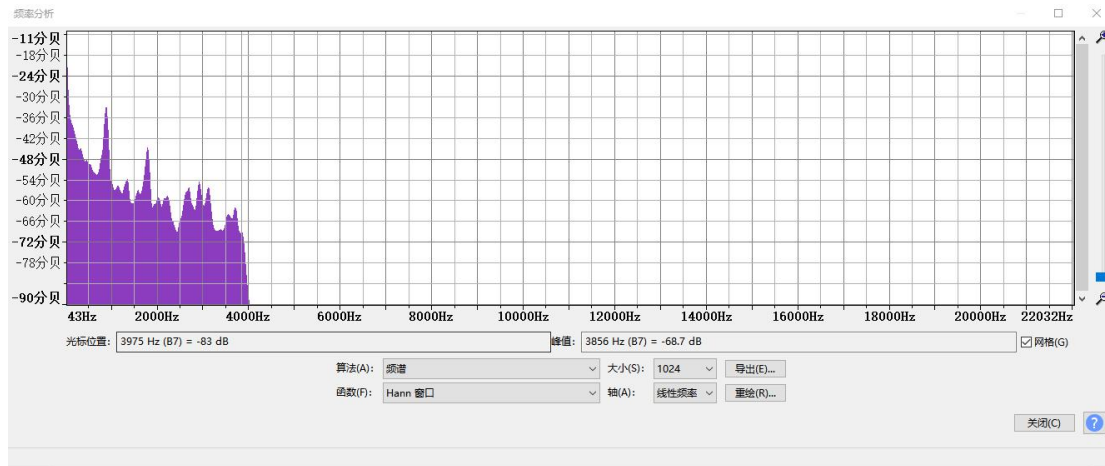


图 2.2.11 第三次实验的规则片段频谱分析图

如图 2.2.11 所示，这次的频谱分析图上的干涉峰出现在 895 赫兹，1796 赫兹处。这次的结果与预期数据 870 赫兹很相符，于是我们相信我们找到了木板阵列滤波的干涉峰！就在即将宣告实验大获成功之际，我们突然发现先前观察时频图时，竟然忽略了判断拍掌声的位置，于是我们重新回头，调出三次拍掌的时频图——先前三次出现规则图案的地方，全部位于拍掌之前！我们十分失望，原来先前看似的成功仅是一次乌龙事件。那是什么因素导致了三次实验均存在如此独特之声音呢？我们调出音频，对照时频图发现，造成独特图案的“罪魁祸首”竟然是周围环境中小区居民说话、喊叫所发出的声音。由于室外环境不可避免的嘈杂，这一因素的影响也会纳入我们之后实验的考虑之中。



## 附录 2 部分实验音频

音频 1: 击掌听见鸟鸣声

音频 2: 跺脚听见鸟鸣声

音频 3: 空地跺脚, 无鸟鸣声 (对照组)

音频 4: 衍射角  $15^\circ$

音频 5: 衍射角  $30^\circ$

音频 6: 衍射角  $45^\circ$

音频 7: 三组木板

音频 8: 两组木板

音频 9: 水鸣天梯, 可听见明显的水声

音频 10: 水鸣天梯对照组

## 附录 3 部分实验视频

视频 1: 正对木板阵列行走, 可以听见明显的高频回声:  
<https://v.qq.com/x/page/d3274pptjey.html?sf=uri>

视频 2: 在垂直于木板阵列所在直线的道路上行走, 听不见任何独特的回声:  
<https://v.qq.com/x/page/h3274mg2gzf.html?sf=uri>

## 附录 4 考虑衰减因子的公式修正

由于不考虑距离因素对的影响在实验上体现出与理论公式计算结果的偏差较大,故我们现在对台阶因子的理论公式进行修正。

通过声音振幅随传播距离衰减

$$A_i = \frac{A_0}{r_i}$$

代入台阶因子的公式(18), 得

$$\chi = \frac{\sqrt{\left(\frac{A_0}{r_i} \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi r_i}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{r_i} \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi r_i}{\lambda}\right)^2}}{A_0}$$

则修正后的  $I(v)$  公式为

$$I(v) = \left(\frac{A_0}{r_i} \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos \frac{2\pi v r_i}{c}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{r_i} \sum_{i=1}^k \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin \frac{2\pi v r_i}{c}\right)^2$$

这一公式更加合理地考虑了距离因素造成的衰减因子,因此使用这一修正公式计算出的频谱会更加精确。

## 参赛队员简历

姓名：唐铭钟 性别：男

学校：南京外国语学校 年级：高二

简介：各学科成绩优秀，热爱科学探索，对物理研究有极强的兴趣。有一定的物理实验基础和较强的逻辑思维能力，团队协作意识强。

南京外国语学校学生会学习部长

2020 年 AMC 数学竞赛获得 AIME 资格

2020 年 ARML 数学竞赛区域一等奖

2020 年物理碗竞赛全球铜奖

2018 年美国 EMCC 数学竞赛个人全球一等奖

2018 年 AMC 数学竞赛全球前 1%

多次获得南京外国语学校六星学子荣誉

多次获得南京外国语学校周恩来奖学金

姓名：杨静悠 性别：女

学校：南京外国语学校 年级：高二

简介：各科成绩在年级中名列前茅，综合能力出色，对物理、化学等自然科学方面的知识兴趣极强，也很热爱将自然科学的知识与社会科学融会贯通地进行研究与创作。

2021 年 UKChO 英国化学竞赛金奖

2021 年 CCC 加拿大化学竞赛全球前 100 名杰出奖+全国金奖

2020-2021 学年南京外国语学校高中部“学习十佳”

2020 年 AMC 数学竞赛获得 AIME 资格

2019 年“时代杯”数学竞赛一等奖

2018 年“随园杯”物理竞赛一等奖

南京外国语学校周恩来奖学金“全面发展奖”“特长发展奖”获得者

南京外国语学校“科技特长生”

姓名：华硕彦 性别：男

学校：南京外国语学校 年级：高二

简介：各学科成绩优秀，喜爱物理和数学，具有科学探究精神，善于独立思考和团队协作，对物理实验有很大兴趣。

2020 美国数学大联盟 AMC12 获得 AIME 资格

2020 ARML 数学竞赛区域一等奖

2019AMC 数学竞赛全球前 1%

2018 NOIP 信息学奥林匹克竞赛江苏省一等奖

2017, 2018 年“时代杯”数学邀请赛一等奖

2018, 2019 获南京外国语学校周恩来奖学金特长发展奖 2 次

2021 S.-T. Yau High School Science Award