

参赛队员姓名：徐建深，陈锐洋

中学：华南师范大学附属中学

省份：广东省

国家/地区：中华人民共和国

指导教师姓名：杨晓安

指导教师单位：华南师范大学附属中学

论文题目：耦合弹性热力学系统中的类“化学反应”——研究多气球系统气流流向的新框架

摘要

两个充气的同类气球相互连通时，直觉上气体会从体积大的气球流向体积小的气球。这一直觉在物理上是必然的吗？这一问题的背后涉及到气球这一非理想弹性体的热力学性质。本文从前人对气球膜的研究出发，给出了单个气球的热力学模型，从实验和理论两方面研究了气球的大小与其内外压强差的定量关系。这一关系的非单调性意味着气流不总是从打气球流向小气球，也可能会从具有更大压强的小气球流向压强更小的打气球。实验上，我们也通过控制流速的动态放气过程，观测了马林斯效应带来的橡胶老化对气球半径-压差关系曲线的影响。进一步，在这一气球半径-压差这一特征关系的基础上，我们将气球按照在“半径-压强”曲线上所处的单调性区间及半径两个对气球进行了分类，建立了预测气球连通后气流走向的“类化学反应”模型，给出不同“气球反应物”组合所产生的六种典型的“类化学反应方程式”。我们以两球系统为例，从实验上对理论预言的若干方程式进行了观察验证。特别地，我们观察到了一种特殊的不稳定平衡现象，即两气球初始处于反常的压强-半径区域时候，不稳定平衡会很容易被打破，演化为两个大小差异较大气球的稳定平衡状态。此外，我们的实验首次将气球连通问题拓展到了三球连通系统，并将我们提出的“类化学反应”框架运用到了三球连通的气流流向问题中。实验中，我们发现了三球系统出现的两次间断气流流动趋向平衡等新奇的动态热力学过程。

关键词：橡胶气球；橡胶老化；马林斯效应；气球连通；类化学反应；多气球系统

目录

第 1 节 引言	4
第 2 节 弹性气球压差-半径曲线	5
2.1 气球的热力学模型	5
2.2 压差-半径曲线的实验验证	8
2.3 马林斯效应导致的压差-半径回线	9
第 3 节 联通气球组的“化学反应”理论框架及实验验证	11
3.1 非等大不平衡气球组的反应	11
3.2 等大不稳定平衡气球组的平衡破坏	22
第 4 节 三球连通系统中的气体交换实验	23
4.1 非等大不平衡气球组的反应	24
4.2 非等大不平衡气球组的反应	30
4.3 先后两次气体交换	31
第 5 节 总结与未来展望	34
参考文献	34
致谢	35
附录一	36
附录二	36
附录三	37

1.引言

气球是生活中常见的弹性体, 一般而言, 气球可以使用较纯的氦、氢、一氧化二氮、氧等气体填充, 生活中为了方便也常用空气填充。对于某些特殊任务, 气球中也可以填充烟雾、液态水、粒状介质甚至光源。从应用的角度来说, 气球所具有的低密度和低成本的特性, 使得其被广泛地应用在气象、医疗、军事中运作运输设备。此前, 不同的学者对橡胶气球非线性特性以及橡胶气球的表面张力特性进行了系统的研究。1978年, F. Weinhaus 和 W. Barker 的研究[1]表明, 与用于演示表面张力的典型系统肥皂膜不同, 由于橡胶自身的弹性性质, 气球的表面张力随着其拉伸具有较复杂的非线性行为。因此, 气球内部的气体压强随体积的变化也具有丰富的性质。2002年, I. Müller 和 H. Struchtrup [2]给出了气球充气时自由能与压强等变量间的关系。在1978年和2011年, D. R. Merritt 和 F. Weinhaus [3]以及冯翰祺等人 [4]分别给出了单个气球的热力学模型的理论实验研究, 得到了气球内外压差与其半径的关系。这些研究表明, 这一压差是气球膜的弹性力决定的, 气球膜相当于给气体系统一个边界并提供了“表面张力”。2004年, Y. Levin 和 F. L. da Silveira [5]对于上气球连通系统进行研究, 得出了部分情况下双气球连通后的气体流向。在2009年, Chen C S [6]研究了气球内外压差与其表面张力之间关系。另外, 在2017年, 冯翰祺等人 [4]的一些研究从实验的角度验证了气球内部压强与体积的关系。在2021年, 王悦等人 [7]对于气球特性的研究中得出了气球的压强峰值以及气球半径的关系。这些研究都体现了单个气球压强-体积(半径)曲线的复杂性所导致的双气球连通系统中的气流流向问题的有趣与丰富的特征。

然而, 基于单气球的热力学模型, 尽管可以讨论多气球间气流的流动, 但由于情况太多, 此前的研究均以实验观察为主, 没有一个普适的理论。为了解决这一问题, 我们在本文中建立了气球连通的类“化学反应”模型。具体而言, 将气球的压差-半径曲线分区作为气球的一个离散指标, 并以气球半径作为连续指标, 将处于不同区域具有不同半径的气球类比于化学反应中的“反应物”, 进而可以直观的讨论不同条件下(“化学反应”的条件)反应的“生成物”, 即预言气体在不同气球间流通至整体压强平衡后, 各气球所处的状态。我们在实验观察了该模型所预言的各种情况。对一些特殊的情况, 我们给出了详细讨论, 并分析了这些情况与一些别的热力学体系与现象, 例如黑洞辐射等间的关系。

本文的详细安排如下, 在第2节中, 基于前人的理论研究, 我们给出了气球中气体与大气压差随气球体积的变化关系, 并绘制了压差-半径曲线。我们搭建了可以充气并检测气体压强与半径变化的实验装置, 该装置具有容易扩散的优势, 以便后续实验。在验证了理论预言的压差-半径曲线趋势的正确性基础上, 我们讨论了由于橡胶老化的马林斯效应所导致的压差-半径曲线在充放气过程中的差异。在第三节中, 我们对实验得到的压差-半径曲线进行了分区, 并以两气球连通为例引入了气球的“化学反应”模型。该模型定气球“反应物”和“反应过程”, 并能预言气球“生成物”所处的压差-半径曲线的区域与半径范围。在第4节中, 我们扩散所搭建的实验装置, 实现了连通气球组的架构。在实验上通过对气球打气量的不同, 给出了不同的气球“反应物”组合, 验证了第3节中的各种典型反应过程及对气球“生成物”的预言。第五节中, 我们进一步扩散实验, 对多气球连通的过程进行了观测, 发现了许多新奇的现象, 例如三球连通系统中存在二次气体交换。最后, 本文的总结与展望在第五节中给出。

2.弹性气球压差-半径曲线

2.1 气球的热力学模型

气球的压强，是气球的表面张力与外界大气压综合的结果。由于外界气压在同一个地点近似为一个常数，因此，只要我们能够知道气球表面张力提供的压强，我们就能够推算气球内部的压强。理想情况下，气球可以近似为具有表面张力系数 σ 的薄膜所包裹的球对称的封闭气体系统。杨-拉普拉斯方程给出了这一薄膜收缩所附加给内部气体的压强 p_s 与球体半径 R 的关系为 [4, 8]

$$p_s = \frac{4\sigma}{R} \quad (1)$$

这一关系对于肥皂膜体系符合良好，且一定范围内 σ 近似为常数，与膜的伸缩无关。上式的具体推导见附录 I。然而，气球主要由橡胶构成，而橡胶并非理想弹性体，其表面张力系数一般与其表面积的拉伸量有关 [8]。

得到气球膜提供的压强 p_s 后，由于气球内部压强等于气球膜提供的压强加上外界气体的压强，因此可以得到气球内部压强与气球半径的关系为

$$p_z = p_s + p_0 = \frac{4\sigma}{R} + p_0 \quad (2)$$

σ 是由橡胶膜的弹性性质决定。

以下我们从热力学的角度进行分析。根据热力学第一定律有

$$U = TS + pV = -Q + W \quad (3)$$

这里， T 为温度， S 为熵， p 为压强， U 为气球膜内能， V 为气球橡胶膜体积， Q 为热量， W 为系统对外界做的功。其中由于在膨胀和收缩过程中，气球没有产生很大的热量，且待气球完全冷却后，气球的温度始终与外界环境中的温度相等，所以公式中的温度 T 为常数，且每当气球充气放气结束后，在不考虑气球橡胶膜老化的情况下，每个 V 对应一个固定的 p_s ，所以 p_s 也为常数。可以得出 T 与 p_s 为常数。根据 (6) 式，我们可以得出内能的变化量的公式为

$$dU = TdS + p_s dV = dQ + dW \quad (4)$$

由于在气球吸气或放气的过程中，气球橡胶膜体积的膨胀和收缩会对外界做功。同时，气球橡胶膜也会因为表面积收缩和膨胀而对外做功，所以气球的内能会随之减少，即为

$$dU = TdS + p_s dV + \sigma dA = dQ + dW_1 + dW_2 \quad (5)$$

这里， dA 为气球橡胶膜表面积的变化量， W_1 为气球橡胶膜的体积变化而对外做的功， W_2 为气球橡胶膜的表面积变化而对外做的功。而由于气球形变过程中橡胶膜的体积基本不会发生改变，故 dV 可以忽略不计，因此 (8) 式可以简化为 $dU = TdS + \sigma dA = dQ + dW_2$ ，所以可得 $\sigma = \frac{\partial U - \partial Q}{\partial A}$ 。另外，吉布斯自由能指出

$$G = U - TS + pV = U - Q + W \quad (6)$$

式中， G 为吉布斯自由能， U 为系统的内能。将吉布斯自由能代入 (8) 式中，可以得到

$$\sigma = \frac{\partial Q}{\partial A} - V \frac{\partial p}{\partial A} + \frac{\partial G}{\partial A} - \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{\partial T}{\partial A} S - V \frac{\partial p}{\partial A} + \frac{\partial G}{\partial A} - \frac{\partial T}{\partial A} S = -V \frac{\partial p}{\partial A} + \frac{\partial G}{\partial A} \quad (7)$$

然后再利用吉布斯自由能将式子中的 $\frac{\partial G}{\partial A}$ 展开，得出

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial A} - \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial A} - T \frac{\partial S}{\partial A} \quad (8)$$

其中 U 与 A 没有关系, 故有 $\frac{\partial U}{\partial A} = 0$ [4]。根据亥姆霍兹自由能 $F = U - TS$, 将亥姆霍兹自由能的定义式与 (7) 式、(11) 式联系起来, 可以得出

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial A} - T \frac{\partial S}{\partial A} = -\frac{\partial F}{\partial A} = -\frac{\partial W}{\partial A} \quad (9)$$

上述结果表明, 橡胶的体积功 (自由能) 对半径依赖关系是决定橡胶膜表面张力系数的关键。根据橡胶门尼模型 [9], 在橡胶膜发生较小形变时, 即形变量 $< 150\%$ 时, 满足

$$W = -a(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 - 3) - b(\tau_1^2\tau_2^2 + \tau_2^2\tau_3^2 + \tau_3^2\tau_1^2 - 3) \quad (10)$$

上式中, τ 为不同方向上橡胶膜的拉伸比, 即 $\tau = \frac{R}{R_0}$, R 为气球在某个气压下某个方向上的最终曲率半径, R_0 为气球某个方向上的初始曲率半径。在 (13) 式中, τ_1 为气球在 x 轴上的拉伸比, τ_2 为气球在 y 轴上的拉伸比, τ_3 为气球在 z 轴上的拉伸比, a 和 b 为与橡胶膜有关的常数。

对于标准的球形气球, 气球在形变过程中各个方向上的拉伸比相同, 所以有 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$ 。同时由于橡胶膜的体积不几乎发生改变, 所以有 $\tau_3 = \frac{1}{\tau_2\tau_1} = \frac{1}{\tau^2}$ 。将上述两个关系代入 (13) 式中可以得到

$$W = -a\left(2\tau^2 + \frac{1}{\tau^4} - 3\right) - b\left(\tau^4 + \frac{2}{\tau^2} - 3\right) \quad (11)$$

综合 (4) 式、(12) 式和 (14) 式, 可以得出形变量 $< 150\%$ 时 p_s 足的关系为

$$p_s = \frac{8a}{\pi R_0^3} \left(\frac{R_0}{R} - \frac{R_0^7}{R^7}\right) \left(1 + \frac{bR^2}{aR_0^2}\right) \quad (12)$$

而根据橡胶门尼模型 [9], 在橡胶膜发生大形变时, 即形变量 $\geq 150\%$ 时, W 满足

$$W = -a(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 - 3) - b(\tau_1^2\tau_2^2 + \tau_2^2\tau_3^2 + \tau_3^2\tau_1^2 - 3) - c(\tau_1^2\tau_2^2 + \tau_2^2\tau_3^2 + \tau_3^2\tau_1^2 - 3)^2 \quad (13)$$

上式中, c 为与橡胶膜有关的常数。结合拉伸比的关系, 我们可以得出

$$W = -a(2\tau^2 + \tau^{-4} - 3) - b(\tau^4 + 2\tau^{-2} - 3) - c(\tau^4 + 2\tau^{-2} - 3)^2 \quad (14)$$

由于接触面表面积 A 投影在球体上为 2 个圆形的面积, 由此可以得到 $A = 4\pi R^2 = 4\pi R_0^2\tau^2$ 。再根据 (12) 式, 我们可以得到 σ 与 W 的关系满足

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{\delta W}{\delta A} = \frac{\delta[a(2\tau^2 + \tau^{-4} - 3) + b(\tau^4 + 2\tau^{-2} - 3) + c(\tau^4 + 2\tau^{-2} - 3)^2]}{\delta(4\pi R_0^2\tau^2)} \\ &= \frac{a(4\tau - 4\tau^{-5}) + b(4\tau^3 - 4\tau^{-3}) + 2c(\tau^4 + 2\tau^{-2} - 3)(4\tau^3 - 4\tau^{-3})}{8\pi R_0^2\tau} \\ &= \frac{a}{2\pi R_0^2}(1 - \tau^{-6}) \left[1 + \frac{b}{a}\tau^2 + \frac{2c}{a}(\tau^6 + 2 - 3\tau^2)\right] \end{aligned} \quad (15)$$

进一步将 (4) 式与 (18) 式联立, 可以得出形变量 $\geq 150\%$ 时 p_s 满足的关系为

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{4\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{R_0\tau} = \frac{2a}{\pi R_0^3}(\tau^{-1} - \tau^{-7}) \left[1 + \frac{4c}{a} + \left(\frac{b}{a} - \frac{6c}{a}\right)\tau^2 + \frac{2c}{a}\tau^6\right] \\ &= \frac{2a}{\pi R_0^3} \left(\frac{R_0}{R} - \frac{R_0^7}{R^7}\right) \left[1 + \frac{4c}{a} + \left(\frac{b}{a} - \frac{6c}{a}\right)\frac{R^2}{R_0^2} + \frac{2cR^6}{aR_0^6}\right] \end{aligned} \quad (16)$$

考虑到发生的形变较大，二次项相比于六次项较小，所以二次项忽略不计，最终我们可以得出

$$p_s = \frac{8a}{\pi R_0^3} \left(\frac{R_0}{R} - \frac{R_0^7}{R^7} \right) \left(1 + \frac{c R^6}{a R_0^6} \right) \quad (17)$$

根据 (15) 式，我们利用 Matlab 作图可以得到当气球产生小程度的形变，且形变量 < 150% 时压强 p 与半径比 R/R_0 的关系图，如图 1 所示。通过改变常数 b 的大小，可以发现，当 b 小于某一特定值时，压强 p 会随 R 的增大而先增大，再减小，进而再增大，即非单调变化。且 b 越大时， p 随 R 单调增大的变化率会越大。当 b 增大到某一值之后， p 会随 R 的增大而单调增大。

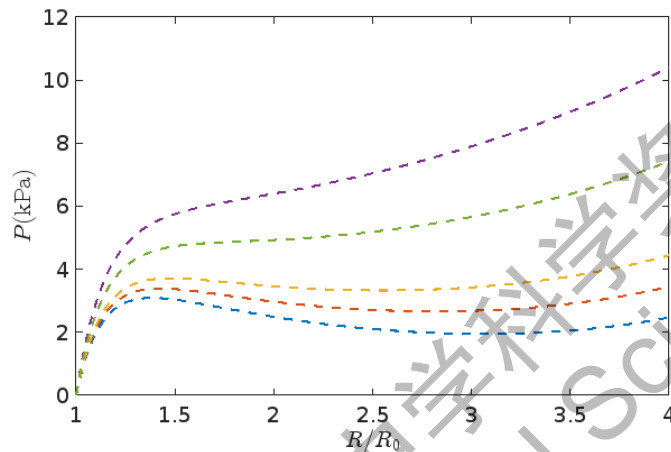


图 1 在不同大小的参数 b 的条件下，压强 p 与半径 R 的理论关系图，参数 b 分别有 0.0005（蓝色）、0.025（橙色）、0.050（黄色）、0.125（绿色）以及 0.25（紫色）

根据 (20) 式，我们利用 Matlab 作图同样可以得到当气球形变量 $\geq 150\%$ 时压强 p 与半径比 R/R_0 的关系图。通过观察，我们可以发现图像大概呈先上升再下降然后再上升的趋势。我们可以将图像分为三个部分，分别为第一次上升部分、下降部分以及第二次上升部分。通过改变常数 c 的大小，我们可以发现，当气球处于第一次上升阶段时，压强随半径的增大而单调上升，且在出现峰值前该变化趋势不受参数 c 的影响。而在 R/R_0 后，随着参数 c 的变化， p 会受到 R 的变化的影响。在下降阶段中，对应不同的参数 c ，我们可以发现在对应同一个 R/R_0 的情况下， c 越大，图像的斜率越小。同时当参数 c 越大的情况下，图像进入第二次上升阶段所对应的 R/R_0 越小。而进入第二次上升阶段后，当参数 c 越大的情况下，对应同一个 R/R_0 ，当参数 c 越大的情况下，图像的斜率越大。

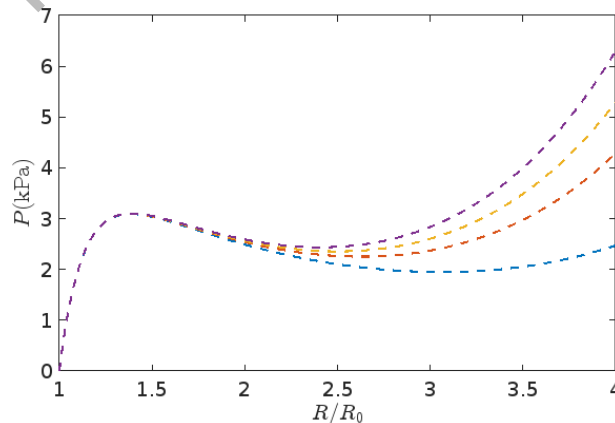


图 2 在不同大小的参数 c 的条件下，压强 p 与半径 R 的关系图，参数 c 分别为 0.00006（蓝色）、0.00015（橙色）、0.00020（黄色）以及 0.00025（紫色）

至此，本文在理论上得到了单个气球在两种形变程度下压强随半径变化的关系、参数 b 和 c 对 $p-R$ 曲线的影响以及峰值 p 对应的 R 大概数值为原始半径 R_0 的 1.5 倍。在附录 II 中，我们仔细讨论了橡胶膜势能参数对压强极值的影响。

2.2 压差-半径曲线的实验验证

本文的双球实验装置如图 1 所示，该装置左右对称设计。以下我们从左至中描述该实验装置：左右两端各有两个四分三外丝的三通管，三通管其中一口套有一个红色气球，一口塞有带孔的一号橡胶塞。橡胶塞外接出一条细乳胶管用于连接压差表以测量气球内部压强与大气压的差值。三通管的剩下一口通过内径 12mm 的乳胶管连接直插式阀门。直插式阀门的另一头通过粗乳胶管连接到中部三通管的左测。该三通管的中间连接橡胶塞并通过细乳胶管外连 550mL 的注射器，用于给系统中的气球充气。



图 3 气球充气-压强测量的复连通装置

我们首先利用该装置来研究单个气球的压差(ΔP)-半径(R)曲线。此时我们只需要使用这个装置的左侧部分或者右侧部分，因此实验中将该侧阀门开启保持另一侧阀门关闭。需要注意的是，在正常的充气过程中，气体的压强、体积、温度都会发生改变^[7]。为了测量气体的恒温 $\Delta P-R$ 曲线，及气球与环境达到热平衡时候的压强半径关系，我们采取如下方式：打开压差表，再通过注射器给气球打气，观察到气球体积有轻微变化后，关闭阀门，使得气球与环境充分达到热平衡。等待一段时间，待压差表示数稳定后，读出压差 ΔP 。实际的气球并非标准的球形，为了实验测量得到的曲线更准确，我们用气球量尺测定气球的长轴和短轴长度 A 和 B ，如图 4 所示。

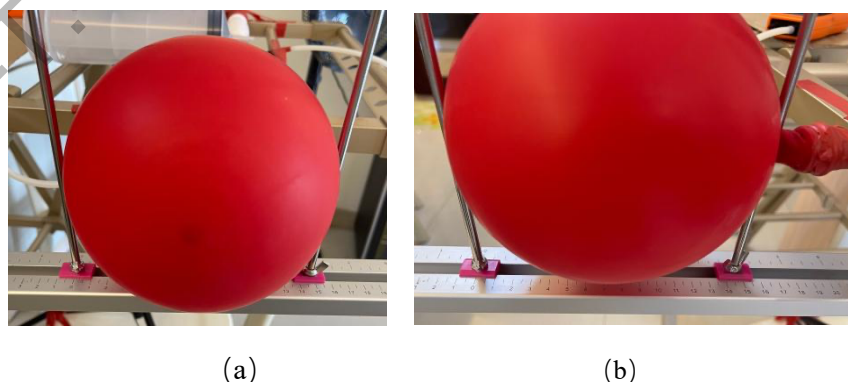


图 4 气球长度测量图：(a) 长轴长度 (b) 短轴长度

我们将气球视为椭球，可以根据体积守恒得到气球的有效半径为

$$R \equiv \frac{\sqrt[3]{A^2 B}}{2} \quad (18)$$

测量完后，打开阀门，对气球继续充气，并重复测量过程。我们将整个充气过程收集到的41组压差与半径数据绘入图4中

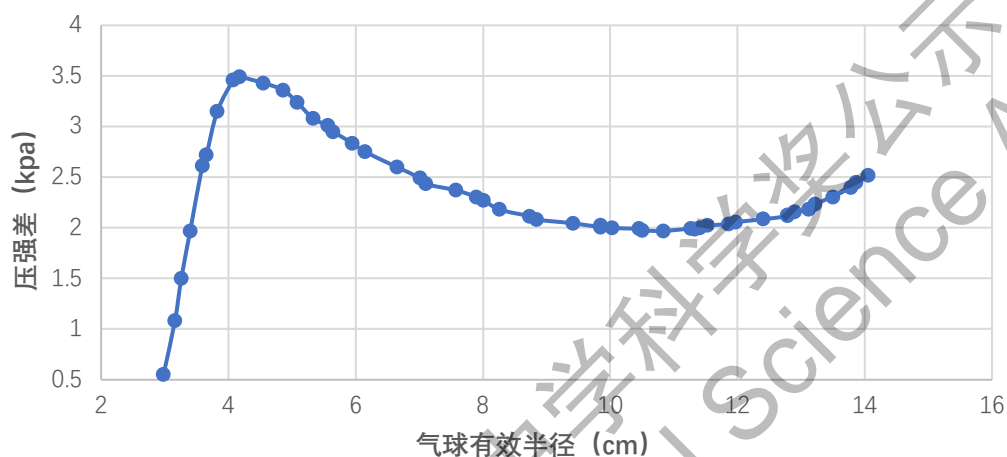


图5 单个气球的（充气）压差(kpa)-半径(cm)曲线

如图5蓝色散点所示，气球随着充气的进行，其半径增加，压强呈现先增大后减小最后再增加的趋势，与理论预言一致。实验中，当有效半径低于5.96cm时，气球呈现松弛状态，不再能测到有效压差数值（内部气压与外界大气压基本一致）。实验结果表明，在初始阶段，气体的充入将气球膜撑起，气球表面张力增加其压强增加，直到极大值。进一步充气，气球表面张力增加相比于半径的增加更缓慢，因而内部压差随着半径的增加减小，与理论（理想橡胶气球的压强随着气球的体积变大而先增大、后减小。增大区域和减小区域的连接处为气球压强的最大值的预测一致。需要注意的是，实际气球的橡胶均有弹性限度的约束，微观上体现为其橡胶分子间作用势能在分子间距超过一定值后猛烈增加。这种情况下，气球表面张力系数随半径的增大速度超过半径增加本身，从而气球的内部压强又开始增加。

2.3 马林斯效应导致的压差-半径回线

对同一气球而言，由于其并非理想弹性体，我们猜测在充气 and 放弃过程中，由于橡胶分子的弛豫效应（分子间距离变化导致的自由能平衡是一个缓慢的过程），会出现测得的压差-有效半径曲线的不一致性。我们对于充到蓝色散点末端半径的气球，进行了前述实验的逆过程：开启阀门→放一定量的气→关闭阀门→与环境热平衡→测量压差→重复，以上操作得到的数据如图6中黄色散点所示，为了对比我们把图5得到的蓝色散点以虚线形式绘入图6。

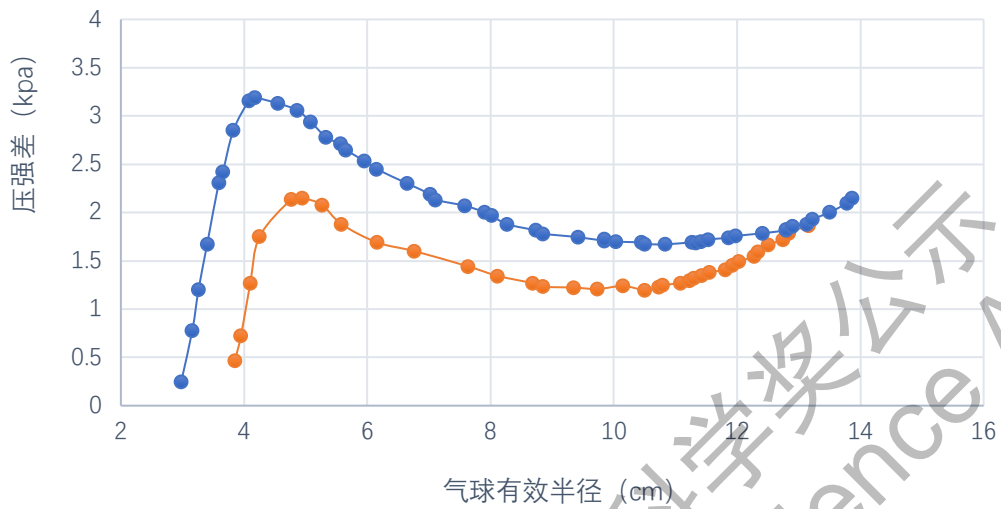


图 6 单个气球的压差-半径回线，图中橘色点代表放气过程的压差-半径关系，蓝色虚线代表充气过程测得的压差-半径曲线

如我们猜想的一样，充放气过程对应的准静态压差-半径曲线，确实存在明显的不一致性。具体来说，放气阶段，同样半径的气球内部压差小于充气阶段的压差。但是，整体压差随半径的变化趋势是一致的。从物理上来说，越小的压差对应的气球表面张力越小，这意味着放气阶段，在我们的观察时间内，气球分子由于自由能的变化导致的表面张力 $\sigma \propto \partial F / (\partial S)$ 更小。这表明，气球橡胶膜自由能的弛豫比起气球内部气体与环境温度的弛豫更慢。图 6 中类似于磁滞回线 [10] 的气球充放气压差-半径曲线，可以用于进一步定量研究气球的疲劳效应。这一回线的出现可以用马斯林效应来解释。

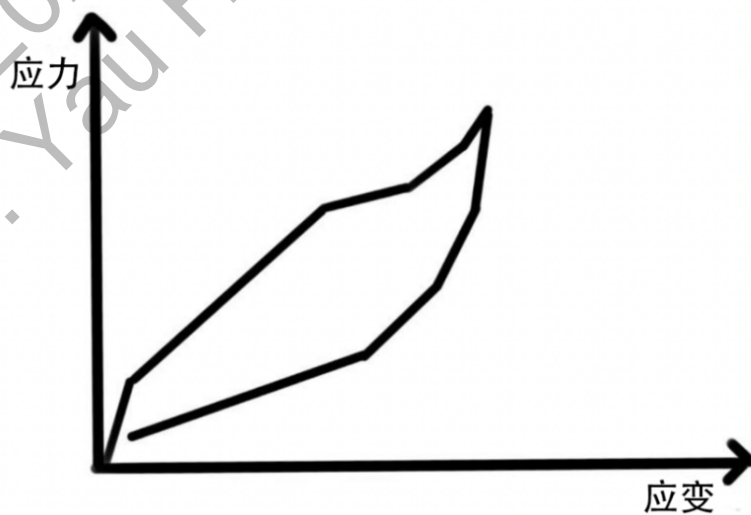


图 7 马斯林效应应力-应变 示例图

马林斯效应指出，在对一个填充橡胶施加一个历史上最大的应力后，该气球会发生瞬时且不可逆的软化 [11]。如图 7 所示，结合图去说明橡胶的拉伸中的应力与伸缩的关系。对于气球的充放气而言，气体的充入与放出是橡胶膜拉伸与收缩的原因，因此，气球的橡胶膜的表面张力系数产生的应力会随着气球不同大小的应变而发生改变，气球在充气 and 放气的过程中会产生一定程度的老化。所以，在气体充入的应力与应变曲线位于气体放出的应力与应变曲线的上方。

在气球的充气过程中，气球会出现压强先增大然后减小，最后再增大的现象。在气球压强首次增大的区域与气球压强下降的区域的连接处存在一个气球压强的最大值。在这个过程中，气球所受到的应力存在一个历史上的最高点。而气球也在该过程中产生不可逆的老化。该效应会导致气球充气时与气球放气时的应力-应变曲线会有所差异。对此，我们对阀门开启角度不同的动态放气过程绘制出图 8

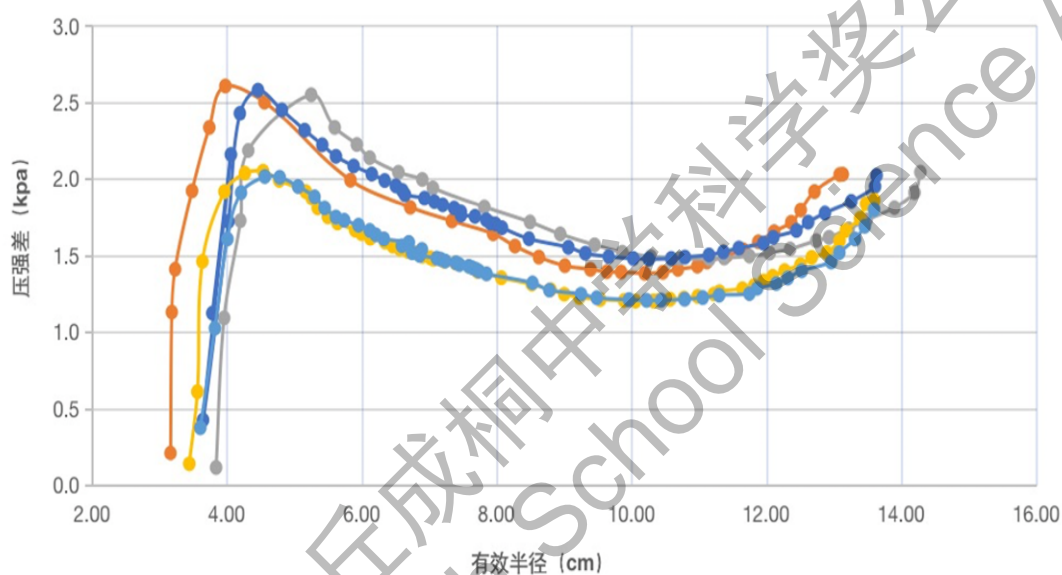


图 8 阀门开启角度不同的动态气球放气 $p-R$ 图，阀门开启角度 90 度（蓝色），60 度（灰色），30 度（橙色），15 度（浅蓝色），5 度（黄色）

从图中我们可以发现，在动态放气的过程中，阀门开启角度在 30 度、60 度和 90 度时，动态气球放气 $p-R$ 曲线的峰值相似。在阀门开启角度在 5 度和 15 度时，对比其他三组的峰值，这两条曲线的峰值有所下降，这就是气球膜的马林斯效应导致的。与该图相对应的气球半径随时间的变化曲线在附录 III 中给出。此外，需要注意的是，与图 6 中的准静态放气曲线相比，这里不同角度对应的连续放气曲线还体现了气球膜收缩的动力学效应。这一过程中，由于气球膜做功并非准静态的，气球膜以及内部气体与环境的热交换时间不可忽略，气球膜会出现不可忽视的温度变化。这一问题不是本文的研究重点，在此不展开讨论，但是值得进一步从非平衡热力学的角度进行探究。

3. 联通气球组的“化学反应”理论框架及实验验证

3.1 非等大不平衡气球组的反应

以上部分讨论了单个气球充气 and 放气时的 $p - R$ 曲线。而如果要判断在两个气球连通后能否进行气体交换，本文将它们之间的每种气体交换模式称为一种“反应”。我们可以先通过热力学的角度分析。

由 (9) 式可知吉布斯自由能 $G = U - TS + pV = U - Q + W$ ，由于气球在吸气放气过程中气球的膨胀以及收缩的速率较慢。所以在膨胀和收缩过程中，气球没有产生很大的热量，且待气球完全冷却后，气球的温度始终与外界环境中的温度相等，所以公式中的温度 T 为常数。而每当气球充气放气结束后，在不考虑气球橡胶膜老化的情况下，每个 V 对应一个固定的 p ，所以 p 也为常数。如果我们想判断一个系统是否会对外做功，则需求出吉布斯自由能的改变量，即为

$$dG = dU - TdS + pdV = dU - dQ + pdV \quad (19)$$

在不考虑系统由于膨胀或者缩小而对于外界环境做功的前提下，系统的体积功为零。此时如果 dG 小于或者等于零，则该反应不会自发进行或者不进行。

在实验中，我们会将两个气球通过管子连通起来，此时两个气球与管子形成一个整体，可以看作一个系统。然后对两个气球分别充入气体使得两个气球达到不相等的气压，分别为 p_1 和 p_2 ，连通前的吉布斯自由能 $G = G_1 + G_2 = dU_1 - dQ_1 + p_1dV + dU_2 - dQ_2 + p_2dV$ 。最后将两个气球连通。连通后，系统中的吉布斯自由能发生改变，同时系统中的压强也发生变化。最终两个气球中的压强连通会达到平衡，此时系统中的压强为 p_0 。而在此过程中，系统中总的气体分子数目不变。将吉布斯自由能和亥姆霍兹自由能结合后，我们可以得出

$$dF = -T_0(dS_1 + dS_2) + kT_0(n_1dV_1 + n_2dV_2) \quad (20)$$

式中， S 为理想气体的熵， n 为气体的气体分子数， V 为气体的体积， U 为气体的内能， k 为玻尔兹曼常数， m 为气体质量， h 为普朗克常量。

然后，我们根据泰特洛德方程

$$S = Nk \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3h^2 N} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right\} \quad (21)$$

对于理想气体，则有泰特洛德方程的变式 [1, 12]

$$S = nV k \cdot \ln(nh^3) \quad (22)$$

式中， S 为理想气体的熵， n 为气体的气体分子数， V 为气体的体积， U 为气体的内能， m 为气体质量， $N = nV$ 。我们可以算出两个气球的熵和气球内部气体分子数的关系。我们假设气球为一个标准的球型，那么将 (28) 式代入泰特洛德方程式和球型体积公式后，因为气体分子总数不变，温度不变，我们可以得出 F 关于气球半径 R 的关系为

$$F = -T_0 [kn_1V_1 \ln(n_1h^3) + kn_2V_2 \ln(n_2h^3)] + kT_0(n_1dV_1 + n_2dV_2) \quad (23)$$

我们通过对 (30) 式求二阶导数的方法可以判断出两气球内的气体能否发生气体交换。若该结果小于零，则可以进行。若该结果大于零，则不能进行。

以上我们给出了两个气球间能否进行气体交换的热力学判据。在这个判据的基础上，以下，我们结合第二节中得出的单个气球充气 and 放气时 $p - R$ 曲线，来量化气体交换进行的条件与类型。

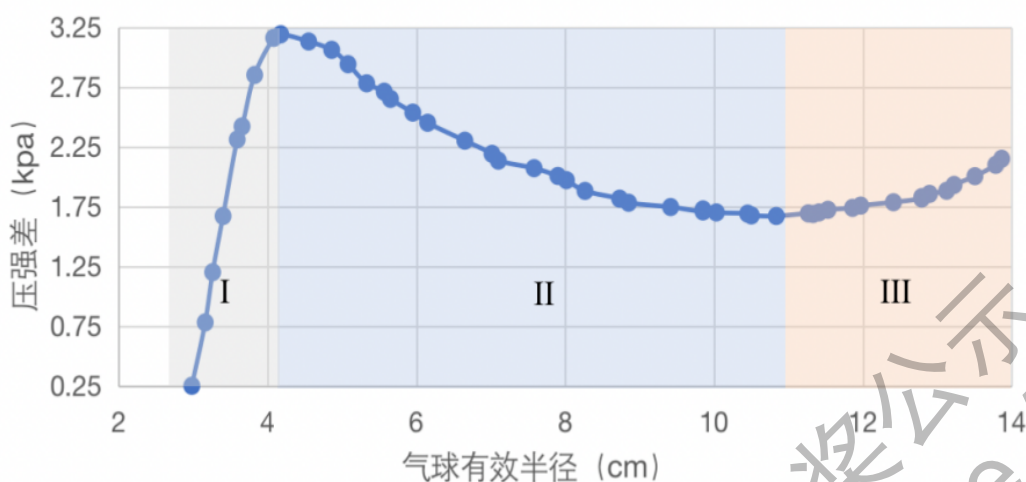


图 9 气球压强半径曲线的单调性分区

如图 9 所示, I 区域为气球刚开始充气, 内部压强快速变大直至极大值的过程; II 区域是越过极大值气球内部压强随半径减小的区域; III 区域是气球的橡胶膜过度膨胀导致其内部压强随半径进一步增大的区域。该图中所用示例的数据为对应图 5 气球进行阶梯式充气所得。

如图所示, 对于单个气球的充气压强-半径曲线, 可以划分为 3 个单调区域, 分别为区域 I、区域 II 和区域 III。基于这样的分区, 在最简单的复合气球系统, 双气球连通实验中, 两个气球的初始情况在 P-R 曲线上的分布 (所处阶段) 共有 6 种组合情况, 分别为: (I,I) (I,II) (I,III) (II,II) (II,III) (III,III)。接下来我们借鉴化学方程式的形式来表示气球连通前的初状态以及连通后压强平衡时的末状态, 给出描述这样的气球连通体系的一般框架。将两个气球分别设为 A 和 B, 下方小标 I,II,III 表示气球所在的区域, 方程左侧括号内的 R_A^i 与 R_B^i 分别表示 A 气球和 B 气球的初始半径, 方程右侧括号内的 R_A^f 和 R_B^f 分别表示 A 气球和 B 气球的末态半径。下面我们就对各种组合情况下气球连通结果进行分析和梳理, 所依据的基本原理即为内部压强较大的一个气球中的气体会流向压强较小的另一个气球。

3.1.1 (I,I) 联通后反应过程及结果

当 A, B 两球都在 I 区域的时候, 最后平衡的结果共有 1 种情况, 具体分析如下:

i. 最后平衡时双球都处于 I 区域

当 A, B 两球都在 I 区域的时候, 气球的气压会随着气球半径单调递增。二者最后的平衡情况只有一种, 对于原来压强较大的气球, 其压强和半径不断减小; 对于原来压强较小的气球, 其压强和半径不断增大。直到两者的压强和半径均相同的时候平衡, 此时两者都在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可表示为:

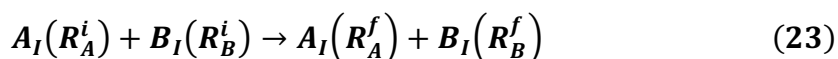


表 1 方程 (23) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	1	1.561	3.50	1	1.794	3.58
气球 B	1	2.301	3.97	1	1.794	3.82



图 10 (a) 反应前, A 球处于 I 区, B 球处于 I 区; (b) 反应后, A 球处于 I 区, B 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径微微变大, B 球半径微微变小, 气体从 B 球流向 A 球, 最后装置内部平衡。

3.1.2 (I,II) 联通后反应过程及结果

当 A, B 两球在 I 和 II 区域的时候, 最后平衡的结果共有 4 种情况, 具体分析如下:

i. 最后 A, B 球分别处于 I, II 区域

当 A 球的气压高于 B 球的气压时, A 球会放气使得压强和半径变小, B 球会吸气使得压强和半径变大直至两者的压强相等时平衡; 当 A 球在 I 区域而 B 球在 II 区域, 且 A 球的气压低于 B 球的气压时 (除了 2, 3, 4 的特殊情况外), B 球会放气使得压强变大半径变小, A 球会吸气使得压强和半径变大直至两者的压强相等时平衡。此时 A 球在 I 区域, B 球在 II 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:

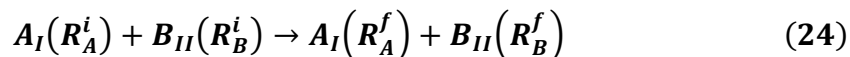


表 2 方程 (24) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	1	2.938	4.59	1	1.967	3.85
气球 B	2	2.003	7.50	2		7.88

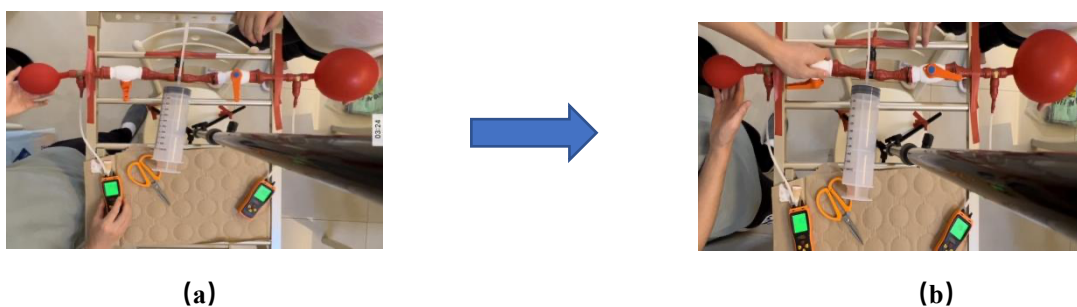
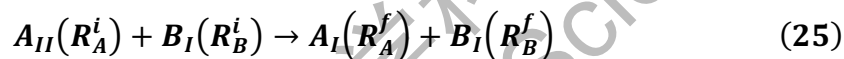


图 11 (a) 反应前, A 球处于 I 区, B 球处于 II 区; (b) 反应后, A 球处于 I 区, B 球处于 II 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径变小, B 球半径变大, 气体从 A 球流向 B 球, 最后装置内部平衡。

ii. 最后 A, B 球都处于 I 区域

当 A 球在 II 区域而 B 球在 I 区域, 且 A 球的气压高于 B 球的气压时, A 球会放气使得压强变大半径变小, B 球会吸气使得压强和半径变大直至两者的压强相等时平衡。此时两者在 I 处。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:



如果 $p_2 > p_1$ (此时两者接近顶部, 两者在 I 相遇)

表 3 方程 (25) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.900	4.74	1	2.472	3.79
气球 B	1	0.163	3.51	1		3.89

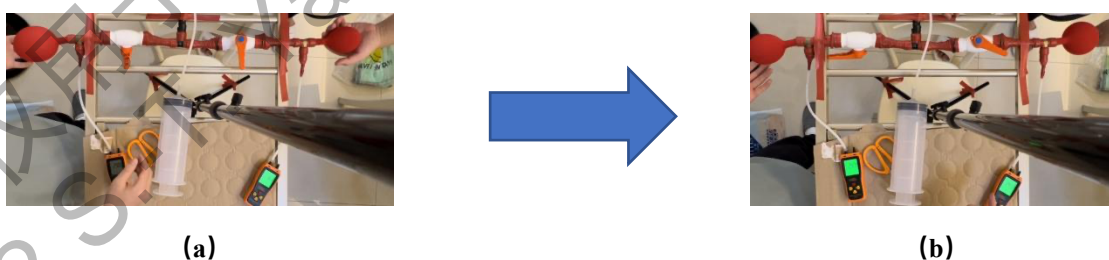
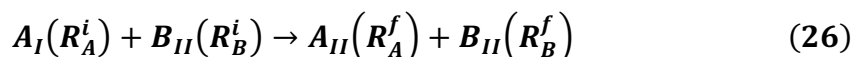


图 12 (a) 反应前, A 球处于 II 区, B 球处于 I 区; (b) 反应后, A 球处于 I 区, B 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径迅速减小, B 球半径增大, 气体从 A 球流向 B 球, 最后装置内部平衡。

iii. 最后 A, B 球都处于 II 区域

当 A 球在 I 区域而 B 球在 II 区域, 且 A 球的气压低于 B 球的气压时, B 球会放气使得压强变大半径变小, A 球会吸气使得压强和半径变大直至两者的压强相等时平衡。此时两者在 II 处。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:



如果 $p_2 > p_1$ (此时两者接近顶部, 两者在 II 相遇)

在实验中, 我们多次重复均未观察到这一类反应。我们提出如下可能的原因: 我们需要控制区域 II 的气球的压强大于区域 I 的气球的压强, 但当在区域 II 的气球放气, 区域 I 的气球吸气时, 原本处于 II 区域的气球总会比在区域 I 的气球先到达区域 I, II 的边界, 所以无法控制使两球平衡时同时处于 II 区域。

iv. 最后 A, B 球交换区域位置, 分别处于 I, II 区域

当 A 球在 II 区域而 B 球在 I 区域, 且 A 球的气压高于 B 球的气压时, A 球会放气使得压强变大半径变小, B 球会吸气使得压强和半径增大, 直至两者平衡, 由于惯性, A, B 两球在 I, II 区域交界处附近的区域压强相同时, A 球还在放气, 导致 A 球压强和半径下降而 B 球的压强下降半径增大, 直至 A 球在 I 区域, B 球在 II 区域时, 两者的压强相同, 达到平衡。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:



如果 $p_2 > p_1$ (此时两者接近顶部, 两者在过顶点)

表 4 方程 (27) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.997	4.66	1	2.653	3.88
气球 B	1	2.649	4.31	2		

实验现象: 当打开闸门, A 球半径快速变小, B 球半径快速增大, 气体从 A 球流向 B 球, 最后装置内部平衡。

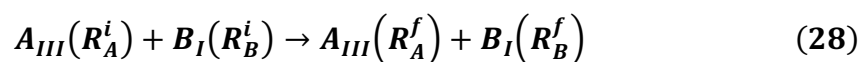
3.1.3 (III, I) 联通后反应过程及结果

当 A, B 两球分别在 III 和 I 区域的时候, 最后平衡的结果共有 2 种情况, 具体分析如下:

i. 最后 A, B 球分别在 III, I 区域

① 当 A 球在 III 区域而 B 球在 I 区域, 且 A 球的气压低于 B 球的气压时, B 球会放气使得压强变小半径变小, A 球会吸气使得压强增大半径变大, 直至两者平衡。此时 A 球在 III 区域, B 球在 I 区域。② 当 A 球在 III 区域而 B 球在 I 区域, 且 A 球的气压高于 B 球的气压时, A 球会

放气使得压强变小半径变小，B球会吸气使得压强和半径增大，直至两者平衡。此时A球在III区域，B球在I区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：



如果 $p_1 > p_2$ 或 $p_2 > p_1$ (部分)

表 5 方程 (28) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	1.735	12.84	3	1.747	12.96
气球 B	1	3.368	4.41	1		3.85

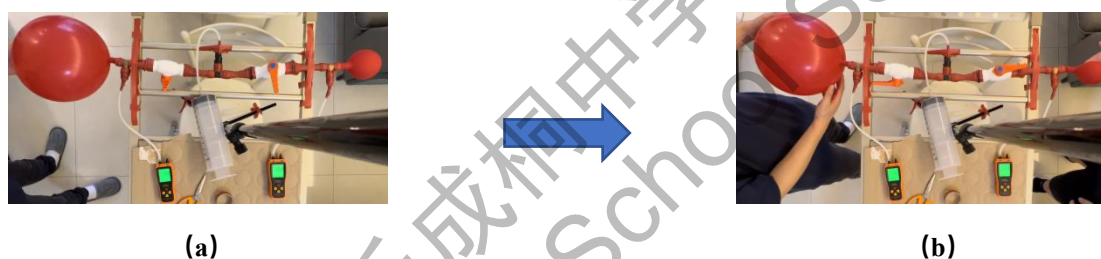
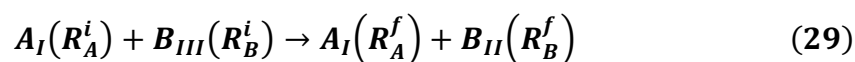


图 14 (a) 反应前，A 球处于 III 区，B 球处于 I 区；(b) 反应后，A 球处于 III 区，B 球处于 I 区

实验现象：A 球半径变小，B 球半径变大，气体从 B 球流向 A 球，最后装置内部平衡。

ii. 最后 A, B 两球分别处在 I, II 区域

当 A 球在 I 区域而 B 球在 III 区域，且 A 球的气压低于 B 球的气压时，B 球会放气使得压强变小半径变小，A 球会吸气使得压强和半径增大。此时如果 B 球与 A 球的气压还未达到平衡，B 球则会继续放气，同时 B 球内气压减小半径减小，B 球进入 II 区域。当 B 球处于 II 区域时，B 球放气使得压强变大半径变小，A 球会吸气使得压强和半径增大，直至二者平衡。此时 A 球在 I 区域而 B 球在 II 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：



在实验中，我们多次重复均未观察到这一类反应。我们提出如下可能的原因：根据图 9，我们可以得知，在区域 I，气球的半径发生较小变化，即吸入一小部分气体后，其压强就会发生较大变化。而在区域 III，气球的半径发生较大变化，即放出大量气体后，其压强只会发生较小变化。所以本实验需要处于区域 III 的气球的半径很接近区域 III 与区域 II 的交界处的半径，同时处于区域 III 的气球压强需要高于处于区域 I 的区域。每次打开闸门，III 区域的气球中的气体流入 I 区

域中的气球时，当最后气压平衡时，III球半径只会微小地减少，因为给区域I的气球充入少量的气体就会使其气压发生很大的变化。同时在每次充气放气之后，气球的表面张力系数会发生改变，而这会引起三个区域间的界限发生移动，所以该半径数值模糊，不好控制。

3.1.4 (II,II) 联通后反应过程及结果

当 A, B 两球分别在 II 和 II 区域的时候，最后平衡的结果共有 2 种情况，具体分析如下：

i. 最后 A, B 两球分别处在 I, II 区域

当 A, B 球在 II 区域，且 A 球的气压低于 B 球的气压时，B 球会放气使得压强变大半径变小，A 球会吸气使得压强变小半径变大。此时如果 B 球与 A 球的气压还未达到平衡，B 球则会继续放气，同时 B 球内气压增大半径减小，B 球进入 I 区域。当 B 球处于 I 区域时，B 球放气使得压强变小半径变小。此时，A 球如果想气压与 B 球平衡，则需要增大 A 球的压强。A 球则会继续吸气，同时 A 球内气压减小、半径增大，直至二者平衡。此时 B 球在 I 区域而 A 球在 II 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

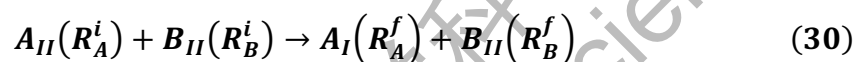


表 6 方程 (30) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	1.99	9.58	2	1.87	12.13
气球 B	2	2.16	8.36	1		

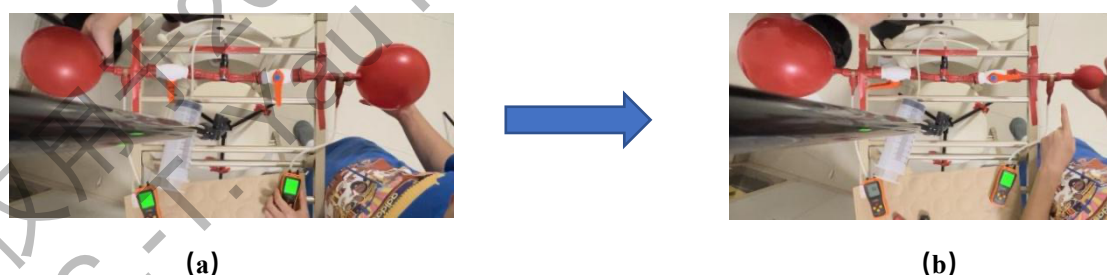


图 15 (a) 反应前，A 球处于 II 区，B 球处于 II 区；(b) 反应后，A 球处于 II 区，B 球处于 I 区

实验现象：当打开闸门，B 球半径先缓慢减小后快速减小，A 球半径不断增大，气体从 B 球流向 A 球，最后装置内部平衡。

ii. 最后 A, B 两球分别处在 I, III 区域

当 A, B 球都在 II 区域，且 A 球的气压高于 B 球的气压时，A 球会放气使得压强变大半径变小，B 球会吸气使得压强变小半径变大。此时如果 B 球与 A 球的气压还未达到平衡，A 球则

会继续放气，同时 A 球内气压增大半径减小，A 球进入 I 区域。当 A 球处于 I 区域时，A 球放气使得压强变小半径变小。此时，B 球如果想气压与 A 球平衡，则需要增大 B 球的压强。B 球则会继续吸气，同时 B 球内气压减小半径增大，B 球进入 III 区域。当 B 球处于 III 区域时，B 球吸气使得压强变大半径变大，直至二者平衡。此时 A 球在 I 区域而 B 球在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

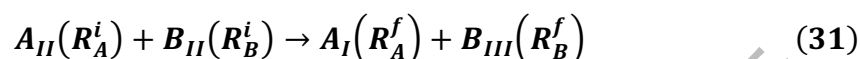


表 7 方程 (31) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	1.831	9.74	1	1.531	4.08
气球 B	2	1.529	11.27	3		13.44

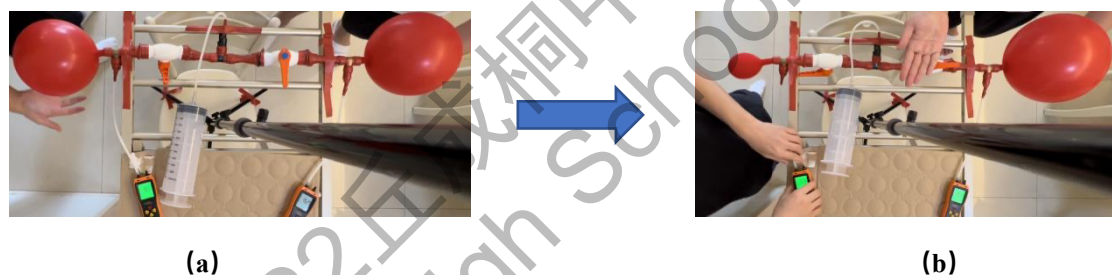


图 16 (a) 反应前，A 球处于 II 区，B 球处于 II 区；(b) 反应后，A 球处于 I 区，B 球处于 III 区

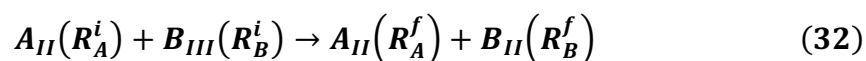
实验现象：当打开闸门，A 球半径先缓慢减小后快速减小，B 球半径不断增大，气体从 A 球流向 B 球，最后装置内部平衡。

3.1.5 (II,III) 联通后反应过程及结果

当 A, B 两球分别在 II 和 III 区域的时候，最后平衡的结果共有 3 种情况，具体分析如下：

i. 最后 A, B 两球都处在 II 区域

当 A 球在 II 区域而 B 球在 III 区域，且 A 球的气压低于 B 球的气压时，B 球会放气使得压强变小半径变小，A 球会吸气使得压强变小半径变大，直至两者平衡，由于惯性，A, B 两球在 II, III 区域交界处附近的区域压强相同时，B 球还在放气，导致 B 球压强增大半径下降而 A 球的压强下降半径增大，直至 B 球在 II 区域，A 球在 II 区域时，两者的压强相同，达到平衡。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

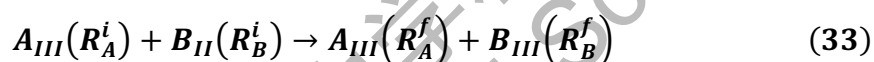


两球压强逐渐接近直至在 II 重合

在实验中，我们多次重复均未观察到这一类反应。我们提出如下可能的原因：因为在每次充气放气之后，气球的表面张力系数可能会发生改变。而这可能会引起三个区域间的界限发生移动，导致 II 区域与 III 区域之间的界限比较模糊，而实验中需要两个气球的半径都刚好在 II 区域与 III 区域的界限附近，所以不好控制。

ii. 最后 A, B 两球都处于 III 区域

当 A 球在 III 区域而 B 球在 II 区域，且 A 球的气压高于 B 球的气压时，A 球会放气使得压强变小半径变小，B 球会吸气使得压强变小半径变大。此时如果 B 球与 A 球的气压还未达到平衡，B 球则会继续吸气，同时 B 球内气压减小半径增大，B 球进入 III 区域。当 B 球处于 III 区域时，B 球吸气使得压强变大半径变大。直至二者平衡。此时 A, B 球在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：



两球压强逐渐接近直至在 III 重合

表 8 方程 (33) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	1.929	15.13	3	1.525	13.65
气球 B	2	1.547	10.02	3		11.22

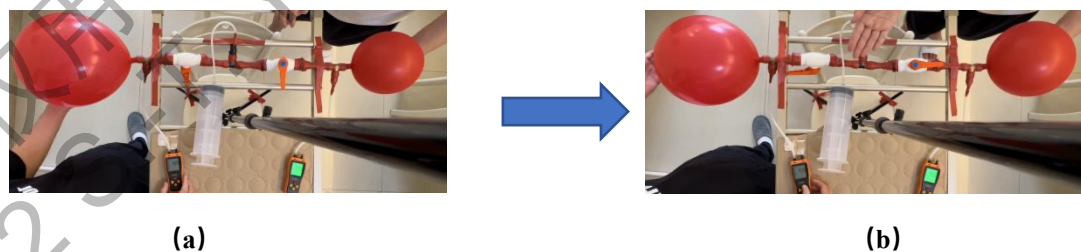


图 17 (a) 反应前，A 球处于 III 区，B 球处于 II 区；(b) 反应后，A 球处于 III 区，B 球处于 III 区

实验现象：当打开闸门，A 球半径快速减小，B 球半径增大，气体从 A 球流向 B 球，最后装置内部平衡。

iii. 最后 A, B 两球分别处于 I, III 区域

当 A 球在 II 区域而 B 球在 III 区域，且 A 球的气压高于 B 球的气压时，A 球会放气使得压强变大半径变小，B 球会吸气使得压强变大、半径变大。A 球不断放气，直到过到 I 区域，放气时压强减小、半径减小，此时 B 球处于区域 III，继续吸气，压强变大、半径变小。最后在 A、B 两球的压强相等时，装置内平衡。此时 A 球在 I 区域而 B 球在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

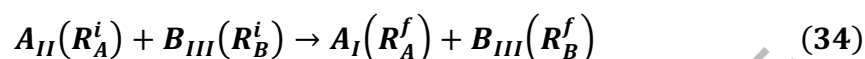


表 9 方程 (34) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.681	5.24	1	1.609	4.01
气球 B	3	1.577	14.45	3		15.13

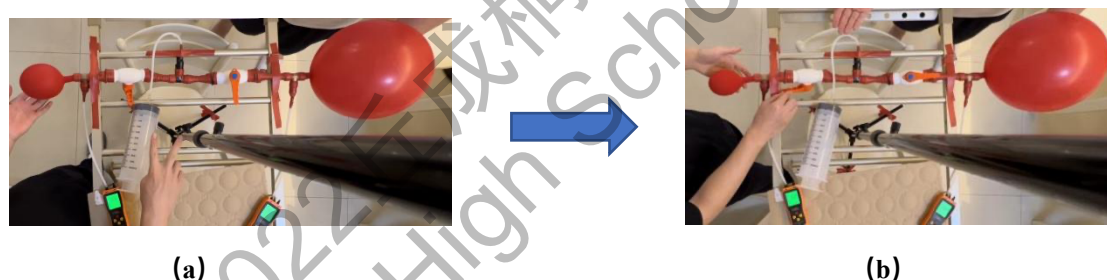


图 18 (a) 反应前，A 球处于 II 区，B 球处于 III 区；(b) 反应后，A 球处于 I 区，B 球处于 III 区

实验现象：当打开闸门，A 球半径快速变小，B 球半径增大，气体从 A 球流向 B 球，最后装置内部平衡。

3.1.6 (III,III) 联通后反应过程及结果

当 A，B 两球分别在 III 和 III 区域的时候，最后平衡的结果共有 1 种情况，具体分析如下：

i. 最后 A, B 两球都处于 III 区域

①当 A，B 球在 III 区域，且 A 球的气压高于 B 球的气压时，A 球会放气使得压强变小半径变小，B 球会吸气使得压强变大半径变大。直至二者平衡。此时 A，B 球都在 III 区域。②当 A，B 球在 III 区域，且 A 球的气压低于 B 球的气压时，B 球会放气使得压强变小半径变小，A 球会吸气使得压强变大半径变大。直至二者平衡。此时 A，B 球都在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

$$A_{III}(R_A^i) + B_{III}(R_B^i) \rightarrow A_{III}(R_A^f) + B_{III}(R_B^f) \quad (35)$$

表 10 方程 (35) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	1.796	14.50	3	1.635	13.10
气球 B	3	1.579	12.41	3		13.06

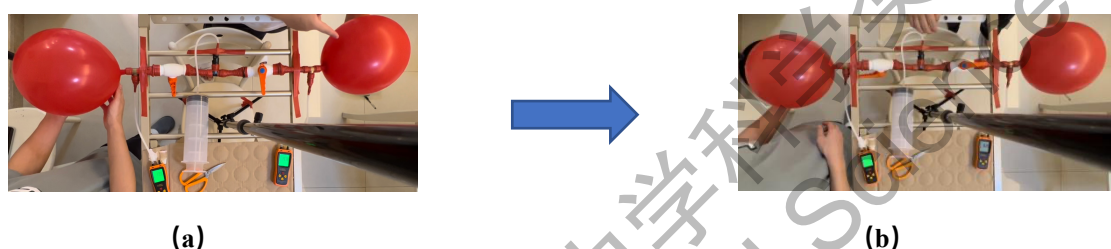


图 19 (a) 反应前, A 球处于 III 区, B 球处于 III 区; (b) 反应后, A 球处于 III 区, B 球处于 III 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径变小, B 球半径增大, 气体从 A 球流向 B 球, 最后装置内部平衡。

3.2 等大不稳定平衡气球组的平衡破坏

当双球都在区域 II 的时候, 两球的半径和压强大小相同。当给其中一球轻微施压后, 此球压强变大, 气体向另外一球流去, 导致另一球半径不断增大, 又因为此球处在第二阶段, 所以压强不断减小; 另一球因为半径不断减小, 压强逐渐增大, 最终这一个球停在第一阶段而另一球停在第三阶段, 两球压强相等。用方程式表达如下, 当 $(R_A^i = R_B^i)$ 时:

$$A_{II}(R_A^i) + B_{II}(R_B^i) \rightarrow A_I(R_A^f) + B_{III}(R_B^f) \quad (36)$$

表 11 方程 (36) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	1.845	9.28	1	1.669	11.51
气球 B	2	1.862	9.24	3		3.66

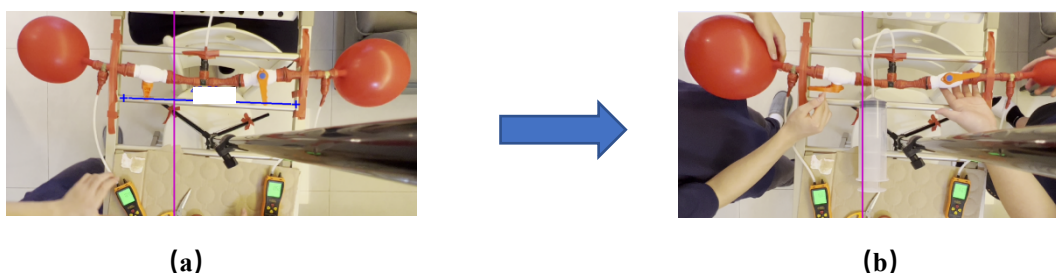


图 20 (a) 反应前, A 球处于 II 区, B 球处于 II 区; (b) 反应后, A 球处于 I 区, B 球处于 III 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径增大, B 球半径减小, 气体从 B 球流向 A 球, 最后装置内部平衡。

4.三球连通系统中的气体交换实验

在上节关于两球连通实验的基础上, 上节的实验装置可以进一步拓展用于研究三球系统。以下我们从中心向外上下左右四个方向描述该实验装置, 由于装置的左右上三个方向的结构完全一致, 所以我们描述装置的左与下部分: 装置中心为一个四分四外丝的四通管, 左端有一个四分二内丝的直插式阀门连接, 在左端直插式阀门连接一个四分三外丝的三通管, 三通管其中一口套有一个红色气球, 一口塞有带孔的一号橡胶塞。橡胶塞外接出一条细乳胶管用于连接压差表以测量气球内部压强与大气压的差值。在装置下端的四通管直接连接连接橡胶塞并通过细乳胶管外连 550mL 的注射器, 用于给系统中的气球充气。

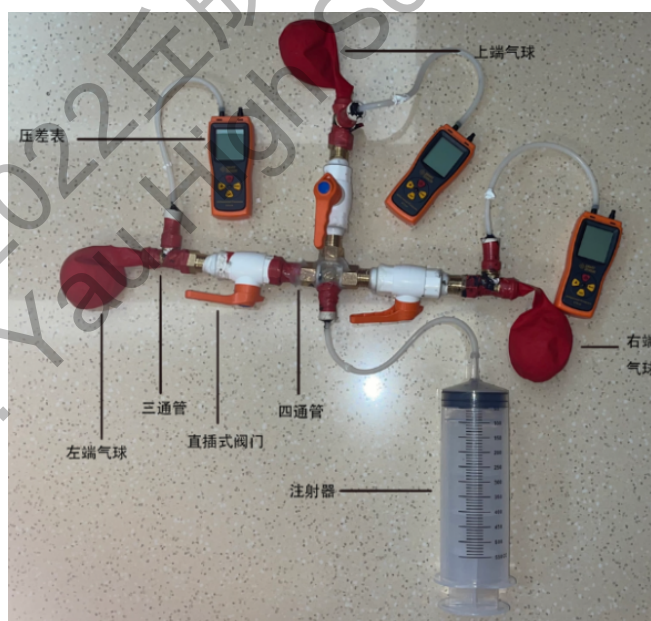


图 21 气球充气-压强测量的复连通装置

如图 21 所示, 我们将左端气球称为气球 C, 上端气球为气球 B, 右端气球为气球 A。该装置的使用方式与第三节中的装置的使用方式一致, 并且我们测量气球长轴与短轴的数据的方法也与上文中的相同。

4.1 非等大不平衡气球组的反应

在第三节中，我们讨论了关于双球连通系统中的气体交换实验。而对于三球实验，从热力学角度，我们则需要两个不同的吉布斯自由能的等式中再加多第三个吉布斯自由能，即三个气球的吉布斯自由能。然后，我们就能运用与第三节中相似的方式求出在三球连通系统中能否进行气体交换。

同时，我们采用第三节中相同的分区方式。我们同样把单个气球的充气压强-半径曲线分为三个区域，即如图 9 所示。

由于三球连通系统中三个球之间的气体交换情况过多，我们挑选了其中几种情况做实验，并从实验结果对三球联通系统做分析

4.1.1 (I,I,I) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球都在 I 区域的时候，我们进行了一组实验具体分析如下：

最后 A, B, C 三球都处于 I 区

对于 A, B, C 三球都在 I 区域的时候。根据实验我们可以得出初始状态下气球 A 的压强小于气球 C 的压强小于气球 B 的压强，由于三个气球都处于 I 区域，而在 I 区域中，气球的压强随着半径的增大而单调上升。所以对于三个同在 I 区域的气球来说，气球 B 气压大流出气体体积变小气压变小，气球 C 气压大流出气体体积变小气压变小，气球 A 气压小流进气体体积变大气压变大，直到三者的压强和半径达到平衡。所以当系统达到平衡时，A, B, C 球都在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

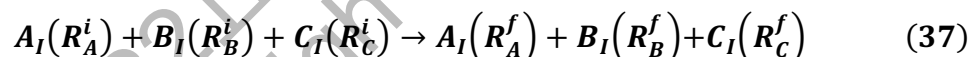


表 12 方程 (37) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	1	2.796	3.85	1	3.477	4.04
气球 B	1	3.904	4.61	1	3.485	3.98
气球 C	1	3.505	4.23	1	3.478	4.05

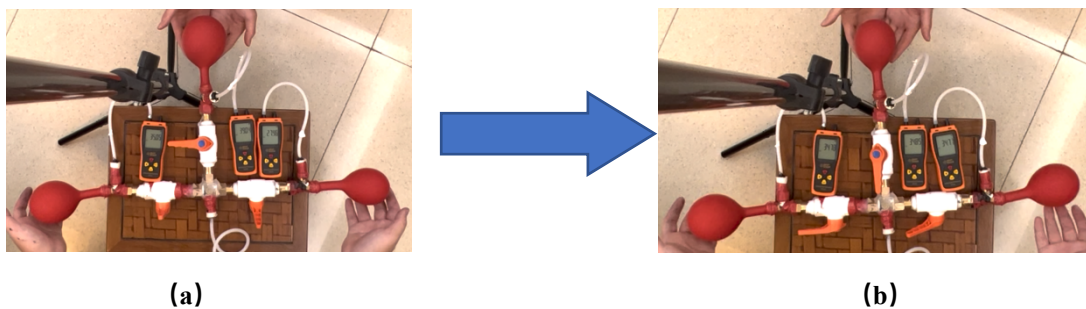


图 22 (a) 反应前，A 球处于 I 区，B 球处于 I 区，C 球处于 I 区；(b) 反应后，A 球处于 I 区，B 球处于 I 区，C 球处于 I 区

实验现象：当打开闸门，A 球半径增大，B 球半径减小，C 球半径减小，气体从 B 球与 C 球流向 A 球，最后装置内部平衡。

4.1.2 (III,II,I) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 III, II, I 区域的时候，我们进行了一组实验具体分析如下：

最后 A, B, C 三球分别处于 III, I, I 区

当 A, B, C 三球分别在 III, II, I 区域的时候，在实验中，初始状态下处于 III 区域的气球 A 的气压小于处于 II 区域的气球 B 的气压小于处于 I 区域的气球 C 的气压。由于三个区域的压强与半径拥有不同的关系，我们可以根据实验得出，气球 C 中的气体会流入气球 A 与气球 B 中，而气球 B 中的气体会流入气球 A 中。由于气球 A 处于 III 区域，所以在气球 A 流入更多气体时，即半径增加时，气球 A 的压强也随之增加。气球 B 处于 II 区域，所以在气球 B 流出气体后的半径减小，气球 B 的压强随之增大，所以气球 B 又流出气体，直到气球 B 达到 I 区域，其半径减小时压强也随之减小。而对于 I 区域的气球 C，当其的半径减小时，即流出气体时，其压强也随之减小。直到系统压强达到平衡，A 球在 III 区域 B, C 球都在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

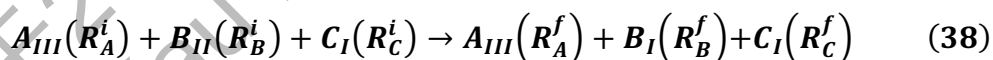


表 13 方程 (38) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	2.221	9.02	3	2.066	10.90
气球 B	2	2.601	7.43	1	2.070	3.55
气球 C	1	3.725	4.35	1	2.065	3.69

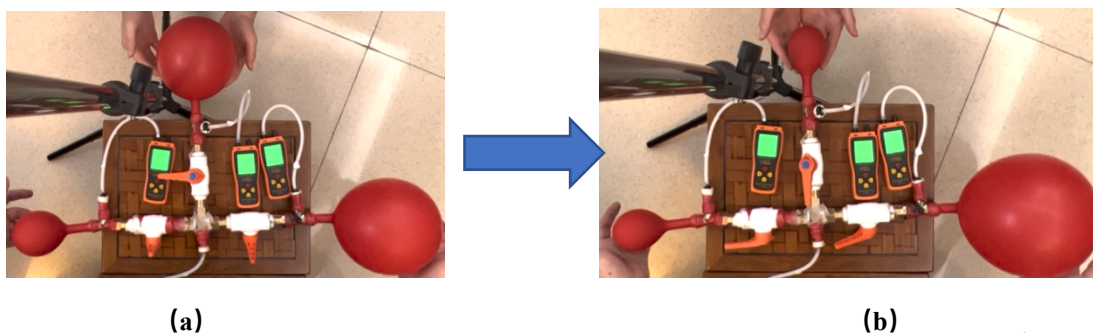


图 23 (a) 反应前, A 球处于 III 区, B 球处于 II 区, C 球处于 I 区; (b) 反应后, A 球处于 III 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径增大, B 球半径减小, C 球半径减小, 气体从 B 球与 C 球流向 A 球, 最后装置内部平衡。

4.1.3 (II, I, II) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 II, I, II 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

最后 A, B, C 三球分别处于 II, I, I 区

当 A, B, C 三球分别在 II, I, II 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下处于 II 区域的气球 A 的气压小于处于 I 区域的气球 B 的气压小于处于 II 区域的气球 C 的气压。对于处于 II 区域的气球 C 来说, 气球 C 气压大流出气体半径变小气压变大。对于处于 I 区域的气球 B 来说, 气球 B 气压大流出气体半径变小气压变小, 所以气球 C 会持续流出气体直到气球 C 到达 I 区域, 此时气球 C 气压大流出气体半径变小气压变小。对于处于 II 区域的气球 A 来说, 气球 A 气压小流入气体半径变大气压变小, 所以气球 A 会持续流入气体, 若另外两球有足够的气体气球 A 则会进入 III 区域。而在实验中, 另外两球的气体不足以支持气球 A 进入 III 区域, 所以气球 A 则会在 II 区域中与另外两球达到平衡, 此时 A 球在 II 区域 B, C 球都在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:

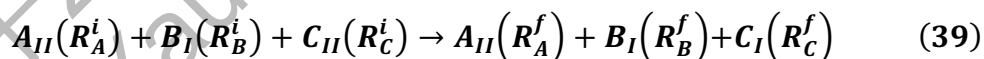


表 14 方程 (39) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.264	9.27	2	20.17	10.59
气球 B	1	2.343	3.58	1	20.16	3.50
气球 C	2	2.383	7.66	1	20.16	3.58

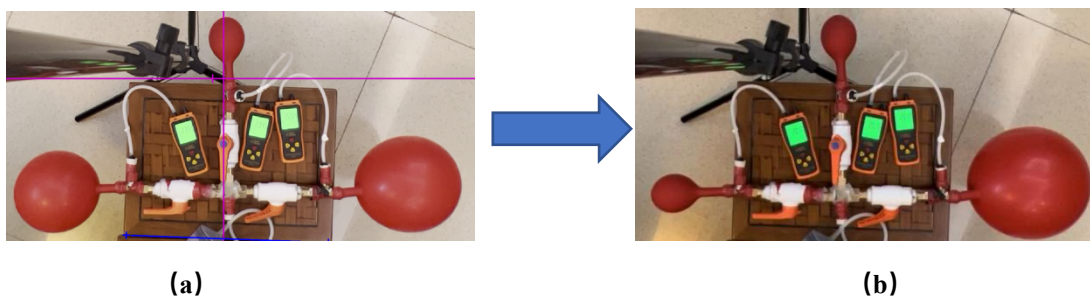


图 24 (a) 反应前, A 球处于 II 区, B 球处于 I 区, C 球处于 II 区; (b) 反应后, A 球处于 II 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径增大, B 球半径减小, C 球半径减小, 气体从 B 球与 C 球流向 A 球, 最后装置内部平衡。

4.1.4 (II,I,I) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 II, I, I 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

最后 A, B, C 三球分别处于 II, I, I 区

当 A, B, C 三球分别在 II, I, I 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下处于 II 区域的气球 A 的气压小于处于 I 区域的气球 C 的气压小于处于 I 区域的气球 B 的气压。由于气球 A 处于 II 区域, 所以当气球 A 气压小于另外两球的时候, 气球 A 流入气体, 随之气球 A 的半径变大气压变小。气球 B, C 处于 I 区域, 且气球 B, C 的气压较大, 所以气球 B, C 流出气体且半径变小气压变小, 直至三个气球达到平衡, A 球在 II 区域 B, C 球都在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:

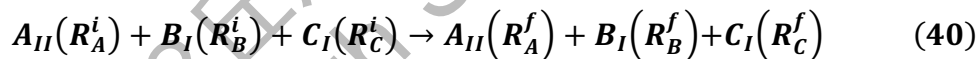


表 15 方程 (40) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.347	8.04	2	2.220	8.5
气球 B	1	3.701	3.92	1	2.219	3.48
气球 C	1	3.366	4.39	1	2.225	3.81

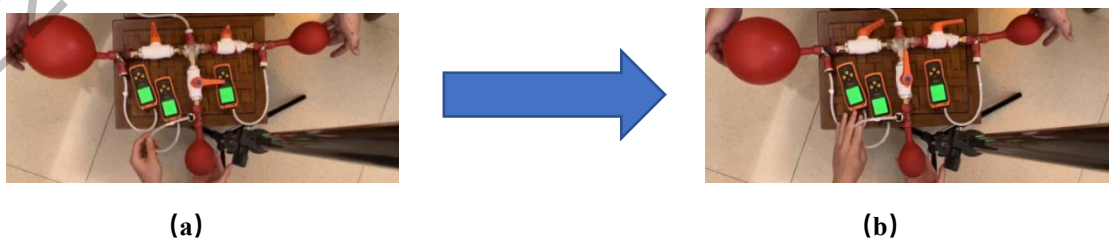


图 25 (a) 反应前, A 球处于 II 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区; (b) 反应后, A 球处于 II 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径增大, B 球半径减小, C 球半径减小, 气体从 B 球与 C 球流向 A 球, 最后装置内部平衡。

4.1.5 (III,I,I) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 III, I, I 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

最后 A, B, C 三球分别处于 III, I, I 区

当 A, B, C 三球分别在 III, I, I 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下处于 I 区域的气球 C 的气压小于处于 III 区域的气球 A 的气压小于处于 I 区域的气球 B 的气压。对于处于 I 区域的气球 B 来说, 气球 B 气压大流出气体半径变小气压变小。对于处于 I 区域的气球 C 来说, 气球 C 气压小流入气体半径变大气压变大。对于处于 III 区域的气球 A 来说, 气球 A 气压大流出气体半径变小气压变小。直至三球平衡, A 球在 III 区域 B, C 球都在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:



表 17 方程 (41) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	2.035	12.96	3	2.027	12.88
气球 B	1	3.727	3.89	1	2.026	3.58
气球 C	1	1.535	3.76	1	2.029	3.84

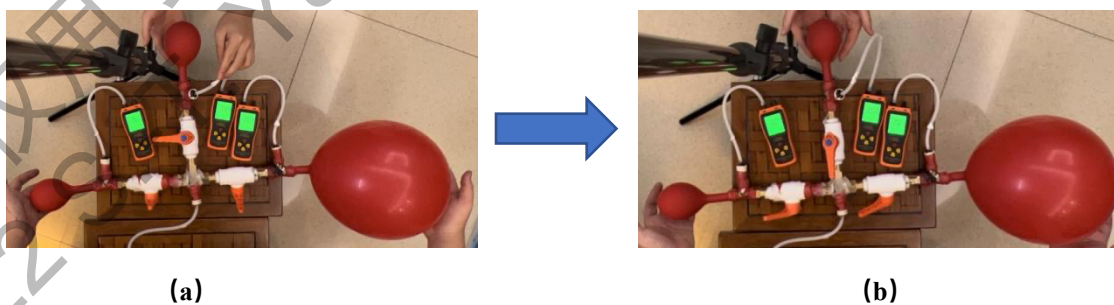


图 26 (a) 反应前, A 球处于 III 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区; (b) 反应后, A 球处于 III 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径减小, B 球半径减小, C 球半径增大, 气体从 A 球与 B 球流向 C 球, 最后装置内部平衡。

4.1.6 (III,III,III) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 III, III, III 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

最后 A, B, C 三球分别处于 III, III, III 区

当 A, B, C 三球都在 III 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下气球 C 的气压小于气球 A 的气压小于气球 B 的气压。对于处于 III 区域的气球, 气球 C 气压小流入气体半径变大气压变大, 气球 B 气压大流出气体半径变小气压变小, 气球 A 气压大流出气体半径变小气压变小。直至三球平衡, A, B, C 球都在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:

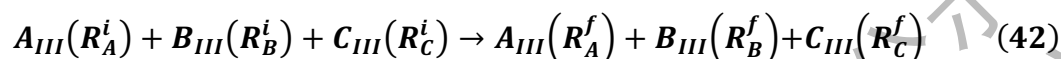


表 17 方程 (42) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	2.026	13.39	3	2.010	13.17
气球 B	3	2.120	13.39	3	2.010	13.16
气球 C	3	1.953	12.92	3	2.010	12.99



图 27 (a) 反应前, A 球处于 III 区, B 球处于 III 区, C 球处于 III 区; (b) 反应后, A 球处于 III 区, B 球处于 III 区, C 球处于 III 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径减小, B 球半径减小, C 球半径增大, 气体从 A 球与 B 球流向 C 球, 最后装置内部平衡。

4.1.7 (III,III,II) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 III, III, II 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

最后 A, B, C 三球分别处于 III, III, I 区

当 A, B, C 三球分别在 III, III, II 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下处于 III 区域的气球 A 的气压小于处于 III 区域的气球 B 的气压小于处于 II 区域的气球 C 的气压。对于处于 III 区域的气球 A, B 来说, 气球 A 气压小流入气体半径变大气压变大, 气球 B 气压小流入

气体半径变大气压变大。对于处于 II 区域的气球 C 来说，气球 C 气压大流出气体半径变小气压变小。直至三球平衡，A, B 都在 III 区域，C 球在 I 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

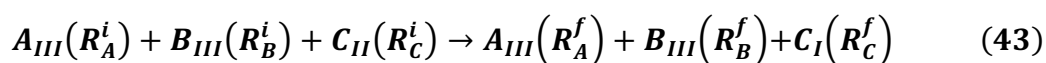


表 18 方程 (43) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应后		
	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)	区域	压强(kpa)	有效半径(cm)
气球 A	3	2.083	13.67	3	2.284	13.76
气球 B	3	2.112	13.37	3	2.283	13.63
气球 C	2	2.156	7.59	1	2.281	3.64

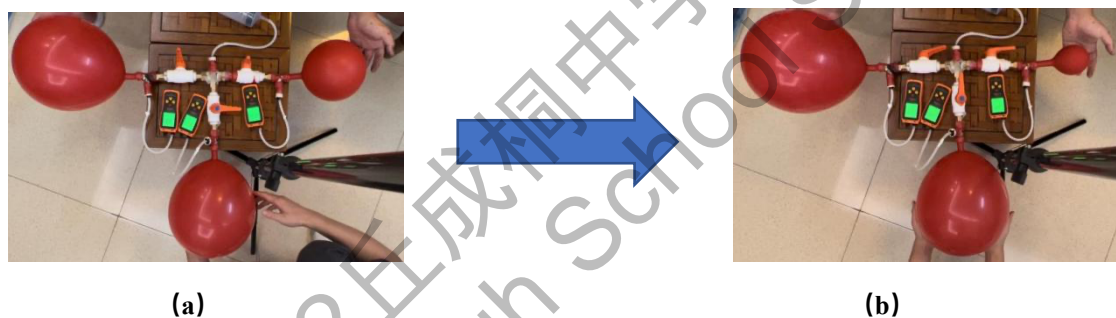


图 28 (a) 反应前，A 球处于 III 区，B 球处于 III 区，C 球处于 II 区；(b) 反应后，A 球处于 III 区，B 球处于 III 区，C 球处于 I 区

实验现象：当打开闸门，A 球半径增大，B 球半径增大，C 球半径减小，气体从 C 球与 B 球流向 A 球与 B 球，最后装置内部平衡。

4.2 等大不稳定平衡气球组的平衡破坏

平衡状态下 (II,II,II) 联通受扰动后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 II, II, II 区域的时候，我们进行了一组实验具体分析如下：

A, B, C 三球在反应中分别处于 II, II, I 区

最后 A, B, C 三球分别处于 I, III, I 区

当 A, B, C 三球都在 II 区域的时候，根据实验我们可以得出在初始状态下三个气球间的气压几乎平衡，而在受到很小的扰动后，三个气球间开始了气体交换。而在实验的气体相互交换过程中，根据实验我们可以看出先是气球 C 流出气体半径变小气压变大，同时气球 B 流入气体

半径变大气压变小，直到气球 C 到达 I 区域流出气体半径变小气压变小，气球 C 不再有明显的体积大小变化。而在此过程中，气球 A 的半径与初始半径没有太大的区别。但随着气球 C 不再有明显变化后，气球 A 与气球 B 之间立即产生气体交换，气球 A 流出气体半径变小气压变大，同时气球 B 流入气体半径变大气压变小，直到气球 B 到达 III 区域流入气体半径变大气压变大。在此过程中，气球 C 也流出了小部分气体半径变小。直至三球平衡，A, C 都在 I 区域，B 球在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为：

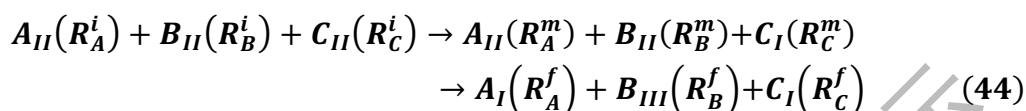


表 19 方程 (44) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应中			反应后		
	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.258	7.98	2	2.252	7.69	1	2.664	3.86
气球 B	2	2.260	8.25	2	2.182	9.96	3	2.666	11.17
气球 C	2	2.264	8.15	1	2.366	4.023	1	2.667	3.88

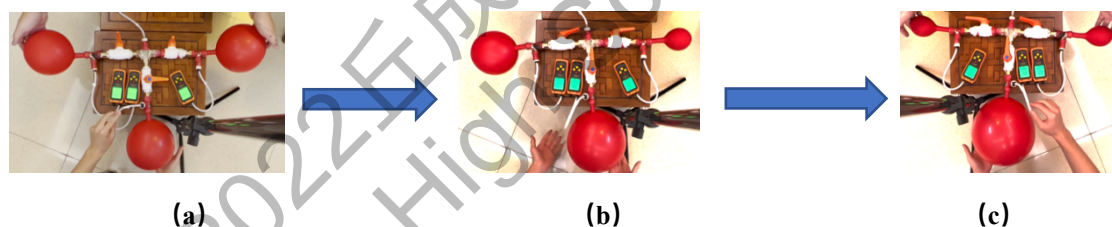


图 29 (a) 反应前，A 球处于 II 区，B 球处于 II 区，C 球处于 II 区；(b) 反应中，A 球处于 II 区，B 球处于 II 区，C 球处于 I 区；(c) 反应后，A 球处于 I 区，B 球处于 III 区，C 球处于 I 区

实验现象：当打开闸门，A 球半径不变，B 球半径增大，C 球半径减小，气体从 C 球流向 B 球，然后，A 球半径减小，B 球半径增大，C 球半径不变，气体从 A 球流向 B 球，最后装置内部平衡。

4.3 先后两次气体交换

在三球连通系统中，我们发现三球之间的气体交换并不只存在一次，有可能存在两次。在本小节中，我们将根据实验讨论一些特殊情况。

4.3.1 (II,II,II) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 II, II, II 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

A, B, C 三球在反应中分别处于 II, I, II 区

最后 A, B, C 三球分别处于 III, I, I 区

当 A, B, C 三球都在 II 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下气球 C 的气压小于气球 A 的气压小于气球 B 的气压。而在实验的气体相互交换过程中, 根据实验我们可以看出先是气球 B 流出气体半径变小气压变大, 同时气球 A 和气球 C 流入气体半径变大, 直到气球 B 到达 I 区域流出气体半径变小气压变小, 气球 B 不再有明显的体积大小变化。而在此过程中, 气球 A 的半径与初始半径没有太大的变化。但随着气球 B 不再有明显变化后, 气球 A 与气球 C 之间立即产生气体交换, 气球 C 流出气体半径变小气压变大, 同时气球 A 流入气体半径变大气压变小, 直到气球 A 到达 III 区域流入气体半径变大气压变大。在此过程中, 气球 B 也流出了小部分气体半径变小压强变小。直至三球平衡, B, C 都在 I 区域, A 球在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:

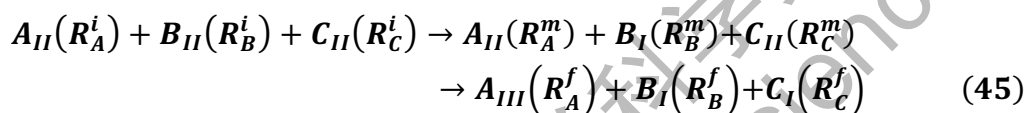


表 20 方程 (45) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应中			反应后		
	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.531	7.99	2	2.381	8.54	3	2.018	10.30
气球 B	2	2.595	7.51	1	2.631	3.52	1	2.018	3.36
气球 C	2	2.377	7.38	2	2.478	8.35	1	2.018	3.65

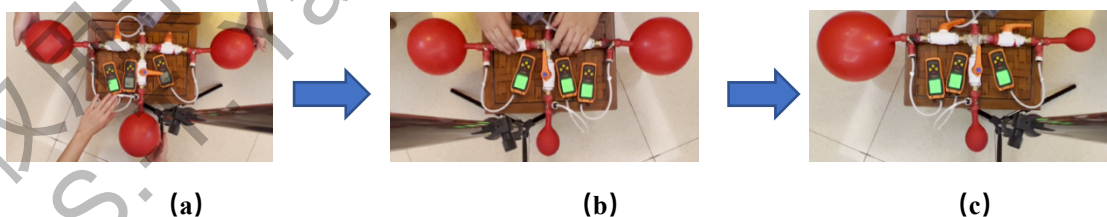


图 30 (a) 反应前, A 球处于 II 区, B 球处于 II 区, C 球处于 II 区; (b) 反应中, A 球处于 II 区, B 球处于 I 区, C 球处于 II 区; (c) 反应后, A 球处于 III 区, B 球处于 I 区, C 球处于 I 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径增大, B 球半径减小, C 球半径增大, 气体从 B 球流向 A 球与 C 球, 然后, A 球半径增大, C 球半径减小, B 球半径几乎不变, 气体从 C 球流向 A 球, 最后装置内部平衡。

4.3.2 (II,II,III) 联通后反应过程及结果

当 A, B, C 三球分别在 II, II, III 区域的时候, 我们进行了一组实验具体分析如下:

A, B, C 三球在反应中分别处于 I, II, III 区

最后 A, B, C 三球分别处于 I, I, III 区

当 A, B, C 三球分别在 I, II, III 区域的时候, 根据实验我们可以得出在初始状态下处于区域 III 的气球 C 的气压小于处于区域 II 的气球 B 的气压小于处于区域 II 的气球 A 的气压。在实验的气体相互交换过程中, 根据实验我们可以看出先是气球 A 流出气体半径变小气压变大, 同时气球 C 流入气体半径变大, 直到气球 A 到达 I 区域流出气体半径变小气压变小, 气球 A 不再有明显的体积大小变化。而在此过程中, 气球 B 的半径与初始半径没有太大的变化, 即 B 球被截流。但随着气球 A 不再有明显变化后, 在大约 0.53s 后气球 B 与气球 C 之间产生气体交换, 气球 B 流出气体半径变小气压变大, 同时气球 C 流入气体半径变大气压变大。在此过程中, 气球 A 的半径没有出现太大变化。直至三球平衡, A, B 都在 I 区域, C 球在 III 区域。因此这一过程的类反应方程式可以表示为:

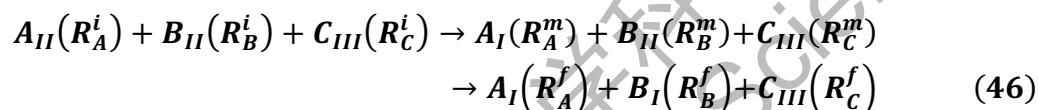


表 21 方程 (46) 描述的反应过程的定量数据

阶段	反应前			反应中			反应后		
	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)	区域	压强 (kpa)	有效半径(cm)
气球 A	2	2.539	7.02	1	2.418	3.79	1	22.08	3.75
气球 B	2	2.171	8.83	2	2.176	8.85	1	22.09	3.69
气球 C	3	1.944	13.07	3	2.010	14.15	3	22.08	15.54

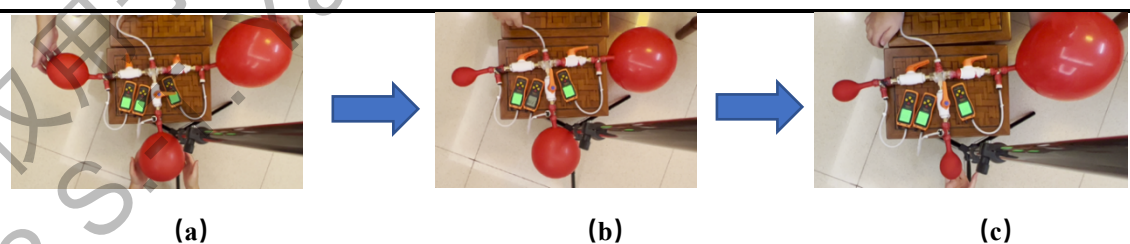


图 31 (a) 反应前, A 球处于 II 区, B 球处于 II 区, C 球处于 III 区; (b) 反应中, A 球处于 I 区, B 球处于 II 区, C 球处于 III 区; (c) 反应后, A 球处于 I 区, B 球处于 I 区, C 球处于 III 区

实验现象: 当打开闸门, A 球半径减小, B 球半径不变, C 球半径增大, 气体从 A 球流向 C 球, 然后, A 球半径不变, C 球半径增大, B 球半径减小, 气体从 B 球流向 C 球, 最后装置内部平衡。

5.总结与未来展望

本文研究了复合橡胶气球连通系统中的气流流向问题。我们首先研究了单个气球的热力学模型，基于橡胶膜的弹性势能分析，给出了气球内外压差与气球半径的关系并在实验上验证了这一关系。进而，我们对气球的压差-半径曲线进行了单调性分区。随着气球半径的增加，这一压差先后经历增大、减小、增大的过程。以此为基础，在理论上，我们给出了一个类“化学反应”框架来描述气球连通过程中的体积变化情况。以双气球连通系统为例，我们给出了可能存在的六种典型的“化学反应”方程式。我们在实验上搭建了连通气球体系，通过测量连通前后气球的半径、压差，检验了理论模型的预测。

一般而言，处于同一分区的连通气球都会达到半径相等的稳定平衡状态。然而，我们发现了一种特殊的气流流动过程，当初始气压都处于压差-半径反常区域（压差随半径增大而减小）的等大气球会由于初始扰动导致其所处的平衡破坏，最后变成处于不同区域的不等大半径的压强平衡气球。在3.2中的等大不稳定平衡气球组的平衡破坏中，在较小幅度的扰动下，处于平衡状态下的气球分别从2区域和2区域到最后变为1区域和3区域。这一现象与黑洞间的不稳定热力学平衡具有类似特征，都是反常的热力学性质造成的。对于气球而言是压强随半径减小这一特征（压强关于半径的偏导为负），对于黑洞而言是其负热容导致的。

在两气球连通实验的基础上，我们将我们的“类化学反应”框架拓展到了三球连通系统中，给出了三球“反应物”可能导致的气球流动过程。我们进一步拓展实验装置，具体观测了不同条件下三气球连通的实际气流流动。我们发现三球连通系统的流向问题确实可以由我们的理论框架表示，说明了我们的理论框架对于复合气球体系具有可扩展性。同时，我们在实验中观察到了二次气体交换的情况，即三球连通过程中出现了由于气流不连续流动导致了从初始状态到中间过度不稳定平衡状态再到最终稳定平衡状态的全过程。在这一过程中，我们发现三球中的一个气球在气体交换中被截流。这一新奇的气球流动的动态过程启发我们该体系有进一步值得探索的方面，如多气球连通过程中，气流流速的时间变化关系，以及气球在气流流动过程中的温度变化特征等等。

参考文献

- [1] F. Weinhaus, W. Barker. On the equilibrium states of interconnected bubbles or balloons[J]. American Journal of Physics, 1978, 46(10): 978-982.
- [2] I. Müller, H. Struchtrup. Inflating a rubber balloon[J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 2002, 7(5): 569-577.
- [3] D. R. Merritt, F. Weinhaus. The pressure curve for a rubber balloon[J]. American Journal of Physics, 1978, 46(10): 976-977.
- [4] 冯翰祺, 陈昶荣, 李跃辉, 等. 橡胶气球非线性特性的理论与实验研究[J]. 大学物理, 2017, 36(6): 66-72.
- [5] Y. Levin, da F. L. Silveira. Two rubber balloons: Phase diagram of air transfer[J]. Physical Review E, 2004, 69(5): 051108.

- [6] Chen C S. Two interconnected rubber balloons as a demonstration showing the effect of surface tension[J]. 2009.
- [7] 王悦, 余诗俊, 官闻浩, 杨晶晶, 李庆玲, 刘国庆, 吴志豪, 屈美君, 颜必升. 橡胶气球的表面张力特性研究[J]. 常州工学院学报, 2021, 34(04): 32-35
- [8] 吴其晔. 橡胶弹性理论[M].北京: 高等教育出版社, 2011.
- [9] 陈卓如, 金朝铭, 王洪杰. 工程流体力学[J]. 2004.
- [10] J. Polák, M. Klesnil. The hysteresis loop 1. A statistical theory[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1982, 5(1): 19-32.
- [11] Rubber technology[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] K. Huang. Statistical mechanics[M]. John Wiley & Sons, 2008.

致谢

吹泡泡时, 偶然吹出了一个双重泡泡。一个泡泡叠在另一个上。过了一会, 一个泡泡变小, 一个泡泡变大, 两个泡泡相融变成了一个泡泡。偶然间, 突然想起以前在学校活动中吹气球布置场景时, 为什么两个不同大小的气球相连, 有的时候是大气球变小小气球变大, 而有的时候是小气球变小大气球变大呢。大气球里的气体多, 那它的压强不应该更大, 而气体在压强大的地方不就应该流向压强低的地方吗? 这深深地勾起了我们的兴趣, 我们抱着相同的疑惑, 向此疑惑展开探索。在本研究中, 陈锐洋同学主要负责数据处理、结果分析以及第三节的撰写。徐建深同学主要负责实验装置的搭建以及第二节和附录的撰写。陈锐洋和徐建深共同完成了全文设计背景理论的学习, 所有实验研究的过程, 以及论文全文的撰写、修改、及校订。指导老师杨晓安为所在学校任课教师, 在题目研究期间参与了讨论, 并在后续研究论文写作期间提供了指导和修改意见。感谢杨晓安老师在项目研究中的思路、实验、分析、写作等过程中给出的指导意见。

附录 I 理想封闭薄膜内的压强

为得到橡胶膜表面张力系数与其表面积的关系，我们参考冯翰祺等人在文献[4]中发展的方法。首先，我们把气球看作一个标准的球形。其次，在对气球充放气时的压强的测量过程中，每注入或放出一定体积的空气后，实验中会停止注入或者放出，并关闭阀门等待一段时间，故将这个过程中视为准静态过程。根据表面张力与半径的关系，我们可以得出

$$f_1 = l\sigma = 4\pi R\sigma \quad (A1)$$

其中， f_1 为表面张力， σ 为气球的表面张力系数（在标准球形的气球橡胶膜中， σ 并非一个常数）， l 为接触面的周长（即球体切面-圆形的周长）， R 为气球半径。由于接触面将球体分为上半球与下半球两个部分，两部分会分别产生一个表面张力，此为（2）式中倍数的由来。同时，根据压强与表面积的关系，可以得出

$$f_z = \int_0^{\pi/2} p_s (2\pi R) \sin\theta R d\theta \cdot \cos\theta = p_s 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\sin\theta = p_s \pi R^2 \quad (A2)$$

其中， p_s 为气球膜提供的压强， f_z 为气球膜产生的表面张力。联立（A1）式与（A2）式，我们可以直接推得（1）式

附录 II 橡胶膜势能参数对内部气体压强极值的影响

为了得出在参数 b 与 c 处于较小值的时候，压强 p 在 R 取何值时达到极值，将（12）式与（17）式分别对 R 求导，并使求导结果等于零。由此分别得出

$$\frac{dp_s}{dR} = -\frac{8a}{\pi R_0^2 R^2} + \frac{56aR_0^4}{\pi R^8} + \frac{8b}{\pi R_0^4} + \frac{40bR_0^2}{\pi R^6} = 0 \quad (B1)$$

$$\frac{dp_s}{dR} = -\frac{8a}{\pi R_0^2 R^2} + \frac{56aR_0^4}{\pi R^8} + \frac{40cR^4}{\pi R_0^8} + \frac{8c}{\pi R^2 R_0^2} = 0 \quad (B2)$$

用参数表达出 R 的数值后，将求出的关于 R 的解代入（B1）式和（B2）式并再次进行求导以判断其为极大值还是极小值，可以分别得出

$$\frac{d^2 p_s}{dR^2} = \frac{16a}{\pi R_0^2 R^3} - \frac{448aR_0^4}{\pi R^9} - \frac{240bR_0^2}{\pi R^7} \quad (B3)$$

$$\frac{d^2 p_s}{dR^2} = \frac{16a}{\pi R_0^2 R^3} - \frac{448aR_0^4}{\pi R^9} + \frac{160cR^3}{\pi R_0^8} - \frac{16c}{\pi R^3 R_0^2} \quad (B4)$$

若将 R 和所有参数代入后，求出的解小于零，则所求出的 R 所对应的 p 为函数中的最大值。若将 R 和所有参数代入后，求出的解大于零，则所求出的 R 所对应的 p 为函数中的最小值。用此方法我们可以求出在 R 为何值时， p 达到极值。经过计算，我们可以得出在半径 R 大概膨胀到初始半径 R_0 的1.5时，即 $R = 1.5R_0$ 。气球在第一次压强随半径上升而上升的阶段出现峰值。由图1, 2我们也可以看出气球的在第一次压强随半径上升而上升的阶段的峰值出现在半径 R 与初始半径 R_0 的比值大概的区间。

附录 III 阀门开启角度不同时的动态气球放气 $R - t$ 图

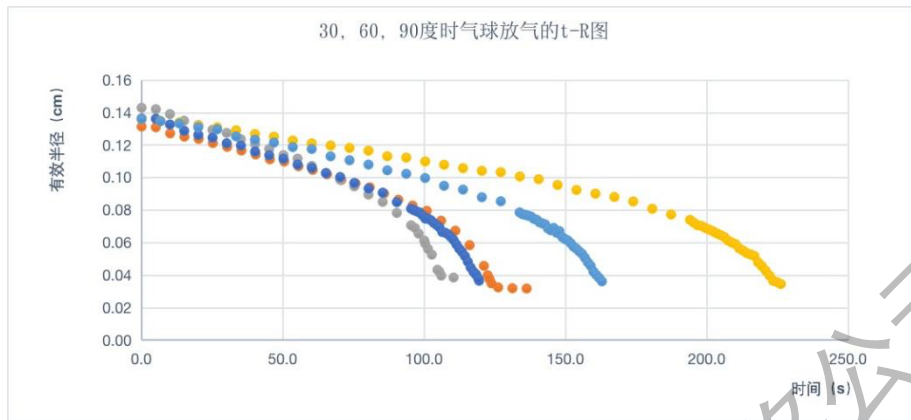


图 31 阀门开启角度不同时的动态气球放气 $R - t$ 图，阀门开启角度 90 度（蓝色），60 度（灰色），30 度（橙色），15 度（浅蓝色），5 度（黄色）

仅用于2022丘成桐中学科学奖公示
2022 S.-T. Yau High School Science Awards