

参赛队员姓名： 范明君

中学： 北京十一学校

省份： 北京市

国家/地区： 中国大陆

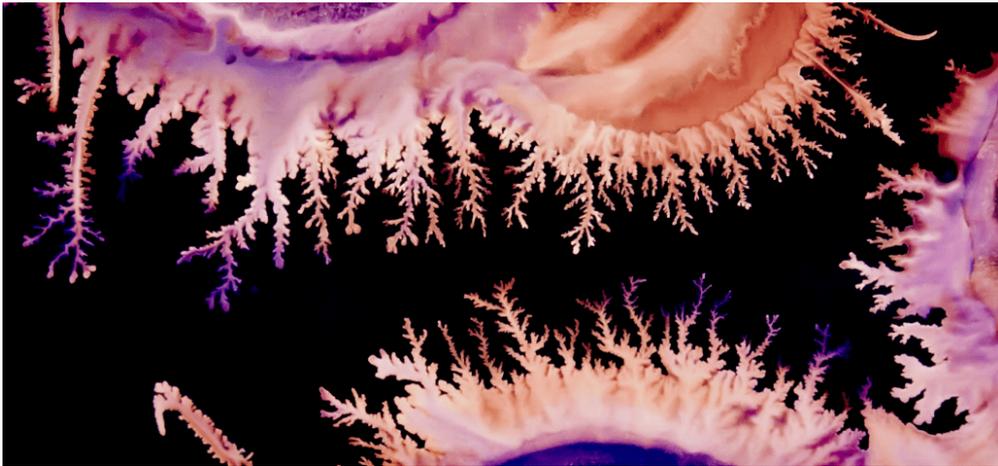
指导教师姓名： 马驰川

指导教师单位： 北京十一学校

论文题目： 微醺的液滴——酒精墨水混合溶液在丙烯酸基底上的扩展与分形

摘 要

艺术家在作画时，会将混有酒精的颜料滴到丙烯酸基底上，随后颜料会在基底上铺展并形成一定的分形现象，长出美丽的手指。为了找到这一奇妙现象背后的机制，本文对酒精颜料混合溶液和丙烯酸基底的特性做了大量的研究，探讨了它们的性质对最终形成的几何形态的影响。在此基础之上，本文对于液滴在稳定的扩展阶段和不稳定的分形阶段的运动分别提出了理论模型，解释了稳定扩散阶段液滴扩展半径随时间的变化规律，预言了分形发生时第一级的手指数目。最后本文将以上预言与实验做对比，发现实验数据很好地符合了本文提出的理论。



摘要配图：艺术家手中的分形手指 (Image credits: J. Nahabetian)

关键词：分形，不稳定性，流体，蒸发，马兰戈尼

Abstract

When artists are creating fluid painting, they deposit drops of ink-alcohol mixture onto diluted acrylic paint. The droplets will then spread in a fractal manner. Aiming at finding the mechanisms under this marvellous phenomenon, this article investigated experimentally and conducted substantial amount of control-variable experiments. We reported properties of both ink-alcohol mixture and diluted acrylic paint, which influence the geometrical morphology of fractal finger. On this basis, a theoretical model is formulated for both the stable spreading stage and the unstable spreading stage, accounting for "the change of droplet radius with time" and "the finger number at the first level of fractals". The theory is in accordance with the experimental results.

Key Words: fractal, instability, fluid, evaporation, Marangoni

目录

摘要	I
Abstract	II
目录	III
符号说明	IV
第一章 引言	1
第二章 实验探究	5
第一节 预实验	5
2.1.1 实验装置	6
2.1.2 酒精墨水在基底上扩散与阶段的划分	7
第二节 控制变量实验	9
2.2.1 酒精墨水的性质研究	10
2.2.2 酒精墨水的性质对几何形态的影响	12
2.2.3 基底的性质研究	14
2.2.4 基底的性质对几何形态的影响	15
第三章 理论解释	17
第一节 稳定扩散阶段的动力学研究	17
第二节 不稳定扩散阶段分形产生的机制研究	19
第四章 两个新奇的现象	26
第一节 “胖手指”和“手指中的瘦骨头”	26
第二节 “反侵略的攀升”	27
第五章 总结与展望	28
第一节 本文的结论	28
第二节 未来可进一步探究的方向	28
参考文献	30
致 谢	XXXII

符号说明

下标 i 代表酒精墨水 (ink), b 代表丙烯基底 (base), a 代表空气 (air)。

- V : 酒精墨水的体积
- h : 酒精墨水的厚度
- ϕ : 酒精在酒精墨水中的体积分数
- μ_i : 酒精墨水的粘度
- μ_b : 丙烯基底的粘度
- γ_{ia} : 酒精墨水在空气中的表面张力
- γ_{ba} : 丙烯基底在空气中的表面张力
- γ_{ib} : 酒精墨水与丙烯基底之间的界面张力
- R_1 : 外径, 即最外围包裹所有手指的液滴半径。最终状态记为 R_{1f}
- R_2 : 内径, 手指内部根基所对应的半径。最终状态记为 R_{2f}
- R_c : 最先出现手指时的临界半径。
- t_c : 最先出现手指时的临界时间, 即稳定扩散和不稳定扩散的交界时间。
- η : 手指占比率, 一个大致表征手指在整个形态中占比的无量纲参数。
- n_f : 第一级不稳定手指数目

第一章 引言

艺术家在进行丙烯画创作的过程中，有时会在墨水中混入一些酒精。酒精的加入，会使得墨水在半粘稠状的丙烯基底上产生奇妙的行为：在短暂的铺展过后，酒精墨水会分叉地进入基底，形成如手指一般的分形现象，如图1.1。这种看似随机的现象会为画作带来一些复杂的美感，因此“加入酒精”这一手法被艺术家广泛地采用。

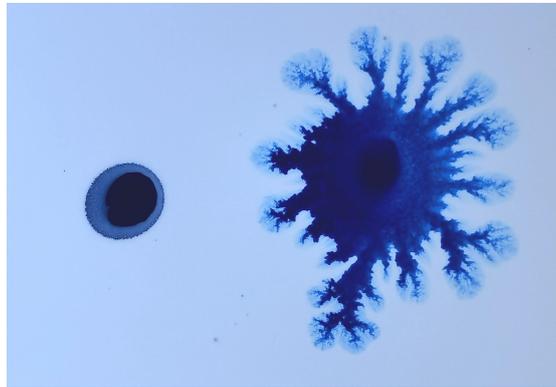


图 1.1: 左：无酒精或酒精体积分数低于某临界值时无法形成分形手指，右：酒精体积分数大于某临界值时将形成分形手指。

当我首次了解到这一奇妙的现象后，就被它深深地吸引。我心中不禁在思考，为什么酒精的加入会使墨水迅速地扩展，是什么原因导致了这一运动的发生？为什么在扩散之后还会发生如此美丽的分形现象，它的背后是否存在一些规律可循？难道是墨水在喝了一点酒之后达到了“微醺”的状态？带着这些问题，我开始了我研究“分形手指”的旅程。

在我研究这一现象的过程中，我对周遭的分形现象越来越敏感，发现分形原来离我们的生活如此之近，比如雪花、珊瑚、树枝、河流三角洲、细菌群落（如图1.2）等生活中常见的复杂而美丽的形态竟然都与这一概念有关，其中包含的美感让我更加坚信了我所探究的问题意义之所在：这是一个科学与艺术交叉的领域，同时体现出科学理性的美与艺术感性的美。

正因为分形现象如此普遍，如今的科学家们对它正在进行着大量的研究，但

在历史上，对分形的认识却是经历了一段比较曲折的历程。最早对它的研究可以追溯至十七世纪，莱布尼茨在研究“递归自相似”问题的时候，首先在著作中使用了“分形指数”这一词汇，但由于分形现象自身具有的复杂性，和早期科学家们喜欢和光滑与规则的形体打交道的习惯，导致分形这一领域并没有很多的进展。十九世纪，一些数学家人为地构造出一些稀奇古怪的东西，比如处处连续但处处不可微的“魏尔斯特拉斯”函数，然而即使到了这个时候，他们也并不相信在自然界中真实地存在这样的“病态”函数。打破这一传统的是美国物理学家曼德布罗特 [1]，在上世纪六、七十年代，他在研究海岸线及其他相关现象的过程中，创造性地引入了“分形 (Fractal)”一词，以表征被传统几何学与物理学排斥在外的某些不规则形状。

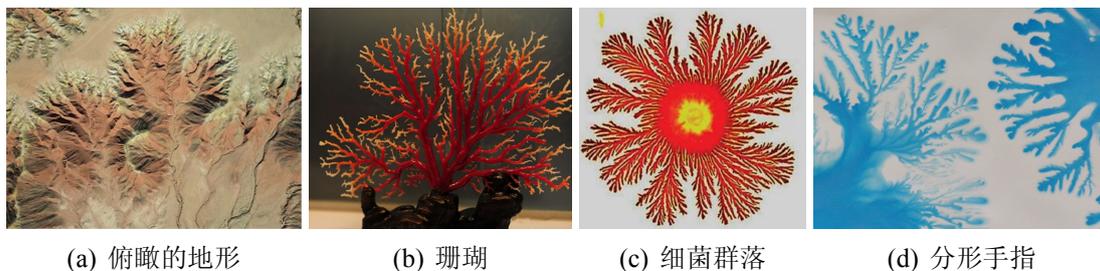


图 1.2: 生活中常见的和意想不到的分形，图片来源于网络与自己的拍摄

时间来到今天，有很多与分形有关的物理现象被科学家关注并广泛地研究。比如将水（低粘度流体）从中央小孔中注入到介于两平板间的油层（高粘度流体）时，会发生如图1.3所示的粘性指进的现象。文献 [2][3][4] 对这一现象进行了研究并给出了描述，他们指出分形的出现主要来源于两平板之间粘性小的流体对粘性大的流体驱替时产生的不稳定性，这种不稳定性被称为 Saffman-Taylor 不稳定性 [5]。这种不稳定性对某一特定波长有着放大的作用 [3][4]。

粘性指进的相关研究启发了我对分形手指这一问题的思考，但它与我关心的问题有很大的差异，因为粘性指进描述的是两平板间流体的行为，分形手指则是在基底上发生的行为，并没有上方的平板。与分形手指更加类似的是表面活性剂溶液在一些基底上的扩散行为 [7]，如图1.4，基底可以是硅片这样的固体或厚度约为 $0.1\mu\text{m} - 0.1\text{mm}$ 的薄水层。对比这一现象与我所关心的分形手指问题，我发现两者仍然存在很大的差异：

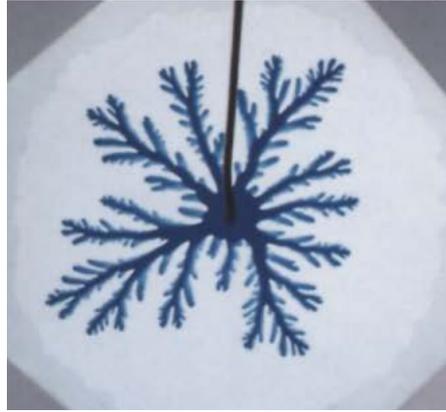


图 1.3: 粘性指进现象与 Saffman-Taylor 不稳定性 [6]

- 酒精虽然与表面活性剂有一些类似之处，但并不能完全等同，尤其是两者造成表面张力梯度的方式有所不同 [8]。
- 尽管丙烯基底会在长时间放置之后固化，但在分形发生的时间里，丙烯的行为更多地是液体而非固体。表面活性剂溶液扩散问题中的第一类基底（如硅片）是固体，与丙烯不同。
- 丙烯基底的粘度远大于酒精墨水溶液的粘度，前者大约是后者的 10^3 倍。表面活性剂溶液扩散问题中的第二类基底（薄水层）与表面活性剂的粘度差异较小。

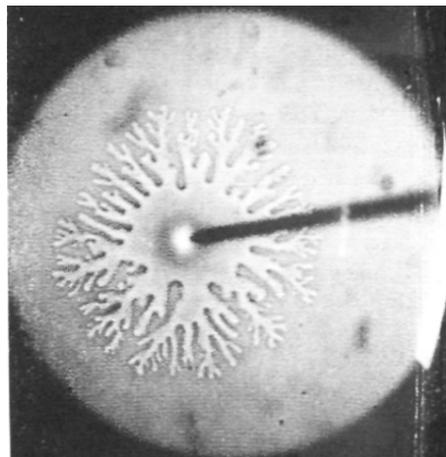


图 1.4: 表面活性剂溶液在一些基底上的扩散 [9]

综上所述，粘性指进现象与表面活性剂溶液的分形现象都与我所关心的分形手指有关，但它们之间也存在很大的差异性。通过进一步查阅文献，我惊讶

地发现这个被艺术家广泛采用的“分形手指”技法其实并没有被科学家非常细致地进行研究，本文的目的就是尝试对这一现象给出定性与半定量的描述，试图找到酒精墨水扩散和分形发生的机制。

本文的文章结构如下：在实验探究的第二章，我首先通过预实验中观察到的现象将酒精墨水的运动分为稳定扩散和不稳定扩散两个阶段，定义了描述分形形态的各种几何参量，提取出对分形形态存在影响的各种参量。接下来我仔细探究了酒精墨水和丙烯基底的在粘度、表面张力等方面的性质及其对分形几何形态的影响。在第三章中，我尝试在理论上分析酒精墨水扩散和分形形成的机制。在稳定扩散的阶段，我预言了在表面张力梯度下液滴向四周扩展时随时间的变化关系 $R \propto t^{1/4}$ ，这一预言与实验很好地相契合。在不稳定扩散的阶段，我将微扰的不稳定性表示为不同波长的分波，通过计算分波移动的速度，我预言了分形发生时第一级手指的数目 n_f 。实验数据很好地与我预测的手指数目相符合。在第四章中，我描述了两个在其他文献中没有见到的两种新奇的现象并做了一些定性的分析。

本文根据前人的工作所做出的创新点包括

1. 通过大量细致的实验探究了酒精墨水与丙烯基底的性质及其对手指形态的影响。
2. 在理论上预言了在稳定扩散阶段半径随时间的变化关系 $R \propto t^{1/4}$ 并与实验很好地符合。
3. 提出酒精蒸发将会导致张力梯度的猜想，在理论上计算出了分形发生时第一级手指的数目 $n_f \propto \sqrt{\Delta\gamma\mu_i R_c / \mu_b}$ 。实验数据很好地支持了我的理论。
4. 本文在实验探究的过程中发现了在别的文献中没有提及到的两个奇妙现象：“胖手指”和“手指中的瘦骨头”与“反侵略的攀升”，我对其做了定性的分析，它们也将作为我下一步的研究中将会致力解决的问题。

第二章 实验探究

第一节 预实验

如图2.1,将酒精与墨水的混合物(下称酒精墨水)滴到丙烯颜料与水的混合物(下称丙烯基底)上,滴落的液滴在在基底上扩散铺展并在随后呈现出分叉的生长过程。我首先观察到在大部分情况下,手指会在40s左右停止生长,静置一段时间后,铺展后的液体随着丙烯基底的干燥固化而彻底停止流动,形成固定的形状,此即为艺术家作画的一般过程。但需要指出的是,分形并不是一直都会发生的,如图1.1所示,在一定情况下(如丙烯基底太稠、太厚或酒精浓度太小时)分形不会形成。在本文的后面我会给出对这一效应的半定量分析。

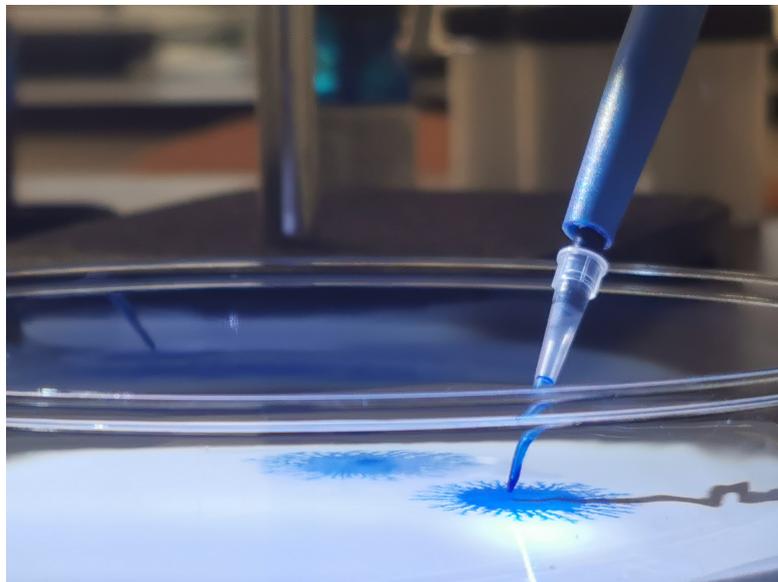


图 2.1: 用移液枪滴落酒精墨水的侧视图



图 2.2: 当丙烯基底不均匀、台面不平整时分形手指的整体形态

2.1.1 实验装置

除此之外，我还发现分形手指的最终形态十分依赖于外部环境。如果基底不均匀、台面不平整或滴取时不稳定，那么扩展后形成的手指形状会非常不规则，如2.2，尽管这类现象会给艺术家带来意想不到的美妙，但对于问题的研究者来说却带来了更大的复杂性。为了排除这些外部影响并产生可复现的稳定现象，我搭建了如图2.3所示的实验装置，其中

- 圆形的培养皿用来盛放丙烯基底。我在把丙烯基底倒入培养皿后，会将培养皿在桌面上轻微摔打，使其达到尽可能的平整与均匀。与此同时，我还借助水平仪调节桌面的水平程度，消除重力带来的流体整体的运动。
- 由于丙烯基底属于速干性物质，在较短时间内就会干燥固化。在长时间的实验过程中，为了避免这一效应导致酒精墨水不能在其上扩散并分形，我们一方面对其进行密封加盖处理，另一方面随用随取随配置，在铺完基底之后迅速地滴加酒精墨水并进行拍摄，采集数据。
- 移液枪用来滴取确定体积的酒精墨水，将其架设在铁架台上主要是避免手动滴取时因无法避免的晃动带来的误差。同时我对酒精墨水滴落的高度进行了严格的控制，使得每次的高度基本一致且使移液枪滴下的液滴底部贴近丙烯基底，这样会使液滴滴落到基底上时的速度尽可能地小。
- 为了能够捕捉到扩散过程的动态细节，我采用手机进行摄影，周围的两个手电筒用来打光，使得图像更加清晰。

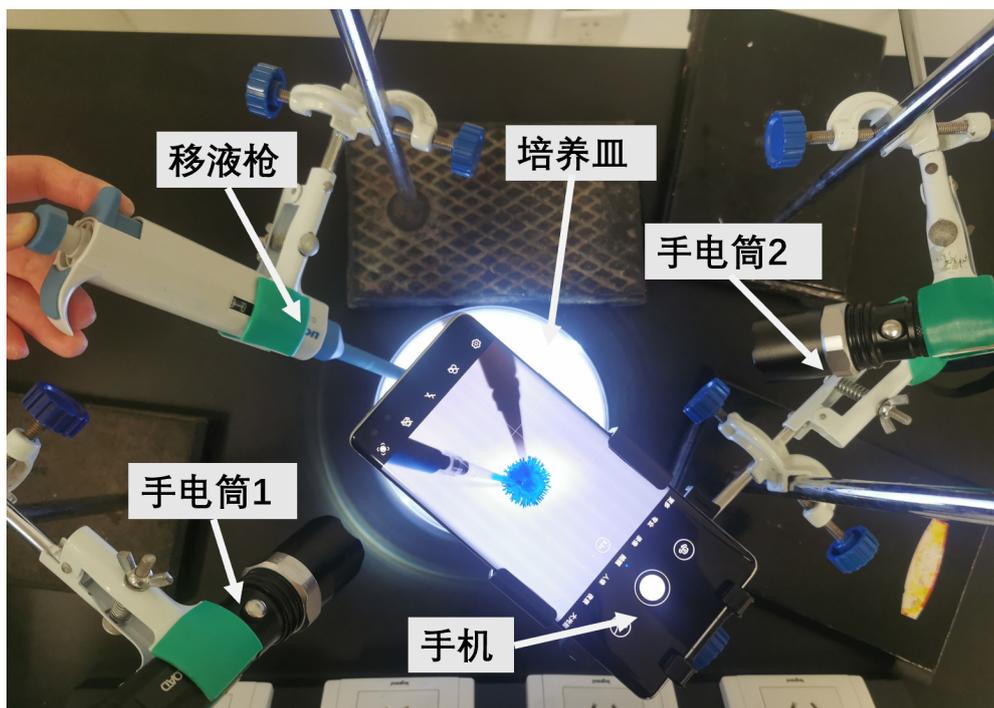


图 2.3: 实验装置示意图

2.1.2 酒精墨水在基底上扩散与阶段的划分

图2.4展示了一个典型的酒精墨水在基底上扩散的过程，以分形现象出现为节点，扩散过程可以被分为两个阶段。在第一阶段分形还未形成，酒精墨水在基底上以圆形形态铺展，此过程持续时间较短（小于 $1s$ ），我称这一阶段为稳定扩散阶段。在第二阶段，分形手指开始产生，手指缓慢向四周推进，此过程大约持续 $30-40s$ ，此后手指不再生长，我称此阶段为不稳定扩散阶段。

为了定量地描述扩散过程，我定义了以下几个几何参量，

- R_1 : 最外围的包裹所有手指的半径（下简称外径），整个过程结束后达到的最大外径为 R_{1f} 。
- R_2 : 手指内部的“根基”所对应的半径（即没有手指的部分所对应的半径，下简称内径），整个过程结束后达到的最大内径为 R_{2f} 。
- R_c : 最先出现手指的临界半径，其对应的时间是稳定扩散和不稳定扩散的交界时间 t_c 。

R_1 与 R_2 均为时间 t 的函数。图2.5描述了某一典型扩散过程中 R_1 和 R_2 随时间

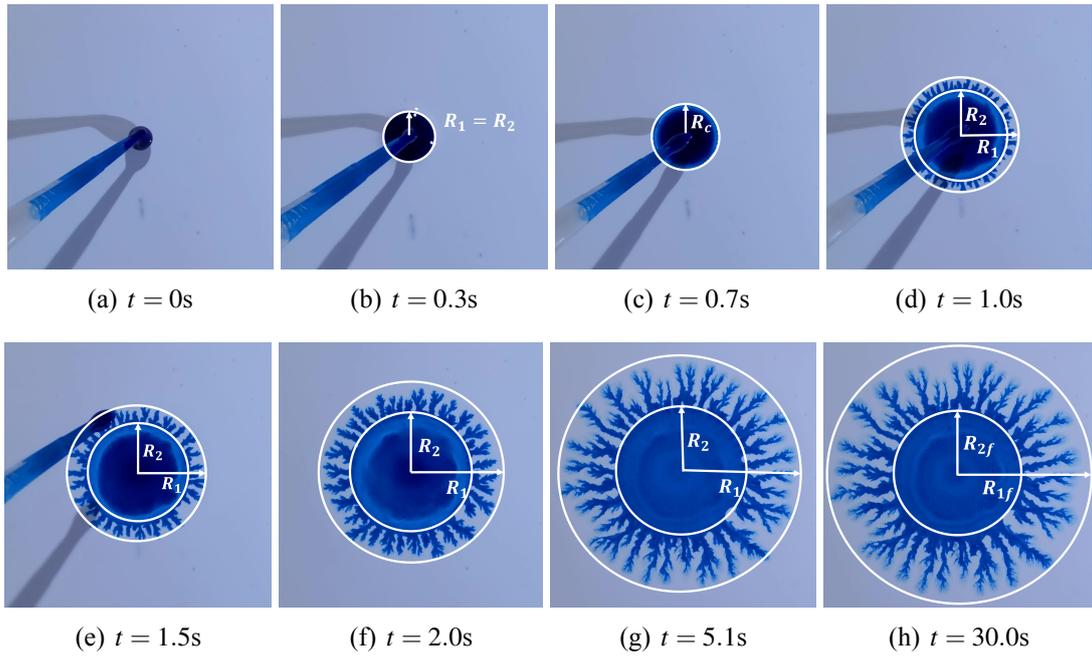


图 2.4: 一个典型的扩散过程示意图

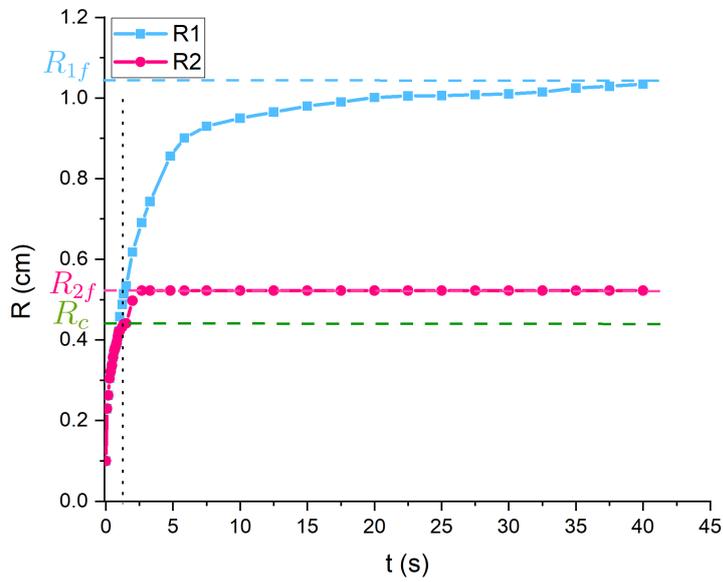


图 2.5: R_1 和 R_2 的随时间变化的生长曲线, R_c 作为稳定扩散和不稳定扩散的临界半径, 其对应的临界时间不到 1s。在 5s 时, R_2 达到了一个稳定的状态, 但此时 R_1 还在以缓慢的速度变大。

的变化关系。从图中可以看出，在稳定扩散阶段， $R_1 = R_2$ ；在不稳定扩散阶段，手指内部的根基与手指一起生长，但 R_1 扩散的速度远大于 R_2 ，因此在此阶段中 $R_1 > R_2$ 。从图中还可以看出 R_2 随时间会较快地达到一个稳定的数值，尽管此时外部的 R_1 仍然在缓慢生长。

第二节 控制变量实验

分形手指的几何形态受到多种因素的影响，通过大量的实验与观察，我逐步抽取一些关键的影响参量：酒精墨水的体积，墨水的滴数与滴下时的连续程度，酒精在酒精墨水中的浓度，丙烯基底的浓稠程度，厚度和墨水的种类等。为了将研究焦点汇聚到我最关心的“为什么加入酒精的墨水会在基底上扩散”和“形成分形的机制究竟是什么”这两个问题上来，我对上述参量做了进一步的筛选和固定。



(a) 实验中使用的墨水型号



(b) 移液枪可以精细调节液滴的大小



(c) 不同酒精浓度的酒精墨水

图 2.6: 控制变量实验中用到的材料与工具

首先我选用了同一种墨水（见图2.6(a)）进行探究，后文将指出，影响扩散与分形的主要是酒精墨水中的酒精而非墨水，因此在初级近似中墨水主要起示踪作用¹。其次我并没有采用艺术家常用的连续滴入墨水的方式，而是选择每次

¹当然，我会在本文的第四章中指出这种近似是有条件的。

只滴一滴墨水，滴入的量由墨水体积控制而不是通过滴下时的连续程度，因为后者在实验上不易控制因而会带来更多的随机性。我还观察到当丙烯基底太厚时，滴入的墨水无法产生分形的现象，通过尝试，我选择了最易于稳定产生分形现象的基底厚度（约 2mm）并将该参量固定下来。

在接下来的实验当中我主要研究了以下三个参量对于现象的影响：

1. 酒精墨水的体积 V 。我利用移液枪（如图2.6(b)）等距地选取了 $V = 2.5\mu\text{L}$ ， $V = 5.0\mu\text{L}$ ， $V = 7.5\mu\text{L}$ 和 $V = 10.0\mu\text{L}$ 等四类大小的液滴。
2. 酒精在酒精墨水中的体积分数 ϕ 。我按照体积分数由小到大的顺序，等间距地调制了 10 种酒精墨水（如图2.6(c)），包括 $\phi = 0\%$ ， 10% ， \dots ， 90% ，这些酒精墨水用来测量粘度。在实际实验中，我发现当体积分数小于某临界值时（比如在大多数情况下 $\phi \approx 30\%$ 时），由于酒精太少，液滴无法扩散。此外，之所以没有采用 100% 的比例，原因在于此时的酒精不含墨水，在实验上不易观测。
3. 丙烯基底的粘度 μ_b ：通过调整丙烯颜料和水的比例，丙烯基底的性质发生变化。总体而言，水越多丙烯基底越稀，水越少丙烯基底越稠，这将会体现到基底的粘度这一性质中，这一点我将会在第2.2.3中详细展开描述。我最终调配了四种基底，分别称为基底 1-基底 4，粘度由低到高。然而在实际实验中，基底 4 由于过于浓稠不易形成分形，因此在后文呈现数据的时候大多只包含 3 种基底。

2.2.1 酒精墨水的性质研究

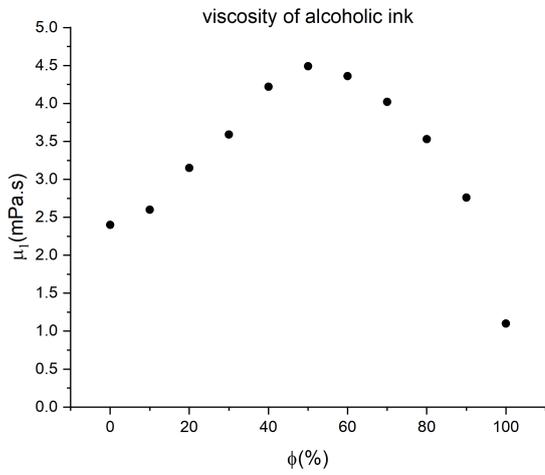
改变酒精墨水中酒精所占的体积分数 ϕ ，会改变酒精墨水的性质。我主要探究了酒精墨水的粘度 μ_i 和其在空气中的表面张力 γ_{ia} 随体积分数 ϕ 的变化，其中下标 i 代表墨水， a 代表空气。

酒精墨水的粘度 μ_i

我利用旋转粘度计2.7(a)对酒精墨水的粘度进行测量，结果如图2.7(b)所示，可以发现 μ_i 在 $\phi \approx 50\%$ 处出现出现峰值，文献 [10] 中给出了对这一特点的解释。

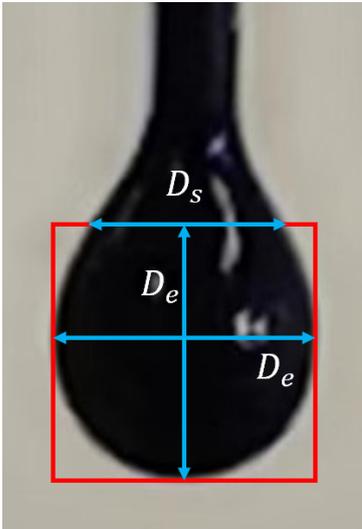


(a) 旋转粘度计

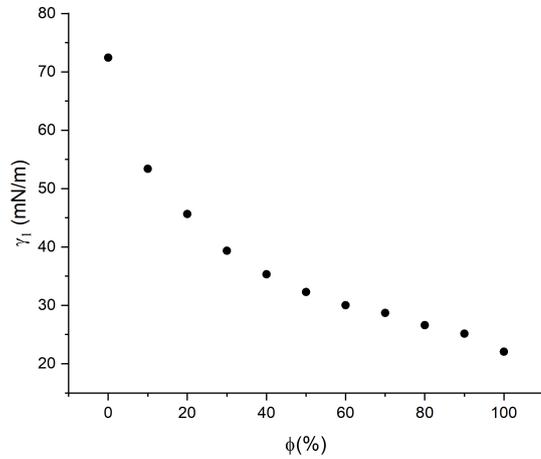


(b) 酒精墨水的粘度 μ_i 随酒精体积分数的变化

酒精墨水在空气中的表面张力 γ_{ia}



(c) 悬滴法测表面张力示意图



(d) γ_i 随酒精体积分数的变化

我采用了悬滴法对酒精墨水的表面张力进行了测量，图2.7(c)展示了悬滴临界时刻液滴的形态，图中已标出了典型的几何尺度。根据文献 [11]，液体的表面张力由下式给出

$$\gamma = \frac{\Delta\rho g D_e^2}{H} \quad (2.1)$$

其中, D_e 为液滴的最大直径, 形状因子 H 为

$$\frac{1}{H} = f\left(\frac{D_s}{D_e}\right) \quad (2.2)$$

其中, D_s 为距离液滴底部顶点 D_e 距离处的液滴直径, f 是 D_s/D_e 的函数, 可以通过查表得到。

通过改变酒精的体积分数, 就可以测量在不同浓度下表面张力的值, 结果展示在了图2.7(d)中。可以看出, 酒精墨水的表面张力大致在 $70\text{mN/m} \sim 20\text{mN/m}$ 之间, 随着酒精浓度的增加, 表面张力呈现出递减的趋势。后文将会指出, 这一效应将决定酒精墨水是否会在基底上扩散以及扩散的程度。

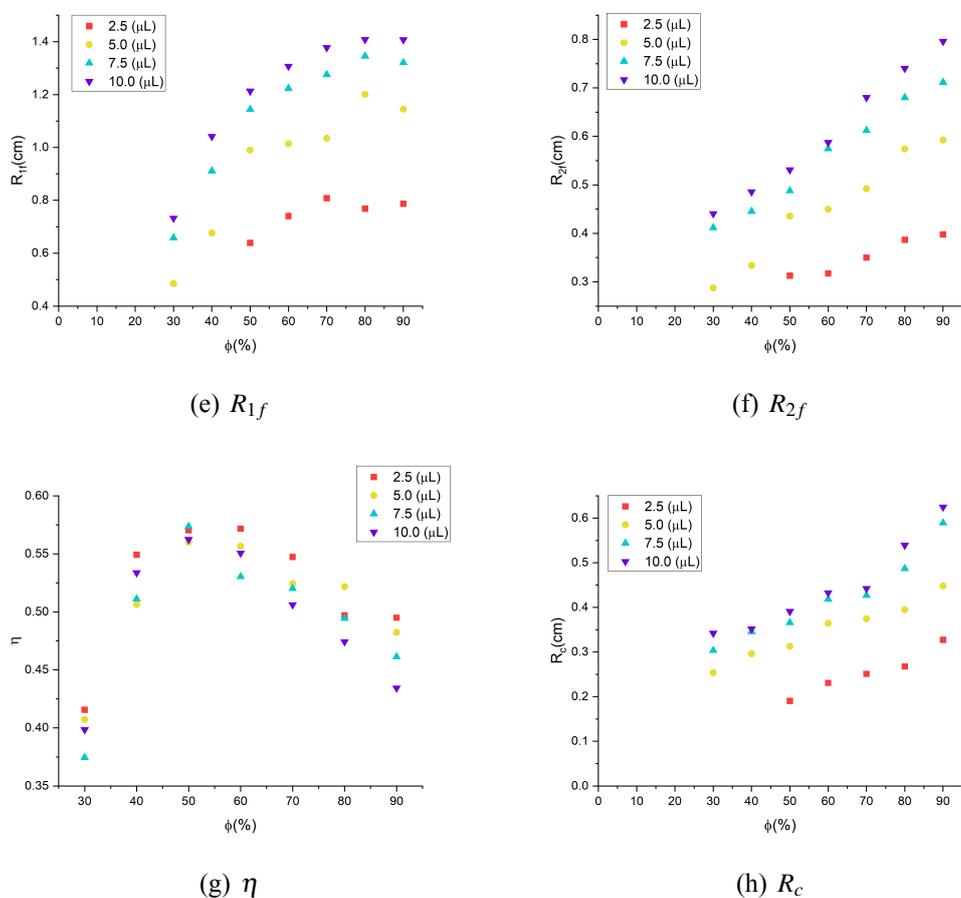
2.2.2 酒精墨水的性质对几何形态的影响

最终形态的外径 R_{1f} 与内径 R_{2f} 、手指占比率 η 和临界半径 R_c

随着酒精墨水的性质发生改变, 分形手指最终的形态也会发生改变。我通过改变酒精体积分数 ϕ 和酒精墨水的体积 V , 分别对墨水最终形态的外径 R_{1f} 与内径 R_{2f} 、手指占比率 η 和分形开始时的临界半径 R_c 进行了测量, 其中 $\eta = (R_{1f} - R_{2f})/R_{1f}$ 是我定义的一个在一定程度上能够表征手指在整个形态中占比的无量纲参量。

图2.7展示了基底 2 对应的各数据, 可以看出, 随着酒精墨水体积的增大, 外径 R_{1f} 、内径 R_{2f} 以及临界半径 R_c 均有增大的趋势。手指占比率与体积的 V 无显著的关系。

更为有趣的是上述几何参量和酒精体积分数 ϕ 的关系, 随着 ϕ 的增大, 内外径以及临界半径均不同程度的增长, 这意味着在酒精墨水扩散的过程中, 酒精起到了决定性的作用。根据上一小节的分析, 随着酒精浓度增加, 酒精墨水的表面张力变小, 这将会使墨水更容易在丙烯基底上浸润并扩散。在下一章中, 我将会从表面张力的角度对这一效应做进一步的理论分析。手指占比率 η 则在 $\phi \approx 40\% \sim 60\%$ 附近出现了一个峰值。

图 2.7: 分形手指各几何参量与酒精体积分数 ϕ 和酒精墨水体积 V 的关系图不稳定扩散第一级手指数目 n_f

为了进一步分析分形产生的机制，我着重考虑了不稳定扩散阶段第一级手指的数目，图2.8展示了第一级手指数目 n_f 随酒精体积分数 ϕ 和酒精墨水体积 V 的关系，可以看出，随着酒精墨水的体积变大，手指数目增大。但手指数目随着酒精浓度的变化却呈现出较为复杂的形态，在 $\phi \approx 50\%$ 时手指数目出现一个极小值。可见 n_f 对 ϕ 和 V 的依赖关系并不简单，对 n_f 的预测，将会是本文理论建模部分重点考虑的内容。

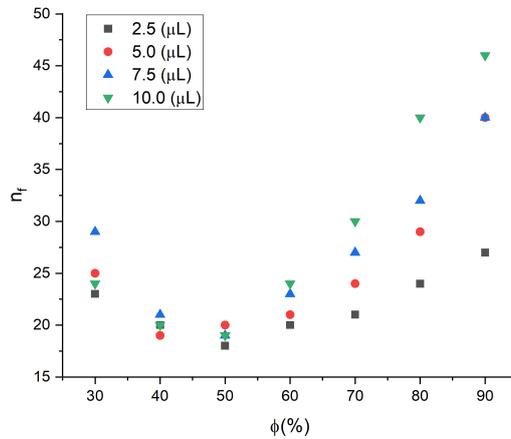


图 2.8: 第一级手指数与酒精体积分数 ϕ 和酒精墨水体积 V 的关系图

2.2.3 基底的性质研究

基底的粘度 μ_b

丙烯酸基底属于非牛顿流体，其粘度 μ_b 会随速度梯度的变化而变化，在利用旋转粘度计对其进行测量时，测量值将与转子的转速有关。我分别在四个转速下对不同浓稠度的四个基底的粘度进行了测量，结果如图2.9所示，随着转速的

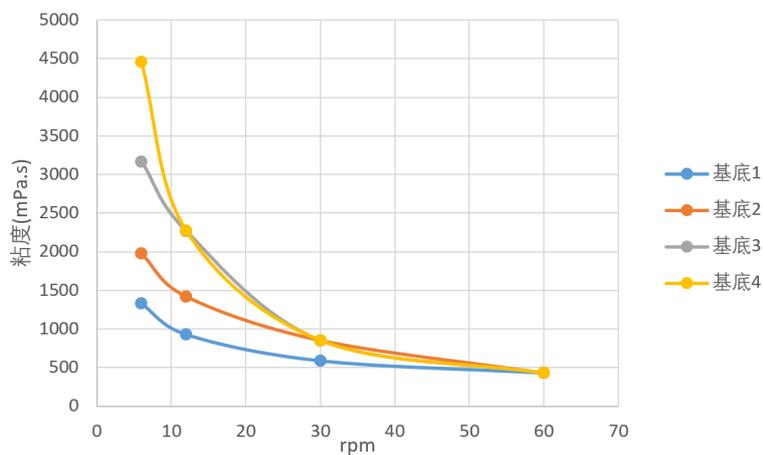


图 2.9: 各基底的粘度随旋转粘度计转子转速的变化，其中从基底 1 到基底 4，含水量逐渐减少，粘度随之增大。

降低，丙烯酸基底的粘度增大。通过对比酒精墨水在酒精中扩散的速率与旋转粘度计在最低转速（6 rpm）时的剪切速率，发现二者属于统一数量级。因此，在

接下来的讨论中，均选取最低转速时的粘度进行计算。

在实验中，对稀释丙烯颜料在空气中的表面张力 γ_{ba} 同样通过悬滴法进行估测，结果表明 $\gamma_{ba} \approx 70 \text{ mN/m}$ 。

2.2.4 基底的性质对几何形态的影响

最终形态的外径 R_{1f} 与内径 R_{2f} 、手指占比率 η 和临界半径 R_c

同样，我也考查了基底对于几何形态的影响，结果呈现在了图2.10中。可以

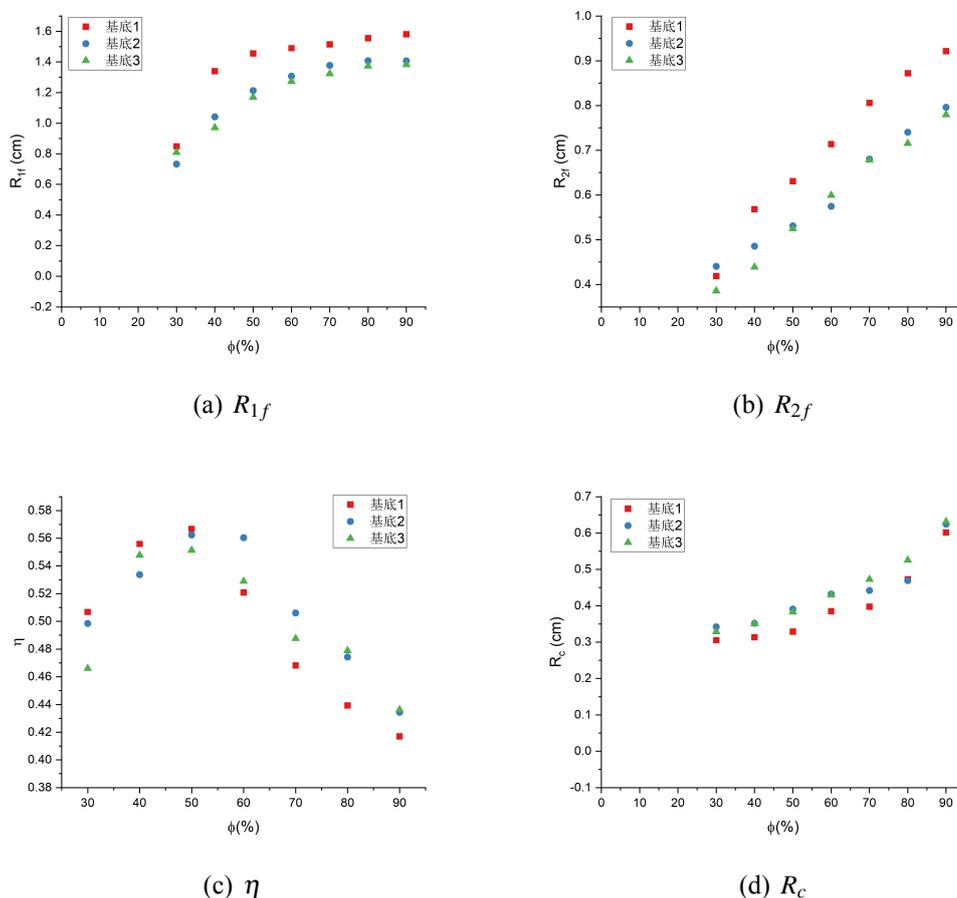


图 2.10: 以 $10\mu\text{L}$ 体积的酒精墨水为例，分形手指各几何参量与酒精体积分数及基底之间的关系，基底从 1-3 越来越稠。

看出，随着丙烯基底粘度 μ_b 的增大，酒精墨水越不容易在其中扩散，因丙烯基底的粘度为墨水的扩散带来的是阻碍效应。

不稳定扩散第一级手指数目 n_f

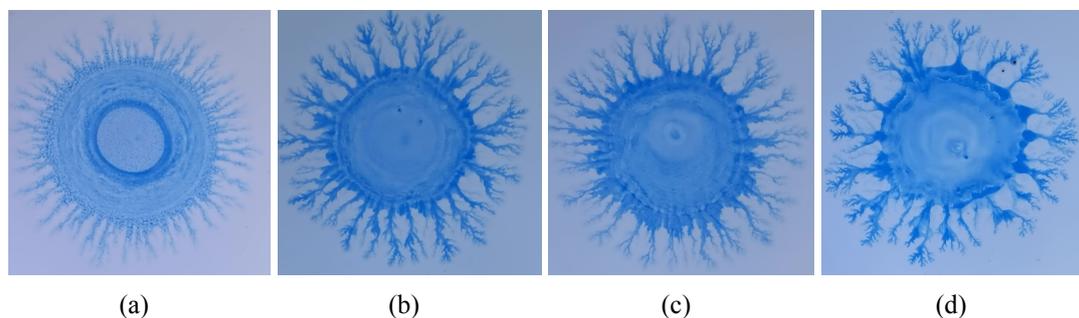


图 2.11: 不改变酒精墨水的酒精含量以及液滴体积的情况下, 丙烯基底粘度由低至高所呈现的手指图案

改变丙烯基底的粘度, 手指本身的形态也会发生变化, 如图2.11所示, 当丙烯基底粘度较低时, 手指在根基处分叉较为细密, 在后续过程中, 仅有少量的次级分叉; 当丙烯基底粘度较大时, 手指在根基处分叉较少, 但在后续过程中, 会伴随多级分叉。

为了定量描述分叉过程中的动力学机制, 我绘制了第一级分叉数目 n_f 随基底粘度 μ_b 的变化关系, 如图2.12所示, 从中可以看出 n_f 随 μ_b 增大而减小的趋势。

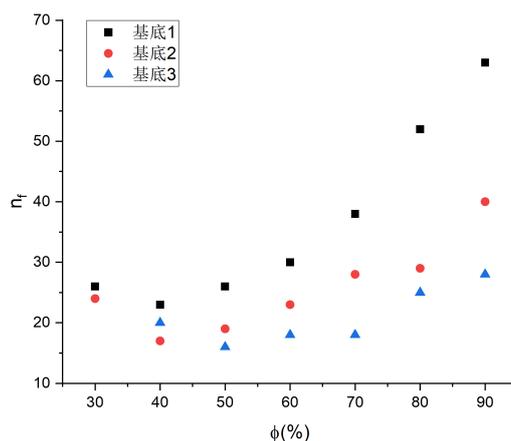


图 2.12: 以 $10\mu\text{L}$ 体积的酒精墨水为例, 第一级手指数与酒精体积分数 ϕ 和基底种类的关系图, 基底从 1-3 越来越稠。

第三章 理论解释

第一节 稳定扩散阶段的动力学研究

界面物理学主要研究的是发生在多种相的界面上的物理学，酒精墨水在丙烯基底上的扩散就属于此类问题。根据界面物理的相关知识，当某液滴滴落到某固体表面时，液滴表面会与固体表面成一接触角 θ_c ，它的大小由 Young 方程给出

$$\gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma_{LG} \cos \theta_c = 0 \quad (3.1)$$

其中 γ_{SG} 、 γ_{SL} 和 γ_{LG} 分别代表固-气、固-液和气-液之间的界面张力。但接触角并不总是存在的，从上式中可以看出当扩散系数 $S = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma_{LG} > 0$ 时 θ_c 无解，在这种情况下液滴倾向于在固体表面铺展，这便是“完全浸润”的现象。在分形手指的问题中，共涉及到酒精墨水、丙烯基底和上方的空气三种不同的相，此时基底虽然不是固体，但仍可做类似的分析。此时的扩散系数应为 $S = \gamma_{ba} - \gamma_{bi} - \gamma_{ia}$ ，其中下标 b 、 i 和 a 分别代表基底、酒精墨水和空气。实验条件所限，我并没有能够对 γ_{bi} 做直接的测量，下面仅做定性的估计。实验中测得的 γ_{ba} 约为 70mN/m，其对基底浓稠度的依赖较小。 γ_{ia} 对酒精体积分数的依赖较为明显，结果已展示在了第2.2.1节的图2.7(d)中，可以看出 γ_{ia} 随酒精体积分数 ϕ 的增大而减小（其数值从 70mN/m 一直会下降至 20mN/m）。随着 γ_{ia} 的减小，扩散系数 S 可能会大于零，根据上文的分析，此时酒精墨水就会在基底上扩散。我在实验中的确观察到了这样的现象，事实上，在 ϕ 大于某临界值 $\phi_c \approx 30\%$ 时，酒精墨水的扩散才能够发生。

酒精是一种易挥发的液体，其与墨水混合后形成的混合液滴在扩散过程中将会受到酒精挥发带来的影响。根据文献 [12][8]，酒精的微小蒸发会导致酒精在液体薄层中各处的浓度发生变化。在酒精墨水比较薄的情形，扩展的液滴因同时与空气和基底接触而受到等效的界面张力 $\gamma = \gamma_{ia} + \gamma_{ib}$ 。该界面张力因受到

不均匀的酒精浓度的影响在液面上有一个不均匀的分布。分别记液面中心处和液面边缘处有效的界面张力为 γ_c 和 γ_0 ，那么浓度差异将导致液滴的表面存在一个张力梯度 $(\gamma_0 - \gamma_c)/R = \Delta\gamma/R$ ，其中 R 为液滴的扩散半径。马兰戈尼首先研究了这类在张力梯度存在时液体的扩散行为 [13]。分形手指的问题较为特殊，因其基底并不是固体，而是粘度很大的一种液体，酒精墨水在其表面上还会受到粘性应力的作用。因此液滴会在表面张力梯度和粘性应力的共同作用下扩展并运动，这两种应力应处于平衡，即

$$\frac{\Delta\gamma}{R} \sim \frac{\mu_b \dot{R}}{h} \quad (3.2)$$

在这里我用到了牛顿流体的粘性应力公式，尽管丙烯基底严格来说并不属于牛顿流体，但在扩展速率 \dot{R} 非常小的时候能够用上式估计其应力的。另外，因稳定扩散阶段持续时间非常短（不到 1s），所以接下来的推导将假设在这个时间段内 $\Delta\gamma$ 为恒定值，实验数据将进一步对这一假设给以支持。

将扩展中的液滴近似看做薄圆柱体，其厚度可用 $\pi R^2 h \sim V$ 进行估计，联立此式与方程 (3.2)，可以给出

$$R^4 - R_0^4 = \frac{4V\Delta\gamma}{\pi\mu_b} t \quad (3.3)$$

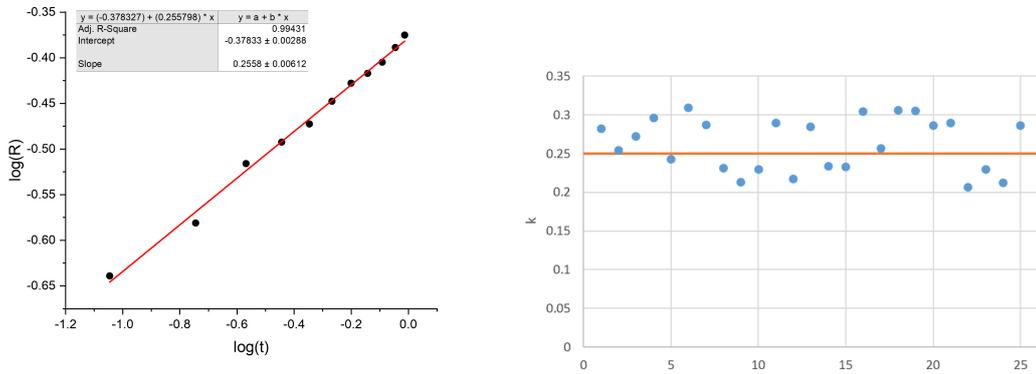
考虑到在扩散过程中 $R_0^4 \ll R^4$ ，因此上式中的 R_0 可以忽略，因此有

$$R = \left(\frac{4V\Delta\gamma}{\pi\mu_b} t \right)^{1/4} \sim \left(\frac{V\Delta\gamma}{\mu_b} t \right)^{1/4} \quad (3.4)$$

上式预言了扩展半径 R 是随时间以 1/4 次幂变化的。以某个典型的扩散为例，我绘制了 $\log R$ 与 $\log t$ 变化关系 3.1(a)，图中给出的斜率 k 恰好在 1/4 附近。图 3.1(b)，展示了多次实验拟合出的斜率，可以看出均在 1/4 上下浮动。这意味着实验很好地符合了我所建立的物理模型。

在接下来的讨论中，我引入参数 α 来描写扩散半径随时间的变化

$$R = (\alpha t)^{1/4} \quad (3.5)$$



(a) 某一稳定扩散过程 $\log R \sim \log t$ 之间的关系 (b) 多组过程拟合出的斜率值均在 1/4 附近

图 3.1: 稳定扩散过程中半径 R 随时间的变化关系

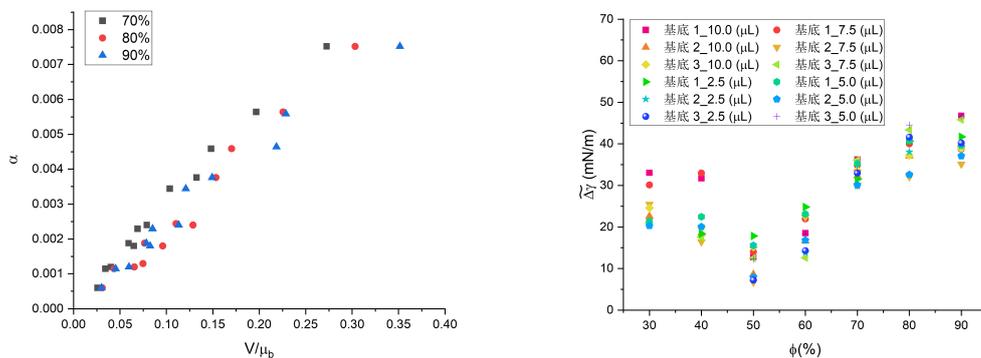
为了进一步考查 α 所包含信息，我绘制了其 V/μ_b 的关系图如下3.2(a)，在图中可以看出 α 近似与 V/μ_b 成正比，这意味着 $\Delta\gamma$ 在整个稳定扩散过程中的确是近似恒定不变的。通过拟合每个浓度下的 $\alpha \sim V/\mu_b$ 图的斜率，可以得到每个对应浓度下的 $\Delta\gamma$ ，但要注意的是，因上面的推导中我略掉了一些具体的比例系数，因此拟合得到的 $\Delta\gamma$ 是将一些常数吸收之后的张力差。为了表述更为严格，我将拟合得到的界面张力差记作 $\widetilde{\Delta\gamma}$ ，即

$$R = (\alpha t)^{1/4} = \left(\frac{V \widetilde{\Delta\gamma}}{\mu_b} t \right)^{1/4} \quad (3.6)$$

下图3.2(b) 展示了其与酒精墨水体积分数 ϕ 之间的关系。

第二节 不稳定扩散阶段分形产生的机制研究

上节描述了液滴稳定扩散的行为，本节我将提出自己对不稳定扩散产生原因的猜想，并在此猜想基础上预言分形发生时第一级手指的数目。文献 [2][3][4] 研究了将低粘度流体（比如水）从中央小孔中注入到介于两薄板之间的高粘度流体（比如油）时所发生的粘性指进的现象，他们指出分形的出现主要来源于两平板之间低粘度流体对高粘度流体驱替时产生的不稳定性。但我所研究的分形手指问题与上述问题有不小的差异。首先分形手指并不要求有两层薄板，而薄



(a) 颜色相同的点表示相同酒精体积分数所对应的数值，可以看到 $\alpha \sim V/\mu_b$ 的趋势

(b) 拟合出的 $\widetilde{\Delta\gamma}$ 与 ϕ 的关系

图 3.2: 稳定扩散中典型参数的关系

板在粘性指进问题的研究中起着很重要的作用，其次酒精是易挥发的液体，我猜想这也会导致与粘性指进问题有很大的不同。尽管如此，前人的研究思路给了我很大的启发，我将借鉴他们的某些思想进行我的推导。

前文已述及在界面张力存在梯度的情况下液体会朝界面张力较大的方向运动，文献 [14] 给出了当液体可以看做薄层时扩展速度与张力梯度的关系，

$$\vec{v} = \frac{h}{2\mu} \nabla \gamma \quad (3.7)$$

为了找到酒精墨水和丙烯基底两种液体界面上的行为，需要对两种液体都建立如上的方程。在本节的推导中，以下标 $j = 1$ 代表酒精墨水，下标 $j = 2$ 代表基底。记

$$M_j = \frac{h_j}{2\mu_j}, \quad \varphi_j = M_j \gamma_j \quad (3.8)$$

其中 φ_j 叫做速度势，因其梯度等于速度，

$$\vec{v}_j = \nabla \varphi_j \quad (3.9)$$

因为问题中的流体均可以看做是不可压缩的，即满足 $\nabla \cdot \vec{v}_j = 0$ ，也就是说速度

势满足拉普拉斯方程，

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad (3.10)$$

在极坐标中上式写做

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.11)$$

在稳定扩散的阶段，液滴向四周均匀扩散，速度势应与角度 θ 无关。在两种液体交界处，径向速度与界面张力应该是连续的，即

$$\dot{R} = \nabla \varphi_j^{(0)}|_{r=R}, \quad \frac{\varphi_1^{(0)}}{M_1} \Big|_{r=R} - \frac{\varphi_2^{(0)}}{M_2} \Big|_{r=R} = 0 \quad (3.12)$$

上标 (0) 代表稳定扩散时没有受到扰动的速度势。将边界处的半径随时间的变化方程 $R(t) = (\alpha t)^{1/4}$ 代入上式，即可求出稳定扩散过程中的速度势，

$$\varphi_j^{(0)} = \frac{\alpha}{4R^2} \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{M_j}{M_2} \right) \quad (3.13)$$

括号中与 r 无关的第二项原则上可以乘一个其他的因子，但在后文的推导中可以看到它不会对问题的分析带来影响。

当界面在运动时，液体某些性质的不均匀会带来微小的扰动，使界面不能完全保证完美的圆形。借鉴文献 [3] 中的思想，可以对这些扰动进行分波分析。如图3.3所示，可以将半径 r 表示为在原来的圆半径 R 上附加一扰动项，

$$r = R + a, \quad a = Af(t) \exp(in\theta) \quad (3.14)$$

其中 $Af(t)$ 代表微扰的幅度， A 是一个小量。 n 对应不同的波长，或者说实际上就是对应了不同的手指数目。手指的生长速率由 $\dot{f}(t)$ 来表征。对于不同的 n 来说，手指生长速率可能会有不同，如果某一个波长对应的速率最大，那么它在接下来的演化中就会占主导作用，在现象上就表现为分形手指。该波长对应的 n 应当就是分形发生时第一级的手指数目 n_f 。下文就着重对这一问题进行分析。

此时因边界不再各向同性，因此速度势也将会依赖角度 θ ，根据拉普拉斯方程和微扰相关的知识 [15]，此时它的解可以表示为零阶解再添加一微扰项，

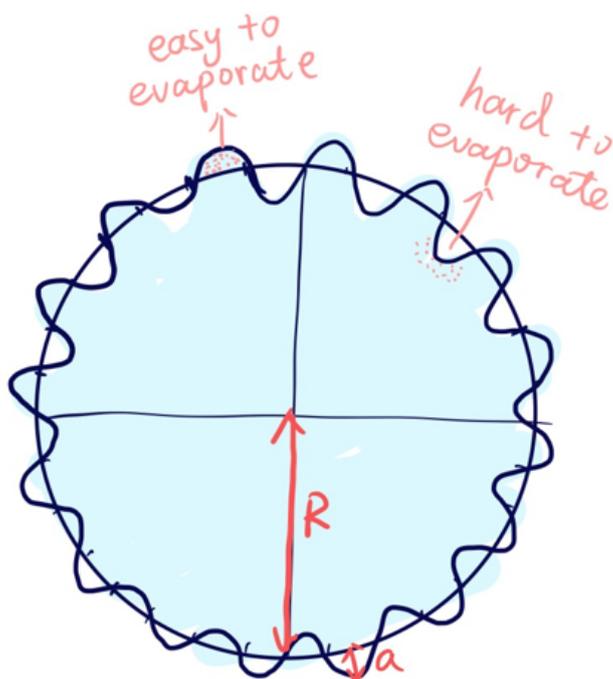


图 3.3: 手指凸起的位置对应正的曲率, 酒精分子因周围的分子少而受到较小的吸引力, 蒸发速率较快。手指凹陷的位置对应负的曲率, 酒精分子因周围的分子多而受到较大的吸引力, 蒸发速率较慢。酒精因蒸发带来的浓度差异将会导致界面处出现微小的张力差。

在 $r < R$ 的酒精墨水区域和 $r > R$ 的丙烯基底区域, 速度势可以分别表示为

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} - \beta \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\theta), \quad r < R \quad (3.15)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^{(0)} + \beta \left(\frac{R}{r}\right)^n \exp(in\theta), \quad r > R \quad (3.16)$$

或者将二者统一地表示为

$$\varphi_j = \frac{\alpha}{4R^2} \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{M_j}{M_2} \right) + (-1)^j \beta \left(\frac{r^n}{R^n}\right)^{(-1)^{j-1}} \exp(in\theta) \quad (3.17)$$

在这里 β 是一个小量。对速度势取微分就可以得到径向的速度, 利用关系

$$\dot{r} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \quad (3.18)$$

并将其展开到第一阶小量，可以得到代表速度势微扰的 β 与半径微扰的 a 之间的关系，

$$\beta = -\frac{A}{n} \left(\frac{\alpha}{4R^3} f + R \frac{df}{dt} \right) \quad (3.19)$$

为了进一步分析手指生长速率 f ，还需要分析交界面处界面张力的分布。如图3.3，在手指凸起的位置，酒精分子周围的分子少，受到的吸引力小，蒸发快，这一区域对应正的曲率半径；在手指凹陷的位置，酒精分子周围的分子多，受到的吸引力大，蒸发慢，这一区域对应负的曲率半径。根据前文的分析，当酒精随着蒸发而导致浓度存在差异时，就会在液面上带来界面张力分布的不均匀。在交界面处，这种不均匀来自曲率的差异。于是我猜想两种液体的界面张力因扰动而会出现不连续，该不连续可以由曲率 κ 表征，

$$(\gamma_2 - \gamma_1)|_{\text{interface}} = -\varepsilon(\kappa - \kappa_0) \quad (3.20)$$

其中 $\kappa_0 = 1/R$ 为微扰不存在时的曲率， ε 为我引入的一个未知的参量，负号出现是因为酒精蒸发带来的是 γ_1 的变化。极坐标表示下的曲率公式 [16] 为

$$\kappa = \frac{|r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)|}{[r(\theta)^2 + r'(\theta)^2]^{3/2}} \quad (3.21)$$

将式 (3.14) 代入上式，展开到 a 的最低阶可以得到

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{a + d^2a/d\theta^2}{R^2} \quad (3.22)$$

于是有

$$(\gamma_2 - \gamma_1)|_{\text{interface}} = \left(\frac{\varphi_2}{M_2} - \frac{\varphi_1}{M_1} \right) \Big|_{\text{interface}} = \varepsilon \frac{a + d^2a/d\theta^2}{R^2} \quad (3.23)$$

将式 (3.14)、(3.17) 和 (3.19) 代入上述边界约束条件，可以得到如下等式，

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{\alpha n(M_1 - M_2)}{4R^4(M_1 + M_2)} - \frac{\alpha}{4R^4} + \frac{\varepsilon(n^2 - 1)n}{R^3} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (3.24)$$

在实验中我无法直接测量在交界面附近酒精墨水的厚度，但我猜测在数量级

上应该与其他现象有一定的类似性，因此我根据文献 [12] 中相关现象的数据对其进行了估测，发现边缘处典型厚度大约为液滴平均厚度的 10^{-3} ，即 $h_1 \sim 10^{-3}V/\pi R^2 \sim 10^{-8}\text{m}$ ，将 $h_2 \sim 2\text{mm}$ ， $\mu_i \sim 5\text{mPa}\cdot\text{s}$ ， $\mu_b \sim 2000\text{mPa}\cdot\text{s}$ 代入式 (3.8) 进行比较，有 $M_1 \ll M_2$ ，因此式 (3.24) 可以进一步简化为

$$\frac{df}{dt} = -\frac{n+1}{R^3} \left(\frac{\alpha}{4R} - \varepsilon n(n-1)M_1 \right) f \quad (3.25)$$

此即为不同的 n 对应手指的生长速率。上式取极值代表生长最快对应的手指数目 n_f ，计算

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{df}{dt} = 0 \quad (3.26)$$

得到第一级手指数目

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{4M_1 R \varepsilon} + 1 \right)} \quad (3.27)$$

在实验中 $n_f \gg 1$ ，上式可进一步简化为

$$n_f = \sqrt{\frac{\alpha}{12M_1 R \varepsilon}} \quad (3.28)$$

利用

$$\alpha = \frac{V\widetilde{\Delta\gamma}}{\mu_b}, \quad M_1 = \frac{h_i}{2\mu_i} \sim \frac{V}{2\pi R^2 \mu_i}, \quad R = R_c \quad (3.29)$$

在略掉一些整体的常系数之后，可以得到第一级手指数目 n_f 随某些关键参量之间的关系，

$$n_f \propto \sqrt{\frac{\widetilde{\Delta\gamma}\mu_i R_c}{\mu_b}} \quad (3.30)$$

在此前已经测得了 μ_i 、 μ_b 以及 R_c ，并在扩散过程中拟合得到了有效 $\widetilde{\Delta\gamma}$ ，于是可以绘制手指数目与混合参量 $\sqrt{\widetilde{\Delta\gamma}\mu_i R_c/\mu_b}$ 之间的关系，如图3.4，可以看出，实验很好地支持了我提出的理论模型。第二章中的图2.8和图2.12展示了 n_f 与一些参量之间的复杂关系，至此我终于找到了这些复杂关系背后统一的一个表达式。

总结以上理论，其核心思想为：酒精的蒸发会使界面张力在边界处出现微小的梯度，这一梯度会使界面处本来微小的扰动被放大。对扰动做分波展开会

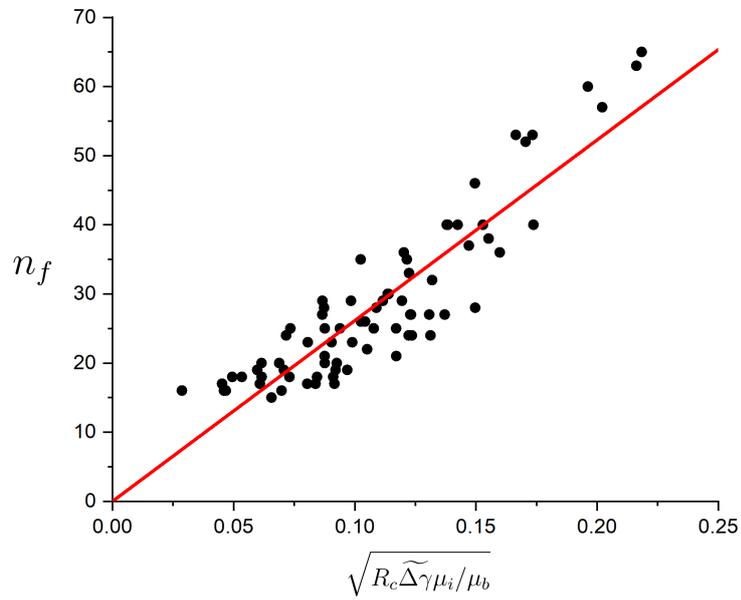


图 3.4: 分形发生时第一级手指数目 n_f 与混合参量 $\sqrt{\Delta\gamma\mu_i R_c / \mu_b}$ 之间的关系

发现，其中有一个特殊的分波因其扩展速度最快而被放大得最为剧烈，这一分波即对应了分形产生时第一级的数目 n_f 。

第四章 两个新奇的现象

第一节 “胖手指”和“手指中的瘦骨头”

在某些情况下，可以观察到手指和周围丙烯基底之间会出现两层分界线，见图4.1。我称外围的一层为“胖手指”而称包裹在里面颜色更深的部分为“手指中的瘦骨头”。这种现象尤其常见于连续滴加多滴酒精墨水的情况。在滴加一滴酒精墨水的情况下，这种现象在酒精体积分数 $\phi \approx 40\% \sim 60\%$ 时最容易出现。在时间上来看，“胖手指”几乎和“瘦骨头”一起出现，我并没有观察到“胖手指”先于“瘦骨头”出现的情形。我分析在这种情况下，酒精与墨水并不能简单看做相容的液体，酒精的扩散和墨水的扩散的速率程度均有微小的差异，这种差异在分形的过程中被放大导致最终出现两个分界面。

有趣的是，在滴加单滴墨水的情况下，最容易出现上述奇特现象时的酒精墨水体积分数正好对应于酒精墨水粘度达到极大值时的体积分数。但这只是一个粗略的观察，具体机制仍然有待分析。

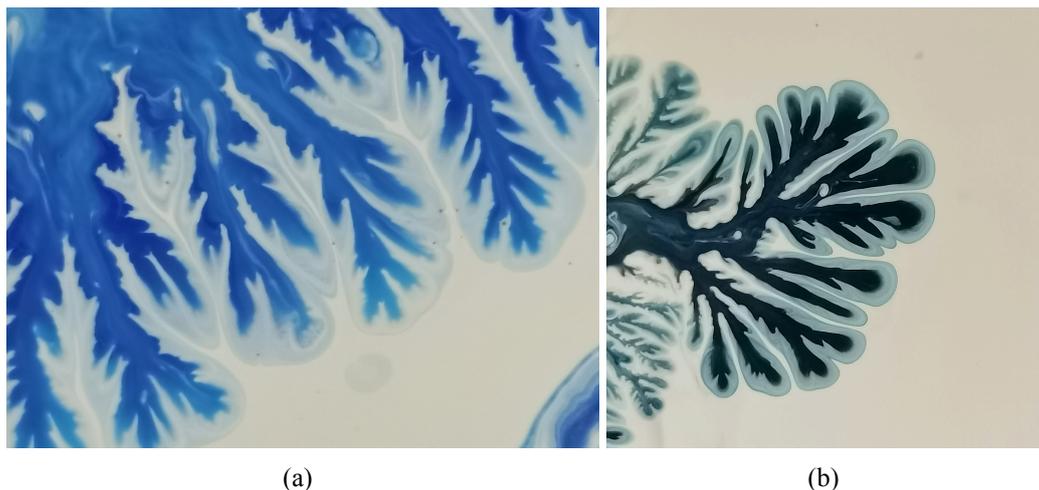


图 4.1: “胖手指”和“手指中的瘦骨头”

第二节 “反侵略的攀升”

本文主体描述的是将酒精墨水滴落到丙烯基底上发生的扩散与分形，但在一次偶然的实验中，我将两种液体的“地位”和“顺序”交换了一下，当我将稀释的丙烯颜料滴落到酒精墨水的薄层上时，分形现象也发生了，如图4.2(a)所示。与未调换时的情形相比不同的是，并不是滴入的液滴（即丙烯颜料）在基底（即酒精墨水）上扩散并形成分形，而是基底向液滴反“侵略”。因为丙烯颜料的高度远大于酒精墨水薄层的高度，所以此时酒精墨水实际上是克服了重力并在丙烯颜料的表面挤出条条分叉的缝隙。我将此类现象称为酒精墨水“反侵略的攀升”。

在另外一次实验中，我将丙烯颜料滴到已经凝固干燥的酒精墨水基底上，更加有趣的现象发生了。酒精墨水与丙烯颜料的交界处也长出了分形的手指，如图4.2(b)所示。

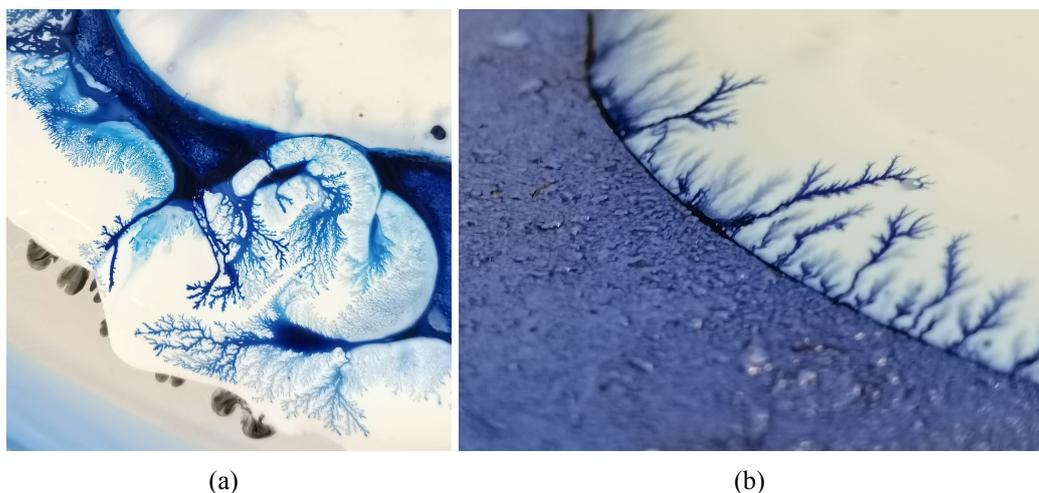


图 4.2: 酒精墨水基底在丙烯液滴上的“反侵略攀升”

第五章 总结与展望

第一节 本文的结论

基于界面物理学的相关知识，本文对酒精墨水在丙烯基底上的扩散和分形现象展开了探究。通过大量的实验观察与测量，细致描述了酒精墨水与丙烯基底的性质及其对分形手指几何形态的影响。本文核心的结论可以分为两个部分：

- 在稳定扩散阶段，因酒精蒸发导致的界面张力梯度会使酒精墨水向张力较大的方向扩展，这实际上是一种马兰戈尼效应。本文通过理论分析建立了该过程中扩展半径随时间的变化关系 $R \propto t^{1/4}$ ，实验数据很好地与理论结果相符合。
- 在分形产生的起初时刻，酒精的蒸发会使界面张力在边界处出现微小的梯度，这一梯度会使界面处本来微小的扰动被放大。本文对扰动做分波分析，发现其中有一个特殊的分波因其扩展速度最快而被放大得最为剧烈，这一分波即对应了分形产生时第一级的数目 n_f 。本文预言了该数目与哪些参量有关，并将理论预测的 n_f 与实验观测的 n_f 进行对比，发现实验数据也很好地符合了本文提出的理论。

第二节 未来可进一步探究的方向

当然在实验探究的过程中，更多的现象被观察到，更多的问题被挖掘，这为将来进一步的探究提供了方向。下面我将详细展开我的一些思考。

首先，我对第一级手指数目的预言 $n_f \propto \sqrt{\widetilde{\Delta\gamma\mu_i R_c}/\mu_b}$ 中包含了有效张力差 $\widetilde{\Delta\gamma}$ 、酒精墨水的粘度 μ_i 和临界半径 R_c 这几个参数。这几个参数都依赖于酒精墨水的体积 V 和酒精体积分数 ϕ 。实验数据固然很好地支持了我的预言，但我觉得非常有趣的一个问题是 n_f 如何直接的依赖 ϕ 和 V 这两个参数。事实上在探究的过程中我试图去寻找这样的关系，比如对于临界半径 R_c ，我发现它正比于

$\phi^\sigma V^\lambda$, 其中 $\sigma \approx 1$, $\lambda \approx 1/4$, 但我目前还不能解释这一数据背后的道理。

另外, 我在多个数据中发现了在 $\phi \approx 40\% \sim 60\%$ 这个区间, 会有诸多临界的现象。比如酒精墨水的粘度 μ_i 在这个区间里会取到极大值, 拟合出的 $\widetilde{\Delta\gamma}$ 在这个区间里会取到极小值, 手指占比率 η 也会取到极大值, 而在这个区间“胖手指”与“手指中的瘦骨头”也最容易出现。我相信这背后一定有一些我还未曾探索到的奥秘。

实验中我选用了厚度基本固定的基底。但在一些现象中, 厚基底也会出现一些奇妙的行为, 比如当大体积液滴滴落到厚基底上时, 液滴首先会在基底上冲撞出一个“坑”, 进而发生扩散行为。在本文主要研究的问题中, 基底厚度并不是一个关键的量, 但在刚刚描述的这个现象中, 我认为厚度是一个很重要的影响动力学的因素。这也是一个值得研究的领域。

参考文献

- [1] B.B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature. Henry Holt and Company, 1983. <https://books.google.co.jp/books?id=0R2LkE3N7-oC>.
- [2] Bodil Oust. Laplacian growth patterns: A study of boundary evolution using iterated conformal maps and Loewner evolution [mathesis], 2009.
- [3] Lincoln Patterson. Radial fingering in a Hele Shaw cell. Journal of Fluid Mechanics, 1981, 113: 513 ~ 529.
- [4] Lincoln Patterson. Fingering with miscible fluids in a Hele Shaw cell. The Physics of fluids, 1985, 1(28): 26 ~ 30.
- [5] Philip Geoffrey Saffman and Geoffrey Ingram Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1958, 245(1242): 312 ~ 329.
- [6] J-D Chen. Radial viscous fingering patterns in Hele-Shaw cells. Experiments in fluids, 1987, 5(6): 363 ~ 371.
- [7] Constantinos Spyridonos Spandagos. Dynamics of surfactant-laden fluids spreading on compliant substrates [phdthesis], 2011.
- [8] JOHN W. M. BUSH. 18.357 Interfacial Phenomena lecture notes. MIT open course ware, 2010.
- [9] SM Troian, XL Wu and SA Safran. Fingering instability in thin wetting films. Physical Review Letters, 1989, 62(13): 1496.
- [10] Shaoxian Song and Changsheng Peng. Viscosities of Binary and Ternary Mixtures of Water, Alcohol, Acetone, and Hexane. Journal of Dispersion Science and Technology, 2008, 29(10): 1367 ~ 1372.
- [11] 李文华, 王槿, 文小青. 居家实验: 利用滴重法和悬滴法测量液体的表面张力系数. 物理与工程, 2022, 6: 135 ~ 141.

- [12] Keiser L et al. Marangoni Bursting: Evaporation-Induced Emulsification of Binary Mixtures on a Liquid Layer. *Physical review letters*, 2017, 7(118): 074504.
- [13] C. Marangoni. Sull'espansione delle gocce d'un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido. Fratelli Fusi, 1865. <https://books.google.co.jp/books?id=ZoxltwAACAAJ>.
- [14] J Adler and L Sowerby. Shallow three-dimensional flows with variable surface tension. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 42(3): 549 ~ 559.
- [15] Laplace's Equation in Polar Coordinates. <https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch6/polar.html>.
- [16] 极坐标方程的曲率公式如何推导?. <https://www.zhihu.com/question/264409519>.

致 谢

本文的完成，离不开许多人的悉心支持和专业指导。正是他们的助力，才使我的研究得以顺利展开，论文的撰写得以逐步完善。

首先，我要衷心感谢我的指导教师马驰川老师。马老师以其渊博的学识、一丝不苟的治学态度以及亲切和蔼的处事风格，深深影响着我。从最初的理论指导到最后的论文修改，马老师都给予了我无私的指导和宝贵的建议。他鼓励我广泛查阅文献，追求科学严谨，深入思考问题的本质，确保研究的完整性和深度。马老师的支持和指导是我研究过程中最重要的动力和指引，对此，我深感荣幸和感激。

同时，我要感谢王启老师，他在课题开始时提出了很多宝贵的意见，尤其是在文献调研的环节给了我很大的启发。他还在百忙之中帮助我梳理内容，让我的研究能进一步严谨和深入。我还要感谢赵靖邦老师，他抽出宝贵的时间和我们一起讨论问题，这对我的研究工作起到了积极的推动作用。同时我要感谢孔宁老师提供的实验设备和郑子杰老师提供的摄影设备，他们的支持是实验得以顺利进行的重要保障，学校提供的实验场地，也为我的研究提供了必要的资源和便利条件。

最后，我要深切感谢在整个研究过程中一直支持我的亲人和同学们。是你们的精神鼓励和无私支持，使我克服了许多困难，坚持走到了今天。在此，我要真诚地向所有在本课题研究中给予帮助的老师 and 同学们表达我最诚挚的感谢之情。