

参赛学生姓名：苏泓鑫（第一作者）
余锦诚

中学：上海诺美高级中学

省份：上海

国家/地区：中国

指导老师姓名：隋元

指导老师单位：上海诺美高级中学

论文题目：公益教学中志愿教师
分配的公平优化模型
与系统应用
——最低开课保障的
效率代价与师资补充

公益教学中志愿教师分配的公平优化模型与系统应用

最低开课保障的效率代价与师资补充

苏泓鑫 余锦诚

摘要

公益教学机构分配志愿师资时，需要兼顾总开课数量与各教学点的最低服务。教师的资格和可服务范围限制了资源流向，完整开课又要求同时配齐师资，因此维持教学点服务可能减少总开课数。本文从一个八名教师、六个班、三个教学点的合成情景出发：原供给最多开出四班，要求各点至少开一班后只能开出三班。研究考察这一数量机会成本，以及补充何种范围、多少名教师能够弥补产出缺口。

模型描述最终确认前的单周期配置。每名教师最多承担一班，每班需要两名不同教师，固定候选关系包含资格、接受范围与时间条件，原有配对允许重新安排。机构预先给定各点最低班数。以 M_0 和 M_q 分别表示同一供给下无保障与有可行保障的最大开课数，差额 $d = M_0 - M_q$ 按完整班数计量最低服务的机会成本。

本文证明，当教学点只有两个、原最低保障可行，且每名新人的完整服务范围恰为一个整站或全体班级时，逐名补员不会扩大保障差额。这意味着维持原服务承诺后，追加资源带来的开课增量至少等于无保障情形中的增量。三点反例显示，即使新增人数和覆盖班数相同，不同整站范围仍可产生不同的保障产出；每班需求增至三人时，两点模型中的通用补员也可能扩大差额。

补员目标同样影响人数需求。恢复补员前的无保障产出采用固定基准，消除新差额则采用随供给重新计算的基准。本文给出通用补员下差额清零的人数上界及达到上界的构造：即使原开课数、保障开课数和差额相同，恢复旧产出可以始终只需一人，消除新差额的人数却随实例规模增长。匹配缺口判据进一步确定同类受限补员能否达到指定目标，以及达到目标的最少人数。

六班情景将这些结果用于机构的方案比较。不同补员范围下，恢复四班分别需要一人、两人，或对任意人数都不可达；两名通用教师则能在维持三点服务的同时开出五班。保障组合的比较还表明，同时保障两个小教学点的数量代价可以小于分别计算的代价之和。精确枚举、独立二元优化和教师配对核验支持这些合成计算。

系统以教师、教学点和班级记录组织输入，离线分析同时呈现开课数量、补员范围、人数及具体配对，供机构在确认前比较方案。新模型与在线分配批次的衔接以接口设计呈现。理论与案例共同说明，机构应将明确的服务承诺和开课目标落实到候选关系上的资源比较，再结合实际可获得的师资作出安排。

关键词：志愿教师配置；最低服务保障；数量机会成本；师资补充；决策支持

目录

1 问题来源与经济问题	4
2 相关研究与研究定位	4
3 模型与比较基准	5
4 补员范围何时不扩大保障差额	6
5 两种补员目标与新增教师人数	8
6 应用案例：最低服务保障与补员方案	11
7 系统应用：输入组织与方案复核	14
8 讨论与结论	16
A 数学证明与补充结构	16
B 系统对象、模型接口与应用范围	22
C 复现材料与方法	27

1 问题来源与经济问题

公益教学机构需要用同一批志愿教师维持各教学点的服务，并尽可能开出更多班级。在本文的六班三点合成情景中，八名教师最多可以开出四班，但这四班都集中在一个教学点。要求三个教学点各开一班后，最多只能开出三班。机构由此面对两个相连的选择：以多少开课数量换取最低服务保障，以及补充哪些教师能够恢复这部分产出。

这一问题来自志愿教师分配系统的建设与需求整理。在 2026 年 7 月 8 日的需求访谈中，公益教学项目负责人提出了便利地点可能吸引更多报名、部分信息需在服务后逐渐了解，以及当期招募应关注师资缺口等问题；访谈要点及其与模型的联系见附录B.1。系统中的教师、班级和教学点记录提供了建模对象：教师是受服务范围约束的投入，完整班级是产出，各教学点的最低班数表示机构预先确定的服务承诺。本文在这些对象上研究确认前的单周期配置，系统结构与模型接口见附录B。

完整开课的师资要求使不同投入之间产生互补。某名教师即使尚有空余容量，也可能无法补足其他班级的缺口；同一名能跨点服务的教师又可能被多个班级共同需要。因此，新增人数相同的方案，可以具有不同的保障产出。本文按完整班数衡量产出，将“效率代价”定义为同一供给下无保障与有保障最大开课数之差，即最低服务承诺的数量机会成本。

1.1 主要结果与研究贡献

本文的理论分析围绕补员范围和补员目标展开。基础模型中，每班需要两名不同教师，每名教师当期最多服务一班，最终确认前允许重新安排配对。

其一，本文证明了两教学点的补员保证：原最低班数可行时，若每名新人的完整服务范围恰为一个整站或全体班级，逐名补员不会扩大保障差额。换言之，新增资源带来的保障产出增量至少等于无保障产出增量。三点和三人班的反例进一步说明教学点数量与完整师资门槛在这一结果中的作用。

其二，本文区分恢复补员前的无保障产出和消除补员后的新差额，给出通用补员下差额清零的可达人数上界。一个构造族在相同的原开课数、保障开课数和差额下，恢复旧产出始终只需一人，消除新差额的人数却随规模增长。这表明机构在制定补员计划前，需要明确采用固定的原产出目标，还是随新增供给重新计算的数量基准。

这些比较使用已有的配额匹配表示、增广路径和横截拟阵工具；受限同类补员的匹配缺口判据用于计算具体方案。第6节将结果用于六班情景，比较最低服务组合与四种补员范围。第7节说明系统如何组织输入、呈现可行配对并支持方案确认，使理论结果对应机构能够核查的配置选择。

2 相关研究与研究定位

公平代价研究比较公平分配与总效用最大化之间的差距。Bertsimas、Farias 和 Trichakis[1]在指定效用可行域上分析比例公平与最大最小公平并给出界。本文以具名教学点下界表示最低服务要求，完整班级的可行开课向量是离散的，因而将公平要求直接写入开课数量约束。

Arulselvan 等 [2] 研究带上下配额的可行项目匹配。将教师作为申请者、班级作为上下配额均为 2 的项目，本文无教学点保障的子问题落入其多项式可解特例；最大匹配人数等于最大开课数的两倍。Chierichetti 等 [3] 研究带颜色的拟阵与匹配，Castera 等 [4] 说明彩色拟阵中的带权 leximin 可以保持最大总数。上述平衡或近似结果为本文的公平比较提供了参照；本文进一步处理固定教学点下界、完整双人班和补员前后数量差额之间的关系。

Jordan 和 Graves[5] 的生产柔性研究说明资源与任务的连接结构会改变柔性的价值；本文在不可分完整班、教学点下界和原产出恢复条件下考察这一连接机制。Cseh、Friedrich 和 Peters[6] 讨论带项目偏好的 Pareto 比较、开闭项目及图转换，本文则比较教学点的完整开课数量，并区分偏好意义上的不可支配性与开课向量的坐标不可支配性；两槽匹配转换沿用已有工具。

从槽集合看，每班是一对槽，选中各对的并集必须独立，因而问题可以嵌入横截拟阵上的匹配框架。Kaparlis、Letchford 和 Mourtos[7] 第 2.3 节讨论这一经典关系。完整班集合在班级层面却不必要仍是拟阵、delta-matroid 或跳跃系统；附录A.11的三班例说明了直接套用这些交换结构的边界，在更大表示上仍可使用已有理论。

资源补充也已有公平分配研究。Akrami 等 [9] 通过复制物品达到基于原资源的最大最小份额 (MMS)，并给出复制数量界。本文的下界表示教学点保障，新增教师是单位容量资源，同时需要重新计算新增后的无保障基准；因此本文把公平基准、资源类型和补员后的数量差额分别处理。

表 1: 相关研究的对象与本文比较的问题

来源	已有模型或结论	本文研究的关系
公平代价 [1]	在指定效用可行域比较比例公平、最大最小公平与总效用	整数整班、具名下界与补员前后的绝对数量差额
下配额匹配 [2]	无教学点分组保障时，项目上配额 2 可多项式求解	固定教学点下界下的最大产出与新增资源比较
彩色拟阵 [4]	拟阵/多态体结构下的 leximin 零数量损失	附录A.11的整数向量非增广反例排除直接应用
项目偏好 [6]	申请者偏好的 Pareto 最优、开闭项目及图转换	教学点开班数不可支配与新增资源后的差额
生产柔性 [5]	连接和替代链影响柔性资源价值	不可分完整班级下，两种补员目标的精确人数差距

Duppala 等 [10] 的公平集合打包可以表示本文的一个可行配置：为班 j 加入私人标记 c_j ，把候选教师对 i, i' 表示为三元集合 $\{c_j, i, i'\}$ ，互不相交同时保证教师容量和班级完整性。该文研究期望比例公平及近似算法；本文在固定整数下界和有限供给下计算精确最大值，并比较资源加入前后的加性差额。

McElfresh 和 Dickerson[11] 研究肾交换中的词典序公平、总效用以及新增无定向捐赠者对公平代价的影响。其新增捐赠者可以启动多次移植链，而本文教师在一个周期只有一个容量；本文据此把比较限定在固定下界、完整双人班和站内完整候选范围的有限图中。

在上述理论基础，本文分析两点模型中整站或全局补员的差额性质，给出三点情景下的失效边界，并区分恢复旧产出与消除新增差额两种预算目标。匹配缺口判据提供受限补员的计算方法，原供给的跨点参数界见附录A.11。这些结果共同回答一个机构问题：在既定服务保障下，何种新增资源能够转化为额外开课。结论适用于所列条件下的有限候选图。

3 模型与比较基准

教学点集合为 V ，班级集合 J 由非空集合 J_s ($s \in V$) 划分。原有教师集合为 I ，固定候选边 $E \subseteq I \times J$ 表示教师满足该班的资格、地点接受范围和服务时段条件。本文研究最终安排确认前的一个周期，原有教师-班级配对允许重新安排。

基础模型中，每班需要两名不同教师，每名教师的周期总容量为 1；即使两个班的时段互不冲突，同一教师也最多承担其中一班。教师的候选范围可以包含同站或跨站的部分班级。后文的

“站内通用”专指新人的完整服务集合恰为该站全部班级；已确认配对锁定时的配置变化在第8节讨论。

令 $x_j \in \{0, 1\}$ 表示班级 j 完整开出, $y_{ij} \in \{0, 1\}$ 表示教师 i 服务班级 j 。可行性要求

$$\sum_{i:(i,j) \in E} y_{ij} = 2x_j \quad (j \in J), \quad (1)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in E} y_{ij} \leq 1 \quad (i \in I). \quad (2)$$

记 $z_s = \sum_{j \in J_s} x_j$ 。不增加保障下界的最大产出为

$$M_0 = \max \left\{ \sum_{j \in J} x_j : \text{式(1)-(2)成立} \right\}.$$

给定整数下界 $0 \leq q_s \leq |J_s|$, 在附加条件 $z_s \geq q_s$ 下的最大产出记为 M_q 。这里 $\mathbf{q} = (q_s)_{s \in V}$ 是机构在求解前给定的外生保障情景, 不由 M_0 或 M_q 反推。目标函数按完整班级计数, 每个班权重相同, 不对学生人数、班级规模或质量加权。下界不可行时 M_q 与 $d = M_0 - M_q$ 不定义。 $M_0 = 0$ 时也不定义相对损失 d/M_0 。基础分析采用绝对班数差额, 以保持与目标函数相同的数量口径。

3.1 最低开课保障与 leximin 的区别

最低开课保障优先维护指定地点的服务数量; leximin 则将比例 $z_s/|J_s|$ 升序排列, 优先最大化最小比例, 再依次比较后续坐标。两者可能选择不同总数的方案。本文以固定下界为主, leximin 作为制度对照; 两者均不能自动代表学生受益人数或服务时长。不同班级若质量与规模不同, 数量目标需要额外扩展。

若不存在另一个可行向量在各点均不小于 z 且至少一点更大, 则称 z 坐标不可支配。下界约束下的最大数量方案必不可支配, 否则支配它的方案仍满足下界且总数更大。固定正分母下的 leximin 方案也不可支配。

3.2 师资结构与补员口径

定义

$$b = |\{i \in I : |\{s : \exists j \in J_s, (i, j) \in E\}| \geq 2\}|.$$

b 计数原有跨教学点候选教师, 包括最终没有使用的教师。附录A.11用它给出原供给下的数量损失界, 第5节则比较具有相同汇总量而补员需求不同的候选图。

新增同类教师的完整可服务班级范围记为 $S \subseteq J$, 每人容量为1, 新增 k 人后仍允许重新安排原有教师。 $S = J$ 时称通用补员。最小恢复人数 k_S^* 表示在原下界下达到补员前的 M_0 所需的最少新增人数; 它衡量追加供给量, 交通、培训和招募成本另行处理。后文同时报告增员后的新无约束最大值, 以区分两个比较目标。

4 补员范围何时不扩大保障差额

固定班级、旧候选图和可行下界。新增前的无保障及保障最大班数分别记为 m 、 f , 新增后分别为 m' 、 f' 。旧方案仍可沿用, 所以两种产出各自均不下降; 两个最优值之差却未必单调。本节考察这一差别及其适用条件。

4.1 两点、任意可行最低班数

命题 4.1 (站内通用补员的两点保证). 设所有班属于两个教学点 A, B , 每班需要两名不同教师, 每名教师容量一。下界 (q_A, q_B) 是任意非负整数且在旧供给下可行。若新增一名教师的完整可服务集合恰为 $S \in \{J_A, J_B, J\}$ 之一, 其中 $J = J_A \cup J_B$, 允许其闲置并允许旧教师重排, 则

$$m' - f' \leq m - f.$$

对任意有限的此类补员序列, 逐名重新求解后的绝对差额均不增加。

记 $\Delta M_0 = m' - m$ 、 $\Delta M_q = f' - f$ 。由

$$(m' - f') - (m - f) = \Delta M_0 - \Delta M_q,$$

可知命题等价于 $\Delta M_q \geq \Delta M_0$ 。在这些条件下, 机构维持原最低服务, 仍能取得新增资源在无保障方案中带来的开课增量。若追加供给未增加无保障产出, 保障方案也可以保持原数量。

证明要点。当无保障产出增加一班时, 从旧保障最优方案与新无保障最优方案的差异中找到一条包含新人的增广路。利用新人能服务某站全部班级的条件截短这条路, 使该站只增零或一班。总数增加一班且仅有两个教学点, 另一站也不减少, 因而保留任意原可行下界。完整构造见附录A.1。

任意可行整数下界之所以能被保留, 在于上述路径调整使两点班数都不下降; 增广路和完整班的匹配表示沿用经典工具。补员后差额是否归零还取决于候选图及所加入的资源, 下面的短例给出两种不同结果。

4.2 两点七班的独立短例

考虑一个两点七班图, 共 11 名旧教师, 每班需求为 2, 每名教师容量为 1。取外生下界 $q = (2, 1)$, 原供给的三元组为 $(m, f, d) = (5, 4, 1)$ 。新增一名范围为整站 A 的教师后为 $(m', f', d') = (5, 5, 0)$; 新增整站 B 教师或全局教师后为 $(6, 5, 1)$ 。全局范围包含整站 A 范围, 但两种范围的保障产出同为 5, 因此需要同时报告两个产出和差额。完整旧候选图及向 A 补员后的配对见附录 A.2; 该例满足命题 4.1 的全部条件。

4.3 三点时的失效与非嵌套补员比较

考虑七名旧教师 $0, \dots, 6$ 和七个班, 需求均为二, 各点下界均为一。A、B 各有两班, C 有三班; 完整候选关系见附录表3。

原候选图连通, 每班均能单独开课。原供给最多开三班, 并可同时满足三点下界。加入服务 B 全部班级的一人后, 无保障可开四班, 但任何四班配置均不能保留 A 点服务; 换成服务 A 全部班级的一人则可同时开四班并保三点。具体教师配对和排除论证见附录A.8。比较结果如下。

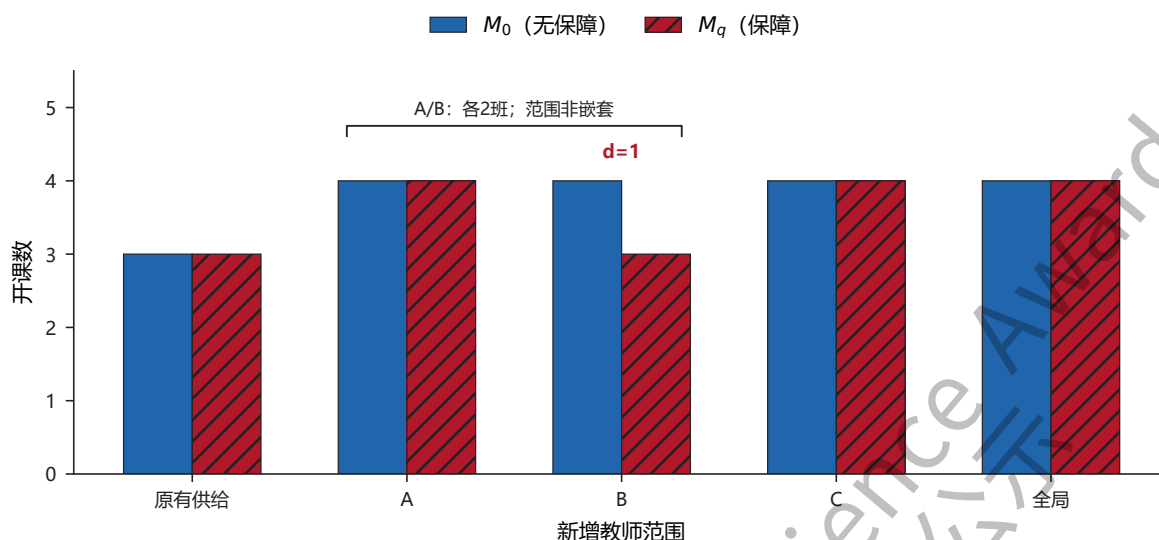


图 1: 同一原图下新增一人的完整范围比较。柱高为精确最优班数; A 、 B 各含两班且范围互不包含, 只有这两项构成同覆盖班数的对照。 C 含三班, 全局范围包含所有班。

A 和 B 各含两班, 新人范围互不包含, 因而保障产出的差别来自连接结构。这个例子说明整站补员的两点保证在三教学点时可以失效; 两点路径证明只能控制目标站和其余站的总增量, 三点时其余站之间可以发生替代。

在经济解释上, 新增 B 教师没有减少原来任何可行服务, M_q 也未下降; 提高的是放松某点保障后可以实现的产出。机构若要求所有点继续得到最低服务, 就需要比较新人范围能否转化为额外保障产出, 而非只看总人数。相同人数与相同覆盖班数对应的招募成本仍取决于实际供给条件。

4.4 师资门槛变化的边界

每班需求一时, 可匹配班集构成横截拟阵, 任何可行保障都能扩展到最大总数, 故原图与补员后的 d 均为零; 证明见附录A.11。双人班的主命题由完整班级要求产生, 并依赖二元内部边的表示。

需求三时, 两点模型也存在反例: 旧供给下无保障和有保障均最多开两班; 增加一名全局通用教师后, 无保障可开三班, 而保障产出仍为两班。这个反例的旧候选图连通, 且每班原来均可单独开课。完整候选关系与逐项排除见附录A.9。它说明班级完整需求本身也决定资源增加能否转化为保障产出。

上述反例使用连通且各班原来单独可开的强化构造, 排除了某班原来缺少候选这一因素。若统一需求 $r > 3$, 为每班添加 $r - 3$ 名只接受该班的私人旧教师, 原反例可按同样开闭班集合提升; 这一构造说明高需求情形的差额性质仍需结合候选关系判断。

5 两种补员目标与新增教师人数

机构可以把补员前的最大开课数作为固定目标, 也可以要求保障方案达到新增供给下重新计算的最大开课数。前一个目标衡量恢复原数量基准所需的资源; 后一个目标随供给变化, 要求消除当时全部资源下的保障差额。本节分别求这两种人数需求。

5.1 通用新增教师的基准

命题 5.1. 在统一需求 2 的模型中, 若原教学点下界可行、允许重新安排原教师, 恢复原始 M_0 所需的最少通用新增人数满足 $k_j^* \leq d$ 。该界可以达到。

证明要点。保留旧保障班集合, 逐次加入能够增加原教师槽匹配秩的班。每加入一班至少多匹配一名旧教师, 至多再补一名通用新增教师, 即可累计恢复原产出。界的证明与达到界的构造见附录A.3。

该人数界来自经典秩增广在本模型中的应用。增广始终保留原保障班集合 Y , 并通过调整教师配对增加可开班级。

同样的原开课数、保障开课数和跨点教师数, 可以对应不同的最少新增教师人数。附录A.10构造了两族具有相同 (M_0, M_q, b, d) 的实例, 其恢复人数分别为 1 和 d ; 补员需求取决于具体候选关系, 而非这些汇总量本身。

5.2 服务范围受限时的精确判据

本小节允许各班有正整数的班级教师需求 r_j , 其余容量与候选关系约束不变。固定目标班集合 K , 记 $D(K) = \sum_{j \in K} r_j$, $\nu(K)$ 为原教师对这些班全部槽的最大匹配数。每名新增教师只能服务班集合 S 。

命题 5.2 (受限同类补员). 如果 $K \setminus S$ 的全部槽无法由原教师同时覆盖, 则任何人数的这种新增教师都无法完整开出 K 。否则, 完整开出 K 所需最少新增人数为

$$k_S(K) = D(K) - \nu(K).$$

证明要点。先由原教师覆盖新增范围之外的所有目标槽, 再通过增广将原教师匹配扩展到最大。未匹配槽全部落在新人范围内, 每个缺槽对应一名新增教师。完整证明见附录A.4。

该证明使用匹配增广和拟阵延拓; 异质班级教师需求不破坏判据, 但新人具有不同候选范围时需要按类型分别建模, 不能用一个公共集合 S 替代全部类型。

对本节的异质需求向量 $\mathbf{r}$, 将式(1)右侧改为 $r_j x_j$, 在这一相同需求下重新定义补员前的 $M_0(\mathbf{r})$ 与 $M_q(\mathbf{r})$ 。以下简记为 M_0, M_q , 不沿用需求 2 的数值。记 $\mathcal{K}_q$ 为满足各点下界且恰含这一原始 M_0 班的所有集合。若原下界可行, 则

$$k_S^* = \min_{K \in \mathcal{K}_q, \nu(K \setminus S) = D(K \setminus S)} \{D(K) - \nu(K)\}.$$

没有符合条件的 K 时值为不可达。目标集合的枚举需包括原供给下本来不可开的集合, 因为补员可以使这些集合变为可行。该表达式精确刻画所需人数, 不涉及整体优化的计算复杂性。

在原下界不可行时, “在保障下恢复原无保障产出” 的问题不定义, 应报告该输入状态。通过补员首次使下界可行是另一问题, 不能用原来的 d 描述。空目标 $K = \emptyset$ 时, $D(K) = \nu(K) = 0$, 所需补员为 0。

5.3 经济解释

判据将机构的补员判断分成范围和人数两步。若新增范围之外的目标班级无法由旧教师同时完成, 继续增加同类教师不能实现目标, 需要改变服务范围或目标班集合; 范围外覆盖可行后, 匹配缺口给出所需人数。新增人数相同时, 较大候选范围保留较小范围的全部可行方案; 对于互不包含的范围, 则需要依据实际连接关系比较, 六班案例给出具体结果。

5.4 通用补员的单调性

前文恢复目标固定在补员前的 M_0 。机构也可能关心使用增加后的全部供给重新计算无约束产出时，保障方案与它还相差多少。为区分两个目标，本节固定班级、原候选图与可行下界 q ，令 $M_0(k)$ 、 $M_q(k)$ 分别表示增加 k 名通用教师后的两个最优值，定义

$$d(k) = M_0(k) - M_q(k).$$

每名新增教师容量为 1，可服务任意班的任一槽，原教师配对允许重新安排。本节余下结果均要求每班教师需求恰为 2。

命题 5.3 (通用补员下的绝对差额). 设 $\delta_k = M_0(k+1) - M_0(k)$ ，则 $\delta_k \in \{0, 1\}$ ，且

$$d(k+1) \leq \max\{0, d(k) + \delta_k - 1\} \leq d(k).$$

若当前差额为正且下一名新人不提高无约束产出，差额至少减少一班；差额一旦为零，继续增加通用教师仍为零。

证明要点。只要新无保障产出超过当前保障产出，当前教师的全槽匹配秩就足以在保障班之外再覆盖一个槽；一名通用新人补足同班另一槽，使保障产出也增加。完整证明见附录A.5。

通用服务范围使新人能够补足增广时留下的另一槽。当前差额为正时，每增加一名这样的教师，保障产出至少增加一班；这一性质是下文估计差额清零人数的依据。

5.5 消除新差额的补员人数上界

令 $n = |J|$ 为总班数， $f = M_q(0)$ ， R 为原教师在全体 $2n$ 个槽上的最大匹配数。 R 允许某班只有一个槽被匹配，因而一般不能把 $R/2$ 当作完整开课数。记

$$k_{\text{gap}} = \min\{k \geq 0 : M_0(k) = M_q(k)\}, \quad k_{\text{restore}} = \min\{k \geq 0 : M_q(k) \geq M_0(0)\}.$$

前者消除当前全部资源下的数量差额，后者恢复补员前模型可达到的无保障产出；原 $M_0(0)$ 是补员比较的模型基准。

命题 5.4 (新差额清零的秩上界). 在本节需求 2、单位容量、通用新增与允许重排的条件下，若原下界可行且 $d(0) > 0$ ，则

$$1 \leq k_{\text{gap}} \leq \min\{R - 2f - 1, 2n - R - 1\} \leq n - f - 1.$$

若 $d(0) = 0$ ，则 $k_{\text{gap}} = 0$ ，不使用上式的正差额分支。

证明要点。正差额持续时，每名通用新人至少增加一班保障产出；同时全槽匹配秩每次至多增加一。另一方面，全槽秩达到 $2n - 1$ 时，任一保障班集合都可扩展到最大开课数。这两条计数分别给出两个上界，见附录A.6。

$R - 2f$ 表示旧供给在保障完整班槽之外尚可匹配的槽数， $2n - R$ 表示填齐全部班槽所缺的通用容量。上界同时使用两类信息，给出通用补员条件下的充分新增人数；只能服务部分班级的新人需要使用受限范围判据。

5.6 每班原本单独可开时的紧性

命题 5.5 (上界可达与两种补员目标的差距). 任给整数 $h \geq 1$, 存在每班需求 2、教师容量 1、两点下界 $q = (1, 1)$ 的实例, 其中每个班原来都能单独开课, 且

$$(M_0(0), M_q(0), b_{\text{orig}}, d(0)) = (4, 3, 2, 1).$$

该实例满足 $k_{\text{restore}} = 1$ 、 $k_{\text{gap}} = h$, 并达到命题 5.4 的两个上界。

证明要点。在两点的共享教师冲突之外加入一组竞争同一旧教师的班, 使新增供给不断提高新的无保障基准。一名新增教师已能恢复原四班, 但要消除持续移动的差额需 h 名新人。候选关系、可达方案与上界计数见附录 A.7。

这一结果表明, 即使各班分别具备师资, 班与班共享同一名教师也会形成预算竞争; 固定原 b 与 d 仍不足以控制新差额的消除人数。人数比 $k_{\text{gap}}/k_{\text{restore}}$ 随 h 、班数和原教师数增长, 而固定有限实例仍由命题 5.4 给出有限上界。秩计算与延拓用于推导这些界。

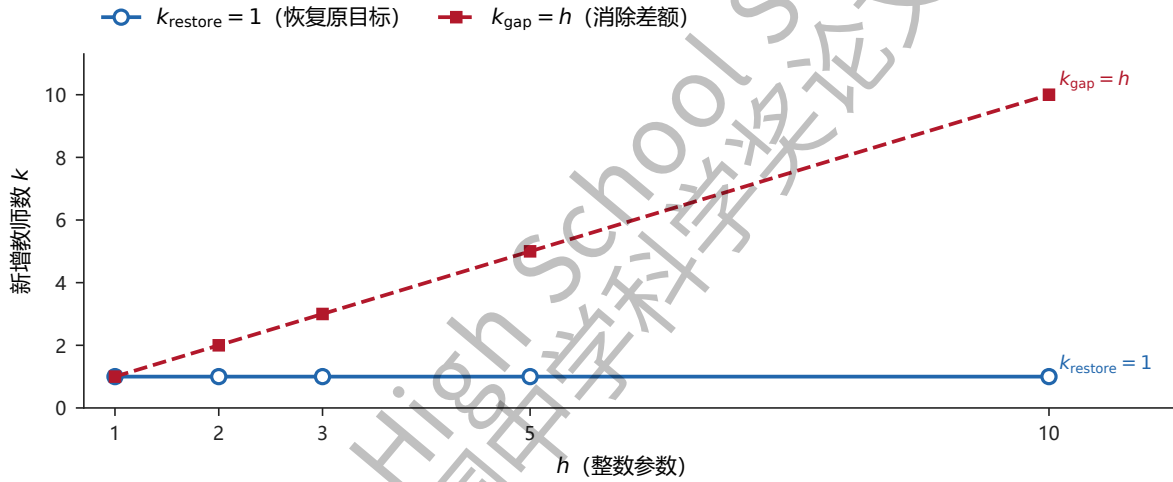


图 2: 两种通用补员预算的区别。所示 $h = 1, 2, 3, 5, 10$ 对应各构造的精确结果, 各实例原 $(M_0, M_q, b, d) = (4, 3, 2, 1)$ 。标记之间的连线用于识别整数参数的变化; 任意 $h \geq 1$ 的结论由命题 5.5 证明。

6 应用案例：最低服务保障与补员方案

6.1 机构目标

机构在同一周期内需要保障三个教学点均能开课, 并比较不同补充师资范围对开课目标的影响。它先给定外生最低服务情景, 再判断新增教师能否恢复原有开课目标并消除新差额。

6.2 合成输入

本文使用八名原教师、六个班和三个教学点的合成输入: 教学点 A_1 只有 Y_1 班, 教学点 A_2 只有 Y_2 班, 教学点 B 有 X_1, X_2, X_3, C 四班。所有教师容量为 1, 每班需求为 2; 所列候选边均

假定满足资格、可接受范围和时间条件。机构给定外生下界 $q = (1, 1, 1)$ ，比较四种同类新增教师范围。

完整候选关系为

$$Y_1 : \{a, b\}, \quad Y_2 : \{c, d\}, \quad X_1 : \{u, a\}, \quad X_2 : \{b, c\}, \quad X_3 : \{d, v\}, \quad C : \{w, x\}.$$

图3在同一关系图上标出原供给和一项补员配置。图中的配置均为最终确认前的模型方案，用于比较可行产出。

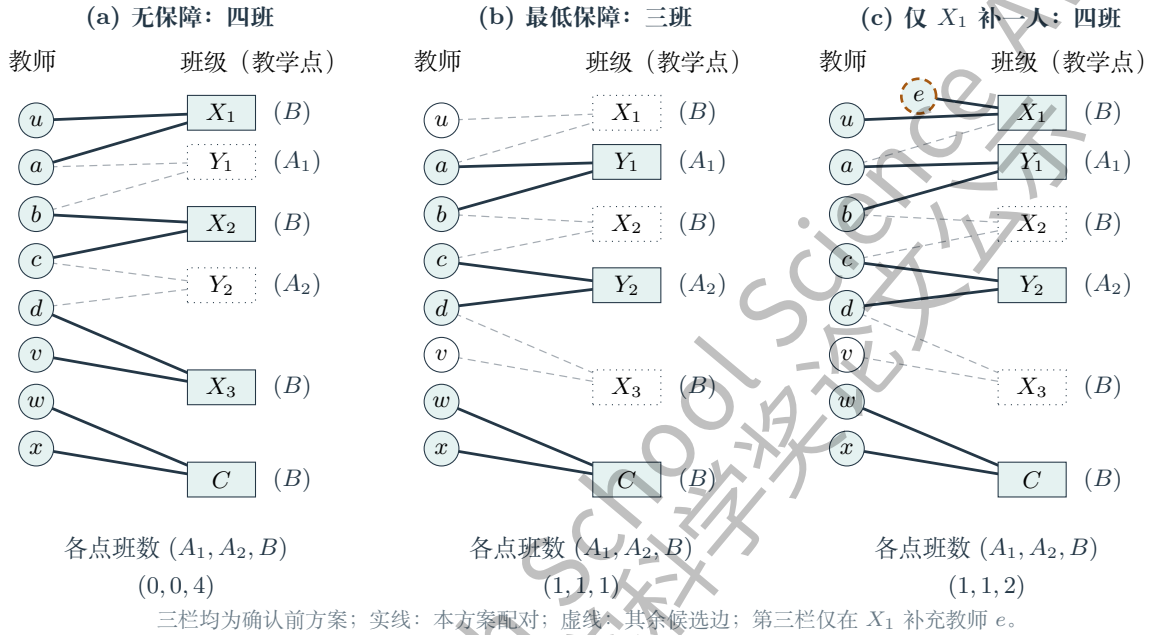


图 3: 六班合成情景的完整候选关系与三种确认前方案。圆为教师，矩形为班级，右侧括注为教学点；浅色虚线为候选边，深色实线为方案中的配对，填充矩形为开课班。第三幅增加仅可服务 X_1 的教师 e ，原教师 v 闲置。锁定原配对对方案的影响见第 8 节。

6.3 原冲突

无保障时， $X_1 : (u, a)$ 、 $X_2 : (b, c)$ 、 $X_3 : (d, v)$ 、 $C : (w, x)$ 使用全部八名教师，开出四班，各点开课数为 $(0, 0, 4)$ ，即 $M_0 = 4$ 。要求 A_1, A_2, B 各至少一班时， $Y_1 : (a, b)$ 与 $Y_2 : (c, d)$ 必须开出；此时 X_1 缺 a ， X_2 缺 b, c ， X_3 缺 d ，只有 $C : (w, x)$ 仍能完整开课。保障最优配置的各点开课数为 $(1, 1, 1)$ ，所以 $M_q = 3$ 、 $d = 1$ 。冲突来自 a, b, c, d 被不同教学点的班级共同需要。

6.4 最低服务保障

同一原供给下，表 2 比较机构可考虑的最低服务组合。仅要求 B 开课时可以达到四班；单独加入 A_1 或 A_2 的保障后，最大开课数均为三班。

表 2: 同一原供给下的保障情景

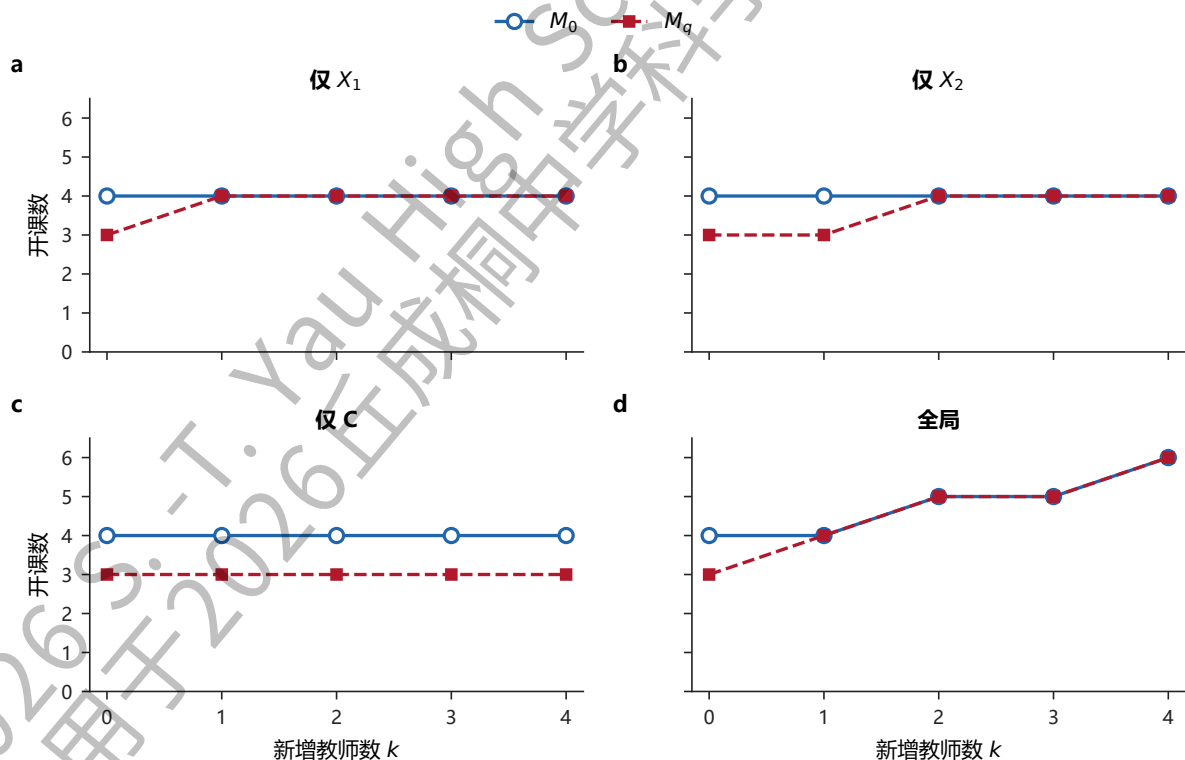
下界 (q_{A_1}, q_{A_2}, q_B)	M_0	M_q	d
(0, 0, 1)	4	4	0
(1, 0, 1)	4	3	1
(0, 1, 1)	4	3	1
(1, 1, 1)	4	3	1
(1, 1, 2)	4	不可行	未定义

同时保障 A_1 与 A_2 时，最大开课数仍是三班。若机构已经决定保障其中一点，再加入另一点的保障，在这个候选图中无需进一步减少总班数。因此，两项保障分别带来的一班差额不能相加；机构需要比较整组服务承诺。将 B 的下界再提高到两班，则原供给不可行，差额不定义，需要增加师资后重新判断可行性。

以下三点情景使用命题 5.2 的受限范围判据计算目标班集合及所需人数。

6.5 四种补员范围与方案比较

固定下界 $(1, 1, 1)$ ，比较只可服务 X_1 、只可服务 X_2 、只可服务 C 和全局四种新增类型。将增加 k 名相同范围 S 的教师后的两个最大值记为 $M_0(k, S)$ 与 $M_q(k, S)$ ，图 4 显示 $k = 0, \dots, 4$ 的精确结果；恢复目标始终是补员前的四班。



仅C供给不能恢复原四班目标（见正文判据）

图 4: 四种补员范围下的精确最大开课数。各面板使用相同坐标和保障下界 $(1, 1, 1)$ ，同时显示无保障与保障产出；标记对应整数人数，连线仅辅助阅读。仅服务 C 时，任意人数均不能恢复四班，由命题 5.2 的范围外覆盖判据推出。四个面板给出确认前的备选方案比较。

四种范围的基准均为 $(M_0, M_q) = (4, 3)$ ；范围为 $\{X_1\}$ 时在 $k = 1$ 达到 $(4, 4)$ ，范围为 $\{X_2\}$ 时在 $k = 2$ 达到 $(4, 4)$ ，仅 C 的四班目标对任意 k 均不可达，全局范围在 $k = 2$ 达到 $(5, 5)$ 、在 $k = 4$ 达到 $(6, 6)$ 。因此范围的作用由可服务集合决定，新增人数相同时也需要比较服务范围。

在仅服务 X_1 的方案中，一名新人 e 与 u 配对，形成图 3 第三幅的 $Y_1 : (a, b)$ 、 $Y_2 : (c, d)$ 、 $X_1 : (u, e)$ 、 $C : (w, x)$ ；这组配对给出各点开课数 $(1, 1, 2)$ 。新增后共有九名教师，最多开出四个双人班，因此上述配对同时达到无保障与保障最优值。仅服务 X_2 时， b, c 均用于保障班，需要两名新人完整承担 X_2 ；仅服务 C 时，任何满足下界且含四班的目标都包含 Y_1, Y_2 及某个 X_i ，这些范围外班无法同时由原教师覆盖，因而四班目标不可达。全局范围达到相应人数后，两个目标同步增加。

6.6 机构决策与方案复核

若机构的目标是以最少新增人数恢复四班并维持三点服务，向 X_1 补一人和增加一名全局通用教师均可实现。若只能取得服务 X_2 的教师，则需要两人；向 C 继续补员无法解除三个 X_i 与保障班之间的师资冲突。这个比较将招募对象具体到能够补足目标班级的服务范围。

在本例的四种范围下，恢复四班与消除新差额具有相同的可达性和人数门槛；命题 5.5 则给出了两种门槛分离的构造。

目标提高时，范围之间的区别更明显。增加两名全局通用教师可以在保障下开出五班，而向 X_1 或 X_2 补两人时仍为四班。机构可先明确开课目标与可接受的新增人数，再核实相应类型的教师能否取得。上述人数是模型中的供给需求，实际选择还需要结合招募费用、教师响应和课程资格；配对与求解状态由第 7 节的方案摘要提供。

6.7 计算方法与适用范围

计算采用完整班集合枚举、槽匹配与独立二元优化。前两种方法确定可行班集合和匹配缺口，二元模型分别求无保障与保障最优值；每个方案均核对候选边、教师容量、完整开班和教学点下界。各保障组合与四类补员输入使用相同的原候选图。

其他验证覆盖两点补员、三点与需求变化反例及两种人数目标的构造族。各组计算的规模、生成条件和结果对应关系列于附录 C。这些合成计算展示具体配置，正文命题及其证明给出一般结论。

7 系统应用：输入组织与方案复核

志愿教师分配系统已经形成教师、教学点、班级及确认记录等业务对象。本文将这些对象映射为候选关系，在最终安排确认前的同一输入快照上完成合成情景的离线配置比较。图 5 展示业务对象、离线比较和在线衔接三层关系，其中离线比较包括目标计算与方案复核；离线结果向在线分配批次的接入属于接口设计。

7.1 从业务记录形成冻结输入

教师条件包括资格、可服务时段、服务范围与当期意愿，教学点记录班级归属与需求，机构据此形成教师集合 I 、教学点集合 V 、班集合 J 、各点班集合 J_s 及候选关系 $E \subseteq I \times J$ 。机构同时给定外生最低班数 q_s 和待比较的新人完整范围 S 与人数 k 。输入需检查重复记录、缺失需求、空教学点、时间冲突和容量口径，以保证不同情景使用同一比较口径。

第 6 节的六班情景包含八名原教师、十二条候选边、六个双人班及下界 $(1, 1, 1)$ 。新增 e 时另加入候选边 (e, X_1) ，范围为 $S = \{X_1\}$ 、人数为 1；完整配对名单和三点冲突见第 6 节。保障下界是机构给定的情景参数。

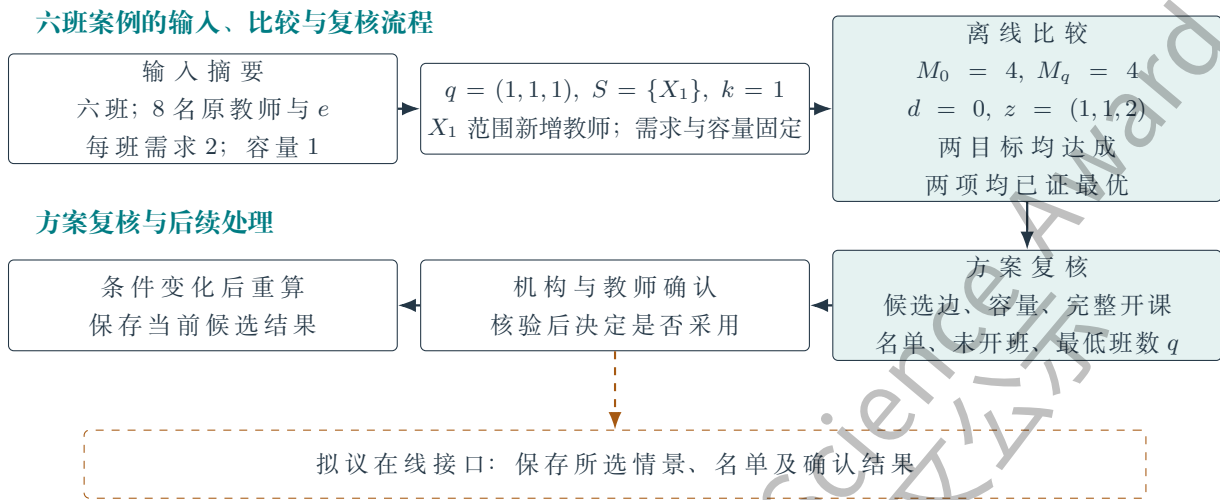


图 5: 六班案例的输入、比较与复核流程。实线表示输入和方案的传递，虚线框及虚线箭头表示离线结果拟承接到在线分配批次的接口位置。业务登记与确认属于系统对象，计算结果来自六班合成情景的离线分析。

7.2 离线方案摘要与结果状态

在保障下界为 $(1, 1, 1)$ 的六班情景中，增加一名仅能服务 X_1 的教师后，无保障与保障条件下的最大开课数均为 4，各教学点分别开出 1、1、2 班，差额为 0。该方案既恢复补员前的无保障产出，又消除了补员后的保障差额。离线方案摘要同时列出教师配对及两个目标的最优求解状态，供机构逐班核对候选关系、教师容量和下界满足情况。

对每个 (S, k) ，离线程序分别计算 $M_0(k, S)$ 和 $M_q(k, S)$ ，记录两个目标各自的求解状态、开课班级 x_j 、分配 y_{ij} 和各点开课数 $z_s = \sum_{j \in J_s} x_j$ 。两者均取得可比较的最优结果且保障可行时，报告 $d(k, S) = M_0(k, S) - M_q(k, S)$ ，并判断是否达到补员前的 $M_0(0, \emptyset)$ 及新的差额是否为零。保障不可行、超时、未运行和错误分别保留对应状态。

7.3 方案复核与输入变更

复核依次检查每条分配属于候选关系、每名教师最多服务一班、每个开课班具有两名不同教师，以及各点数量满足外生下界。机构比较情景并选择方案后，由相关人员完成确认并保存记录；确认前的模型名单表示备选配置。发生资格、时段、意愿、需求、下界或新增范围变化时，应在更新后的输入上重新计算。

历史教学点页和分配批次页对应数据登记与结果留痕的系统对象；两幅脱敏界面、重要字段和状态语义见系统附录 B。模型方案进入确认环节后，新增或锁定安排会形成新的约束，第 8 节讨论这种变化。

8 讨论与结论

8.1 最低服务保障与机构责任

最低班数把机构对各教学点的当期服务承诺写入配置约束。给定这一承诺，机构可同时考察能够完成的班数和相对于无保障基准的数量机会成本。六班案例表明，各点保障应联合比较：在已经保障一个小教学点后，再保障另一个小教学点可以不增加班数损失。保障标准的选择仍由教学点需求与机构职责决定。

补员规划还取决于评价目标。恢复旧产出为机构提供一个固定的数量目标；消除新差额则要求保障产出追上新增资源带来的全部可行产出。第 5 节的构造说明，前者完成以后，后者仍可能需要更多教师。因此，比较方案时应同时给出保障产出、无保障产出和新增人数。两点七班例中，整站 A 补员与全局补员的保障产出同为五班，差额分别为零与一；这一差别来自新的无保障基准，单看差额不足以比较两个方案的服务数量。

8.2 确认顺序与应用扩展

配对调整决定了一项补员方案能否实施。在六班例中，若原配对 $X_1: (u, a)$ 已经确认并锁定，新增一名只能服务 X_1 的教师也无法让 a 转去完成 $Y_1: (a, b)$ 。因此，本文将配置比较放在最终确认之前；对已经锁定的安排，需要在模型中固定相应的分配变量。系统保存输入与确认记录，便于区分这两类决策时点。

当前分析采用双人班和单位教师容量，数值来自合成情景。异质需求可以使用固定目标的受限补员判据；多班容量、多类型新人和多周期退出则需要相应的配置约束。面向实际业务的后续检验，可从历史批次回放开始，记录候选条件、人员确认、人工调整与最终开课，并进一步比较班级规模、服务时长、教学质量及招募费用。历史界面和离线方案摘要提供了这一应用的数据对象与输出形式。

8.3 结论

本文研究公益教学机构在最低服务承诺下的师资配置。两教学点的双人班模型表明，整站或全局补员在所列条件下不会扩大保障差额；三点和需求三的反例确定了这一保证的边界。通用补员的人数界与紧性构造进一步揭示，恢复原产出和消除新增供给下差额可能对应差距很大的人数需求。

这些结果落实为两个规划步骤：在同一候选图上比较服务承诺的可行产出，再按明确的开课目标选择补员范围与人数。六班案例展示了这些比较如何得到具体教师配对。离线分析将配对和产出一并呈现，供机构在确认前复核，为履行最低教学服务承诺提供具体的配置方案。

A 数学证明与补充结构

A.1 两点整站补员保证

命题 4.1 的证明。完整班的匹配表示。每班 j 建立两个槽 j_1, j_2 ，加入内部闭班边 $j_1 j_2$ ；每位候选教师连接该班两个槽。所有槽被饱和的匹配与完整班分配可以相互转换：使用内部边的班关闭，其余班的两个槽由不同教师覆盖。槽内的教师次序不影响分配。若共有 n 班、开 L 班，匹配边数为 $n + L$ 。这是已有配额匹配的标准图转换 [6, 2]。

新教师记为 u 。删去新方案中 u 服务的整个班，至多损失一班，其余班由旧教师完成，故 $m \leq m' \leq m + 1$ ；又 $f' \geq f$ 。只需证明 $m' = m + 1$ 时 $f' \geq f + 1$ 。

包含新人的正路。取旧保障最优匹配 Y 和新无保障最优匹配 X 。在 Y 中 u 未匹配。二者的对称差分解为交替路和圈，路端点只能是教师，因为每个槽在两个匹配中都已饱和。任意完整分量翻转后仍饱和全部槽。称 X 边比 Y 边多一的路为正路，反之为负路。令它们的数量为 p_+, p_- ，则

$$p_+ - p_- = |X| - |Y| = m + 1 - f = d + 1, \quad d = m - f.$$

不包含 u 的正路至多 d 条：若更多，可在旧图中同时翻转这些顶点不交的分量，开出超过 m 班。若 u 的分量不是正路，则所有正路均不含 u ，而 $p_+ \geq d + 1$ ，矛盾。因此存在以 u 为一端、另一名在 Y 中未匹配的旧教师为另一端的正增广路 P 。论证不要求 Y 是无保障最优，也不要求 X 只在一个教学点开班。

最后奇数槽的截短。先设 u 可服务 B 全部班。从 u 开始，把 P 的顶点编号为 $0, 1, \dots, 2t+1$ ；第 k 条边连接编号 $k-1, k$ ，奇数边属于 X ，偶数边属于 Y 。编号 1 的第一个槽属于 B 。选择所有奇数位置中实际为 B 槽的顶点里位置最大的一个 v_i 。用边 uv_i 接上原路径从 v_i 到末端的后缀，得到 P^* 。

边 uv_i 存在且不在 Y 中；它的下一条边编号 $i+1$ 为偶数，属于 Y 。后缀无重复顶点且不含 u ，末端仍在 Y 中未匹配，因此 P^* 是合法增广路。翻转它后所有槽继续被饱和，匹配边数增加一，完整班数也增加一。

一个 B 班从开变闭，必须新增其不在 Y 中的内部边。该边是奇数边，其第二个槽为奇数位置的 B 槽；若它在后缀中，该槽必严格位于 v_i 之后，违反最后性。新首边 uv_i 也不是内部边，故没有 B 班关闭。一个 B 班从闭变开，必须删除属于 Y 的偶数内部边；其第一个槽是奇数位置的 B 槽，所以它只能从 v_i 开始，至多出现一次。因此 $\Delta_B \in \{0, 1\}$ 。

总开班增量为 1 ，且只有两个教学点，所以 $\Delta_A = 1 - \Delta_B \in \{0, 1\}$ 。两点数量均不下降，任意原可行下界都得到保留，且 $f' \geq f + 1$ 。这里内部边的出现或消失才改变开闭状态，不要求一个班的两个槽在原路径上总是相邻。

A 站内通用情形对称。全局通用新人连接两站全部槽，可按 P 第一槽所在的站作同样截短。逐名加入时把已加入者并入旧教师集合；每一步保障仍可行，因此可以归纳。□

A.2 两点七班短例的旧图与一人配对

短例的完整旧候选图按教学点写为

$$\begin{aligned} A: \quad D &= \{p, q\}, \quad A_0 = \{a_0, a_1\}, \\ B: \quad P &= \{p, u_0\}, \quad Q = \{q, v\}, \quad C = \{w, x\}, \quad H_1 = \{z, t_1\}, \quad H_2 = \{z, t_2\}. \end{aligned}$$

大括号列出每班的旧候选教师；旧教师集合为

$$\{p, q, a_0, a_1, u_0, v, w, x, z, t_1, t_2\},$$

共 11 人。每班需求为 2、每名教师容量为 1，外生下界为 $q = (2, 1)$ 。原无保障方案可开 A_0, C, H_1, P, Q 五班；保障方案可开 A_0, C, D, H_1 四班，所以 $(m, f, d) = (5, 4, 1)$ 。

新增教师 u 的范围为整站 A ，即 $J_A = \{D, A_0\}$ 。一项达到保障并恢复五班的完整配对为

$$A_0 : (a_0, a_1), \quad D : (q, u), \quad P : (p, u_0), \quad C : (w, x), \quad H_1 : (t_1, z).$$

它使 A 开两班、 B 开三班， Q, H_2 未开。新增教师只能服务 A ，所以 H_1, H_2 仍不能同时开课， B 至多开四班。若总数达到六班，则必须同时开 D, A_0, P, Q, C 和一个 H_i ；但 D 至少需要一名旧教师 p 或 q ，与 P, Q 同时开课冲突。因此两种最优值均为五， $m' = f' = 5$ 且 $d' = 0$ 。

若新人 u 的完整范围改为整站 B 或全体班级, 一项六班无保障配对为

$$A_0 : (a_0, a_1), \quad P : (p, u_0), \quad Q : (q, v), \quad C : (w, x), \quad H_1 : (z, t_1), \quad H_2 : (u, t_2).$$

十二名教师的容量上界也是六班, 故 $m' = 6$. 保障条件下可开五班:

$$A_0 : (a_0, a_1), \quad D : (p, q), \quad C : (w, x), \quad H_1 : (z, t_1), \quad H_2 : (u, t_2).$$

任何保障方案都必须保留 D, A_0 . 若新人用于 D, P, Q 至多开一个, H_1, H_2 也至多开一个; 若新人用于 B , 开启任一 P 或 Q 与同时开启两个 H_i 都需要使用该新人, 因而不能兼得. 若新人用于 A_0, D 仍占用 p, q . 加上 C , 这些情形中 B 均至多开三班; 若新人闲置, 仍受旧保障最优值四班的限制. 因此 $f' = 5, d' = 1$.

A.3 恢复旧产出的通用补员界

命题 5.1 的证明. 把每个班拆成两个槽. 记原教师对某槽集可实现的最大匹配数为该集合的秩; 可匹配槽集构成横截拟阵. 取满足下界、含 M_q 班的方案 Y , 其槽集秩为 $2M_q$. 由于存在 M_0 班可行方案, 全部槽的秩至少为 $2M_0$.

若已经在 Y 上加入 $t < d$ 个班, 当前槽数为 $2(M_q + t) < 2M_0$, 其秩小于全体槽的秩. 增广性质保证有一个未选槽能提高秩, 加入该槽所属的整个班至少提高一单位秩. 如此加入 d 班后, 所得 M_0 班集合包含 Y , 仍满足所有下界, 其原教师覆盖数至少为 $2M_q + d = 2M_0 - d$. 至多 d 名通用教师即可覆盖未匹配槽.

附录A.11的紧性族中, 任何满足保障且含 $2g + 1$ 班的目标集合, 都必须含各点 A_i 的全部 g 个班 D_i 及 $g + 1$ 个 B 班. 原共享教师至多 $2g$ 名, 所选 B 班的私有教师至多 $g + 2$ 名, 所以原教师可覆盖槽数至多 $3g + 2$. 目标需求为 $4g + 2$, 至少需 g 名新增. 结合上界即有 $k_J^* = g = d$. 该计数允许重新安排所有原有配对. $\square$

A.4 同类受限补员判据

命题 5.2 的证明. 新增教师无法覆盖 $K \setminus S$, 所以原教师必须同时饱和该部分; 这证明必要性. 若这一部分可匹配, 从一个饱和它的原教师匹配出发, 在 K 的槽图中反复使用增广路径达到最大匹配. 增广路径的内部槽只更换所配教师, 两个端点此前未匹配, 因此每次增广都保持原来已匹配的槽仍被匹配, 达到 $\nu(K)$ 时仍饱和 $K \setminus S$. 等价地, 横截拟阵中一个指定的独立槽集可以扩展到包含它的最大秩独立集.

此时未匹配的 $D(K) - \nu(K)$ 个槽全部属于 S , 由同样数量的新增教师分别覆盖即可. 另一方面, 任何分配中原教师至多覆盖 $\nu(K)$ 槽, 每名新人只能补一槽, 因此不可能使用更少新人. $\square$

A.5 通用补员的差额单调性

命题 5.3 的证明. 固定 k , 把当前全部教师视为旧教师, 记 $m = M_0(k), f = M_q(k), m' = M_0(k + 1)$. 删除新教师服务的班至多损失一班, 剩下的班在原图可行; 故 $m \leq m' \leq m + 1$.

令 R 为当前教师对全体班槽的最大匹配数. 取一个达到 f 的保障班集合 Y , 其 $2f$ 个槽构成横截拟阵的独立集. 若 $R > 2f$, 增广性质保证有一个未选槽可以与这些槽同时被当前教师匹配. 该槽所属班不在 Y 中, 由一名通用新人服务该班另一槽, 即可保留全部 Y 并增加一班. 两槽具有相同候选关系, 当前教师可重排, 所以这一步不要求保持原配对.

若 $m' > f$ 且 $m > f$, 有 $R \geq 2m > 2f$. 若 $m = f$ 而 $m' = f + 1$, 新增后的无约束方案至多使用新教师一个槽, 其余至少 $2m' - 1 = 2f + 1$ 槽由当前教师覆盖, 仍有 $R > 2f$. 两种情形

均得到 $M_q(k+1) \geq f+1$ 。剩余 $m' = f$ 只可能 $m = f = m'$ ，差额仍为零。结合 $\delta_k \leq 1$ 即得结论。 $\square$

A.6 新差额清零的秩上界

命题 5.4 的证明. 增加 k 名通用教师后的全槽秩恰为 $\min\{2n, R+k\}$: 删除新人给出上界; 保留原最大匹配, 再用新人填不同的未匹配槽, 达到该上界。

若 $d(k) > 0$, 由命题 5.3, 此前差额均为正, 每一步保障最优值至少增加一班, 故 $M_q(k) \geq f+k$ 。无保障方案至少再多开一班, 必须满足

$$2(f+k+1) \leq R+k,$$

从而 $k \leq R-2f-2$ 。这证明 $k_{\text{gap}} \leq R-2f-1$, 且 $d(0) > 0$ 蕴含 $R \geq 2f+2$ 。

再看全槽秩至少为 $2n-1$ 的情形。取任一满足下界的可行班集合 Y , 将它的全部槽作为横截拟阵独立集延拓到基。秩为 $2n$ 时全部班可开; 秩为 $2n-1$ 时只缺一个槽, 缺槽所在班必不属于 Y , 所以其余 $n-1$ 个完整班仍保留 Y 并满足下界。无保障最优也不超过 $n-1$, 故差额为零。因此 $d(0) > 0$ 要求 $R \leq 2n-2$ 。加入 $2n-R-1$ 名通用教师后, 秩达到 $2n-1$, 用同一论证得到差额为零。

两个上界均至少为 1, 取其最小值即可。其平均值为 $n-f-1$, 得到最后一项不等式。 $\square$

A.7 两种预算差距及上界紧性

命题 5.5 的证明. 点 A 只有 $D = \{p, q\}$; 点 B 有 $P = \{p, u\}$ 、 $Q = \{q, v\}$ 、 $C = \{w, x\}$ 及 h 个 $H_i = \{z, t_i\}$ 。括号列原候选教师, 所有未明确复用的教师均不同。所有 H_i 共享原教师 z , 各有私有教师 t_i 。故每班单独均可开, 只有 p, q 跨教学点。班数 $n = h+4$, 原教师数 $h+7$ 。

不开 D 时可以开 P, Q, C 及一个 H_i ; 开 D 时可以开 D, C 及一个 H_i 。原供给下 D 与 P, Q 的冲突及所有 H_i 共享 z 给出相应上界, 因此 $M_0(0) = 4$ 、 $f = 3$ 。在全槽图中可将 p, q 给 D , u 给 P , v 给 Q , w, x 给 C , z, t_1 给 H_1 , 其余 t_i 给各 H_i 的一槽, 所以 $R = h+7$ 。这里允许半班的安排只用于证明槽秩。

增加 k 名通用教师后, 精确最优值为

$$M_q(k) = \min\{h+4, 3+k\}, \quad (3)$$

$$M_0(k) = \min\{h+4, 4+k, \lfloor (h+7+k)/2 \rfloor\}. \quad (4)$$

任何保障方案都必须开 D 。令 u_D 为 D 使用的新人数量, s_{PQ} 为 P, Q 中开出的班数, s_H 为开出的 H_i 班数。 D 至多释放 u_D 名共享旧教师, 所以 P, Q 中至少 $\max(0, s_{PQ} - u_D)$ 班需用新人。所有 H_i 中至多一个能同时用两名旧教师, 所以它们至少需 $\max(0, s_H - 1)$ 名新人。总共至少用

$$u_D + \max(0, s_{PQ} - u_D) + \max(0, s_H - 1) \geq s_{PQ} + s_H - 1$$

名新人。加上 D 与可能的 C , 得到总班数至多 $3+k$ 。开 D, C 与一个 H_i , 再用新人和各班私有旧教师开其余 P, Q, H_i 中的任意 $\min(k, h+1)$ 班, 即达到式(3)。计数允许新人先服务 D , 没有固定原配对。

式(4)的三个上界分别来自总班数、删除 k 名新人后的原 4 班上界、总教师人数。当 $0 \leq k \leq h-1$ 时开 P, Q, C 与 $k+1$ 个 H_i , 其中一个 H_i 用 z , 其余各用一名新人, 得到 $4+k$ 班; 当 $k = h$ 时开 P, Q, C 与全部 H_i , 得到 $h+3$ 班; 当 $k \geq h+1$ 时以 D, C, H_1 为原供给方案, 给 $P, Q, H_2, \dots, H_h$ 各补一人, 全部 $h+4$ 班均可开。三段均达到最小上界。

于是 $d(k) = 1$ 对 $k = 0, \dots, h-1$ 成立, 到 $k = h$ 时为零, 而 $M_q(1) = 4$ 已恢复原目标。两个秩上界均为 h , 紧性成立。 $\square$

A.8 三点反例的配对与上界

表 3: 三点反例的完整旧候选关系

教学点	班级	旧候选教师
A	A_1	1, 2
A	A_2	4, 5
B	B_1	3, 4
B	B_2	1, 4
C	C_1	0, 1
C	C_2	2, 3
C	C_3	5, 6

原候选图连通，每班均能单独开课。七名教师给出最多三班的容量上界： $A_1 : (1, 2), B_1 : (3, 4), C_3 : (5, 6)$ 达到上界并满足三点保障，故 $m = f = 3$ 。

加入能服务 B 全部班的新教师 u 后， $C_1 : (0, 1), C_2 : (2, 3), C_3 : (5, 6), B_1 : (u, 4)$ 开出四班，故 $m' = 4$ 。任何四班方案必须用完八人。教师 0 只能服务 C_1 ，而 u 不接受 C ，所以 C_1 必须使用 0, 1；同理 C_3 必须使用 5, 6。这分别使 A_1, A_2 失去一名必需教师， u 也不能补 A ，所以任何四班方案都违反 A 点下界。旧保障方案仍可沿用，故 $f' = 3, d' = 1$ 。

若改为加入覆盖 A 全部班的同一单位容量，可开 $A_1 : (u, 2), C_1 : (0, 1), B_1 : (3, 4), C_3 : (5, 6)$ ，同时保三点。覆盖 C 全部班时，可开 $C_1 : (u, 0), A_1 : (1, 2), B_1 : (3, 4), C_3 : (5, 6)$ 。容量上界均为四，与图 1—致。

A.9 需求三反例的配对与上界

需求三时，取两点下界均为一，旧教师为 $1, \dots, 8$ ，班的旧候选为

$$A_0 = \{1, 3, 5\}; \quad P = \{1, 2, 7\}, Q = \{3, 4, 7\}, R = \{5, 6, 8\}, D = \{2, 4, 6\},$$

其中 A 只有 A_0 ，其余四班在 B 。各班单独可开，原图连通。八名旧教师最多开两班，而 A_0, D 达到这一数量并保两点，故 $m = f = 2$ 。

加入全局通用新人 u 后，可开 $P : (u, 1, 2), Q : (3, 4, 7), R : (5, 6, 8)$ ，故 $m' = 3$ 。若保障方案中 u 不在 A_0 ， A_0 占用 1, 3, 5， P, Q, R 每班都需 u ，不能同时开两班；若其中一班改为 D 且不占 u ， D 又占 2, 4, 6，另一班仍缺两人，无法补齐。若 u 在 D ，其余班都缺 A_0 所用的旧教师。

若 u 服务 A_0 ，两个 B 班都须只用旧教师。四个 B 候选三元组中，仅 P, R 及 Q, R 两对互不相交。前一对使用 1, 5，后一对使用 3, 5； A_0 都只剩一名旧候选，仍不能与 u 凑足三人。故 $f' = 2$ ，差额从零增为一。即使全局通用，双人班结论也不能直接推广到三人班。

A.10 相同汇总量下的替代链构造

在附录A.11紧性族的 A_i 处增加替代班 G_i ，并在原供给中加入两两不同、且与已有教师均不同的 $v_1, \dots, v_g$ ；每名 v_i 只可服务 G_i 。其中 G_1 的旧候选仅为 v_1 ， G_i ($i \geq 2$) 的旧候选为 p_{i-1}, v_i 。其余班级与候选保持紧性族的定义，各点下界仍为 1。

原供给下 G_1 无法开，保障 A_1 只能开原班 $D_1 = \{p_1, q_1\}$ 。于是 G_2 失去 p_1 ，保障 A_2 只能开 D_2 ，递推可知所有 D_i 都必须开。因此仍有 $M_q = g + 1$ 。除 C 之外，每个原来可开的班至少用一名 p_i 或 q_i ，故 $M_0 \leq 2g + 1$ ，而全部 P_i, Q_i, C 达到此数。跨教学点教师仍恰为 $2g$ 人。

增加一名通用教师并将其用于 G_1 , 即可开全部 G_i 、全部 Q_i 、 P_g 和 C , 共 $2g+2$ 班。删去一个 B 班仍可恢复原来的 $2g+1$ 班并满足下界。原差额为正, 故最少人数为 1。这个构造与独立紧性族具有相同 (M_0, M_q, b, d) , 但最小通用补员分别为 1 和 g 。两族具有不同的候选结构, 因此这些汇总量不足以唯一确定补员人数。

A.11 原供给的结构界与单位需求基准

A.11.1 单位需求的基准与两人门槛

引理 A.1 (单位需求基准). 若每班只需一名教师, 任何可行班级集合都可以保持原班级并扩展为最大规模可行集合。因此, 可行教学点下界不降低最大总开课数。

证明. 每个班只需一人时, 可被教师匹配的班级集合构成横截拟阵的独立集。每个独立集都能扩展为基, 所有基大小相同。扩展只增加班级, 原来满足的教学点下界仍然满足。该结论使用经典匹配增广结构。□

两人需求时, 考虑三个班: A 只有候选教师 p, q , B_1 只有 p, u , B_2 只有 q, v 。集合 $\{A\}$ 和 $\{B_1, B_2\}$ 均可开, 但前者无法保持 A 并增加任一个 B 班。可开班集合仍有遗传性, 即子集仍可开; 失效的是拟阵增广公理。这是完整单元的局部互补性, 不意味着无分组数量优化不可多项式求解 [2]。若把 A 作为一个教学点、 B_1, B_2 归于另一点, 可行开课向量含 $(1, 0)$ 和 $(0, 2)$, 却不含 $(1, 1)$, 违反整数多态体的增广性质。因此, 这个教学点投影也不能直接表示为 [4] 中彩色拟阵的可行计数集合; 该反例排除这一直接套用, 不排除其他更一般理论。

该例的完整班集合也不满足 delta-matroid 的对称交换公理 [8]: 从 $\{B_1, B_2\}$ 向 $\{A\}$ 交换元素 A , 无论同时删除哪个 B 班, 含 A 与另一个 B 班的集合都不可开; 仅加入 A 也不行。教学点向量同样不满足跳跃系统的两步公理: 从 $(0, 2)$ 向 $(1, 0)$ 先走到 $(1, 2)$ 不可行, 下一步向目标只能到 $(1, 1)$, 仍不可行。这些反例只排除在当前班级或计数坐标上的直接表示, 不证明更一般匹配理论无法解释本文结果。

A.11.2 两人需求的数量损失界

命题 A.2. 在式(1)-(2)的模型中, 设 Y 是教学点开课向量坐标不可支配的可行班级集合, 则

$$M_0 - |Y| \leq \min\{\lfloor b/2 \rfloor, \lfloor M_0/2 \rfloor\}.$$

特别地, 该界适用于可行下界下的最大数量方案以及固定正分母的 *leximin* 方案。

证明. 为每班建立两个槽节点, 槽之间连一条内部边; 教师与该班两个槽均按候选关系连边。关闭班级用内部边匹配其两槽, 开启班级将两槽分别匹配到不同教师。这样, 分配对应于所有槽都被饱和的匹配, 其匹配边数恰为 $|J|$ 加开课数。

取无约束最优分配 X 和不可支配分配 Y 的这类匹配。删除共同边后, 对称差分解为交替环与端点为教师的交替路径, 因为两个匹配都饱和每个槽。任意一个分量单独切换后仍饱和所有槽。一个改变开启状态的班, 其内部边使两个槽处于同一分量; 一个始终开启的班即使两槽分处不同分量, 单独切换也仍保持开启。因此分量切换对应合法班级分配。

记 $\Delta_s(P)$ 为分量 P 中 X 相对 Y 在教学点 s 多开的班数。 X 盈余路径满足

$$\sum_s \Delta_s(P) = 1.$$

如果所有坐标增量都非负, 在 Y 上切换该路径会得到支配 Y 的方案, 矛盾。因此每条 X 盈余路径至少有一个负坐标。

对某教学点 s , 统计路径中教师-槽边在 X 和 Y 之间的数目差, 恰为 $2\Delta_s(P)$: 改变开闭的班的两个槽处于同一分量, 贡献 $+2$ 或 -2 ; 始终开启的班即使两槽分处不同分量, 每个槽在两匹配中均有教师边, 净贡献为 0 。每个内部教师有一条 X 边和一条 Y 边; 两边连接同一教学点时净贡献为 0 , 连接不同教学点时对其中一处贡献 -1 。 X 盈余路径的两个教师端点只有 X 边, 贡献非负。若该路径至多有一名跨教学点候选教师, 则每个教学点的边差至少为 -1 ; 该差又是偶数, 故不能为负。这与存在负坐标矛盾。于是每条 X 盈余路径至少包含两名不同跨点教师。

Y 盈余路径不可能存在, 否则在 X 上单独切换它会提高无约束最优的边数。设 X 盈余路径数量为 p , 则 $M_0 - |Y| = p$ 。不同分量顶点互不重叠, 故 $2p \leq b$ 。

每条盈余路径还有一个负教学点坐标, 因而至少包含一个 Y 开启而 X 关闭的班。不同路径对应的这些班不同, 所以 $p \leq |Y|$, 即 $2p \leq M_0$ 。结合两式并取整数部分即得结论。可行下界最大数量方案及 leximin 方案的不可支配性已在模型部分说明。 $\square$

半数保证给出与总开课数有关的基准, $b/2$ 界进一步利用原供给中跨教学点教师的数量。

A.11.3 紧性与需求变化

给定正整数 g , 设置 g 个教学点 A_i , 每点只有一班 D_i , 候选为 p_i, q_i 。教学点 B 含 $2g$ 个班 P_i, Q_i , 其候选分别为 p_i, u_i^P 与 q_i, u_i^Q , 再加一个只用两名私有教师的班 C 。所有未明确复用的教师均不同, 每点下界均为 1 。

无约束时开全部 P_i, Q_i, C 得到 $M_0 = 2g + 1$; 除 C 外每个可开班至少消耗一名共享教师, 故这也是上界。保障所有 A_i 时必须使用全部 p_i, q_i , 仅 C 仍可在 B 开出。因此 $M_q = g + 1$, $b = 2g$, $d = g$, 同时达到命题A.2的两个上界。

三人需求时不能沿用 $b/2$ 。构造六名共享教师 $p_1, \dots, p_6$; 教学点 A 有六班, 第 i 班原候选恰为 p_i, u_i, v_i , 再加两个各有三名专属教师的完全私有班。点 B 的两班原候选分别恰为 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 与 $\{p_4, p_5, p_6\}$; 其余所有教师均不同。下界向量为 $(q_A, q_B) = (2, 2)$ 。无约束可开 A 的八班; 若开一个 B 班, 就不能开相应三个 A 班, 因此 8 也是最大值。满足 B 下界会用掉全部共享教师, 只能再开 A 的两个私有班, 故 $M_0 = 8$, $M_q = 4$, $b = 6$, 损失 4 大于 $b/2 = 3$ 。因此, 该参数界不适用于这里的三人需求。

B 系统对象、模型接口与应用范围

B.1 需求访谈与问题形成

2026 年 7 月 8 日, 项目组通过腾讯会议与一名公益教学项目负责人进行需求访谈, 指导教师与学生项目成员参与讨论。本节依据保存的访谈摘要 [12], 整理与师资配置有关的三组意见, 并说明它们与本文研究问题的联系。受访者以其项目角色指代, 下列要点为内容转述, 时间戳对应录制进度。

地点间的供给差异 访谈要点 (04:37–06:35)。受访者担心, 若向志愿者公开全部教学点, 报名可能集中于交通便利的中心区域, 而外围地点较难获得师资。

与本文的联系。地点间的供给差异使机构需要同时考虑总开课数量与各点服务。本文用给定的最低班数表达机构的服务保障情景, 比较满足保障前后的最大开课数; 补员分析进一步考察新

增教师能够服务哪些班级，以及这一范围怎样影响保障产出。这样，地点供给问题对应到机构可以比较的保障方案与补员方案。

分配前后信息的差异 访谈要点 (03:30–04:37、07:35–08:49)。受访者认为，地点距离较容易客观记录，教学点的组织情况、学生课堂状态与志愿者成熟度则较难在教学开始前准确判断，部分信息需要服务两三周后才逐渐清楚。

与本文的联系。本文在最终确认前固定候选关系，分析同一批已知条件下的配置。系统将资格、可用时段、可服务范围与当期意愿整理为候选边，并通过签到、反馈和调整记录积累服务后的信息。前者支持本轮方案比较，后者用于机构后续复核与更新。

当期班级与师资缺口 访谈要点 (06:36–07:23)。访谈讨论了将已经饱和、已有稳定志愿教师的教学点移出当期统一招募池，让招募集中于仍有师资缺口的地点。

与本文的联系。机构先核对已落实的师资和本轮待补缺口，再形成教学点、班级及候选关系输入。最低班数针对纳入本轮配置的班级给定，并在同一次方案比较中保持一致。系统记录输入范围，使机构能够区分需求变化与配置方案变化。

这些需求将论文的问题具体化为：给定本轮班级、候选教师和最低服务要求，机构需要付出多少开课数量的机会成本，新增教师的服务范围又能怎样缓解供给冲突？正文以完整班级作为产出单位，给出理论判据，并用六班情景展示方案比较。每班两人、单位教师容量及具体保障下界属于分析设定；访谈提供问题背景，数值结果来自文中的合成情景。

B.2 材料来源与应用定位

志愿教师分配系统已经形成教师、教学点、班级、候选关系和人工确认等业务对象。本附录说明这些对象如何映射到本文的配置模型，以及离线分析结果如何进入方案复核。本文在合成输入快照上完成配置分析；在线分配批次的结果接入属于接口设计，候选范围、最低保障和可执行名单仍由机构确认。

历史页面中的数值、比例、等级、积分、批次数量和结果数量属于脱敏演示记录。下列截图用于说明系统对象和页面字段；本文的最低下界与补员模型由独立的候选关系和约束定义。

B.3 角色责任与时间截点

一个分配周期依次经过资料登记、条件审核、输入冻结、离线情景计算和方案确认。角色权限不进入目标函数，但决定数据由谁提供、谁核验以及何时停止修改。表 4 列出各角色与模型接口的关系。

表 4: 角色责任、业务记录与模型接口

角色	业务操作	形成或核验的记录	对离线分析的作用
志愿教师	提交资格、可服务时段、服务范围与参与意愿; 确认或拒绝具体安排; 提交签到与反馈	教师条件、候选意愿、确认状态和服务记录	形成教师集合 I 与候选边 E 的教师侧条件; 反馈记录用于后续执行分析
站点管理员	登记教学点、班级、上课时间和所需教师人数; 核对到岗与开课状态	V 、 J_s 、班级时间、需求和服务状态	形成班级归属、完整开课和教学点层面的执行记录
机构管理员	确定当期开放教学点、最低开课情景和比较的补员范围; 确认或退回候选方案	q_s 、情景选择、最终确认结果	给定外生保障情景, 选择待比较的 (S, k) , 并确认方案
系统管理员	导入和标准化基础资料; 维护输入、批次摘要和操作日志	输入标识、导入时间、操作人和动作	维护输入快照与业务追溯记录

输入冻结以后, 任何资格、时间、服务范围、班级需求或 q_s 的改变都对应新的情景计算。这样可以区分同一快照下的方案比较与输入变化后的重新计算, 并保持保障标准由机构预先给定。

B.4 业务信息与数学接口

表 5 给出本文使用的最小接口。候选边由资格、时段、可服务范围和当期意愿共同决定。教学点名称、位置线索或困难描述需要经过机构规则解释后, 才能形成候选边或 q_s 。

表 5: 业务信息、数学对象与接口说明

业务信息	数学对象	进入分析前的检查	在本文中的用途
教师资格、可用时段、服务范围、明确意愿	I 与 E ; 教师容量固定为 1	去标识化; 统一资格和时间编码; 审核候选边	形成教师集合和候选关系
教学点开放范围与班级登记	V 、 J 、 J_s	每个班级唯一归属教学点; 检查重复、空点和缺失时间	形成教学点与班级集合
班级所需教师人数	需求固定为 2	开课由两名不同教师完整覆盖; 拒绝半填充状态	给出双人班分析输入
最低服务承诺	外生下界 q_s , 并要求 $z_s \geq q_s$	机构在求解前给定并说明依据	给出保障情景参数
同类新增教师的可服务范围与人数	$S \subseteq J$ 、 k	明确每名新增教师是否具有相同范围; 记录允许旧教师重新安排的情景条件	给出补员比较输入
确认、拒绝、签到和反馈	后续执行记录	区分撤回、拒绝、未到岗和人工调整; 保留批次和时间	支持方案确认与后续执行分析

B.5 离线求解、比较目标与结果状态

给定快照、保障向量 q 以及新增情景 (S, k) ，离线分析分别计算

$$M_0(k, S) = \max \left\{ \sum_{j \in J} x_j : \text{满足候选边、容量和完整开课约束} \right\},$$

以及在同一约束上加入 $z_s \geq q_s$ 后的

$$M_q(k, S), \quad d(k, S) = M_0(k, S) - M_q(k, S).$$

其中 $x_j = 1$ 表示班级 j 获得两名教师并完整开课， $z_s = \sum_{j \in J_s} x_j$ 。当 $k = 0$ 且没有新增范围时， $M_0(0, \emptyset)$ 是补员前的无保障基准。分析同时报告两个可分开的配置目标：

1. **恢复旧产出：**在新的教师配置和原下界下达到 $M_0(0, \emptyset)$ ；
2. **消除新差额：**在新增供给下达到 $d(k, S) = 0$ ，即保障产出等于新增供给下重新计算的无保障基准。

这两个目标可能需要不同的 k 。每次情景记录 y_{ij} 、 x_j 、 z_s 、 q_s 、 M_0 、 M_q 、 d 、 (S, k) 、每名新增教师的完整可服务范围、未开班级，以及人工复核结果。

表 6 给出离线分析的状态语义。 $M_0(k, S)$ 与 $M_q(k, S)$ 是两个分别求解的目标；每个目标记录自己的状态、目标值（若已得到）和分配证书。

表 6: 离线分析结果状态及其数学含义

状态	可记录的结果	解释与后续动作
INPUT_REJECTED	不生成对应目标值	输入字段缺失、候选边未经审核、快照不一致或格式无法解析；需求不为 2 时转入相应调用或范围判断
OPTIMAL	对应目标值、状态和分配证书	已证明 M_0 或 M_q 的当前目标最优；两个目标分别记录状态
INFEASIBLE	对应目标的不可行证明	仅标记实际不可行的目标；例如 M_0 可为最优而 M_q 因下界不可行，此时差额未定义
TIME_LIMIT	当前目标的可行解（若有）及未证明状态	求解在时限内未完成证明；保留当前界和证书，状态不等同于最优或不可行
ERROR	对应目标的错误信息与已有中间结果	程序异常或求解器错误终止；状态不提供最优性或不可行性结论
NOT_RUN	对应目标无求解输出	本次调用跳过该目标或先决条件未满足；状态不提供不可行性结论
UNSUPPORTED_SCOPE	当前调用或所引用定理不覆盖该情景	异质需求需要相应调用；教师容量大于 1、新增范围不一致或已确认配对不得重排时，按扩展模型或其他定理处理

B.6 输出证书、方案确认与历史界面

管理者先核对候选边、每个班级的两名教师、教学点下界和两个目标值，再决定接受、退回或生成新的情景。志愿教师对自己的具体安排作确认或拒绝。若候选边、 q_s 、 S 或 k 发生变化，应重新计算相应情景；操作日志记录流程节点，模型最优性由目标状态和分配证书给出。

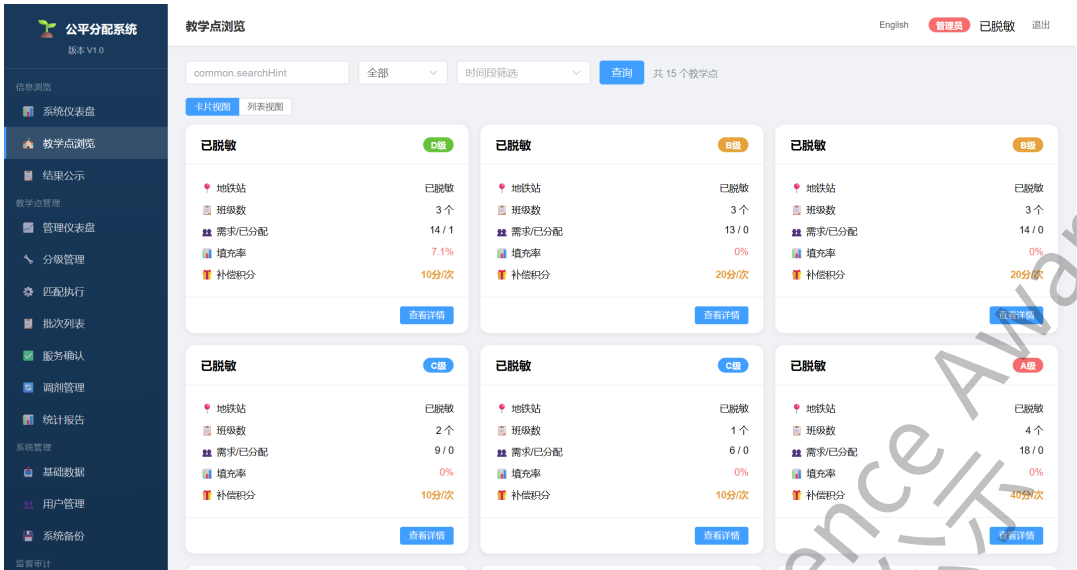


图 6: 历史系统教学点页面的脱敏截图。页面展示教学点、班级、需求和分配数量等业务字段；所示数值为演示记录。

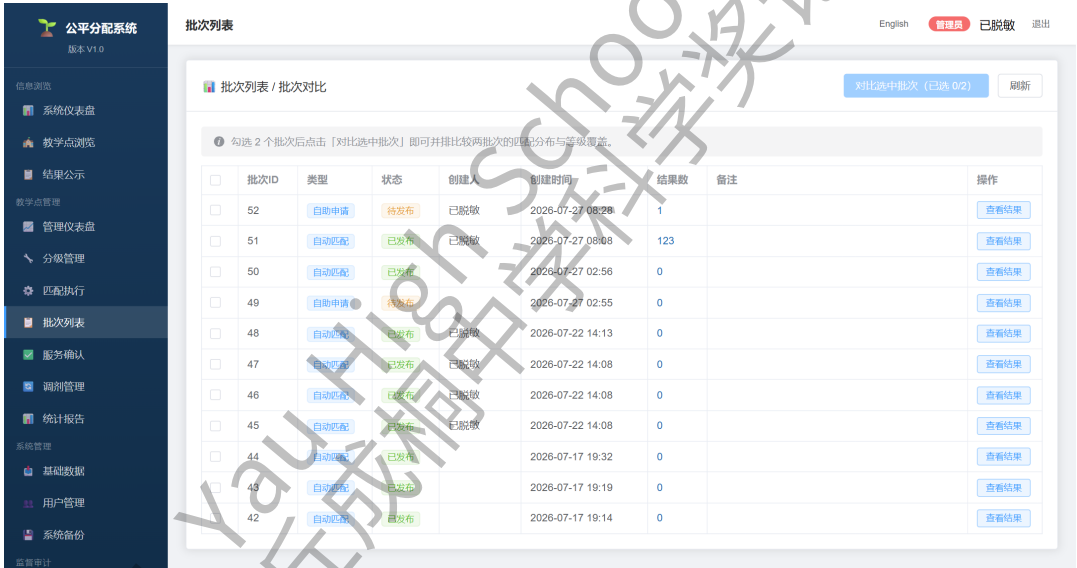


图 7: 历史系统分配批次页面的脱敏截图。页面展示分配批次的状态和结果入口，对应方案确认与执行记录的业务对象。

B.7 应用范围与后续验证

现有材料支持业务对象形成候选图并承接离线配置输出；真实接受率、人工改派率、持续服务、学生受益和教育效果需要单独的应用数据。受限补员判据在满足其假设时处理异质整数需求，本接口按调用程序和所引用定理的条件判断适用性。已确认配对不得重排时，命题 4.1 的两点保证不适用。旧系统的既有匹配规则、词典序公平、优先组、效用权重、等级和补偿积分属于其他业务规则；本文的最低配额模型使用候选关系、外生下界和完整开课约束。在线系统是否求得 M_0 、 M_q 或 d ，由相应的在线调用记录确定。

若未来开展经授权的历史回放、影子运行或小范围试行，应保存去标识化的教师、教学点和班级编号，审核后的 E ，教师容量，班级需求和时间，外生下界 q_s ，新增范围 S 与人数 k ，两

种基准值、分配证书、最终确认、拒绝、未到岗和人工修改原因。输入标识、求解状态和执行记录齐备后,可评价确认时长、开课覆盖、接受率和改派情况。该验证属于后续应用工作,本文两点命题(见命题 4.1)及其三点边界(见第 4.3 节)仍按既定条件解释。

C 复现材料与方法

C.1 输入、输出与来源

所有论文数值来自合成输入。复现材料按分析对象保留候选图、班级所属教学点、整数需求、最低下界、新人范围、求解状态与分配证书。六班情景的完整输入见第 6 节;历史在线系统的演示数量不进入这些计算。

表 7: 主要结果与复现方法的对应

对象	复现方法与结果	解释范围
六班保障与补员情景	47 次二元模型,完整目标值及教师配对	具体合成情景的可行性与目标值
两点任意配额命题	固定七班图 12 个转移、20 次独立二元 MILP 求解,8 条增广路径	构造的计算复现,一般结论由证明给出
零初始差额有界搜索	3,000 张预植图,原 $M_0 = M_q = 4$	仅覆盖预设生成机制与零差额子类
三点与需求三的边界	固定反例的组合枚举与独立二元模型	复现所列反例及分配证书
两种补员预算	构造族的目标值、槽秩与人数表	有限参数复现;任意规模结果由证明给出

复现数据包括固定候选图、 q 向量、四类新增范围、 M_0 、 M_q 、 d 、分配证书、路径状态和独立优化状态;正文两点数值与该输入对象对应。

C.2 复现方法与终止状态

复现按三种方法进行:完整班集合枚举、槽匹配以及独立二元优化。前两种方法给出可行班集合和匹配缺口,二元模型对两个目标分别求解;各方法均检查教师容量、两名不同教师和教学点下界。结果记录目标值、分配证书和终止状态,便于沿同一候选图重建。

保障不可行时不计算 d 。在指定新人范围下没有能够满足目标的集合时,报告不可达;超时、非最优终止与未运行分别保留对应状态。空目标所需人数为零,异质需求按同一需求向量重新计算所有基准。输入变化后重新形成相应计算对象。

参考文献

- [1] Bertsimas D, Farias V F, Trichakis N. The Price of Fairness. *Operations Research*, 2011, 59(1):17–31. <https://doi.org/10.1287/opre.1100.0865>.
- [2] Arulselvan A, Cseh Á, Groß M, et al. Matchings with Lower Quotas: Algorithms and Complexity. *Algorithmica*, 2018, 80(1):185–208. <https://doi.org/10.1007/s00453-016-0252-6>.
- [3] Chierichetti F, Kumar R, Lattanzi S, Vassilvitskii S. Matroids, Matchings, and Fairness. *Proceedings of AISTATS*, PMLR 89, 2019:2212–2220. <https://proceedings.mlr.press/v89/chierichetti19a.html>.
- [4] Castera R, Garrido-Lucero F, Loiseau P, et al. The Price of Opportunity Fairness in Matroid Allocation Problems. *arXiv:2403.00397v3*, 2025. <https://arxiv.org/abs/2403.00397>.
- [5] Jordan W C, Graves S C. Principles on the Benefits of Manufacturing Process Flexibility. *Management Science*, 1995, 41(4):577–594. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.4.577>. 作者工作稿: MIT WP 3296-91-MSA, 1991. <https://hdl.handle.net/1721.1/2357>.
- [6] Cseh Á, Friedrich T, Peters J. Pareto optimal and popular house allocation with lower and upper quotas. *arXiv:2107.03801v1*, 2021. <https://arxiv.org/abs/2107.03801v1>.
- [7] Kaparis K, Letchford A N, Mourtos I. On matroid parity and matching polytopes. *Discrete Applied Mathematics*, 2020, 284:322–331. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.03.049>.
- [8] Bouchet A, Cunningham W H. Delta-matroids, Jump Systems and Bisubmodular Polyhedra. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1995, 8:17–32.
- [9] Akrami H, Barman S, Eden A, et al. Maximin-Share Fairness via Resource Augmentation. *arXiv:2502.09377v3*, 2026. <https://arxiv.org/abs/2502.09377v3>.
- [10] Duppala S, Luque J, Dickerson J, Srinivasan A. Group Fairness in Set Packing Problems. *Proceedings of IJCAI*, 2023:391–399. <https://doi.org/10.24963/ijcai.2023/44>.
- [11] McElfresh D C, Dickerson J P. Balancing Lexicographic Fairness and a Utilitarian Objective with Application to Kidney Exchange. *Proceedings of AAAI*, 2018. 公开附录预印本: <https://arxiv.org/abs/1702.08286>.
- [12] 项目组. 志愿教师分配系统需求访谈摘要 [Z]. 2026-07-08. 未刊项目记录, 主题摘要见附录B.1.

致谢与研究分工说明

本研究源于公益教学志愿服务系统的建设与需求整理。不同教学点的师资需求与教师可服务范围之间存在配置冲突，机构既希望提高总开课数量，也要满足各点的最低服务保障。我们据此将系统中的配置问题转化为经济建模问题，研究保障要求的数量机会成本，以及不同服务范围下的补充师资需求。访谈、需求材料和历史系统界面用于说明问题来源与业务对象；论文中的数值情景、反例和计算结果均为合成实例。

我们感谢隋元老师的指导。两位参赛学生均就读于上海诺美高级中学，隋元老师是该校教师，除在研究与论文写作过程中提出建议外，也在平时的社团课上就论文相关的通用知识进行指导；上述指导均为无偿提供。感谢学校提供学习与研究环境。

苏泓鑫 (Hongxin Su) 为第一作者，负责研究整体推进，在学生成员中承担绝大部分研究工作，包括选题论证、问题抽象、模型设定、数学推导与证明梳理、程序实现、计算情景设计、结果分析，以及系统应用内容的组织；论文主体撰写和修订也主要由苏泓鑫负责。余锦诚 (Jincheng Yu) 为第二作者，主要负责数据及相关资料的搜索、归类整理和论文排版，并协助统一图表、目录与参考文献的呈现格式。

研究过程先从系统需求和问题来源出发，整理教师、教学点、班级、候选关系和最低开课数量等对象，再固定模型输入，比较无保障与有保障的产出，并设计补充师资范围和数量的情景。主要困难是把业务需求转化为定义清楚的保障约束，并区分恢复原有产出与消除新增供给下产出差额这两个目标。对此，我们通过手算例子、反例构造、精确枚举、独立优化模型和分配证书进行核对；写作中分别说明理论结果、合成计算和历史系统展示，使结论能够对应具体假设、输入与分配方案。

2026 年 9 月的后续研究与成稿阶段，我们通过 ChatGPT/Codex 进行了多轮 AI 辅助，相关记录涉及 GPT-5.6 sol，后续定稿使用 GPT-6 Astra 和 GPT-5.6 luna。AI 协助了文献核查、部分证明与反例讨论、验证程序、应用案例重组、离线方案摘要，以及双语文字和图表修改；所生成的推导草稿、代码和文字按来源保留记录。