

参赛学生姓名：叶子璇

中学：北京市十一学校

省份：北京市

国家/地区：中华人民共和国

指导老师姓名：李艳

指导老师单位：北京市十一学校

论文题目：高木贞治函数的基本性态与图像几何特征探析

高木贞治函数的基本性态与图像几何特征探析

叶子璇

北京市十一学校

2026 年 7 月 31 日

摘要

高木贞治函数 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是处处连续但无处可微的函数的典例。本文提出了在初等框架下证明其不可微性并利用几何结构刻画其最大值水平集的新方法，这也是一种定量研究分形结构的新视角。具体而言：首先，我们通过初等方法建立了其基本性质，包括周期性、有界性、连续性、无处可微性等。我们将考察其图像的分形特性并从点集的角度给出其图像的递推构造，进而由此推出该函数的可达上确界及其对应的水平集，并在一般的 $T_r(x)$ 上进行了推广试验。

关键词：数学分析；可微性；分形；水平集。

目录

1 引言	2
2 高木贞治函数的表示	4
3 高木贞治函数的性态	6
4 高木贞治函数的图像	10
5 高木贞治函数的最大值及其局部水平集	14
6 推广、已知结果与进一步问题	17
6.1 基本性质与函数方程	17
6.2 无处可微性	18
6.3 偶数底数下的图像递归	19
6.4 最大值及最大值点集	20
6.5 水平集：已知结果与进一步问题	22

1 引言

高木贞治函数与魏尔斯特拉斯函数一样，是典型且构造简单的连续而无处可微的函数。虽然该函数的原始论文于 1903 年便由日本数学家高木贞治发布，并且当代的许多数

学工作者也对其进行了广泛的探索，揭示了该函数与概率论、分析学、数论、动力系统等领域的内在联系，但是对于其不可微性的详细证明过程、图像逼近的过程讨论以及分形结构的可视化呈现，往往缺乏针对初学者的系统性梳理。这便是我们要处理的内容。

在高木贞治函数的多种等价定义方式中，我们选择如下途径对其进行构造：

定义 1.1 (高木贞治函数)

我们首先在 $[0, 1)$ 上定义函数 $\psi(x)$ ：

$$\psi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

随后我们将其以 1 为周期延拓到 $\mathbb{R}$ 上。

高木贞治函数 $T(x)$ 被定义为：

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^k x)}{2^k}. \quad (1.1)$$

直观地来看，该定义中的 ψ 函数也可以视为 $\text{dist}(x, \mathbb{Z})$ ，即实数 x (在 $\mathbb{R}$ 中) 到 $\mathbb{Z}$ 的距离。

为了针对该函数进行研究，我们首先要确保它是良定义的，并且对其周期性、有界性等性质有所认识。

命题 1.1 高木贞治函数是 $\mathbb{R}$ 上良定义的，周期为 1 的有界函数。

证明 易见 $\forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leq 1/2$ 。因此 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |T(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^k x)}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\psi(2^k x)|}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty. \end{aligned}$$

由此可见 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处良定义，且 $|T(x)| \leq 1$ 恒成立，具备有界性。

设有高斯函数 $\{x\} = x - [x]$ ，下面证明 $\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = T(\{x\})$ 。事实上，由于函数 $\psi(x)$ 以 1 为周期，故

$$\begin{aligned} T(x) &= T([x] + \{x\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^k [x] + 2^k \{x\})}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^k \{x\})}{2^k} = T(\{x\}). \end{aligned}$$

即该命题成立，这足以说明 $T(x)$ 以 1 为周期。

证毕。

利用高木贞治函数的周期性，在下文对其性质的大部分讨论中，我们选择将问题规模缩小到 $[0, 1]$ 上的 $T(x)$ 。

此外，高木贞治函数之所以特别，正是因为它兼具处处连续、处处不可微两条性质。这里，我们首先处理前者，这是较容易证明的。

命题 1.2 高木贞治函数在 $\mathbb{R}$ 上处处连续。

证明 不难验证 $\psi(x)$ 符合 Lipschitz 条件且其 Lipschitz 常数为 1，即

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |\psi(a) - \psi(b)| \leq |a - b|.$$

确定 $x \in \mathbb{R}$ ，任给 $\epsilon > 0$ ，我们首先选取正整数 M 满足

$$\sum_{k>M} \frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

进而 $\forall |\delta| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$ 都有

$$\begin{aligned} |T(x + \delta) - T(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^k x + 2^k \delta) - \psi(2^k x)}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\psi(2^k x + 2^k \delta) - \psi(2^k x)|}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^M \frac{|\psi(2^k x + 2^k \delta) - \psi(2^k x)|}{2^k} + \sum_{k>M} \frac{|\psi(2^k x + 2^k \delta) - \psi(2^k x)|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=0}^M \frac{|2^k \delta|}{2^k} + \sum_{k>M} \frac{1}{2^k} \\ &< (M+1)|\delta| + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

这足以说明 $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow x} T(t) = T(x)$ ，即 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续。

证毕。

2 高木贞治函数的表示

由于 ψ 函数分段线性的特点，直接从式 (1.1) 着手进入高木贞治函数的性态研究是十分困难的，因为我们没有一个对 $\psi(x)$ 的显式表达式。幸运的是， ψ 函数的取值与其自变量 x 的“二进制小数表示”有着紧密的联系。

定义 2.1 (二进制小数) 对 $x \in [0, 1]$ ，设取值于 $\{0, 1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

我们称 $\{a_n\}$ 为实数 x 的二进制表示。

在下文的讨论中，若无特殊声明，记号 a_i 总是代表与之一同出现的变量 x 的二进制小数表示中的某一位。

借用 x 的二进制小数表示，我们可以针对 (1.1) 式中形如 $\psi(2^m x)$ 的项给出一个显式的表达式：

引理 2.1 设 $m \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, 则

$$\psi(2^m x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{m+1}(a_{m+n})}{2^n}. \quad (2.1)$$

其中对正整数 n 与实数 $t \in [0, 1]$, 定义函数 $\sigma_n(t)$ 被定义为

$$\sigma_n(t) = a_n + (1 - 2a_n)t.$$

证明 一方面,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{m+1}(a_{m+n})}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+1} + a_{m+n} - 2a_{m+1}a_{m+n}}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{m+1} - a_{m+n}|}{2^n} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} & a_{m+1} = 0 \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} & a_{m+1} = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

另一方面, $2^m x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^m a_n}{2^n}$, 易见 $\{2^m x\} = \sum_{n>m} \frac{a_n}{2^{n-m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n}$.

从而

$$\begin{aligned} \psi(2^m x) &= \psi(\{2^m x\}) \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} & 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} & \frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

由此可见, 若 $a_{m+1} = 0$, 则 $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{m+1}(a_{m+n})}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} = \psi(2^m x).$$

若 $a_{m+1} = 1$, 则 $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} \leq 1$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{m+1}(a_{m+n})}{2^n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{2^n} = \psi(2^m x).$$

证毕。

依赖 (2.1) 式，我们便可以对 (1.1) 式进行如下的展开：

命题 2.1 设 $x \in [0, 1]$ ，则

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a_n)v_n + a_n(n-v_n)}{2^n}. \quad (2.2)$$

其中 v_n 被定义为 $v_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。

证明 利用引理 2.1 中的结论，我们有

$$\psi(2^m x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+1} + a_{m+n} - 2a_{m+1}a_{m+n}}{2^n}.$$

进而

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^k x)}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+1} + a_{k+n} - 2a_{k+1}a_{k+n}}{2^n}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a_n)v_n + a_n(n-v_n)}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a_n) \sum_{k=1}^n a_k + a_n \sum_{k=1}^n (1-a_k)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(1-a_n)a_k + a_n(1-a_k)}{2^n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-a_n)a_k + a_n(1-a_k)}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(1-a_n)a_{k+1} + a_n(1-a_{k+1})}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a_{n+k})a_{k+1} + a_{n+k}(1-a_{k+1})}{2^{n+k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+1} + a_{k+n} - 2a_{k+1}a_{k+n}}{2^n} \\ &= T(x). \end{aligned}$$

上述推导中进行了求和顺序交换，这一操作的正确性由级数的绝对收敛性保证。

证毕。

我们将在后续的讨论中沿用 v_n 这一记号，若无特殊说明，其含义与前文保持一致。

3 高木贞治函数的性态

本节的核心目标是利用 (2.2) 式推导高木贞治函数在 $\mathbb{R}$ 上处处不可微这一定理。

利用该函数的周期性，我们实际上只需证明其在 $[0, 1]$ 上处处不可微即可。

对 $x \in [0, 1]$ ，我们首先处理 x 的二进制小数表示为有限位时的特殊情形：

引理 3.1 设 k_0 为正奇数或零， m_0 为正整数， $x_0 = \frac{k_0}{2^{m_0}} \in [0, 1)$ 。令 $h_n = 2^{-n}$ ，则数列

$$\left\{ \frac{T(x_0 + h_n) - T(x_0)}{h_n} \right\}_{n > m_0}$$

不收敛。

证明 显然 x_0 可以被表示为有限位的二进制小数。具体而言，我们可以直接对 k_0 做正整数的二进制表示，然后约分得到

$$x_0 = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{a_i}{2^i}.$$

为了证明该命题，我们考虑 $n > m_0$ 的情形。设 $n = m_0 + k$ ，其中 k 为正整数。

易见

$$x_0 + h_n = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{m_0+k}}.$$

为了区分，在下面的证明中我们将 $x_0 + h_n$ 的二进制表示中“每一位数码”记作 a'_i ，对应的“前 i 位数码和”记作 v'_i 。

那么利用命题 2.1 的结论，可直接得到

$$\begin{aligned} T(x_0 + h_n) - T(x_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - a'_i)v'_i + a'_i(i - v'_i) - (1 - a_i)v_i - a_i(i - v_i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=m_0+k}^{\infty} \frac{(1 - a'_i)v'_i + a'_i(i - v'_i) - (1 - a_i)v_i - a_i(i - v_i)}{2^i}. \end{aligned}$$

在上面的和式中：当 $i = m_0 + k$ 时， $a'_i = 1, a_i = 0, v'_i = v_i + 1$ ，求和项为

$$\frac{0 + i - v'_i - v_i - 0}{2^i} = \frac{m_0 + k - 2v_{m_0+k} - 1}{2^{m_0+k}}.$$

当 $i > m_0 + k$ 时， $a'_i = a_i = 0, v'_i = v_i + 1$ ，求和项为

$$\frac{v'_i + 0 - v_i - 0}{2^i} = \frac{1}{2^i}.$$

从而

$$T(x_0 + h_n) - T(x_0) = \frac{m_0 + k - 2v_{m_0+k} - 1}{2^{m_0+k}} + \sum_{i > m_0+k} \frac{1}{2^i} = \frac{m_0 + k - 2v_{m_0+k}}{2^{m_0+k}}.$$

进而

$$\frac{T(x_0 + h_n) - T(x_0)}{h_n} = m_0 + k - 2v_{m_0+k}.$$

由于上式中 m_0, v_{m_0+k} 为常数（由于我们使用的是有限二进制表示， $v_{m_0+k} = v_{m_0}$ 成立），故当 $n \rightarrow \infty$ ，即 $k \rightarrow \infty$ 时上式不收敛。

证毕。

这样，由 $T(x)$ 的周期性，我们已经知道其在“可表示为有限位二进制小数”的点处不可微了。

然而，若要证明其在剩余的点处不可微，我们还需准备另一个引理。

引理 3.2 设 f 是定义在开区间 I 上的实值函数，若 f 在 $a \in I$ 处可导，则

$$\lim_{\substack{(h,h') \rightarrow (0,0) \\ h>0, h'>0}} \frac{f(a+h) - f(a-h')}{h+h'} = f'(a).$$

(这里的极限过程在 $\mathbb{R}^2$ 中进行)

证明 任给 $\epsilon > 0$ ，由 f 在 a 处可导，故存在 $\delta > 0$ 满足当 $0 < h < \delta$ 时

$$f'(a) - \epsilon < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < f'(a) + \epsilon.$$

即

$$h(f'(a) - \epsilon) < f(a+h) - f(a) < h(f'(a) + \epsilon).$$

同理，存在 $\delta' > 0$ 满足当 $0 < h' < \delta'$ 时

$$h'(f'(a) - \epsilon) < f(a) - f(a-h') < h'(f'(a) + \epsilon).$$

那么当 $h, h' < \min\{\delta, \delta'\}$ 时

$$(h+h')(f'(a) - \epsilon) < f(a+h) - f(a-h') < (h+h')(f'(a) + \epsilon).$$

即

$$f'(a) - \epsilon < \frac{f(a+h) - f(a-h')}{h+h'} < f'(a) + \epsilon.$$

这足以说明该命题成立。

证毕。

下面，利用引理 3.2，我们将处理不可微性的剩余情形。具体而言，我们有如下引理：

引理 3.3 设 $x \in [0, 1)$ 满足 $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n x \notin \mathbb{Z}$ 。定义序列 $\{h_n\}_{n \geq 1}, \{h'_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$[2^n x] + 1 = 2^n(x + h_n), \quad [2^n x] = 2^n(x - h'_n).$$

则数列

$$\left\{ \frac{T(x+h_n) - T(x-h'_n)}{h_n + h'_n} \right\}_{n \geq 1}$$

不收敛。

证明 设 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ ，则不难发现

$$h_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1-a_i}{2^i}, \quad h'_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

与此同时便有

$$x + h_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}, \quad x - h'_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i}.$$

为了方便起见，我们仿照先前的记号使用：约定 $x + h_n$ 的二进制表示中“每一位数码”记作 a_i ，对应的“前 i 位数码和”记作 v_i ；对应地，约定 $x - h'_n$ 的二进制表示中“每一位数码”记作 a'_i ，对应的“前 i 位数码和”记作 v'_i 。

那么

$$\begin{aligned} T(x + h_n) - T(x - h'_n) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(1 - a_i)v_i + a_i(i - v_i) - (1 - a'_i)v'_i - a'_i(i - v'_i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i - v_i - v'_i}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i - v'_i - i + n - v'_i}{2^i} \quad (v_i = v'_i + i - n) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n - 2v'_i}{2^i}. \end{aligned}$$

又因为 $h_n + h'_n = \frac{1}{2^n}$ ，故

$$\frac{T(x + h_n) - T(x - h'_n)}{h_n + h'_n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n - 2v'_i}{2^i} = n - 2v'_n.$$

令 $D_n = n - 2v'_n$ ，那么 $D_{n+1} - D_n = 1 - 2a_{n+1} \in \{1, -1\}$ ，这足以说明 D_n 不收敛，即原数列不收敛。

证毕。

最后，我们终于可以整合高木贞治函数“处处不可微”这一性质的完整证明了。

定理 3.1 高木贞治函数在 $\mathbb{R}$ 上处处不可微。

证明 任取 $x \in [0, 1)$ ，讨论如下两种情况：

(1) 若存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $2^n x \in \mathbb{Z}$ ，则易见存在 k_0 为正奇数或零、 m_0 为正整数，使得 $x_0 = k_0/2^{m_0}$ 。进而由引理 3.1，可得高木贞治函数在 x 处不可微。

(2) 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n x \notin \mathbb{Z}$ ，则根据引理 3.3，数列

$$\left\{ \frac{T(x + h_n) - T(x - h'_n)}{h_n + h'_n} \right\}_{n \geq 1}$$

不收敛。结合引理 3.2，可知高木贞治函数在 x 处不可微。

综上所述，对任意 $x \in [0, 1)$ ，高木贞治函数均在 x 处不可微。故由于该函数以 1 为周期，可知其在 $\mathbb{R}$ 上处处不可微。

证毕。

4 高木贞治函数的图像

高木贞治函数不仅具有特殊的分析学性质。从几何的角度看，其图像同样也十分特别，具备“自相似”特性。具体而言，我们着重考察的是 $T(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像，这部分图像在经过某些特殊的仿射变换后能够变为其自身的子集，这便是“自相似”这一名词的直观解释。特别地，所谓的“分形”便是描述这类几何对象的概念。

为了证明该性质，我们同样需要准备一个引理：

引理 4.1 $T(x)$ 具有如下“递归”公式：

$$T(x) = \begin{cases} 2x + T(4x)/4 & 0 \leq x < 1/4 \\ 1/2 + T(4x - 1)/4 & 1/4 \leq x < 1/2 \\ 1/2 + T(4x - 2)/4 & 1/2 \leq x < 3/4 \\ 2 - 2x + T(4x - 3)/4 & 3/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

证明 这里只证明第一条式子，余下三条的证法是类似的。

考虑 $0 \leq x < 1/4$ ，这个范围决定了 x 必有一种二进制小数表示 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 满足 $a_1 = a_2 = 0$ 。这样：

$$4x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^n}.$$

$$T(4x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - a_{n+2})v_{n+2} + a_{n+2}(n - v_{n+2})}{2^n}.$$

$$\frac{T(4x)}{4} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1 - a_n)v_n + a_n(n - 2 - v_n)}{2^n}.$$

又因为 $n = 1, 2$ 时 $a_n, v_n = 0$ ，故上式右端的求和可改为从 $n = 1$ 开始。于是通过级数对应项的直接相加，便有

$$T(x) = 2x + \frac{T(4x)}{4}.$$

证毕。

利用如上引理的结论，我们便可以找到符合要求的仿射变换，并对自相似这一性质进行证明：

命题 4.1 令 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ T(x) \end{pmatrix} \mid x \in [0, 1] \right\}$ 。

对 $i = 0, 1, 2, 3$ ，令 $\Gamma_i = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ T(x) \end{pmatrix} \mid x \in \left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4} \right] \right\}$ 。

定义如下仿射变换：

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\Phi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

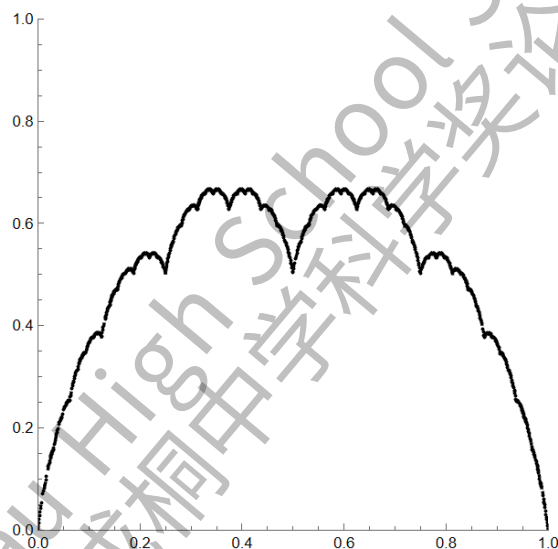
$$\Phi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

则对 $i = 0, 1, 2, 3$, $\Phi_i(\Gamma) = \Gamma_i$ 。

这本质上就是在说, $T(x)$ 的图像具备所谓的分型性质, 在经过适当的仿射变换可以与自身的子集重合。这种特性与著名的曼德勃罗集、皮亚诺曲线等图形相似, 而且使其在动力系统中具有独特的研究价值。

证明 下图是 Γ 的图像, 从中可以直观地理解这一命题:



我们同样只针对 Φ_0 证明该命题, 余下三个仿射变换是类似的。利用引理 4.1, 我们知道对 $t \in [0, 1]$, 总是有

$$T(t/4) = t/2 + T(t)/4.$$

因此, 若 (x, y) 在 Γ 中, 上式就可以改写为

$$T(x/4) = x/2 + y/4.$$

即 $\left(\frac{x}{4}, \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)$ 在 Γ_0 中。

由此可见 Φ_0 将 Γ 中的点映射到 Γ_0 中的点, 且易见这是一个双射, 则显然有

$$\Phi_0(\Gamma) = \Gamma_0.$$

证毕。

这个命题揭示了一个十分重要的性质，尤其是 Φ_1, Φ_2 作为相似变换，给出了 Γ 与其子集之间的等比例缩放关系，这对后续我们考察 $T(x)$ 的最值十分有利。

此外，若不依靠 $T(x)$ 的具体函数值的计算，我们实际上还有一种十分有趣的方式，可以从点集的角度直接构造 Γ ，即 $T(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像：

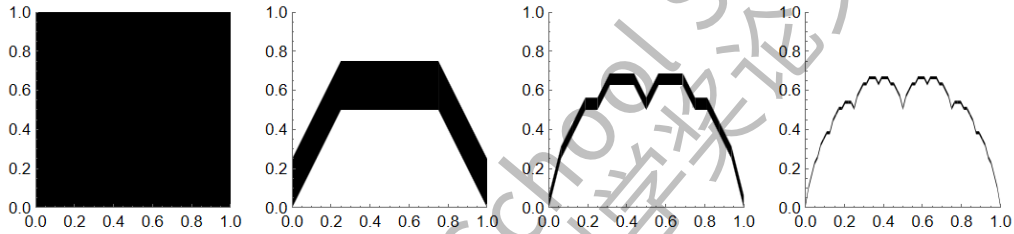
命题 4.2 令 $S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in [0, 1] \right\}$ 。对 $n \geq 0$ ，令 $S_{n+1} = \bigcup_{k=0}^3 \Phi_k(S_n)$ 。

则

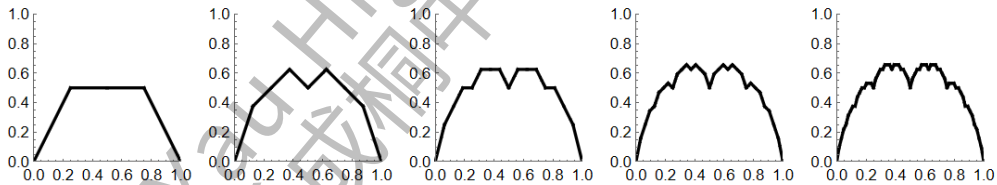
$$\Gamma = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n.$$

该定理的证明在这里还不容易直接给出，因为我们还缺少一个关键的观察。

下图给出了 S_0, S_1, S_2, S_3 的直观图像：



我们将其与 $T(x)$ 的部分和，即 $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\psi(2^k x)}{2^k}$ 的图像相比较：



(上图中从左到右依次是 T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 在 $[0, 1]$ 上的图像)

直观来看，我们发现 S_1, S_2, S_3 的“下边界”分别是 T_1, T_3, T_5 在 $[0, 1]$ 上的图像。

事实上，这一结论是正确的，而且是命题 4.2 的证明的关键，下面我们使用严格的数学语言刻画这一观察。具体地，我们首先对我们考察的对象给出确切的定义：

定义 4.1 (下边界、高度、海拔)

对于 S_n ，我们称：

(1) 集合

$$\underline{S_n} := \bigcup_{x \in [0, 1]} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \min \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_n \right\} \end{pmatrix} \right\}$$

为 S_n 的下边界。由于全体 S_n 均为 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集，上式中的 $\min$ 函数是良定义的。

(2) 任取 $x \in [0, 1]$ ，实数

$$h_n := \max \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_n \right\} - \min \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_n \right\}$$

为 S_n 的高度。通过归纳法，易见 h_n 的值与 x 的选取无关，总是等于 4^{-n} 。

详细证明这里不再赘述。

(3) 实数

$$H_n := \max \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0, 1], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_n \right\}$$

为 S_n 的海拔。易见 $H_{n+1} = \frac{1}{4}H_n + \frac{1}{2}$ 。

下面我们证明先前的观察：

引理 4.2 对 $n > 0$ ， S_n 的下边界为 $T_{2n-1}(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像。

证明 当 $n = 1$ 时，命题显然成立。考虑映射 $F(S) = \bigcup_{k=0}^3 \Phi_k(S)$ ，下面证明 F 将 $T_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像映射到 $T_{n+2}(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像。具体而言， Φ_i 将 $T_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像映射到 $T_{n+2}(x)$ 在 $[i/4, (i+1)/4]$ 上的图像 ($i = 0, 1, 2, 3$)。这里详细叙述 $i = 0$ 的情形，使用了高木贞治函数的原始定义，剩余三种情况是类似的，只需改为使用 (2.2) 式即可。

注意到对 $x \in [0, 1]$ 有

$$\begin{aligned} T_{n+2}\left(\frac{1}{4}x\right) &= \sum_{k=0}^{n+2} \frac{\psi(2^{k-2}x)}{2^k} \\ &= \sum_{k=-2}^n \frac{\psi(2^kx)}{2^{k+2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=-2}^{-1} \frac{\psi(2^kx)}{2^k} + \sum_{k=0}^n \frac{\psi(2^kx)}{2^k} \right) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}T_n(x). \end{aligned}$$

最后一步是因为此时 $2^{-1}x, 2^{-2}x \in [0, 1/2]$ ，故 $k = -1, -2$ 时 $\psi(2^kx) = 2^kx$ 。

回想

$$\Phi_0 : (x, y) \mapsto (x/4, x/2 + y/4).$$

故这带来

$$\Phi_0 : (x, T_n(x)) \mapsto (x/4, T_{n+2}(x/4)).$$

即 Φ_0 将 $T_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像映射到 $T_{n+2}(x)$ 在 $[0, 1/4]$ 上的图像。

再结合 $i = 1, 2, 3$ 的情形，便可得 F 将 $T_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像映射到 $T_{n+2}(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像。

利用这一结论, 以 $n = 1$ 的情形作为归纳奠基, 便可由归纳法知该引理对全体正整数 n 成立。

证毕。

有了这一引理, 我们便可以着手命题 4.2 的证明了:

命题 4.2 的证明 我们沿用引理 4.2 中的映射 F 。

显然 $S_1 \subset S_0$, 进而 $F(S_1) \subset F(S_0)$, 即 $S_2 \subset S_1$ 。通过运用数学归纳法, 重复执行这一步骤便知 $\{S_n\}$ 是递减的集合列。

固定 $t \in [0, 1]$, 考虑每个 S_n 中全体横坐标等于 t 的点, 易见它们的纵坐标形成一个闭区间, 且这个闭区间 (记为 I_n) 的长度为 $h_n = 4^{-n}$ 。

由于 S_n 是递减的集合列, 故 I_n 为递减的闭区间列, 且其长度趋近于零。那么根据闭区间套原理, 有且仅有唯一的实数属于全体 I_n 。这就是说, 对于平面上全体横坐标为 t 的点, 有且仅有一个点属于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ 。

最后, 我们说明这个点的纵坐标等于 $T(t)$ 。采用反证法, 若该点纵坐标 (设为 y) 不等于 $T(t)$, 则有 $\epsilon = |y - T(t)| > 0$ 。

根据引理 4.2, 对任意正整数 n , 必有 $y \in [T_{2n-1}(t), T_{2n-1}(t) + 4^{-n}]$ 。然而函数列 $\{T_{2n-1}(x)\}$ 逐点收敛到 $T(x)$, 又因为 $T_{2n-1}(x) < T(x)$, 这便意味着对充分大的 n , 总是有 $T_{2n-1}(t) > T(t) - \epsilon$ 且 $T_{2n-1}(t) + 4^{-n} < T(t) + \epsilon$, 这就导出了矛盾, 进而假设不成立, 必有 $y = T(t)$ 。

综上所述, 对于平面上全体横坐标为 t 的点, 有且仅有 $(t, T(t))$ 属于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ 。由于 $t \in [0, 1]$ 的任意性, 立刻就能得到 $T(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图像 $\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ 。

证毕。

5 高木贞治函数的最大值及其局部水平集

我们在第一部分中便证明了 $T(x)$ 的有界性, 但并没有对其最值或上下确界进行精确的刻画。容易发现 $\min T(x) = 0$, 但是 $\max T(x)$ 的求解便不那么容易了。我们首先给出一个 $T(x)$ 上确界的估计:

引理 5.1 我们有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} T(x) \leq \frac{2}{3}.$$

证明 我们只需在 $[0, 1]$ 上考虑即可。回顾定义 4.1 中对 S_n 的海拔的递推公式

$$H_{n+1} = \frac{1}{4}H_n + \frac{1}{2}.$$

容易得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \frac{2}{3}$ 。此时结合命题 4.2 的结论：

$$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

这便告诉我们任何纵坐标大于 $2/3$ 的点都不可能位于 Γ 中（因为总存在充分大的 n 使得 $H_n < \text{该点的纵坐标}$ ），从而 $\sup_{x \in \mathbb{R}} T(x) \leq 2/3$ 。

证毕。

事实上，这个估计是相当精确的，因为我们可以利用 (2.2) 式方便地验证 $T(1/3) = 2/3$ ，因此：

命题 5.1 $T(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值为 $2/3$ 。

下面，我们将在 $[0, 1]$ 上考察 $T(x)$ 最大值的局部水平集（即全体使得 $T(x) = 2/3$ 的 x 值）。事实上，该集合与 Γ 一样具有自相似的特性。

我们通过一完全初等且新颖的几何视角给出如下命题：

命题 5.2 对 $x \in [0, 1]$ ，设 x 的四进制展开为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{4^n}.$$

其中 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ 。则

$$\left\{ x \in [0, 1] \mid T(x) = \frac{2}{3} \right\} = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in \{1, 2\} \right\}.$$

证明 一方面，利用 (2.2) 式容易验证

$$\left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in \{1, 2\} \right\} \subset \left\{ x \in [0, 1] \mid T(x) = \frac{2}{3} \right\}.$$

另一方面，从图像的角度可以得到

$$\left\{ x \in [0, 1] \mid T(x) = \frac{2}{3} \right\} \subset \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in \{1, 2\} \right\}.$$

下面我们证明之。

首先，我们给出关键观察 1: $T(x)$ 在形如

$$\left[\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{4^k}, \frac{1}{4^n} + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{4^k} \right], \quad n \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq k \leq n, b_k \in \{1, 2\}$$

的区间上的图像与 Γ 相似。

我们可以用归纳法对这一事实进行解释：当 $n = 1$ 时，由命题 4.1 可以直接得到该事实（因为 Φ_1, Φ_2 是相似变换）。而当 n 从 m 增加到 $m + 1$ 时，考虑对 $n = m$ 时上述区

间上 $T(x)$ 的图像进行 Φ_1, Φ_2 所代表的相似变换, 由命题 4.1, 所得到的新图像仍然是 Γ 的一部分, 并且新图像的横坐标所在区间正是 $n = m + 1$ 时的上述区间。因此 $n = m + 1$ 时, 上述区间上 $T(x)$ 的图像依旧与 Γ 相似。

下面我们给出关键观察 2: 对于 $[0, 1]$ 中的 x , 若 $x \leq 1/4$ 或 $x \geq 3/4$, 则一定有 $T(x) < 2/3$ 。换言之, 对于这样的 x , 一定有 $x' \in [0, 1]$ 使得 $T(x') > T(x)$ 。

我们可以通过 Γ 的自相似特性来解释这一事实。具体而言, 考虑 $\Phi_0(\Gamma) = \Gamma_0$, 注意 Φ_0 对纵坐标 y 的作用是 $y \mapsto x/2 + y/4 \leq 1/2 + (2/3)/4 = 2/3$ 。当 $x < 1$ 时, 这一不等式中的等号无法成立, 变换后的 y 自然小于 $2/3$; 而当 $x = 1$ 时 $y = 0$, 等号显然也无法成立。由此可见, Γ_0 中点的纵坐标一定小于 $2/3$; 类似地有 Γ_3 中点的纵坐标一定小于 $2/3$ 。

根据以上两个观察, 我们将通过归纳法证明该命题:

假设 $x \in [0, 1]$ 满足 $T(x) = 2/3$, 设 x 的四进制小数表示为 $0.b_1b_2b_3\cdots$ 。根据第二个观察显然有 $b_1 \in \{1, 2\}$ 。

下面假设 $b_1, b_2, \cdots, b_m \in \{1, 2\}$, 往证 $b_{m+1} \in \{1, 2\}$ 。

首先, 由于 $b_1, b_2, \cdots, b_m \in \{1, 2\}$, 我们可以约束 x 的范围:

$$x \in \left[\sum_{k=1}^m \frac{b_k}{4^k}, \frac{1}{4^m} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{4^k} \right].$$

根据第一个观察, 在 x 所属的这个区间中, T 的图像 (设为 Γ_x) 与 Γ 相似。

根据第二个观察, 若 T 在区间 $[a, b]$ 上的图像 (设为 Γ') 与 Γ 相似, 则 Γ' 的最高点的横坐标一定落在区间

$$\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \right)$$

中。

利用这一性质, 由于 $T(x) = 2/3$, 所以 $(x, T(x))$ 一定是 Γ_x 的最高点, 进而 x 落在区间

$$\left(\sum_{k=1}^m \frac{b_k}{4^k} + \frac{1}{4^{m+1}}, \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{4^k} + \frac{3}{4^{m+1}} \right)$$

中。

这便决定了 $b_{m+1} \in \{1, 2\}$ 。

综上所述, 利用归纳原理, 便可以得到 $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in \{1, 2\}$, 也就是说

$$\left\{ x \in [0, 1] \mid T(x) = \frac{2}{3} \right\} \subset \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in \{1, 2\} \right\}.$$

从而

$$\left\{x \in [0, 1] \mid T(x) = \frac{2}{3}\right\} = \left\{x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{4^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in \{1, 2\}\right\}.$$

证毕。

最后，我们简要给出 Φ_1, Φ_2 对这一局部水平集的作用，其证明与命题 4.1 基本相同，这里不再赘述。

命题 5.3 令

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in [0, 1], y = T(x) = \frac{2}{3} \right\}.$$

若将 L 中的点按照横坐标小于等于 $1/2$ 与大于等于 $1/2$ 分为 L_l, L_r 两个集合，则

$$\Phi_1(L) = L_l, \Phi_2(L) = L_r.$$

6 推广、已知结果与进一步问题

前文分别从二进制展开、割线斜率与图像的仿射递归三个角度研究了经典高木贞治函数。上述方法并不局限于二进制情形。对整数 $r \geq 2$ ，定义高木贞治-范德瓦尔登函数

$$T_r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(r^n x)}{r^n}, \quad \psi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z}).$$

本节首先展示前文方法在一般函数上的直接推广，随后根据学界对 T_r 的水平集理论的研究成果，在此基础上提出若干进一步问题。

6.1 基本性质与函数方程

我们首先通过更加一般的方法给出几个基本结论：

命题 6.1 对每个整数 $r \geq 2$ ，函数 T_r 在 $\mathbb{R}$ 上良定义、连续且以 1 为周期，并满足

$$T_r(x) = \psi(x) + \frac{1}{r} T_r(rx).$$

此外， $T_r(x) = T_r(1-x)$ 对所有 $x \in [0, 1]$ 成立。

证明 由于 $0 \leq \psi(x) \leq 1/2$ ，对任意正整数 N 有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{n>N} \frac{\psi(r^n x)}{r^n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n>N} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{2(r-1)r^N}.$$

故定义 T_r 的函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。每一项均连续且以 1 为周期，因此 T_r 连续且以 1 为周期。将级数的首项分离，得到

$$T_r(x) = \psi(x) + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(r^n(rx))}{r^n} = \psi(x) + \frac{1}{r} T_r(rx).$$

最后, 由 $\psi(t) = \psi(-t)$ 及其周期性,

$$T_r(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(r^n - r^n x)}{r^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(r^n x)}{r^n} = T_r(x).$$

证毕。

命题 6.1 是一般情形下图像递归与极值估计的共同出发点。相比之下, 第二节的二进制显式表示式不能逐字推广: 当 $r > 2$ 时, 一个数码不仅决定相应点位于 ψ 的上升支或下降支, 还包含该半区内部的位置信息。因此, 一般 r 的水平集结构不能只由二值的斜率符号完全决定。

6.2 无处可微性

第三节关于割线斜率的思想可以推广到所有整数 $r \geq 2$, 但适当的网格不再是单纯的 r 进网格, 而是由各部分和的折点组成的 $(2r^n)^{-1}\mathbb{Z}$ 网格。

定理 6.1 对每个整数 $r \geq 2$, 函数 T_r 在 $\mathbb{R}$ 上均不存在有限导数。[5, 11]

证明 记

$$\psi_k(x) := \frac{\psi(r^k x)}{r^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

函数 ψ_k 的右导数 $\psi_k^+(x)$ 处处存在, 且只能取 1 或 -1。固定 $x \in [0, 1)$ 。对每个正整数 n , 选取整数 j_n , 使得

$$u_n := \frac{j_n}{2r^n} \leq x < v_n := \frac{j_n + 1}{2r^n}.$$

显然 $u_n, v_n \rightarrow x$ 。令

$$m_n := \frac{T_r(v_n) - T_r(u_n)}{v_n - u_n}.$$

若 T_r 在 x 处可导, 则由可导函数的割线斜率性质必有 $m_n \rightarrow T_r'(x)$ 。

先设 r 为偶数。对 $0 \leq k \leq n$, 函数 ψ_k 在 $[u_n, v_n]$ 上线性; 对 $k > n$, 数 $r^k u_n$ 与 $r^k v_n$ 均为整数, 故 $\psi_k(u_n) = \psi_k(v_n) = 0$ 。因此

$$m_n = \sum_{k=0}^n \psi_k^+(x),$$

从而

$$m_{n+1} - m_n = \psi_{n+1}^+(x) \in \{-1, 1\}.$$

于是 $\{m_n\}$ 不可能收敛。

再设 r 为奇数。对 $k < n$, 函数 ψ_k 在 $[u_n, v_n]$ 上线性; 对 $k \geq n$, 由 r^{k-n} 为奇数可得

$$\psi(r^k v_n) - \psi(r^k u_n) = \frac{(-1)^{j_n}}{2}.$$

注意到 $v_n - u_n = (2r^n)^{-1}$, 故

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^+(x) + (-1)^{j_n} \sum_{k=n}^{\infty} r^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^+(x) + (-1)^{j_n} \frac{r}{r-1}. \end{aligned}$$

因此

$$m_{n+1} - m_n \in \left\{ \pm 1, \pm 1 + \frac{2r}{r-1}, \pm 1 - \frac{2r}{r-1} \right\}.$$

右端有限集合不含零, 故 $m_{n+1} - m_n$ 不可能趋于零。于是 $\{m_n\}$ 同样不可能收敛。

综上, T_r 在 $[0, 1]$ 上处处不可导; 再由周期性可知它在 $\mathbb{R}$ 上处处不可导。

证毕。

这一定理表明, 奇数底数与偶数底数虽然在图像递归和水平集结构上存在差异, 但并不会产生有限可导点。特别地, 有限或周期的 r 进制展开不能保证 T_r 可导。

6.3 偶数底数下的图像递归

设 $r = 2q$ 为偶数。此时 $1/2 = q/r$ 是一个 r 进分点, 因此 ψ 在每个区间

$$\left[\frac{j}{r}, \frac{j+1}{r} \right], \quad 0 \leq j \leq r-1,$$

上均为线性函数。这使得第四节的仿射递归可以直接推广。

命题 6.2 设

$$\Gamma_r := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ T_r(x) \end{pmatrix} \mid x \in [0, 1] \right\}.$$

对 $0 \leq j < q$, 定义

$$\Phi_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+j)/r \\ (x+y+j)/r \end{pmatrix};$$

对 $q \leq j < r$, 定义

$$\Phi_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+j)/r \\ (-x+y+r-j)/r \end{pmatrix}.$$

则

$$\Gamma_r = \bigcup_{j=0}^{r-1} \Phi_j(\Gamma_r).$$

证明 任取 $t \in [0, 1]$ 并令 $x = (j+t)/r$ 。若 $0 \leq j < q$, 则 $x \leq 1/2$, 由命题 6.1 得

$$T_r \left(\frac{j+t}{r} \right) = \frac{j+t}{r} + \frac{1}{r} T_r(t).$$

若 $q \leq j < r$, 则 $x \geq 1/2$, 同理有

$$T_r\left(\frac{j+t}{r}\right) = 1 - \frac{j+t}{r} + \frac{1}{r}T_r(t).$$

这两式分别给出 $\Phi_j(\Gamma_r)$ 在相应子区间上的图像, 合并即可。

证毕。

据此可以仿照命题 4.2, 令

$$S_0 = [0, 1] \times \left[0, \frac{r}{2(r-1)}\right], \quad S_{n+1} := F_r(S_n),$$

其中

$$F_r(S) := \bigcup_{j=0}^{r-1} \Phi_j(S).$$

由各 Φ_j 的表达式可验证 $S_1 \subset S_0$, 故 $\{S_n\}$ 是递减紧集列。各竖直接面的高度在每次迭代后缩小为原来的 $1/r$, 再结合式 (6.2) 可得

$$\Gamma_r = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n.$$

这说明第四节的点集构造并非二进制情形所独有。

若 r 为奇数, 则 $1/2$ 位于中央 r 进区间的内部, 中央区间必须再次分割。因此, 式 (6.2) 不再给出同样整齐的 r 分支系统; 若要保留有限状态的递归结构, 需要同时记录图像的左半部分与右半部分, 并建立图导向的自仿射系统。这是奇数底数与偶数底数之间的第一个本质差异。

6.4 最大值及最大值点集

第五节中的递归过程可以抽象、推广, 得到不直接依赖图像性质的更简洁的最大值计算方法, 适用于一般的 T_r 。

定理 6.2 记

$$M_r := \max_{x \in [0, 1]} T_r(x), \quad E_r := \{x \in [0, 1] : T_r(x) = M_r\}.$$

则有如下结论:

(1) 若 r 为奇数, 则

$$M_r = \frac{r}{2(r-1)}, \quad E_r = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

(2) 若 r 为偶数, 则

$$M_r = \frac{r^2}{2(r^2-1)}.$$

进一步, $x \in E_r$ 当且仅当 x 存在一个 r^2 进制展开

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{r^{2n}}$$

使得

$$\frac{r^2 - r}{2} \leq \omega_n \leq \frac{r^2 + r - 2}{2} \quad (n \geq 1).$$

特别地, E_r 是一个 Hausdorff 维数为 $1/2$ 的自相似 Cantor 型集合。

证明 若 r 为奇数, 则由 $\psi \leq 1/2$,

$$T_r(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{r}{2(r-1)}.$$

当 $x = 1/2$ 时, $r^n x$ 对所有 n 均为半整数, 故每一项都取到上界 $1/2$ 。反之, 若 $T_r(x)$ 取到该上界, 则首项必须满足 $\psi(x) = 1/2$; 在 $[0, 1]$ 上这只能发生于 $x = 1/2$, 故最大值点唯一。

以下设 r 为偶数。我们先证明对任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) + \frac{1}{r} \psi(rt) \leq \frac{1}{2}.$$

由周期性与关于 $1/2$ 的对称性, 只需考虑 $t \in [0, 1/2]$ 。若

$$0 \leq t \leq \frac{r-1}{2r},$$

则

$$\psi(rt) \leq \frac{1}{2} \leq r \left(\frac{1}{2} - t \right).$$

若

$$\frac{r-1}{2r} \leq t \leq \frac{1}{2},$$

则 $rt \in [(r-1)/2, r/2]$, 且 $r/2$ 为整数, 因此

$$\psi(rt) = \frac{r}{2} - rt = r \left(\frac{1}{2} - t \right).$$

这就完成了证明。容易发现等号成立当且仅当

$$\{t\} \in \left[\frac{r-1}{2r}, \frac{r+1}{2r} \right],$$

其中 $\{t\}$ 表示 t 的小数部分。

将定义级数中的项两两配对, 得到

$$\begin{aligned} T_r(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} \left(\psi(r^{2k}x) + \frac{1}{r} \psi(r^{2k+1}x) \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} = \frac{r^2}{2(r^2-1)}. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当式 (6.8) 对 $t = r^{2k}x$ 及所有 $k \geq 0$ 成立。区间

$$\left[\frac{r-1}{2r}, \frac{r+1}{2r} \right]$$

恰为下列 r 个连续的 r^2 进基本区间之并：

$$\left[\frac{\omega}{r^2}, \frac{\omega+1}{r^2} \right], \quad \frac{r^2-r}{2} \leq \omega \leq \frac{r^2+r-2}{2}.$$

因此，对每个 k 的等号条件，允许数码共有 r 个，而每个相似分支的压缩比为 r^{-2} ，故

$$\dim_H E_r = \frac{\log r}{\log r^2} = \frac{1}{2}.$$

证毕。

当 $r = 2$ 时，式 (6.4) 给出 $M_2 = 2/3$ ，正好恢复第五节的结论。上述一般最大值及其最大值点集的刻画由 Baba 研究得到 [6]。

6.5 水平集：已知结果与进一步问题

上述方法能够完全处理最大值水平集 $L_r(M_r)$ ，并能利用斜率为零的部分和区间构造若干重复的图像片段。然而，对于一般高度 y ，不同尺度的图像片段可能以复杂方式相交，仅靠前文的嵌套集合方法尚不足以判定 $L_r(y)$ 的基数与维数。

下面叙述数学史上已经得到的重要结果：

- (1) Allaart 证明，对每个整数 $r \geq 2$ ，就值域上的 Lebesgue 测度而言，几乎处处的 y 所对应的水平集 $L_r(y)$ 是有限集；另一方面，就 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度而言，几乎处处的 x 所对应的水平集 $L_r(T_r(x))$ 是不可数集。两个结论中的“几乎处处”分别针对纵坐标与横坐标，因而并不矛盾。作为推论， T_r 的占据测度关于 Lebesgue 测度是奇异的 [11]。
- (2) 当把 x 视为 $[0, 1]$ 上的随机变量时， T_r 各部分和的斜率形成取值于整数的随机游走。偶数 r 对应简单对称随机游走；奇数 r 对应保持同一方向概率为 $(r+1)/(2r)$ 的相关随机游走。这一概率结构解释了奇偶情形在水平集理论中的差异 [11]。
- (3) 对经典情形 $r = 2$ ，Lagarias 与 Maddock 利用二进制数码和定义了局部水平集，并证明每个局部水平集或者是有限集，或者是 Cantor 集 [10]。Jiang、Ying 与 Zhang 将相应概念推广到所有偶数 r ，并证明：若 y 在 T_r 的值域上服从均匀分布，则 $L_r(y)$ 中所含局部水平集数量的期望为 $1 + 1/r$ 。这一推广需要同时记录部分和斜率的绝对值以及数码在反射 $a \mapsto r-1-a$ 下的关系 [12]。
- (4) 对偶数 r ，已有方法可由自仿射分解推出任意水平集的 Hausdorff 维数不超过 $1/2$ [8, 11]；定理 6.2 表明最大值水平集恰好达到这一上界。对奇数 r ，中央数码导致的分支依赖使同一维数上界不能由相同论证直接得到。

进一步问题

问题 6.1 记

$$\mathcal{E}_r^\infty := \{y \in [0, M_r] : |L_r(y)| = \infty\}, \quad \mathcal{E}_r^{\text{unc}} := \{y \in [0, M_r] : L_r(y) \text{ 不可数}\}.$$

能否利用进制展开或图像递归, 给出 $y \in \mathcal{E}_r^\infty$ 或 $y \in \mathcal{E}_r^{\text{unc}}$ 的可检验判据? 这些异常高度集合的 Hausdorff 维数与拓扑结构分别如何?

问题 6.2 对奇数 r , 能否建立一种自然的数码等价关系, 使每个等价类均包含于某个水平集, 并由此定义与偶数底数情形相容的局部水平集? 若能, 这些局部水平集何时有限, 何时为 Cantor 型集合?

问题 6.3 当 r 为奇数时, 是否对每个 $y \in [0, M_r]$ 都有

$$\dim_{\text{H}} L_r(y) \leq \frac{1}{2}?$$

若该上界成立, 哪些水平集能够取到等号?

参考文献

- [1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析 (第五版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [2] 于品. 数学分析课程讲义 (丘成桐数学英才班试用) [D]. 北京: 清华大学数学系、丘成桐数学科学中心.
- [3] Takagi T. A simple example of the continuous function without derivative[J]. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, 1903, 1: 176–177.
- [4] van der Waerden B L. Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion[J]. Mathematische Zeitschrift, 1930, 32: 474–475.
- [5] Billingsley P. Van der Waerden's continuous nowhere differentiable function[J]. The American Mathematical Monthly, 1982, 89(9): 691.
- [6] Baba Y. On maxima of Takagi–van der Waerden functions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1984, 91(3): 373–376.
- [7] Allaart P C, Kawamura K. The Takagi function: a survey[J]. Real Analysis Exchange, 2011/2012, 37(1): 1–54.
- [8] de Amo E, Bhouri I, Díaz Carrillo M, Fernández-Sánchez J. The Hausdorff dimension of the level sets of Takagi's function[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(15): 5081–5087.
- [9] Lagarias J C, Maddock Z. Level sets of the Takagi function: generic level sets[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2011, 60(6): 1857–1884.

- [10] Lagarias J C, Maddock Z. Level sets of the Takagi function: local level sets[J]. Monatshefte für Mathematik, 2012, 166(2): 201–238.
- [11] Allaart P C. On the level sets of the Takagi–van der Waerden functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 419(2): 1168–1180.
- [12] Jiang L, Ying T T, Zhang Y Y. Local level sets of the Takagi–van der Waerden function[EB/OL]. arXiv:2508.21683v2, 2026.