

有理距离正方形问题：由海伦三角形派生出的丢番图方程及其可解性与应用

赵佳庆

山西省忻州市高级中学校

指导老师：苏艳

2026 年 9 月 15 日

摘要

本文在有理距离正方形问题上的一种等价参数构造式子中派生出一种丢番图方程，严谨论证了其有解性问题，同时运用这种方程重新证明了当点落在正方形边上时，不存在四条边长同时均为有理数的情况。

关键词：有理距离正方形问题，欧拉四参数海伦三角形构造，丢番图方程，无穷递降法，模分析

说明

有理距离问题一直是一个困扰数学界多年的问题，本文在原方程基础上调换了一项中两个参数的位置，发现新的方程的正整数有解性非常便于论证，就在这两个参数的差异，带来了问题复杂度的升华。或许新方程可以帮助我们对于这个问题的探究（本文仅用于点落在边上时无解性的论证），同时我们也可以通过其他参数修改来获取更多信息。

目录

1 引言	4
1.1 有理距离正方形问题的等价转化与参数构造公式推导	4
1.2 原二式的修改与修改后二式正整数有解性定理	6
2 定理证明	6
2.1 换元与基础恒等式	6
2.2 $V \neq U$	7
2.3 $V = U$	10
2.4 验证	10
3 原二式在 $m = n$ 或 $p = q$ 时无正整数解的证明	10
4 致谢	12

1 引言

1.1 有理距离正方形问题的等价转化与参数构造公式推导

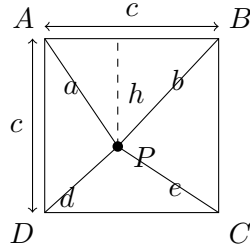


图 1: 边长为 c 的正方形, 内部点 P 连接四顶点; $PA = a$, $PB = b$, $PC = e$, $PD = d$, h 为点 P 到正方形上边界的垂直距离

结合几何关系可得:

$$\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} = c$$

两边平方:

$$a^2 - h^2 + b^2 - h^2 + 2\sqrt{(a^2 - h^2)(b^2 - h^2)} = c^2$$

移项:

$$2\sqrt{(a^2 - h^2)(b^2 - h^2)} = c^2 - a^2 - b^2 + 2h^2$$

再次平方两边:

$$4(a^2 - h^2)(b^2 - h^2) = (c^2 - a^2 - b^2 + 2h^2)^2$$

展开两侧并消去 $4h^4$:

$$4a^2b^2 - 4a^2h^2 - 4b^2h^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4h^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

整理同类项:

$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4h^2(a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)) = 4h^2c^2$$

对左侧做平方差因式分解:

$$\begin{aligned} 4h^2c^2 &= (2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + a^2 + b^2 - c^2) \\ &= (c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2) \\ &= (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c) \end{aligned}$$

由三角形海伦面积公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)}$$

于是

$$4h^2c^2 = 16S^2 \implies h = \frac{2S}{c}$$

再建立方程组

$$\begin{cases} (c-h)^2 + a^2 - h^2 = d^2 \\ (c-h)^2 + b^2 - h^2 = e^2 \end{cases}$$

展开化简：

$$\begin{cases} c^2 - 2ch + a^2 = d^2 = F_1 \\ c^2 - 2ch + b^2 = e^2 = F_2 \end{cases}$$

代入 $2ch = 4S$ ，得到核心表达式：

$$F_1 = a^2 + c^2 - 4S, \quad F_2 = b^2 + c^2 - 4S$$

寻找五条线段 (a, b, c, d, e) 均为正有理数的情况在相似比例缩放下等价。

现在，我们来讨论一下分割出的每个三角形面积的数值性质：

建立平面直角坐标系，设正方形顶点为 $A(0,0), B(c,0), C(c,c), D(0,c)$ ，其中边长 c 为有理数，并设内点 $P(x,y)$ ，点 P 到四个顶点的距离 PA, PB, PD, PC 均为有理数。将距离平方等式两两作差，可得

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}, \quad y = \frac{b^2 - e^2 + c^2}{2c}$$

由于 c, a, b, e 为有理数，故 x, y 均为有理数。

三角形面积可由行列式公式表达：

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

构成四个分割三角形的顶点坐标全部为有理数，有理数经过四则运算后仍为有理数，由此推出 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PAD$ 的面积各自均为正有理数。因此， $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PAD$ 均为有理海伦三角形

根据 Guy, Jordan 的表述：“海伦三角形可以由两个勾股直角三角形沿公共直角边拼接而成。并非每一个整数海伦三角形都可以由整数参数的拼接得到；但允许参数取有理数时，可以得到全部有理边长海伦三角形的相似等价类。”我们运用欧拉四参数海伦三角形构造，引入有理比例因子 o ，这个比例因子将全部有理参数的分母乘积吸收，将有理海伦三角形构造等价转化为含有理比例因子的本原整数海伦三角形构造

由此，我们引入正整数参数 m, n, p, q ($\gcd(m, n) = 1, \gcd(p, q) = 1, mp > nq$) 与正有理数参数 o 得到：

$$\begin{cases} a = omn(p^2 + q^2) \\ b = opq(m^2 + n^2) \\ c = o(mq + np)(mp - nq) \\ S = o^2 mnpq(mq + np)(mp - nq) \end{cases}$$

将构造式代入 F_1, F_2 ，展开得到：

$$\begin{aligned} d^2 &= o^2 [m^2 n^2 (p^2 + q^2)^2 - 4mnpq(mq + np)(mp - nq) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2] \\ e^2 &= o^2 [p^2 q^2 (m^2 + n^2)^2 - 4mnpq(mq + np)(mp - nq) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2] \end{aligned}$$

现在, 我们已经保证了边长 a, b, c 均为有理数, 只需要寻找 d, e 的有理数有解性即可, 也就是探索二式

$$F_1 = m^2 n^2 (p^2 + q^2)^2 - 4mnpq(mq + np)(mp - nq) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2$$

$$F_2 = p^2 q^2 (m^2 + n^2)^2 - 4mnpq(mq + np)(mp - nq) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2$$

是否有正整数解

1.2 原二式的修改与修改后二式正整数有解性定理

以上二式正整数有解性探索相对困难。本文通过对第二项局部参数修改, 将原二式修改为探索一个相对简单的丢番图方程正整数有解性问题。同时, 通过运用修改后的丢番图方程的正整数有解性的结论, 证明了原二式在 $m = n$ 或 $p = q$ 时无正整数解, 也就是点落在正方形边长上的情况无解。

修改后的丢番图方程为:

$$F_1' = m^2 n^2 (p^2 + q^2)^2 - 4mnpq(m^2 p^2 - n^2 q^2) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2$$

$$F_2' = p^2 q^2 (m^2 + n^2)^2 - 4mnpq(m^2 p^2 - n^2 q^2) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2$$

定理. 设正整数 m, n, p, q 满足

$$\gcd(m, n) = \gcd(p, q) = 1 \quad mp > nq$$

记

$$F_1' = m^2 n^2 (p^2 + q^2)^2 - 4mnpq(m^2 p^2 - n^2 q^2) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2$$

$$F_2' = p^2 q^2 (m^2 + n^2)^2 - 4mnpq(m^2 p^2 - n^2 q^2) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2$$

若 F_1', F_2' 同时为完全平方数, 则必有

$$m = p, \quad n = q, \quad m > n, \quad \gcd(m, n) = 1$$

并且此时

$$F_1' = F_2' = [mn(m^2 - 3n^2)]^2$$

2 定理证明

2.1 换元与基础恒等式

令

$$X = mp, \quad Y = nq, \quad U = mq, \quad V = np$$

由条件 $mp > nq$ 得到 $X > Y > 0$, 同时 X, Y, U, V 满足:

$$XY = UV \quad (1)$$

设 $F_1 = x^2$, $F_2 = y^2$, 其中 x, y 为正整数。引入辅助量

$$A = XV + UY - (U + V)(X - Y), \quad B = XU + VY - (U + V)(X - Y)$$

经过化简可得以下等式:

$$x^2 - A^2 = 2(X - Y)(V - U)(XV - UY) \quad (2)$$

$$y^2 - B^2 = 2(X - Y)(U - V)(XU - VY) \quad (3)$$

$$A - B = (X - Y)(V - U) \quad (4)$$

另外, 直接作差 $F_1 - F_2$, 得到

$$x^2 - y^2 = (X^2 - Y^2)(V^2 - U^2) \quad (5)$$

2.2 $V \neq U$

由式 (2), $x^2 > A^2$, 即 $x > A$ 。结合式 (4) 以及 $X > Y, V > U$, 可知 $A > B$ 。再由式 (5) 推得 $x^2 > y^2$, 即 $x > y$ 。

将 (2) 与 (3) 两式相加:

$$(x^2 - y^2) - (A^2 - B^2) = 2(X - Y)[(V - U)(XV - UY) + (U - V)(XU - VY)]$$

对右侧括号内代数式化简:

$$\begin{aligned} (V - U)(XV - UY) + (U - V)(XU - VY) &= (V - U)(XV - UY - XU + VY) \\ &= (V - U)(X(V - U) + Y(V - U)) \\ &= (X + Y)(V - U)^2 \end{aligned}$$

于是得到

$$(x^2 - y^2) - (A^2 - B^2) = 2(X - Y)(X + Y)(V - U)^2 \quad (6)$$

利用式 (5) 变形:

$$x^2 - y^2 = (X^2 - Y^2)(V^2 - U^2) = (X - Y)(X + Y)(V - U)(V + U)$$

利用式 (4) 变形:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = (X - Y)(V - U)(A + B)$$

将上面两式代入 (6), 由于 $X > Y, V \neq U$, 因子 $(X - Y)(V - U) \neq 0$, 可以等式两边同时约去, 得到

$$(X + Y)(V + U) - (A + B) = 2(X + Y)(V - U)$$

整理为

$$A + B = (X + Y)(3U - V) \quad (7)$$

另一方面，直接由 A, B 的定义求和：

$$\begin{aligned}
 A + B &= XV + UY + XU + VY - 2(U + V)(X - Y) \\
 &= X(V + U) + Y(U + V) - 2(U + V)(X - Y) \\
 &= (U + V)[(X + Y) - 2(X - Y)] \\
 &= (U + V)(3Y - X)
 \end{aligned} \tag{8}$$

联立 (7)(8)：

$$(X + Y)(3U - V) = (U + V)(3Y - X)$$

展开两端：

$$3UX + 3UY - VX - VY = 3UY + 3VY - UX - VX$$

消去两侧相同项 $3UY, -VX$ ，化简得到

$$3UX - VY = 3VY - UX \implies 4UX = 4VY \implies UX = VY \tag{9}$$

将 $X = mp, Y = nq, U = mq, V = np$ 回代进 (9)：

$$(mp)(mq) = (np)(nq) \implies m^2 pq = n^2 pq$$

因 p, q 为正整数， $pq \neq 0$ ，约去得到 $m^2 = n^2$ 。结合 $\gcd(m, n) = 1$ ，推出

$$m = n = 1$$

此时条件 $mp > nq$ 简化为 $p > q$ 。将 $m = n = 1$ 代入 F_1 ：

$$F_1 = (p^2 + q^2)^2 - 4pq(p + q)(p - q) + (p + q)^2(p - q)^2$$

展开化简：

$$F_1 = 2p^4 + 2q^4 - 4pq(p^2 - q^2)$$

下面使用引理：方程

$$z^2 = 2p^4 + 2q^4 - 4pq(p^2 - q^2), \quad p > q > 0, \gcd(p, q) = 1$$

不存在正整数解。因此该情形下不存在满足条件的参数，假设 $V \neq U$ 不成立。

证明。采用模 4 分析结合无穷递降法。整数四次方满足 $t^4 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 。由于 $\gcd(p, q) = 1$ ， p, q 不可能同为偶数，分两类讨论：

1. 若 p, q 为一奇一偶：不妨设 p 奇， q 偶。 $p^4 \equiv 1, q^4 \equiv 0 \pmod{4}$ 。

$$2p^4 + 2q^4 \equiv 2 \pmod{4}, \quad 4pq(p^2 - q^2) \equiv 0 \pmod{4}$$

所以

$$2p^4 + 2q^4 - 4pq(p^2 - q^2) \equiv 2 \pmod{4}$$

但平方数只能模 4 余 0, 1，矛盾。

2. 若 p, q 均为奇数：此时方程可配方为

$$z^2 = (p^2 - q^2 - 2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 \quad (9)$$

由于 p, q 均为奇数, $M = p^2 - q^2 - 2pq$ 与 $N = p^2 - q^2$ 均为偶数。令 $z = 2z_1, M = 2M_1, N = 2N_1$, 则

$$z_1^2 = M_1^2 + N_1^2$$

由于 p, q 均为奇数, 有

$$N = p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{8}, \quad M = p^2 - q^2 - 2pq \equiv -2 \equiv 2 \pmod{4}$$

故

$$N_1 = \frac{N}{2} \equiv 0 \pmod{4}$$

为偶数, 而

$$M_1 = \frac{M}{2} \equiv 1 \pmod{2}$$

为奇数。

下面证明 $\gcd(M_1, N_1) = 1$ 。反设存在奇素数 l 同时整除 M_1 和 N_1 。由 $l \mid N_1$ 得

$$l \mid N = p^2 - q^2$$

由 $l \mid M_1$ 得

$$l \mid M = p^2 - q^2 - 2pq$$

两式相减得

$$l \mid 2pq$$

因 l 为奇素数, 故

$$l \mid pq$$

若 $l \mid p$, 则由 $l \mid p^2 - q^2$ 得 $l \mid q^2$, 从而 $l \mid q$, 与 $\gcd(p, q) = 1$ 矛盾; 若 $l \mid q$, 同理可得 $l \mid p$, 同样矛盾。因此不存在这样的奇素数 l , 即

$$\gcd(M_1, N_1) = 1$$

因为 $\gcd(M_1, N_1) = 1$, 且 M_1 奇、 N_1 偶, 故这是一组本原勾股数。因此存在互素且一奇一偶的正整数 $u > v > 0$, 使得

$$M_1 = u^2 - v^2, \quad N_1 = 2uv$$

另一方面, 令 $p = g + h, q = g - h$ (其中 $g > h > 0, \gcd(h, g) = 1$, 且 g, h 一奇一偶), 则

$$N_1 = \frac{p^2 - q^2}{2} = 2gh, \quad M_1 = \frac{p^2 - q^2 - 2pq}{2} = h^2 + 2gh - g^2$$

比较 N_1 可得 $uv = gh$ 。由于 u, v 与 g, h 均为互素且一奇一偶, 必有 $\{u, v\} = \{g, h\}$ 。

若 $u = g, v = h$, 则 $M_1 = g^2 - h^2$, 与原式联立得

$$g^2 - h^2 = h^2 + 2gh - g^2 \implies g^2 - gh - h^2 = 0$$

两边除以 h^2 得 $(g/h)^2 - (g/h) - 1 = 0$, 解得 $g/h = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 为无理数, 与 g, h 是正整数矛盾。

若 $u = h, v = g$, 则 $M_1 = h^2 - g^2$, 与原式联立得

$$h^2 - g^2 = h^2 + 2gh - g^2 \implies 2gh = 0$$

这与 $g > h > 0$ 矛盾。故此时原方程亦无正整数解。□

2.3 $V = U$

前面 $V \neq U$ 原方程时, 原方程无正整数解, 因此只能

$$V = U \quad (10)$$

将 $U = mq, V = np$ 代入:

$$np = mq \implies \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

已知 $\gcd(m, n) = \gcd(p, q) = 1$, 既约分数相等, 故

$$m = p, \quad n = q$$

再由 $mp > nq$ 得到 $m^2 > n^2$, 即 $m > n$ 。

2.4 验证

当 $m = p, n = q$ 时, 代入表达式:

$$\begin{aligned} F_1' &= m^2 n^2 (m^2 + n^2)^2 - 4m^2 n^2 (m^4 - n^4) + (2mn)^2 (m^2 - n^2)^2 \\ &= m^2 n^2 [(m^2 + n^2)^2 - 4(m^4 - n^4) + 4(m^2 - n^2)^2] \\ &= m^2 n^2 (m^2 - 3n^2)^2 \end{aligned}$$

同理 $F_2' = F_1'$ 。于是

$$F_1' = F_2' = [mn(m^2 - 3n^2)]^2$$

确实为完全平方数。

综上, 定理条件下所有解满足 $m = p, n = q, m > n, \gcd(m, n) = 1$ 。定理证毕。

3 原二式在 $m = n$ 或 $p = q$ 时无正整数解的证明

若点到正方形顶点距离 d, e 均为正整数, 则括号内表达式

$$\begin{aligned} 1 &= m^2 n^2 (p^2 + q^2)^2 - 4mnpq(mq + np)(mp - nq) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2 \\ 2 &= p^2 q^2 (m^2 + n^2)^2 - 4mnpq(mq + np)(mp - nq) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2 \end{aligned}$$

必须同时为完全平方数, 对比定理定义的 F_1', F_2' :

$$\begin{aligned} F_1' &= m^2 n^2 (p^2 + q^2)^2 - 4mnpq(m^2 p^2 - n^2 q^2) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2 \\ F_2' &= p^2 q^2 (m^2 + n^2)^2 - 4mnpq(m^2 p^2 - n^2 q^2) + (mq + np)^2 (mp - nq)^2 \end{aligned}$$

$_{1,2}$ 与 F_1, F_2 的首尾两项完全相同。若希望借用修改后二式正整数有解性定理的结论分析 $_{1,2}$ 正整数有解性, 则可以在参数构造相同的情况下, 使修改前后两式相等

$$mnpq(mq + np)(mp - nq) = mnpq(m^2p^2 - n^2q^2)$$

因 $m, n, p, q \in \mathbb{N}^+$, $mnpq > 0$, 两边消去公因子, 得到

$$(mq + np)(mp - nq) = m^2p^2 - n^2q^2$$

将右侧因式分解 $m^2p^2 - n^2q^2 = (mp - nq)(mp + nq)$, 移项并提取公因子:

$$(mp - nq)[(mq + np) - (mp + nq)] = 0$$

根据前提条件 $mp > nq$, 有 $mp - nq \neq 0$, 于是

$$mq + np = mp + nq$$

整理得到

$$(m - n)(p - q) = 0$$

分两种情形讨论:

1. $m = n$ 。结合本原条件 $\gcd(m, n) = 1$, 推得 $m = n = 1$ 。若 $_{1,2}$ 同为完全平方数, 套用定理 1.1, 必须满足 $m = p$, $n = q$, 即 $p = q = 1$ 。此时 $mp = 1$, $nq = 1$, 与 $mp > nq$ 矛盾;
2. $p = q$ 。结合本原条件 $\gcd(p, q) = 1$, 推得 $p = q = 1$ 。同理可得 $m = n = 1$, 再次得到 $mp = nq = 1$, 违反不等式 $mp > nq$ 。

两种情形均导出矛盾。因此原二式在 $m = n$ 或 $p = q$ 时无正整数解。当 $m = n = 1$ 或 $p = q = 1$ 时, 原图形恰好满足点落在正方形边长上的情景, 所以我们便重新用一种新的方法证明了点在正方形边长上无解。

参考文献

- [1] ProofWiki. *Area of Integer Heronian Triangle is Multiple of 6*. https://proofwiki.org/wiki/Area_of_Integer_Heronian_Triangle_is_Multiple_of_6. Accessed 2026-09-15.
- [2] Guy, R. K. *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd ed., Section D21, pp. 188–190. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [3] 冯志刚. 初等数论, 第 1 版. 上海: 华东师范大学出版社, 2011.

4 致谢

本课题研究源于我对有理距离正方形这一经典几何 - 数论公开问题的个人兴趣。我以欧拉四参数海伦三角形构造作为出发点, 完成几何问题向丢番图方程的等价转化; 研究过程中改写方程, 运用换元变换、模分析、无穷递降法完成改写后方程式定理证明, 再借助该定理给出点落在正方形边上情形无解性的一套新证明。课题全程的代数化简、方程构造、引理设计、分类讨论、矛盾推导, 都经过大量反复验算与自我纠错, 修正多处代数展开与逻辑链条上的漏洞, 最终完成本篇研究报告。

感谢我的指导老师苏艳老师。老师为本课题提供方向上的指引, 提醒我注意推导的严谨性。全部几何建模、丢番图方程改写、定理构思、证明推演、数值核验、论文撰写工作均由本人独立完成, 本次指导为无偿义务指导。同时感谢班主任王进老师, 理解我投入课外科研的时间, 在日常学习上给予包容与支持。

本课题为单人独立研究。研究过程中遇到不少困难: 高次多项式展开容易出现计算错误; 同时推导过程中试错了一些方法。我手动演算, 反复分情况讨论, 排查论证缺陷, 逐步完善整套证明。

人工智能工具使用说明

本课题研究使用人工智能工具: Deepseek。AI 仅作为辅助工具, 不参与核心猜想、方程构造、定理证明, 具体使用场景:

1. 概念与文献辅助: 查阅海伦三角形、整数边有理面积定理及其参考文献;
2. 文稿辅助: 帮助提供 overleaf 数学书写代码。

郑重声明: 本文全部研究思路、方程改造想法、换元策略、模分析与无穷递降证明, 均由本人独立思考完成。AI 只做资料查阅、验算辅助和文字润色。本人对论文中全部数学推导、结论完整承担学术责任。

感谢学校提供的学习环境, 感谢相关数论书籍文献带给我的启发。