

参赛学生姓名： 吴祺乐 陈韵吉 陈瀚林

中学： 同济大学第二附属中学

省份： 上海市

国家/地区： 中国

指导老师姓名： 李孟飞

指导老师单位： 同济大学第二附属中学

论文题目： 图约束耦合的有限极值归约与若干锐界

# 图约束耦合的有限极值归约与若干锐界

吴祺乐 陈韵吉 陈瀚林

## 摘要

受对话历史撤回后状态一致性问题启发, 本文研究图约束耦合: 给定图上各顶点在同一有限取值集合中的概率分布, 构造保持全部边际分布的联合分布, 使各边两端状态尽量一致。单条边的最小不一致概率等于全变差距离, 但各边的最优安排未必能同时实现。对含边的有限无向简单图  $G$ , 记  $c(G)$  为对任意这类分布族都适用的最小倍数, 使各边的一致概率至多为相应全变差距离的  $c(G)$  倍。

本文的主要结果是固定图的有限极值归约: 对每个固定的  $n$  顶点图, 尽管输出符号数量不受限制, 最坏因子仍可由至多  $n$  个输出符号上的有理分布族达到。利用保持全变差的表示与极点分解, 将这一最坏情形的优化归约为有限多个有理线性规划, 从而证明  $c(G)$  是可精确计算的有理数, 并给出严格小于 2 的显式上界。

对圈图, 通过按边距离平衡删边概率并拼接树耦合, 得到锐界  $c(C_n) = 2 - 2/n$  ( $n \geq 3$ )。证明图的耦合常数等于各块常数的最大值, 由此确定森林和仙人掌图的精确常数; 同时得到  $c(K_4) = 3/2$  及记录删除所对应的超立方体图的上下界, 并以小阶枚举和精确证书核验相关结论。

分布访问方式还决定了可达到的保证。上述构造可读取整个分布族; 若每个顶点仅能读取自身分布, 并须对每个有限取值集合预先固定适用于所有分布赋值的采样规则, 则每个含边连通图的最优因子为 2。因此, 读取整个分布族在每个固定的含边连通图上都能取得严格更小的最坏因子。

**关键词:** 图约束耦合; 全变差; 有限极值归约; 仙人掌图; 相关采样。

# 目录

|                  |    |
|------------------|----|
| 摘要               | I  |
| 1 引言             | 1  |
| 1.1 研究背景与问题动机    | 1  |
| 1.2 基本定义与问题表述    | 2  |
| 1.3 主要结果         | 4  |
| 1.4 相关工作与本文贡献    | 4  |
| 2 有限极值归约         | 5  |
| 3 圈图的耦合常数        | 9  |
| 4 图结构与耦合常数       | 11 |
| 5 边际信息约束下的耦合     | 13 |
| 6 构造算法与最优性证书     | 14 |
| 6.1 仙人掌图上的采样算法   | 14 |
| 6.2 耦合优化的线性规划    | 15 |
| 6.3 有理数证书与精确核验   | 15 |
| 7 讨论与进一步问题       | 16 |
| 7.1 记忆撤回模型的适用范围  | 16 |
| 7.2 结果的局限与进一步问题  | 16 |
| A 计算核验           | 17 |
| A.1 圈图与仙人掌图的构造检验 | 17 |
| A.2 极点枚举与精确验证    | 17 |
| A.3 全部构造检验的输入    | 18 |
| A.4 随附计算材料的内容与使用 | 19 |
| 参考文献             | 20 |
| 致谢               | 21 |

# 1 引言

## 1.1 研究背景与问题动机

本研究源于对网络上“家克”这一称呼的关注。Claude 是基于大语言模型的人工智能对话系统，一些使用者将自己熟悉的 Claude 亲昵地称为“家克”。从构词和使用语境看，“克”对应其中文音译“克劳德”，“家”可理解为“我家的”，带有个体化和归属意味。这一称呼及其周围的讨论，使我们开始关注长期人机交流中的记忆与连续性问题。

相关学术研究已讨论使用者如何在互动中赋予通用对话系统以陪伴、指导等关系角色 [16]。面向社交互动的聊天机器人研究也将记忆纳入系统设计：例如，RECALLbot 将记忆构建与相互披露策略结合，即让用户和机器人在对话中轮流分享有关自身的信息，考察这些设计在人机关系形成中的作用，并提供对共同记忆的查看、修改和删除等功能 [17]。这些工作促使我们进一步关注：当系统积累的历史记录需要调整时，如何使更新后的状态与保留的信息一致？

本文将可能影响后续输出的历史记录称为“记忆”，并聚焦其中的撤回操作。一条记录可能因错误、过时或用户意愿而被删除。我们希望删除能使系统反映当前保留的信息，同时尽量减少对现有状态的扰动。这里比较的“状态”是预先约定的输出，以同一有限集合中的元素表示。保留记录集合用于索引不同的输入条件，不直接作为被比较状态的一部分；否则，不同记录集合就会使状态必然不同，便无法用这一比较衡量输出是否保持不变。

本文采用有限状态表示。例如，在一个假设的固定问题实验中，系统只允许选择预先写好的四条回复，这四条完整回复就是四种状态。也可以预先规定共同的有限分类规则，将输出或摘要编码为状态标签，此时状态相同表示输出属于同一类别。若直接以完整文本为状态，则须限定词表及输出长度。采用分类或截断时，下文结论描述的是所选有限表示下的状态一致性。

对于 Claude 这类对话系统，还需要考虑生成过程的随机性。其官方文档说明，即使输入相同，不同次调用也可能产生不同输出 [18]。因此，删除记录前后的输出差异，既可能来自输入的改变，也可能来自生成时不同的随机选择。仅用保留记录重新运行系统，所得状态可以用一个概率分布描述。本文以该分布为更新后的基准：所选更新方式必须保持这个分布，同时尽量减少状态变化的概率。分布正确性是先决约束；例如，删除错误记录后若原回答不再具有正概率，任何允许的更新方式都不能继续输出它。我们优化的是满足该约束后的随机安排。

当多条记录先后撤回时，我们还希望最终状态不依赖删除顺序。仅要求最终分布相同并不够：沿两条路径重新抽样，仍可能得到不同的实际状态。为实现这一设计要求，本文让所有保留记录集合共享同一个随机源，并为每个集合规定一个从随机源到状态的映射。固定随机源的取值后，相同的保留记录集合就对应相同状态；再对随机源的取值计算每次撤回引起状态变化的概率。

以两条可独立撤回的记录为例，保留记录的集合共有四种：两条均保留、仅保留第一条、仅保留第二条，以及两条均不保留。将这四种情况作为顶点，将一次删除可以连接的两种情况连边，就得到图 1 中的四边形图。从保留两条记录到两条均不保留，可以经过两种不同的删除顺序；它们最终汇合于同一个顶点，体现了上述顺序无关的要求。

删除操作有方向，而“两端状态是否不同”及两端分布的全变差距离都是对称的，因此耦合约束使用无向边。图中的圈表达的是不同删除路径之间的相容要求。

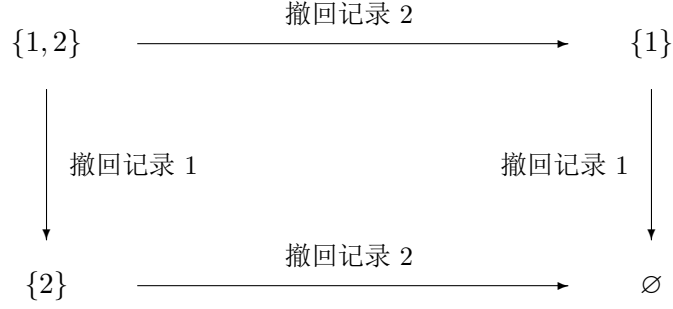


图 1: 两条记录的保留历史图。箭头表示删除方向；耦合约束使用对应的无向边。固定随机源后，两种删除顺序最终到达空记录集合时，必须得到相同的状态。

为图 1 中的每个顶点赋予其“重新运行分布”，即仅使用该顶点保留的记录从头运行系统所得的约定状态的分布。定义这些分布时，除保留记录外，模型、生成规则及其他输入条件均固定。本文假设这些分布已知。问题于是转化为：能否把这些分布放在同一个概率空间中联合实现，使每个顶点的分布保持正确，并使相邻顶点的状态尽可能一致？若每个顶点的状态都已确定，则其输出是否变化也已确定，不存在这样的耦合选择；随机生成使这一优化具有实质内容。

对于单条边，最大耦合可以使两端状态不一致的概率恰好等于相应分布的全变差距离。因此，全变差距离给出了这次删除所能达到的最小变化概率，可作为比较不同耦合的基准。然而，不同边各自达到最优的安排未必能同时实现。本文于是考察：同时满足所有边的要求时，各边的不一致概率相对其单独最优值至多需要放大多少倍？这就是图约束耦合问题。我们寻求适用于所有边际分布的最小统一倍数，并研究它如何取决于图的结构。

下文以状态发生变化的概率为目标，研究联合一致性的最优界。状态变化的语义影响、分布获取成本及实际运行代价留待第 7 节讨论。

## 1.2 基本定义与问题表述

所有图均为有限、无向简单图，记为  $G = (V, E)$ ，其中  $V$  为顶点集， $E$  为边集，并记顶点数为  $n = |V|$ 。顶点表示一个输入条件及其状态分布，边表示需要同时控制的一对条件。若  $d$  条记录可以独立地逐条删除，所有保留条件组成超立方体图  $Q_d$ ：顶点是记录集合的各个子集，相邻子集恰好相差一条记录。它有  $n = 2^d$  个顶点； $d$  是记录数， $n$  是分布数。每次删除都改变保留记录数的奇偶性，所以这一图及其子图没有奇数长度的圈。

为考察图结构对协调要求的影响，下文将研究范围扩展到任意有限图，包括奇数圈和完全图。它们描述一般的成对协调约束；逐条删除记录的应用则对应  $Q_d$  及其子图。

所有分布定义在同一个有限取值集合  $A$  上；在相关采样文献中， $A$  也称为字母表，其元素称为输出符号。记  $\Delta(A)$  为  $A$  上所有概率分布组成的集合。对  $p, q \in \Delta(A)$ ，其全变差距离 (total variation distance) 定义为

$$\text{TV}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} |p(a) - q(a)|.$$

给定  $\mu = (\mu_v)_{v \in V}$ ，它的一个耦合 (coupling) 是定义在  $A^V$  上的联合分布  $\pi$ ，使每个坐标随

机变量  $X_v$  的分布均为  $\mu_v$ 。这里的一个联合结果为  $x = (x_v)_{v \in V}$ ，即为每个顶点指定一个输出符号。耦合允许选择坐标之间的依赖关系，同时保持每个坐标原有的分布。记

$$d_{uv} = \text{TV}(\mu_u, \mu_v), \quad q_{uv}(\pi) = \mathbb{P}_\pi(X_u \neq X_v).$$

因此， $d_{uv}$  只由给定的边际分布决定， $q_{uv}$  则还取决于所选耦合。每个耦合均满足  $q_{uv} \geq d_{uv}$ ；对单独一对分布，达到等号的耦合称为最大耦合（maximal coupling），意指两者取相同值的概率最大。对边  $e = uv$ ，简记  $d_e = d_{uv}$ 、 $q_e = q_{uv}$ 。要求距离为零的边满足  $q_e = 0$ ，并定义

$$\rho(G, \mu) = \min_{\pi} \max_{e: d_e > 0} \frac{q_e(\pi)}{d_e}, \quad c(G) = \max\{1, \sup_{A, \mu} \rho(G, \mu)\}.$$

其中最小值只在满足零距离边约束的耦合中取；约定空集上的最大值为 0。 $\rho$  是给定分布族的最优因子， $c(G)$  是所有有限取值集合和分布族中的最坏因子，并约定它至少为 1。满足约束的耦合集非空：将零距离边的各连通分量收缩，为每个分量指定一个服从其共同边际分布的变量，再将各分量独立耦合。该集合是闭且有界的多面体，目标函数在其上连续，因此最小值存在。对无边图，按约定将常数取为 1。

一个耦合等价于可测映射  $X_v = f_v(U)$ ，其中各映射共享同一个在  $[0, 1]$  上均匀分布的随机变量  $U$ 。对有限取值集合，将  $[0, 1]$  划分为长度分别为  $\pi(x)$  的区间，每个区间对应一个联合结果  $x$ ，即可得到这一表示。因此，固定随机源的取值后，每个顶点的输出就唯一确定，同时所有边际分布仍然正确。这里的映射可以利用全部给定分布预先构造。

选择最坏边上的相对比值，是为了在没有预先指定删除频率时，仍对每条允许的删除边提供保证。这里的概率针对预先指定的顶点或边，对共享随机源取值计算；观察输出后再选择删除时的条件概率属于另一种问题。 $\rho$  先针对给定输入选择最好的共同耦合， $c(G)$  再取所有输入中的最坏值。若已知删除频率，还可以研究按频率加权的平均代价。

**四顶点例子：两两最优为何不能同时实现。** 将图 1 的四个顶点沿圈依次编号为 1, 2, 3, 4，分别对应  $\{1, 2\}, \{1\}, \emptyset, \{2\}$ ，并将这一四边形圈图记为  $C_4$ 。另设四种输出状态为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ，它们与记录编号是不同对象。下面用一组合成概率分布说明模型。

| 顶点 | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|----|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 0     | 1/3   | 1/3   | 1/3   |
| 2  | 1/3   | 0     | 1/3   | 1/3   |
| 3  | 1/3   | 1/3   | 0     | 1/3   |
| 4  | 1/3   | 1/3   | 1/3   | 0     |

每条边的全变差距离都是 1/3，所以单独处理时，最小不一致概率为 1/3。然而，四个顶点不可能同时取同一个状态，因为每种状态都被其中一个顶点排除。沿圈至少有两条边的端点取值不同，因此四条边的一致概率之和至少为 2。若它们都等于 1/3，总和只有 4/3，产生矛盾。至少一条边的一致概率不小于 1/2，相对其单独最优值的比值至少为 3/2。第 3 节将给出与之匹配的上界。

因此，结论  $c(C_4) = 3/2$  的含义是：对任意四个边际分布，都能找到一个共同耦合，使四条边同时满足  $q_e \leq (3/2)d_e$ ，且有些输入不允许把这个统一倍数进一步减小。例如，一条边的单独最小变化概率若为 10%，该共同安排给出的保证上限就是 15%，实际概率可以更低。

### 1.3 主要结果

本文先建立一般固定图的有限极值归约，再利用圈与块结构求出若干精确值，最后比较两种分布访问方式。下文的“锐界”指不能进一步改进的界。主要结果及证明位置如下。

**有限归约与固定图上界。** 定理 2.1 将定义  $c(G)$  的最坏情形优化归约为有限多个有理规范分布族，其中每个极点对应的分布族至多使用  $n$  个输出符号。证明将已有的集合表示和分数覆盖极点结构用于相对耦合目标，通过保持全变差的提升与耦合混合完成归约。由此得到  $c(G)$  的有理性，以及定理 2.5 中  $c(G) < 2$  的显式行列式界。完整证明见第 2 节；这里固定的是图和分布数量，取值集合大小并未预先固定。

**图结构与精确值。** 记  $C_n$  为由  $n$  个顶点依次相连并首尾闭合构成的圈图。定理 3.2 给出  $c(C_n) = 2 - 2/n$ ，构造及与其上界相等的下界见第 3 节。每条边至多属于一个简单圈的图称为仙人掌图；不含圈的图称为森林，连通的森林称为树。森林的常数为 1，含圈仙人掌图的常数为  $2 - 2/\ell$ ，其中  $\ell$  为最长圈的长度。它们是定理 4.2 中块分解公式的推论；块的定义和拼接方式见第 4 节。记  $K_n$  为具有  $n$  个顶点、任意两个不同顶点都相邻的完全图。推论 4.3 给出  $c(K_4) = 3/2$  及所有至多四顶点图的刻画。

**删除超立方体与访问方式。** 推论 4.5 对  $d$  条记录的完整删除图  $Q_d$  给出

$$2 - 2^{1-d} \leq c(Q_d) < 2.$$

这里是一对界，并未确定  $d \geq 3$  时的精确值。第 5 节的定理 5.1 表明：若每个顶点只能访问自身边际分布，且同一保证必须支持任意有限取值集合，则含边连通图上的最优因子为 2。推论 5.2 将其与每个固定图的集中式上界严格区分。

第 6 节给出构造性采样、线性规划和精确证书；第 7 节讨论适用边界与进一步问题。附录 A 汇总小阶枚举与构造检验，并列出全部十二个有效实例的输入。随附计算材料的内容和复核方式见附录 A.4。

### 1.4 相关工作与本文贡献

Kleinberg 和 Tardos [1] 在度量标记 (metric labeling) 问题中给出了保持各顶点边际分布的随机舍入，并以逐一排除一个输出符号的均匀分布族（下文简称“逐一缺失分布族”）展示不相容性障碍。Charikar [2] 的第 4.1 节进一步给出有限离散情形的不一致概率界  $2\delta/(1+\delta)$ ，其中  $\delta$  为全变差距离，并将分布表示为矩形并集。Angel 和 Spinka [3] 系统研究了多随机变量的同时耦合及其下界。仅分别获得各自边际分布输入的相关采样及其局限，则见 Bavarian 等人 [4]。

Li 和 Anantharam [5] 提出了两两多边际最优传输 (pairwise multi-marginal optimal transport) 问题，对所有分布对采用相同的乘性目标，并允许一般的输出代价。本文的完全图情形是该框架的一个特例。他们的命题 36(3) 针对三点输出度量使用了按各边代价确定的平衡权重，附录 J 则以各输入分布为顶点，利用随机树构造耦合。本文圈图证明沿用这些方法中的

树拼接和平衡代数，将其用于任意长度、任意边全变差距离的输入圈图；下界可由其命题 34 的证明在离散输出代价下直接得到。

规范实例空间与统计学中的 coarsening at random (CAR) 机制有关：观测结果是包含真实值的一个集合，报告同一集合的概率对集合内各个真实值相同。Gill 和 Grünwald [6] 所研究的多面体，与本文的分数精确覆盖多面体具有相同的坐标和约束；其极点混合、至多  $n$  个正坐标及有理性均为已有性质。平衡集合族的相关结构和枚举见文献 [7]。第 2 节将给出所需的线性约束和极点性质，并利用全变差保持、共享随机映回及极点混合处理逐边的相对耦合目标。

沿树拼接边耦合是一种标准的保持边际分布的舍入技术；Andrews 等人 [8] 的树上线性规划舍入中使用了这一方法。无权圈图均匀删边的期望伸长因子  $2 - 2/n$  见 Gupta 等人 [9] 及 Filtser 和 Le [10]。本文的圈图构造进一步按边全变差距离选择删边概率，统一处理非均匀距离和零距离的情形。

全族耦合是指把整个分布族放在同一个概率空间中联合实现。Hutchcroft、Rospuskova 和 Tamuz [11] 利用全族耦合控制端点不一致的图边，并研究空间约束下的协调问题。他们的局部性涉及邻域以及远距离处的独立性；本文的仅边际访问模型则允许不受限制的共享随机性，但限制对输入分布的访问。

近期关于智能体记忆的工作研究了执行状态遗忘、依赖关系引导的回滚以及反事实重放 [12, 13, 14]。这些工作为保留历史图提供了动机。本文着重研究其中的联合一致性：在各顶点具有正确边际分布的前提下，固定随机源后，每个保留历史都对唯一状态。

## 2 有限极值归约

图的耦合常数的定义涉及大小不受限制的取值集合。本节将这一优化归约为有限多个概率均为有理数的实例。分布的集合表示已有相关采样中的矩形表示先例 [2]；所用多面体及其极点结构也已见于 CAR 机制的研究 [6]。这里建立的连接是：先将原分布族转化为保持两两全变差距离的规范分布族，再将规范耦合用共享随机性映回原取值集合。规范分布族的距离随混合权重线性变化，因此混合极点上的耦合后，同一个因子上界仍然成立。

归约的思路是按“哪些顶点共享某一部分概率质量”对输出重新分类。这样的类别由顶点子集标记，因而不依赖原取值集合的大小。每个顶点的总概率为一，就转化为包含该顶点的各类权重之和为一。

固定  $V = [n] = \{1, \dots, n\}$ ，令  $\mathcal{S} = 2^V \setminus \{\emptyset\}$  为所有非空顶点子集组成的集合。定义

$$\Lambda_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{S}} : \sum_{S \ni v} \lambda_S = 1 \text{ 对每个 } v \in V \right\}.$$

这些约束要求每个顶点所属集合的权重之和恰为 1，本文称  $\Lambda_n$  为分数精确覆盖多面体。其中“分数”表示允许非负实数权重；“精确覆盖”表示每个顶点的总权重恰为 1。多面体是由有限个线性等式和不等式限定的集合。用  $\mathbf{1}_{v \in S}$  表示指示函数：当  $v \in S$  时取 1，否则取 0。对  $\lambda \in \Lambda_n$ ，定义  $\mathcal{S}$  上的规范边际分布为

$$\nu_v^\lambda(S) = \lambda_S \mathbf{1}_{v \in S}.$$

在这一规范分布族中，顶点  $v$  的输出是一个包含  $v$  的集合；“规范”指上述特定表示方式。下文把向量的非零坐标集合称为支撑集。多面体中的一个点，若不能表示为其中两个不同点的加权平均（两个权重均为正且和为 1），就称为极点。这种加权平均称为非平凡凸组合。极点集合记为  $\text{ext}(\Lambda_n)$ 。 $\Lambda_n$  正是上述 CAR 机制的多面体；其极点的支撑集所对应的关联矩阵列线性无关、支撑大小至多为  $n$  及有理性均为已有结构 [6]。这些结构与平衡集合族（balanced collections）的研究相关 [7]。下面将其用于图约束耦合的有限归约。

**定理 2.1** (有限极值实例定理). 对每个有限图  $G$ ，若其顶点数为  $n \geq 1$ ，则

$$c(G) = \max \left\{ 1, \max_{\lambda \in \text{ext}(\Lambda_n)} \rho(G, \nu^\lambda) \right\}. \quad (1)$$

特别地，若  $G$  至少有一条边，则存在一个至多使用  $n$  个输出符号的分布族，其最优耦合因子恰为  $c(G)$ 。此外， $c(G)$  是有理数，并且可以通过有限多个数据均为有理数的线性规划计算出来。

Charikar 的表示把每个分布实现为由概率高度确定的集合 [2]。按一个点属于哪些集合进行分组，即得到下面的层集权重。这里的“提升”指转到以集合为输出的表示，“随机映回”则指借助共享随机变量，将这些集合输出转回原来的输出符号。引理进一步给出任意规范耦合的共享随机映回，并同时控制全部边的一致概率。

**引理 2.2** (保持全变差的提升). 对每个有限取值集合上的分布族  $\mu$ ，都存在  $\lambda \in \Lambda_n$ ，使得

$$\text{TV}(\mu_u, \mu_v) = \text{TV}(\nu_u^\lambda, \nu_v^\lambda) \quad \text{对每个 } u, v,$$

且规范边缘分布的任意耦合都能转化为  $\mu$  的一个耦合，而不增加任何边上的不一致概率。

**证明.** (1) **层集表示与距离保持.** 对  $a \in A$  和非空集合  $S \subseteq V$ ，令

$$h_S(a) = \left[ \min_{v \in S} \mu_v(a) - \max_{v \notin S} \mu_v(a) \right]_+,$$

其中  $[t]_+ = \max\{t, 0\}$ ，空集上的最大值规定为 0。将  $n$  个数  $\mu_v(a)$  排序可知，非零的  $h_S(a)$  恰好对应嵌套上水平集之间的层高差；上水平集由概率值不小于某一阈值的顶点组成。因此

$$\mu_v(a) = \sum_{S \ni v} h_S(a), \quad (2)$$

$$|\mu_u(a) - \mu_v(a)| = \sum_S h_S(a) |\mathbf{1}_{u \in S} - \mathbf{1}_{v \in S}|. \quad (3)$$

有数值相等时，这些恒等式仍然成立：对应的高度为零。

令  $\lambda_S = \sum_a h_S(a)$ 。将 (2) 对  $a$  求和，得到  $\lambda \in \Lambda_n$ 。将 (3) 求和并除以二，即得引理中的距离恒等式。

(2) **共享随机映回.** 给定一个规范耦合  $(Z_v)_{v \in V}$ ，对每个  $S$ ，若  $\lambda_S > 0$ ，则抽取一个随机符号  $Y_S$ ，其取值概率为  $h_S(a)/\lambda_S$ ，且使其独立于  $(Z_v)$ 。不同的  $Y_S$  也可以相互独立。令  $X_v = Y_{Z_v}$ ，则

$$\mathbb{P}(X_v = a) = \sum_{S \ni v} \lambda_S \frac{h_S(a)}{\lambda_S} = \mu_v(a).$$

其中不含  $\lambda_S$  为零的项。若  $Z_u = Z_v$ ，则  $X_u = X_v$ ，所以不一致概率不会增加。这就完成了从规范耦合到原分布族耦合的随机映回。  $\square$

定理 2.1 的证明. (1) 将最坏情形限制到规范分布族。由引理得到

$$\rho(G, \mu) \leq \rho(G, \nu^\lambda).$$

由于规范分布族本身就是允许的输入，定义  $c(G)$  的上确界可以限制在  $\Lambda_n$  上取。

(2) 通过极点混合保留统一因子。多面体  $\Lambda_n$  非空且有界：对任意非空集合  $S$ ，在其定义方程中选取  $v \in S$ ，即得  $0 \leq \lambda_S \leq 1$ 。因此，它是有限多个极点的凸包，即这些极点的全部凸组合构成的集合。写成  $\lambda = \sum_j t_j \lambda^{(j)}$ ，其中  $t_j \geq 0$ 、 $\sum_j t_j = 1$ ，且各  $\lambda^{(j)}$  均为极点。对每个极点，选择一个满足同一因子上界  $C$  的耦合，再按权重  $t_j$  混合这些联合分布。它们的边际分布混合后得到  $\nu^\lambda$ 。

以  $d_{uv}(\lambda)$  表示规范分布  $\nu_u^\lambda, \nu_v^\lambda$  的全变差距离。关键在于以下线性关系

$$d_{uv}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_S \lambda_S |\mathbf{1}_{u \in S} - \mathbf{1}_{v \in S}| = \sum_j t_j d_{uv}(\lambda^{(j)}).$$

因此，混合后的不一致概率至多为  $C d_{uv}(\lambda)$ 。若该边距离为零，每个权重为正的分量在该边上的距离都为零，且以概率 1 一致，下文称为“几乎必然一致”。取  $C$  为各极点对应实例最优值中的最大值，便证明了 (1)。

(3) 确定支撑大小与有理性。令  $B$  为一个  $n \times (2^n - 1)$  关联矩阵，其列向量为  $\mathbf{1}_S$ ，即在  $S$  中的顶点处取 1、其余位置取 0； $\mathbf{1}$  表示各分量均为 1 的向量。在  $\Lambda_n$  的一个极点处，由正坐标所索引的列线性无关。否则，零空间中存在一个非零向量，其非零坐标仅位于这些位置。这就允许在保持非负性的同时向两个方向作小扰动，这与极点性质矛盾。因此，正坐标至多有  $n$  个。记  $J = \{S : \lambda_S > 0\}$ ，并以  $B_J$  和  $\lambda_J$  分别表示这些坐标对应的列子矩阵和子向量。对应的方程组  $B_J \lambda_J = \mathbf{1}$  的唯一解为有理数解。反之，若一个可行点的正坐标对应的列线性无关，将它写成两个可行点的平均时，非负性迫使这两个点在支撑外均为零，列独立性又迫使二者相等。因此，该条件也足以保证极点性质。

对  $\Lambda_n$  的每个极点，其耦合问题都是一个具有有理数数据的有限线性规划：为每个联合结果赋予非负概率，施加边际分布约束，并最小化  $c \geq 0$ ，其中约束为  $q_e \leq c d_e$ 。对某个有限的  $c$ ，包括零距离边约束在内的所有约束均可满足，且最优值能够达到并为有理数。在有限多个这样的最优值中取最大值，证明即告完成。若  $G$  至少有一条边，则由确定性且符号互异的分布组成的族给出因子 1，所以 (1) 中外层最大值的约定不会妨碍最优值的达到。□

注 2.3 (有限归约的适用范围)。原始分布族本身未必只使用至多  $n$  个输出符号，其最优耦合也未必能由某个规范最优耦合经随机映回得到。该定理说明，最坏的耦合因子可由一个至多使用  $n$  个输出符号的分布族达到。它适用于不受限制的集中式耦合，即构造时允许读取整个分布族。提升也需要这些完整输入；它既不是仅依赖各自边际分布的协议，也不是因果在线构造。

例 2.4 (三个伯努利分布的层集归约)。记  $\text{Bernoulli}(\theta)$  为以概率  $\theta$  取 1、其余概率取 0 的伯努利分布， $\delta_a$  为以概率 1 取值为  $a$  的分布。取  $\mu_v(1) = v/4$ ，其中  $v = 1, 2, 3$ 。非零层权重及其随机映回所用的条件分布  $K_S(a) = h_S(a)/\lambda_S$  为

| $S$         | $\{1, 2, 3\}$           | $\{1\}$    | $\{1, 2\}$ | $\{3\}$    | $\{2, 3\}$ |
|-------------|-------------------------|------------|------------|------------|------------|
| $\lambda_S$ | 1/2                     | 1/4        | 1/4        | 1/4        | 1/4        |
| $K_S$       | $\text{Bernoulli}(1/2)$ | $\delta_0$ | $\delta_0$ | $\delta_1$ | $\delta_1$ |

设  $\mathcal{P}$  是 [3] 的一个划分, 令  $\lambda^{\mathcal{P}}$  把权重 1 赋予  $\mathcal{P}$  的每个块, 在其他地方赋权重 0。其正坐标对应的关联列线性无关, 因此它是一个极点。在本例中,

$$\lambda = \frac{1}{2}\lambda^{\{\{1,2,3\}\}} + \frac{1}{4}\lambda^{\{\{1\},\{2,3\}\}} + \frac{1}{4}\lambda^{\{\{1,2\},\{3\}\}}.$$

每个划分的规范耦合都是确定性的: 坐标  $v$  选择其所在的块。将这三个耦合混合。对每个选中的集合  $S$ , 只从  $K_S$  中抽取一个样本, 供所有选择该集合的坐标共同使用。由此得到的原始输出分布将概率  $1/4$  分别赋予 000, 111, 011, 001。其边际分布正是指定的伯努利分布, 且所有三对坐标间的不一致概率都等于各自的全变差距离。中间提升所得到的规范分布族使用五个权重为正的集合符号, 而每个极点分量至多使用三个, 体现了提升与极点分解这两个步骤的区别。

有限归约还给出一个严格小于 2 的统一上界。已有同时耦合界中的比值随正的全变差距离趋于零而趋于 2。因此, 要通过这一界取得严格小于 2 的统一界, 需要控制可能出现的最小正距离。任意输入分布之间的距离可以任意小, 但有限归约允许只检查极点实例; 其有理权重的分母可由关联矩阵的行列式控制, 从而给出所需的正距离下界。下面将这一分母结构 [6] 与已有的非线性同时耦合界相结合。

**定理 2.5** (行列式上界). 令  $\Delta_n$  表示所有阶数不超过  $n$  的非奇异 0/1 方阵的行列式绝对值的最大值。每个有  $n \geq 1$  个顶点的图都满足

$$c(G) \leq \frac{2\Delta_n}{\Delta_n + 1} < 2.$$

分母参数的一个显式上界为

$$\Delta_n \leq \max_{1 \leq r \leq n} \left\lfloor \frac{(r+1)^{(r+1)/2}}{2^r} \right\rfloor.$$

证明. 对  $\Delta_n$  的一个有  $r$  个正坐标的极点, 从支撑集对应的关联矩阵中选取  $r$  个线性无关的行。这给出一个非奇异 0/1 矩阵  $B$ , 满足  $B\lambda_J = \mathbf{1}$ 。由克拉默法则, 每个权重都是  $1/D$  的整数倍, 其中  $D = |\det B| \leq \Delta_n$ 。

由于这两个规范边际分布的总概率均为一, 它们的全变差距离可写为

$$d_{uv} = \sum_{S: u \in S, v \notin S} \lambda_S.$$

因此, 每个正距离都至少为  $1/D$ 。将标准的同时耦合上界  $q_{uv} \leq 2d_{uv}/(1 + d_{uv})$  [2, 3] 应用于这个极点分布族, 得到

$$q_{uv} \leq \frac{2D}{D+1} d_{uv} \leq \frac{2\Delta_n}{\Delta_n + 1} d_{uv}.$$

在同一个构造中, 距离为零的边几乎必然一致。将各极点分布族的耦合混合, 并应用引理 2.2, 就能将该上界推广到每个原始分布族。

为得到显式估计, 考虑如下  $(r+1)$  阶方阵

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{1} & F - 2B \end{pmatrix}$$

其中  $F$  是所有元素均为 1 的  $r$  阶方阵，故  $H$  的所有元素均为  $\pm 1$ 。从其余每行中减去第一行，得到  $|\det H| = 2^r |\det B|$ 。阿达马 (Hadamard) 行列式不等式指出，行列式绝对值不超过各行向量欧氏长度之积；在此得到  $|\det H| \leq (r+1)^{(r+1)/2}$ 。取整数部分，再对所有阶数取最大值，便证明了该估计。  $\square$

极点权重的整数分母提供了所需的正距离下界，从而得到每个固定图上严格小于 2 的集中式耦合因子。随着顶点数增长，这一改进量仍可能趋于零。

### 3 圈图的耦合常数

本节使用经典的树上耦合拼接 [8, 5]。Li 和 Anantharam [5] 的命题 36(3) 已在三点输出度量的情形中使用相同形式的平衡权重，其命题 34 的证明也给出了本文所用的圈上的不相容性下界。这里将平衡构造推广到边际分布构成的任意圈图，涵盖边距离不均匀以及为零的情形；与该下界结合后得到圈图的精确常数。

**引理 3.1** (最大耦合与树上拼接). 对两个分布  $p, q$ ，令  $r(a) = \min\{p(a), q(a)\}$ ， $\delta = 1 - \sum_a r(a)$ 。若  $\delta > 0$ ，则矩阵

$$M(a, b) = r(a) \mathbf{1}_{a=b} + \frac{(p(a) - r(a))(q(b) - r(b))}{\delta}$$

的边际分布为  $p, q$ ，不一致概率为  $\delta = \text{TV}(p, q)$ 。当  $\delta = 0$  时，使用对角矩阵  $M(a, a) = p(a)$ 。在树上，任意预先给定的一组此类边矩阵都能由一个联合分布实现。

证明. 两个剩余质量向量  $p - r$  和  $q - r$  的总质量均为  $\delta$ ，且其支撑集互不相交。将上式中的矩阵沿任一坐标求和，即得所需的边际分布，其非对角质量为  $\delta$ 。

以  $o$  为树根，先采样  $X_o \sim \mu_o$ ，再对  $u$  的每个子顶点  $v$ ，按  $M_{uv}(X_u, \cdot) / \mu_u(X_u)$  采样。对于概率为零的父顶点状态，可以任意指定一个条件概率分布。从根开始归纳可知，每条边上的联合分布均为  $M_{uv}$ 。不相连的各棵树可以独立耦合。  $\square$

**定理 3.2** (圈图的耦合常数). 对每个  $n \geq 3$ ,

$$c(C_n) = 2 - \frac{2}{n}.$$

对给定的分布族，令  $D = \sum_e d_e$ ， $m$  为距离为正的边数。若  $D = 0$ ，或某条边满足  $d_e = D/2$ ，则存在一个耦合，在每条边上都达到最大耦合，即  $q_e = d_e$ 。否则，

$$q_e \leq \alpha(\mathbf{d}) d_e, \quad \alpha(\mathbf{d}) = 1 + \left( \sum_{f: d_f > 0} \frac{d_f}{D - 2d_f} \right)^{-1} \leq 2 - \frac{2}{m} \leq 2 - \frac{2}{n}. \quad (4)$$

证明. 由于其余  $n-1$  条边构成一条连接  $e$  的两个端点的路径，由三角不等式可得  $d_e \leq D - d_e$ 。若  $D = 0$ ，所有边际分布都相同，使用同一个随机变量即可。若  $d_e = D/2 > 0$ ，则删除该边。由引理 3.1，所有保留边都能达到不一致概率  $d_f$ 。只有当剩余路径上至少一条边发生不一致时，被删除边的两端才可能不一致，因此该边的一致概率至多为  $D - d_e = d_e$ 。

在剩余情形中，考虑随机删除一条边，再沿剩余路径拼接最大耦合。未被删除的边都能单独达到最优，被删除边的一致概率则由其路径上的并集界控制。对  $d_e > 0$  的边  $e$ ，若以

概率  $p_e$  删除它，该边相对最优值的额外损失至多为  $p_e(D - 2d_e)/d_e$ 。因此，选择删边概率的思路是让这些额外损失的上界相等，以控制其中最大的一个。具体定义

$$S = \sum_{f: d_f > 0} \frac{d_f}{D - 2d_f}, \quad p_e = \frac{d_e}{(D - 2d_e)S} \quad (d_e > 0),$$

并对距离为零的边令  $p_e = 0$ 。距离为正的边必定至少有三条：只有一个正距离会与三角不等式矛盾，而若只有两个正距离，则两者必定都等于  $D/2$ 。因此  $m \geq 3$ ，上述概率定义良好。

以概率  $p_e$  选取边  $e$ ，将其删除，并沿得到的覆盖全部顶点的路径拼接最大耦合。对固定的边  $f$ ，若其保留在路径中，采样结果在该边上的不一致概率恰为  $d_f$ ；若  $f$  被删除，并集界（事件之并的概率不超过各事件概率之和）给出的不一致概率至多为  $D - d_f$ 。因此

$$q_f \leq (1 - p_f)d_f + p_f(D - d_f) = d_f(1 + 1/S).$$

每条距离为零的边始终被保留。对距离为正的边，令  $x_e = d_e/D$ 。由于  $x/(1-2x)$  在  $0 \leq x < 1/2$  上严格凸，由詹森（Jensen）不等式，即凸函数在平均值处的取值不超过其取值的平均，可得

$$S \geq m \frac{1/m}{1 - 2/m} = \frac{m}{m - 2}.$$

这就证明了上界，并涵盖距离为零的边。

为证明下界，取逐一缺失的边际分布  $\mu_i = \text{Unif}([n] \setminus \{i\})$ ，其中  $\text{Unif}(B)$  表示有限非空集合  $B$  上的均匀分布；这一分布族曾出现于文献 [1, 3, 5]。每条边的距离为  $1/(n-1)$ 。所有坐标不可能取同一个值，因为坐标  $i$  不能等于  $i$ 。只要圈上各顶点的取值不全相同，就至少有两条边的两端取值不同，因此  $\sum_e q_e \geq 2$ 。故某条边满足  $q_e/d_e \geq 2(n-1)/n$ 。□

**命题 3.3** (路径并集界的最优删边概率)。若所有边均满足  $0 < d_e < D/2$ ，则由路径上的并集界得到的优化目标

$$\min_{p \geq 0, \sum p_e = 1} \max_e \left( 1 + p_e \frac{D - 2d_e}{d_e} \right)$$

的唯一最优删边概率分布是定理 3.2 证明中给出的分布，其目标值为  $\alpha(\mathbf{d})$ 。

证明. 记  $a_e = (D - 2d_e)/d_e > 0$ ， $t = \max_e (1 + a_e p_e)$ 。则  $p_e \leq (t - 1)/a_e$ 。求和可得  $1 \leq (t - 1) \sum_e a_e^{-1}$ ，当  $p_e = a_e^{-1} / \sum_f a_f^{-1}$  时达到等号。总和取等时，各个不等式都必须取等，这就证明了唯一性。□

**例 3.4** (删边构造的非最优实例)。对沿  $C_4$  排列、参数为  $(1/10, 4/10, 2/10, 5/10)$  的伯努利边际分布，边距离为  $(3/10, 2/10, 3/10, 4/10)$ 。此时  $D = 6/5$ ， $S = 9/4$ ， $\alpha = 13/9$ 。然而，记各顶点的伯努利参数为  $\theta_v$ ，取在  $[0, 1]$  上均匀分布的  $U$ 。共同阈值耦合  $X_v = \mathbf{1}_{U \leq \theta_v}$  在所有边上满足  $q_e = d_e$ 。因此，该实例的最优值为 1。命题 3.3 优化的是一个特定上界，而非在所有联合耦合中求最优。事实上，任意伯努利分布族在任意图上都能同时实现最大耦合。

**推论 3.5** (小全变差距离下的锐性)。对任意  $0 < \varepsilon \leq 1$ ，圈图上的分布族

$$\mu_i = (1 - \varepsilon)\delta_\star + \varepsilon \text{Unif}([n] \setminus \{i\})$$

中， $\star$  是原取值集合之外新增的公共符号， $\delta_\star$  是集中在该符号上的分布。该分布族满足每条边的  $d_e = \varepsilon/(n-1)$ ，且  $\min_\pi \max_e q_e = 2\varepsilon/n$ 。

证明. 所有坐标只有在取值均为  $\star$  时才可能一致, 而这一事件的概率至多为  $1 - \varepsilon$ 。因此, 不一致边数的期望至少为  $2\varepsilon$ 。为达到该界, 以概率  $1 - \varepsilon$  在所有位置输出  $\star$ 。否则, 从  $[n]$  中均匀选取  $J$ , 从  $[n] \setminus \{J\}$  中均匀选取  $K$ , 并令  $X_i = J$  ( $i \neq J$ )、 $X_J = K$ 。对  $a \neq i$ , 有  $\mathbb{P}(X_i = a \mid \text{未输出公共符号}) = 1/n + 1/[n(n-1)] = 1/(n-1)$ 。在这一概率为  $\varepsilon$  的分支内, 一条边发生不一致当且仅当  $J$  是其端点之一, 条件概率为  $2/n$ ; 因此总不一致概率为  $2\varepsilon/n$ 。□

上述分布族的最优相对因子仍为  $2 - 2/n$ 。令  $\varepsilon$  趋于零, 相邻分布可以任意接近, 而这一最坏相对损失不会随之消失。

## 4 图结构与耦合常数

若图  $H$  可由  $G$  通过删除顶点、删除边和收缩边得到, 就称  $H$  为  $G$  的子式 (graph minor)。收缩一条边是将其两个端点合并, 并删除合并产生的自环、将重边视为一条边。

**命题 4.1** (图子式单调性). 删除顶点或边, 或者收缩一条边, 都不会增大  $c(G)$ 。

证明. 子图上的分布族可以任意扩展至其余顶点。将较大图上的耦合限制到子图, 即得满足子图所有约束的耦合。对于边收缩, 给被收缩边的两个端点赋予相同的边际分布。有限因子的耦合迫使它们的输出几乎必然相同。将二者合并, 即得收缩后图上的耦合。自环和重边不会引入新的不一致要求。□

删除后使所在连通分量断开的边称为桥; 删除一个顶点及其关联边后使所在连通分量断开时, 该顶点称为割点。至少有三个顶点、删除其中任一顶点后仍连通的连通图称为二连通图。图中不能再扩大且保持二连通的子图称为极大二连通子图。这里将它们称为块, 并将每条桥视为一个二顶点块; 孤立顶点不影响耦合常数。仙人掌图的每条边至多属于一个简单圈, 其含边的块恰为桥或圈图。

**定理 4.2** (块分解). 对至少含一条边的有限图,

$$c(G) = \max_{B \text{ 为 } G \text{ 的块}} c(B),$$

其中桥视为一个含两个顶点的块。特别地, 最长圈长度为  $\ell$  的仙人掌图满足  $c(G) = 2 - 2/\ell$ ; 森林满足  $c(G) = 1$ 。森林恰好就是使每个分布族都能同时实现最大耦合的图:  $c(G) = 1$  当且仅当  $G$  是森林。

证明. 限制到一个块即可得到下界。为证明上界, 固定一个边际分布族, 并为每个块选取一个因子至多为  $C = \max_B c(B)$  的耦合。每个固定分布族的最优耦合都存在, 因而可作上述选择。块—割点关联图以块和割点为两类节点, 一个块与其包含的割点相连。标准块分解性质保证, 每个含边连通分量的这一关联图是一棵树。因此可选一个块为根, 先对根块采样, 再从根向外逐块处理; 每个新块与此前已采样部分恰好交于单个割点  $a$ 。以已经选定的  $X_a$  为条件, 对新块的其余坐标进行采样。孤立顶点独立采样即可。

两个块的分布都赋予  $X_a$  相同的边际分布  $\mu_a$ 。因此, 条件构造既保持整个新块的分布, 也保持此前已构造的所有分布。迭代这一过程, 就得到一个在每条边上满足该界的耦合。对于

仙人掌图，在圈块上使用定理 3.2，在桥上使用引理 3.1。非森林图包含一个简单圈；由单调性，其耦合常数严格大于 1。□

**推论 4.3** (至多四顶点图的耦合常数). 对于  $2 \leq n \leq 4$ ，有  $c(K_n) = 2 - 2/n$ 。更一般地，每个至多有四个顶点的图，若为森林，则其耦合常数为 1；否则为  $2 - 2/\ell$ ，其中  $\ell$  是其最长圈的长度。

证明. 定理 2.5 中的行列式估计给出  $\Delta_2 \leq 1$ 、 $\Delta_3 \leq 2$  和  $\Delta_4 \leq 3$ 。因此，对于这些顶点数， $c(K_n) \leq 2 - 2/n$ 。 $K_n$  上的逐一缺失分布族给出与上界相等的下界：每个赋值至少有  $n - 1$  对顶点输出不一致。对于至多有四个顶点的图，一个四边形圈给出至少为  $3/2$  的因子，而将  $K_4$  上的耦合限制到该图则给出至多为  $3/2$  的因子。如果其最长圈是三角形，则其含圈的块均为三角形；应用定理 4.2 即可。□

**命题 4.4** (边连通度下界). 设  $G$  是有  $N \geq 2$  个顶点、 $M$  条边且边连通度为  $\kappa$  (使图变为不连通图所需删除的最少边数) 的连通图。则

$$c(G) \geq \max \left\{ 1, \frac{\kappa(N-1)}{M} \right\}.$$

对任意  $0 < \varepsilon \leq 1$ ，带公共符号的逐一缺失分布族也给出同样的比值下界，其中每条边的距离均为  $\varepsilon/(N-1)$ 。

证明. 使用推论 3.5 中的分布族，以  $N$  个顶点为索引，使用普通符号  $1, \dots, N$  及额外的公共符号  $\star$ 。以至少  $\varepsilon$  的概率，并非所有坐标都取公共符号。此时各顶点的取值不可能全部相同，因为除  $\star$  外，没有任何符号能在每个坐标上取到。选取输出某个固定符号的顶点集合，使其非空且不包含全部顶点。连接该集合与其余顶点的边组成一个割 (cut)；这些边的两端输出都不一致，且这样的边至少有  $\kappa$  条。因此  $\sum_e q_e \geq \varepsilon \kappa$ 。将最大的边不一致概率除以  $\varepsilon/(N-1)$ ，即可得到结论。□

**推论 4.5** (删除超立方体的上下界). 对  $d \geq 1$ ，令  $Q_d$  为以  $[d]$  的子集为顶点、两个子集相邻当且仅当它们相差一个元素的超立方体图。则

$$2 - 2^{1-d} \leq c(Q_d) < 2.$$

对每个  $0 < \varepsilon \leq 1$ ，其  $N = 2^d$  个顶点上的带公共符号的逐一缺失分布族的最优耦合因子恰为  $2 - 2/N$ 。

证明. 该超立方体有  $N = 2^d$  个顶点、 $dN/2$  条边，边连通度为  $d$ 。下面对维数归纳证明边连通度这一断言。将超立方体分成两个  $Q_{d-1}$  副本，两副本中对应的顶点一一连边。当  $d \geq 2$  时，若一个割将两个副本都分开，则两个副本内部跨越该割的边合计至少有  $2(d-1) \geq d$  条。若只将一个副本分开，则至少有  $d-1$  条副本内部的跨割边，以及至少一条连接两副本的跨割边。若两个副本都未被分开，则该割必将它们分隔，跨割边数为  $2^{d-1} \geq d$ 。将任意单个顶点与其余顶点分开的割恰有  $d$  条边，从而证明等号成立。 $d = 1$  的情形显然成立。

命题 4.4 给出下界。由定理 2.5 取  $n = 2^d$ ，可得严格上界。对于这里特定的带公共符号分布族，推论 3.5 中显式给出的  $J, K$  构造使图的每条边都以概率  $2\varepsilon/N$  发生不一致，因此该分布族达到了割给出的下界。□

当只有两条记录时，删除图恰为  $Q_2 = C_4$ ，因此最坏情形下的最优因子为  $3/2$ 。沿正方形依次可将四个顶点标为  $\{1, 2\}, \{1\}, \emptyset, \{2\}$ 。当记录数更多时，不同删除顺序会产生许多相互重叠的圈。尽管单条历史链允许因子 1，超立方体的下界却趋于 2。

## 5 边际信息约束下的耦合

前文的集中式构造可以在采样前查看所有分布，因此能让耦合方式随整个分布族调整。如果一个顶点只能得到自身的分布，前述保证是否仍然成立？为考察输入信息本身的作用，本节保留不受限制的共享随机性，只限制对分布的访问，并规定使用固定函数

$$X_v = f_v(\mu_v, R),$$

其中每个顶点只能看到自己的分布和公共随机源  $R$ ，且该随机源的分布独立于输入的边际分布。对每个有限取值集合，这些函数可以依赖该取值集合和固定的图，但随后必须对边际分布的每一种赋值都适用。此外，对每个顶点  $v$  和每个分布  $p$  要求  $f_v(p, R) \sim p$ 。令  $c_{\text{loc}}(G)$  为满足以下条件的常数  $C$  的下确界：对每个有限取值集合，均能预先选择上述函数，使其对任意分布赋值及每条边满足  $\mathbb{P}(X_u \neq X_v) \leq C \text{TV}(\mu_u, \mu_v)$ 。这一不等式也包含零距离边的几乎必然一致要求。这是经典相关采样访问模型 [4] 的一种形式。

两种模型中选择采样规则的时机不同。集中式构造可以先取得实际分布族，再为这些输入共同设计映射；本节则先固定一套规则，每个顶点运行时只能读取自己的输入，不能依据其他顶点的具体分布重新设计映射。两者都允许共享随机性。这也解释了为什么即使图只有一条边，下面的统一保证仍可能不同于为一对已知分布单独设计的最大耦合。

**定理 5.1** (仅访问自身边际分布时的最优因子). 对每个含边的连通图，若只能访问自身边际分布，且必须支持任意有限取值集合，则统一适用的最优因子为  $c_{\text{loc}}(G) = 2$ 。

证明. 对所有边际分布均为  $\mu_v = p$  的输入，每条边的距离都为零。任何有限因子的保证都迫使沿每条边有  $f_u(p, R) = f_v(p, R)$  几乎必然成立。连通性使得对每个固定的  $p$ ，所有顶点的映射都几乎必然相同；将其一个共同代表记为  $f(p, R)$ 。下述论证只使用有限多个分布。每个分布对应的例外情况发生概率均为零，将这些例外合并后，发生概率仍为零；因此可同时使用上述相等关系。

在一条固定边的两个端点上放置任意两个分布  $p, q$ 。该保证便要求

$$\mathbb{P}(f(p, R) \neq f(q, R)) \leq c \text{TV}(p, q).$$

因此，同一个共享映射将对任意有限分布族中的每一对分布都给出这一保证。将其同时应用于规模为  $N$  的逐一缺失分布族。完全图  $K_N$  上取值不全相同的赋值至少有  $N - 1$  条不一致的边。其  $\binom{N}{2}$  个顶点对的距离均为  $1/(N - 1)$ ，故由平均可得  $c \geq 2 - 2/N$ 。由于取值集合大小不受限制，有  $c \geq 2$ 。

上界由共享指数随机变量的采样方法 (exponential race) 给出：为取值集合中的各符号取相互独立、速率参数为 1 的指数随机变量  $E_a$ ，并令  $f(p, R) = \arg \min_a E_a/p(a)$ ，忽略满足  $p(a) = 0$  的符号。其边际分布为  $p$ ，不一致概率至多为  $2 \text{TV}(p, q)$ ，见文献 [3]。□

这一结论是既有访问方式差异的一个定量推论。例如，圈图  $C_4$  上的集中式耦合的因子为  $3/2$ ，而在至少含五个符号的取值集合上，仅访问自身边际分布的映射所需因子至少为  $8/5$ 。这里的因子 2 要求保证支持任意大小的有限取值集合；它不表示二符号输入也需要因子 2。对二符号分布族，例 3.4 中的共同阈值构造只读取自身伯努利参数，已能达到因子 1。该定理的下界不适用于能够读取整个分布族或接收额外协调预处理信息的采样器。

**推论 5.2** (两种分布访问方式下最优因子的严格差距). 对每个含边的有限连通图，

$$c(G) < c_{\text{loc}}(G) = 2.$$

证明. 结合定理 2.5 和定理 5.1 即可。有限极值实例定理中的提升构造依赖整个边际分布族，而仅访问自身边际分布的采样器恰好无法取得这些信息。□

## 6 构造算法与最优性证书

### 6.1 仙人掌图上的采样算法

仙人掌图上界的证明直接给出了采样方法。假设所有顶点的边际分布均以大小为  $s$  的取值集合上的概率表给出。对每条边，预先计算两个分布的共同概率质量  $r(a) = \min\{p(a), q(a)\}$  以及扣除共同质量并归一化后的两个剩余分布。给定父顶点输出  $X = a$  且  $p(a) > 0$ ，引理 3.1 中的最大耦合矩阵按如下方式产生子顶点输出：

$$Y = \begin{cases} a, & \text{以概率 } r(a)/p(a), \\ \text{从 } (q - r)/\delta \text{ 中采样}, & \text{否则.} \end{cases}$$

若  $\delta = 0$ ，则复制  $a$ 。这只需要长度为  $s$  的向量，无需存储  $s \times s$  转移矩阵。

沿块一割点树逐块处理。这里的入口割点，是当前块与此前已处理部分相接的顶点；根块则任选一个顶点作为起点。对于桥，使用上述条件转移。对于圈图，令  $D = \sum_e d_e$ ：若  $D = 0$ ，整个圈复制入口状态；若某条边满足  $d_e = D/2 > 0$ ，则删除这样的一条边；其余情形按定理 3.2 中的概率随机删边。删边后以入口割点为所得路径的根，再按条件分布逐点采样。

即使入口顶点的取值已经确定，随机删边仍可按原概率进行：对每一种删边选择  $e$ ，其树上的联合分布  $Q_e$  具有相同的入口边际分布  $\mu_a$ 。记随机删去的边为  $L$ ，则

$$\mathbb{P}(L = e \mid X_a = x) = \frac{p_e \mu_a(x)}{\mu_a(x)} = p_e \quad \text{只要 } \mu_a(x) > 0.$$

因此，删边选择仍可与入口顶点已确定的取值保持独立。

预先存储各分布的累积概率表，并用二分查找采样时，预处理的算术运算次数与存储条目数均为  $O((|V| + |E|)s)$ 。生成一次联合样本需要  $O(|V|(1 + \log s) + |E|)$  次运算，其中包括图遍历及各圈图删边的选择。这些界以全部边际分布预先可用为前提，并按一次算术运算计一个单位；精确采样的随机比特数及有理数运算的位复杂度（按二进制位计的运算成本）需另行计入。

为保证固定随机种子后重复访问同一顶点得到相同输出，应复用已生成的联合样本，或复用从种子到联合样本的同一个确定性映射。若每次重新进行条件抽样，重复访问的输出就未必相同。附录 A.4 所述有理数实现通过枚举联合分布生成计算证书，其计算规模与本节的逐点采样算法不同。

## 6.2 耦合优化的线性规划

对于固定的边际分布，令  $\Omega = A^V$ 。其中每个  $x \in \Omega$  是给所有顶点各指定一个输出的完整赋值，也就是一个联合结果。引入变量  $p_x \geq 0$  表示该结果的概率，并引入  $c \geq 0$  表示待最小化的因子。实例最优值为下列线性规划（linear program, LP）的最优值：

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } c \\ & \text{满足 } \sum_x p_x = 1, \quad \sum_{x: x_v=a} p_x = \mu_v(a) \quad (v, a), \\ & \quad \sum_{x: x_u \neq x_v} p_x - c d_{uv} \leq 0 \quad (uv \in E). \end{aligned} \quad (5)$$

归一化等式是冗余的，但在实现中予以保留。所有零距离约束也都保留在该规划中。

与之对应的对偶规划使用归一化约束的乘子  $y_0$ 、边际分布约束的乘子  $y_{v,a}$  以及边约束的乘子  $z_e \leq 0$ 。其中前两类乘子不受符号限制，可以为正、为负或为零。对偶约束为

$$\begin{aligned} y_0 + \sum_v y_{v,x_v} + \sum_{e=uv} z_e \mathbf{1}_{x_u \neq x_v} &\leq 0 \quad \text{对每个 } x \in \Omega, \\ -\sum_e z_e d_e &\leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

对偶规划最大化  $y_0 + \sum_{v,a} y_{v,a} \mu_v(a)$ 。由弱对偶性，任一对偶可行解的目标值都不超过任一原问题可行解的目标值。因此，如果两者相等，这一共同值就是精确最优值。这样一对可以逐条核验的可行解，称为原始一对偶最优性证书（primal-dual optimality certificate）。

计算有限极值实例时，枚举每个大小至多为  $n$  的候选支撑集  $J$ ；仅在其关联列线性无关且  $B_J \lambda_J = \mathbf{1}$  存在严格正解时保留它，然后求解 (5)。这会列出全部极点，包括支撑大小小于  $n$  的极点。另一份独立实现枚举所有含  $n$  列的候选组合，筛选其中线性无关的基，并对退化解去重。退化解是部分基变量为零的解，同一极点可能由不同的基重复得到。这两份完整有理数列表的一致性，通过两种不同程序核验了枚举结果。

对于完全图，顶点置换保持整个耦合问题不变。因此，第二阶段将  $\Lambda_n$  中可通过顶点重编号相互得到的极点归为同一个置换轨道，每个轨道只求解一个代表元。每个极点到其规范代表元的完整映射均予以保存。对于一般图，只有保持图结构的顶点置换才能用于这一归约。

## 6.3 有理数证书与精确核验

数值求解器提供原问题和对偶问题的候选解。随后，将每个坐标转换为一个候选有理数，重构时将分母上限设为  $10^6$ 。只有当全部边际分布等式、符号约束、边上的界以及每个完整赋值的对偶不等式均在有理数算术下精确成立，且两个目标值精确相等时，才接受重构后的向量；任何一项未通过，均拒绝该证书。

数值求解器负责寻找候选解，有理数核验负责检查每份证书。由实例最优值进一步得到图的最坏因子，还需有限极值实例定理和完整的极点枚举。

## 7 讨论与进一步问题

本文表明, 固定图上的最坏耦合因子可以通过有限计算精确确定, 并且严格小于 2。圈图的平衡构造与块分解给出了森林和仙人掌图的精确常数。与仅边际访问下的因子 2 相比, 这些结果说明, 读取整个分布族能够改善每个固定含边连通图上的最坏保证。

### 7.1 记忆撤回模型的适用范围

保留历史图规定了哪些重新运行分布应当被耦合, 却不决定具体的耦合。如果允许系统为每条删除边独立选择一个新的最大耦合, 那么沿不同路径到达同一保留历史时, 系统可能得到不同的实际状态。联合实现要求消除了这种歧义。在树上, 这一要求不会提高边上的最优不一致概率; 而在含圈的图上, 即使相邻分布任意接近, 不一致概率也可能必须高于相应的全变差距离。

顺序无关的联合实现, 比仅要求终态分布与重新运行分布相同更强。本文的下界以这项联合一致性要求为前提; 对于只约束终态分布的系统, 需要另行分析。模型还假设每个保留历史所对应的边际分布已经给定, 耦合方式可以据此统一设计。

状态不一致概率衡量的是输出是否改变; 变化的语义影响、重放步骤数、词元 (token) 使用量、信息泄漏及外部操作成本还需要各自的评价指标。将这些结果用于实际智能体, 需要先论证有限状态表示的合理性, 取得或估计相关边际分布, 再测量状态变化与实际运行成本之间的关系。本文的计算以合成分布检验数学构造, 实际系统的性能有待实验研究。

### 7.2 结果的局限与进一步问题

有限极值实例定理保证每个固定图的最坏值可以由有限计算精确求出。随着顶点数增长, 候选支撑集和联合赋值的数量迅速增加, 本归约未给出多项式时间复杂度保证; 大型删除超立方体需要进一步利用图结构压缩计算。行列式界对固定的  $G$  给出  $c(G) < 2$ , 其精度仍有改进空间。

一般完全图的精确常数仍待确定。逐一缺失分布族给出  $c(K_n) \geq 2 - 2/n$ , 本文证明了直至  $n = 4$  的等式。这里固定的是分布数量。Li 和 Anantharam [5] 提出的四符号问题, 则固定输出集合, 并要求对其上的所有分布构造一个同时耦合;  $c(K_4)$  每次只涉及四个分布, 因而两者是不同的问题。

对一般图, 块分解公式与图子式单调性使问题集中到共享多个顶点的圈结构。一个具体问题是  $Q_3$  的精确常数: 割下界为  $7/4$ , 一般上界严格小于 2, 两者之间的差距尚待消除。另一个方向是具有共享支撑或其他结构约束的分布族, 目标是给出同时最大耦合的可行性判据。两符号情形已由共同阈值构造解决。

分布访问方式的差异还引出一个中间模型: 各顶点在自身分布之外, 可以接收有关整个分布族的共享预处理信息。达到集中式因子需要多少通信量和存储量, 是连接数学耦合与实际状态撤回协议的进一步问题。

## A 计算核验

以下计算使用明确指定的合成有理概率分布，核验上述构造和有限归约。全部输入与通过核验的证书均保存在随附材料中。

### A.1 圈图与仙人掌图的构造检验

测试集包含八个用于开发构造的实例，以及四个在构造方法确定后选取的不同留出实例。表 1 列出全部十二个有效实例；表 3 按相同顺序给出完整输入。最初选取的留出项 H04 与开发项 D03 重复，因此未计入最终十二项；另行确定输入后，使用 H05 替代它，原构造方法保持不变。随附材料保留旧输入、替代输入及两轮结果。

| 实例           | 联合赋值数 | 图常数上界 | 构造比值        | LP 数值结果 |
|--------------|-------|-------|-------------|---------|
| 三顶点树         | 27    | 1     | 1           | 1       |
| 二符号 $C_4$    | 16    | $3/2$ | 1           | 1       |
| 逐一缺失 $C_3$   | 27    | $4/3$ | $4/3$       | $4/3$   |
| 逐一缺失 $C_4$   | 256   | $3/2$ | $3/2$       | $3/2$   |
| 逐一缺失 $C_5$   | 3125  | $8/5$ | $8/5$       | $8/5$   |
| 带公共符号的 $C_4$ | 625   | $3/2$ | $3/2$       | $3/2$   |
| 含零距离边的 $C_4$ | 81    | $3/2$ | 1           | 1       |
| 相同边际分布       | 81    | $3/2$ | 0           | 0       |
| 非均匀留出 $C_4$  | 81    | $3/2$ | 1.100862304 | 1       |
| 三角形等号边界      | 27    | $4/3$ | 1           | 1       |
| 共用一个割点的两个三角形 | 243   | $4/3$ | $4/3$       | $4/3$   |
| 带公共符号的三角形    | 64    | $4/3$ | $4/3$       | $4/3$   |

表 1: 有限构造检验。构造比值为全变差距离为正的各边上，不一致概率与全变差距离之比的最大值。LP 列报告浮点求解结果，与已知精确理论值一致的项以分数列出。构造联合分布采用精确有理数算术。所有边距离均为零时，实例值约定为 0。

全部十二个有效实例所构造的联合分布，均通过精确的非负性、总质量、顶点边际分布、边上的不一致概率、零距离边约束和图常数上界检查。另用独立实现的线性规划进行核对，并在将输出符号统一逆序重编号后重新求解。在记录的原始运行与置换运行中，边际分布残差（计算值与给定值之差）的最大绝对值为  $2.22 \times 10^{-16}$ ，原始规划与对偶规划的最大目标值差为  $4.44 \times 10^{-16}$ 。逐一缺失三角形实例 D03 在两种符号顺序下均否定因子 1。非均匀留出实例 H01 的精确构造比值为  $28214/25629$ ，而 LP 数值结果为 1；这一数值比较也显示，构造未必达到实例最优。

### A.2 极点枚举与精确验证

两种实现分别枚举  $\Lambda_n$ ，其中  $n = 2, 3, 4$ ，并在完全图  $K_n$  上计算各规范分布族的耦合最优值。第一种用有理数运算进行初等行变换，检验每个大小至多为  $n$  的支撑。第二种用符号计算工具进行精确有理数运算，检验每个含  $n$  列的候选组合，筛选线性无关的基，保留非负

解，并对退化极点去重。两者的完整列表，包括有理数权重在内，精确一致。表中两种候选数分别为  $\sum_{r=1}^n \binom{2^n-1}{r}$  和  $\binom{2^n-1}{n}$ ；轨道按全部顶点置换划分，目标列为这些极点实例在  $K_n$  上的最大最优因子。

| $n$ | 检验支撑数 | $n$ 列候选数 | 极点数 | 轨道数 | $K_n$ 上最大 $\rho$ |
|-----|-------|----------|-----|-----|------------------|
| 2   | 6     | 3        | 2   | 2   | 1                |
| 3   | 63    | 35       | 6   | 4   | 4/3              |
| 4   | 1940  | 1365     | 42  | 10  | 3/2              |

表 2: 完全图  $K_n$  的完整极点枚举与耦合计算。末列为  $\max_{\lambda \in \text{ext}(\Lambda_n)} \rho(K_n, \nu^\lambda)$ 。极点计数属于已有的平衡集合族枚举问题 [7]；此处计算耦合目标值与精确原始一对偶证书。

全部 42 个四顶点实例均具有通过核验的有理数原始一对偶证书。一个另行编写的核验器直接从输入分布重建每项约束；除原问题可行性、乘子符号、对偶中与变量  $c$  对应的不等式（式 (6) 的第二行）及目标值精确相等之外，还总共检查了 6717 个完整赋值的对偶不等式。三个故意损坏的证书均被拒绝。

这 42 个实例的因子分布如下：一个实例的值为 0，十四个为 1，二十二个为 4/3，四个为 5/4，一个为 3/2。

一个按轨道压缩的实现已与先前求解的全部 42 个实例逐一核对，仅使用十个代表元 LP 就得到相同的值。这里完整极点枚举与证书验证的范围限于至多四个顶点；表 1 的五顶点圈图是一个指定分布族的构造检验，并非完整枚举。五顶点完全图的探索没有完成，不作为本文结论的证据，也不纳入本次随附的已验证结果。

计算环境使用 Python 3.12.10、NumPy 2.4.4、带 HiGHS 的 SciPy 1.17.1、NetworkX 3.6.1 和 SymPy 1.14.0。独立实现的线性规划枚举全部联合结果，使用 SciPy 文档所述的 `linprog` 接口 [15]。这些核验采用确定性的约束检查；数学结论由解析证明和精确证书支持。

### A.3 全部构造检验的输入

表 3 分左、中、右三组列出，各组自上而下，按组从左到右阅读时与表 1 的实例顺序一致。顶点从 0 起编号，状态按权重矩阵  $W$  的列编号；第  $v$  行除以该行总和后，就是顶点  $v$  的概率分布。零权重也保留，因此联合赋值总数为矩阵列数的顶点数次方。 $P_3$  的边为 01, 12； $C_n$  的边为 01, 12,  $\dots$ ,  $(n-2)(n-1)$ ,  $(n-1)0$ 。图  $F$  的边为 01, 12, 20, 03, 34, 40，即共用顶点 0 的两个三角形。此处的 01 表示无向边  $\{0, 1\}$ 。

表 3: 十二个有效实例的完整整数权重输入。D 表示开发实例，H 表示构造确定后选取的检验实例。

| 编号  | 图     | 权重矩阵 $W$                                                                                         | 编号  | 图     | 权重矩阵 $W$                                                                                                                              | 编号  | 图     | 权重矩阵 $W$                                                                                      |
|-----|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| D01 | $P_3$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$                              | D05 | $C_5$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | H01 | $C_4$ | $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$              |
| D02 | $C_4$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$                                 | D06 | $C_4$ | $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$                  | H02 | $C_3$ | $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$                           |
| D03 | $C_3$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$                              | D07 | $C_4$ | $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$                                                      | H03 | $F$   | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| D04 | $C_4$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ | D08 | $C_4$ | $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$                                                      | H05 | $C_3$ | $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$               |

例如，D06 每行总和为 15，第一列是质量为  $4/5$  的公共状态，其余部分是四状态逐一缺失分布，因此对应推论 3.5 中的  $\varepsilon = 1/5$ 。H05 的公共质量为  $3/5$ ，故  $\varepsilon = 2/5$ ，每条边的全变差距离为  $1/5$ ，可达到的不一致概率为  $4/15$ 。两例的构造比值分别为  $3/2$  和  $4/3$ 。H04 与 D03 的边集和权重矩阵完全相同；将它排除后，H05 作为另行选定的替代检验，形成表中十二个不同的有效输入。

#### A.4 随附计算材料的内容与使用

计算附件随论文一并提供，参赛时列于“其他材料”项；复核入口为计算附件内的使用说明。材料分为三类：构造检验，包括表 3 中十二组输入、原始及符号置换结果、重复项排除及替代记录；极点枚举，包括两种方法及完全图  $K_2, K_3, K_4$  的完整输出；证书核验，包括四项点原始一对偶有理证书及独立核验程序。另附树与仙人掌图的构造实现、运行环境、复核步骤和完整性校验说明。

复核可从证书检查开始，再按表 3 的输入重跑构造，并对  $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$  独立重跑极点枚举，另存新结果用于比较。证书核验只依赖 Python 标准库，重新求解与枚举所需环境见附录 A。

## 参考文献

- [1] J. Kleinberg and É. Tardos. *Approximation Algorithms for Classification Problems with Pairwise Relationships: Metric Labeling and Markov Random Fields*. Journal of the ACM 49(5), pp. 616–639, 2002. Author manuscript: <https://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/focs99-mrf.pdf>.
- [2] M. S. Charikar. *Similarity Estimation Techniques from Rounding Algorithms*. STOC, pp. 380–388, 2002. <https://doi.org/10.1145/509907.509965>.
- [3] O. Angel and Y. Spinka. *Pairwise optimal coupling of multiple random variables*. arXiv:1903.00632v2, 2021. <https://arxiv.org/abs/1903.00632v2>.
- [4] M. Bavarian, B. Ghazi, E. Haramaty, P. Kamath, R. L. Rivest, and M. Sudan. *The Optimality of Correlated Sampling*. Author manuscript, 2016. [https://people.csail.mit.edu/badih/papers/correlated\\_sampling.pdf](https://people.csail.mit.edu/badih/papers/correlated_sampling.pdf).
- [5] C. T. Li and V. Anantharam. *Pairwise Multi-marginal Optimal Transport and Embedding for Earth Mover’s Distance*. arXiv:1908.01388v2, 2019. <https://arxiv.org/abs/1908.01388v2>.
- [6] R. D. Gill and P. D. Grünwald. *An Algorithmic and a Geometric Characterization of Coarsening at Random*. Annals of Statistics 36(5), pp. 2409–2422, 2008. <https://doi.org/10.1214/07-AOS532>.
- [7] D. Laplace Mermoud, M. Grabisch, and P. Sudhölter. *Minimal balanced collections and their application to core stability and other topics of game theory*. Discrete Applied Mathematics 341, pp. 60–81, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.07.025>. Public version: <https://arxiv.org/abs/2507.05898>.
- [8] M. Andrews, M. T. Hajiaghayi, H. Karloff, and A. Moitra. *Capacitated Metric Labeling*. SODA, pp. 976–995, 2011. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973082.76>. Author manuscript: <https://people.csail.mit.edu/moitra/docs/cml.pdf>.
- [9] A. Gupta, I. Newman, Y. Rabinovich, and A. Sinclair. *Cuts, Trees and  $\ell_1$ -Embeddings of Graphs*. Combinatorica 24(2), pp. 233–269, 2004. <https://doi.org/10.1007/s00493-004-0015-x>.
- [10] A. Filtser and H. Le. *Clan Embeddings into Trees, and Low Treewidth Graphs*. STOC, pp. 342–355, 2021. <https://doi.org/10.1145/3406325.3451043>. Public version: <https://arxiv.org/abs/2101.01146v2>.
- [11] T. Hutchcroft, O. Rospuskova, and O. Tamuz. *Local Coordination and the Geometry of Social Networks*. Author manuscript dated 9 February 2026. [https://tamuz.caltech.edu/papers/local\\_coordination.pdf](https://tamuz.caltech.edu/papers/local_coordination.pdf).
- [12] C. Yao, Y. Wei, Z. Huang, J. Qian, C. Chen, S. Lu, C. Wu, and L. He. *Forgetting Without Restarting: Execution-State Unlearning for Stateful LLM Agents*. arXiv:2609.04875v1, 2026. <https://arxiv.org/abs/2609.04875v1>.
- [13] C. Yu, Y. Wang, J. Zhang, Y. Duan, M. Zheng, Z. Wu, K. Shi, and T. Cai. *From Faulty Memories to Corrected Actions: Dependency-Guided Rollback Repair for Memory-Augmented Agents*. arXiv:2608.10502v1, 2026. <https://arxiv.org/abs/2608.10502v1>.
- [14] J. Shah. *Causal Agent Replay: Counterfactual Attribution for LLM-Agent Failures*. arXiv:2606.08275v1, 2026. <https://arxiv.org/abs/2606.08275v1>.
- [15] SciPy developers. *scipy.optimize.linprog documentation*. Accessed 14 September 2026. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.linprog.html>.
- [16] E. L. Qin and Z. Lin. *AI as the mirror, mate, and mentor: negotiating romantic relationships with ChatGPT as “Teacher G” on Xiaohongshu*. Humanities and Social Sciences Communications 13, Article 1290, 2026. <https://doi.org/10.1057/s41599-026-07682-2>.
- [17] Z. Jiang, C. Zheng, H. Chen, and L. Chen. *RECALLbot: Designing Agentic Memory and Reciprocal Disclosure for Human–Chatbot Relationships*. CHI, Article 795, pp. 1–20, 2026. <https://doi.org/10.1145/3772318.3790714>.
- [18] Anthropic. *Claude Platform Docs: Glossary, Temperature*. Accessed 14 September 2026. <https://platform.claude.com/docs/en/about-claude/glossary>.

## 致谢

本研究由个性化对话助手的记忆延续问题及“家克”相关公开讨论启发，进一步把记录撤回时的状态一致性要求抽象为有限图上给定边际分布的共同耦合问题。共享随机源和顺序无关是本文的建模要求。计算采用合成有理概率分布，未开展访谈、问卷或实际对话系统性能实验，也未使用校外研究机构或实验室。

根据团队确认的分工，陈韵吉负责问题形式化、层集分解、有限极值归约及支撑与分母界，承担第 1、2 节和全文统稿；吴祺乐负责圈图上下界、割点拼接、块与仙人掌图、至多四顶点图和删除超立方体的理论部分，承担第 3、4 节；两人共同负责第 5 节的边际信息约束分析。陈瀚林负责仙人掌图采样、原始与对偶线性规划、极点枚举、有理证书及核验程序，承担第 6 节和附录 A，整理构造检验的输入与随附计算材料。三人按专题整理文献，共同审阅摘要、第 7 节讨论与进一步问题，核对全文衔接。

主要困难包括零全变差边的约束、圈图删边权重的平衡、分布访问条件的量词，以及浮点计算与严格证明的衔接。相应处理是保留零距离边的相等约束，证明逐边上界与匹配下界，区分访问整个分布族和仅访问自身边际分布的规则，并以有理证书核验、损坏证书反向测试检查计算。附录列出 12 个有效构造实例；完整极点枚举为 2、3、4 顶点情形，42 个四顶点实例通过精确证书核验。五顶点圈图是指定分布族的构造检验，五顶点完全图的未完成探索不作为结论证据。

指导老师李孟飞为同济大学第二附属中学数学教师，是三位学生的校内任课老师。指导无偿，主要包括研究方向讨论、理论与计算指导、论文写作指导和材料审阅，对研究范围、数学表述、文献归属及结果解释提出修改意见。除上述教师指导外，无其他个人或校外机构参与研究指导或协作。本论文未参加其他比赛，未发表或投稿，也无其他参赛或投稿计划。

团队于 2026 年 8 月至 9 月，分阶段反复使用 Codex 中的 OpenAI 模型 GPT-5.6 Sol 与 GPT-6 Astra，按任务阶段切换。除上述模型外，未使用其他 AI。AI 参与问题表述、文献检索、证明推导、程序实现、计算核验、段落拟稿和正文修订。学生按分工审阅、取舍与核查所采用的内容。理论结果以正文数学论证为依据，数值结果结合所附程序、输入及适用的有理证书核验。相关研讨整理记录、研究过程说明及计算材料随附，整理记录的性质在文件中说明。

感谢同济大学第二附属中学对我们学习与研究的支持。感谢李孟飞老师的无偿指导，以及相关文献作者提供的理论基础。