

参赛学生姓名：陈星云 欧阳霏 陈禹硕

中学：广州市第六中学（海珠校区）

省份：广东省

国家/地区：中华人民共和国

指导老师姓名：璩斌

指导老师单位：广州市第六中学（海珠校区）

论文题目：树映射多项式熵的上界估计

树映射多项式熵的上界估计

陈星云 欧阳霏 陈禹硕

2026 年 9 月 15 日

摘要

多项式熵是用于衡量动力系统混乱程度的量. 动力系统拓扑熵为零时, 多项式熵可用于反映该系统的复杂程度. 本文对多项式熵在区间分段单调映射的 lap 数以及总变差的两个上界进行推广, 将结论应用到了有限树映射中. 为了完成证明, 作者定义了各单调片上的轨道长度, 并采用最小子树的深度优先遍历的方法. 本文探究了树 lap 数上界与满射情况下总变差的上界, 并在最后用 Markov 剖分的例子加以说明.

关键词: 有限树映射; 多项式熵; Bowen 距离; lap 数; 总变差; Markov 映射.

目录

符号说明	3
1 引言	4
1.1 研究背景与相关工作	4
1.2 有限树上的几何结构与证明方法	4
1.3 主要结果与文章结构	5
2 预备知识与例子	6
2.1 有限树、顶点、边与线性度量	6
2.2 Bowen 距离、分离集与生成集	7
2.3 单调边剖分与树的 lap 数	8
2.4 树上的总变差	10
2.5 Markov 剖分与转移矩阵	11
3 主要定理、详细证明与 Markov 算例	12
3.1 迭代仍具有有限单调边剖分	12
3.2 单调区间上的轨道长度与生成估计	13
3.3 Lap 数上界	15
3.4 深度优先遍历与分离集估计	16
3.5 满射复合不降低总变差	20
3.6 总变差上界	21
3.7 算例一：多项式熵为零的分支轮换	22
3.8 算例二：帐篷映射	23
4 总结与后续研究	24
4.1 主要结论	24
4.2 后续研究问题	24

符号说明

符号	含义
T	有限树
$V(T)$	顶点集, 即 $V(T) = \{x \in T : \text{val}_T(x) \neq 2\}$
$E(T)$	边集
$\text{val}_T(x)$	点 x 在 T 中的连接分支数
d	树上的线性度量
$L_d(T)$	树 T 在度量 d 下的总长度
$[x, y]_T$	连接 x, y 的唯一弧段
f	连续映射 $f : T \rightarrow T$, 即本文研究的有限数映射
f^n	f 的 n 次迭代
$h_{\text{top}}(f)$	拓扑熵
$h_{\text{pol}}(f)$	多项式熵
$\log^+ x$	正部对数, $\max\{0, \log x\}$
$d_n(x, y)$	n 步 Bowen 距离
$s(n, \varepsilon)$	最大 (n, ε) -分离集基数
$r(n, \varepsilon)$	最小 (n, ε) -生成集基数
$\rho_n(x, y)$	单调片上的轨道长度
$\mathcal{P}$	边剖分
J	剖分片, 即一条闭弧段
c_n^T	f^n 的最小单调边剖分数, 即树的 lap 数
$\text{Var}_d(g)$	连续映射 g 在树上的总变差
$\text{Var}_{J,d}(g)$	连续映射 g 在弧段 J 上的变差
$\mathcal{Q}$	Markov 剖分
I_i	Markov 剖分中的第 i 个小段
$A = (a_{ij})$	Markov 转移矩阵

1 引言

1.1 研究背景与相关工作

拓扑熵是刻画动力系统轨道复杂度的基本不变量, 它描述在固定观察精度下, 可区分有关轨道数随时间所增的指数速率. 但如果拓扑熵为零, 轨道的复杂性也未必有限, 即系统动力学应按较慢的增长方式加以考察. 所谓多项式熵就是用多项式方法来估计轨道复杂度是处理零拓扑熵系统时可用的一种工具. Marco 在多项式熵及可积 Hamilton 系统中的应用进行了系统研究 [6].

对于连续区间映射, 分段单调结构使轨道复杂度能够与迭代映射的单调区间数联系起来. Misiurewicz-Szlenk 建立了分段单调区间映射的拓扑熵与 lap 数增长之间的关系 [8]; Milnor-Thurston 的 kneading 理论进一步揭示了符号动力学、单调区间数与熵之间的联系 [7, 1, 9].

在多项式增长尺度上, Barbosa Gomes-Carneiro 研究了区间映射的多项式熵与 lap 数、总变差之间的关系 [4]. 对于连续分段单调区间映射, 记 c_n 为 f^n 的 lap 数, 其结果给出上界

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n}{\log n}.$$

在满射情形下, 还可以利用迭代映射的总变差得到

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \text{Var}(f^n)}{\log n},$$

其中 $\log^+ t = \log \max\{1, t\}$. 这些估计将轨道复杂度的控制转化为单调区间数或总变差的增长估计. 关于 lap 数的多项式增长及多项式熵的其他相关研究, 可参见 [3, 5].

有限树是区间的自然推广, 其分岔结构使一维动力系统的若干问题具有更丰富的组合形式. 树映射的 kneading 理论及相关熵理论已有研究 [2, 1]. 本文研究上述两个多项式熵上界在有限树映射中的对应形式.

1.2 有限树上的几何结构与证明方法

设 T 为有分支的有限树. 与区间不同, 一般有限树没有全局线性顺序, 但任意两点之间仍存在唯一连接弧. 这一性质使我们可以对每一段弧确定先后顺序、测量长度, 并通过有限树的边结构把每一段弧的信息整合出整体结论.

首先需要明确树映射的单调区间及 lap 数. 本文固定 T 的自然边结构, 要求每个剖分片都是包含在某条自然边中的非退化闭弧, 并且映射在该片上的限制是到其像的同胚. 对每个 $n \geq 1$, 以 c_n^T 表示 f^n 的最小单调边剖分数. 该定义保留了单调区间的基本性质, 同时允许单调区间的像经过树的分岔点.

Lap 数上界的证明利用单调区间上的轨道距离. 若 f^n 在弧段 J 上单射, 则 f^k 在 J 上对所有 $0 \leq k \leq n$ 都单射. 固定一个与树的拓扑相容的线性度量 d , 并在 J 上定义

$$\rho_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} d(f^k(x), f^k(y)).$$

由于各次迭代在 J 上保持弧的顺序结构, ρ_n 沿 J 可加, 而且不小于相应的 Bowen 距离. 若树的总长度为 $L_d(T)$, 则 J 关于 ρ_n 的长度不超过 $nL_d(T)$. 因此, 在固定精度下, 每个单调区间所需的生成点数至多线性增长; 再对全部单调区间求和, 即可得到由 c_n^T 控制的上界.

总变差上界则从分离集出发. 本文在每条自然边上定义映射的变差, 再对所有自然边求和, 得到树上的总变差 $\text{Var}_d(g)$. 对于有限分离集, 考虑包含它的最小子树, 并按深度优先遍历中的首次到达时间排列各点. 相邻点之间的连接弧在细分边内部的覆盖重数至多为二, 由此可将分离集的基数控制为前 n 次迭代总变差之和. 对于满射且分段严格单调的映射, 进一步证明满射复合不降低总变差, 从而得到以 $\text{Var}_d(f^n)$ 表示的上界.

1.3 主要结果与文章结构

本文首先证明以下 Lap 数上界.

定理 1.1 (Lap 数上界). 若 $f: T \rightarrow T$ 是连续分段严格单调映射, 则

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n^T}{\log n}.$$

第二个结果利用迭代映射的总变差估计多项式熵.

定理 1.2 (总变差上界). 若 $f: T \rightarrow T$ 连续、满射且分段严格单调, 则对于任意与拓扑相容的线性度量 d , 有

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \text{Var}_d(f^n)}{\log n}.$$

上述结果给出了两种控制多项式熵的方法: 一种利用迭代所需的单调区间数, 另一种利用迭代映射的总变差. 特别地, 若存在 $q \geq 0$, 使 $c_n^T = O(n^q)$, 则第一个定理给出 $h_{\text{pol}}(f) \leq q + 1$; 在第二个定理的假设下, 若 $\text{Var}_d(f^n) = O(n^q)$, 也得到相同的上界. 这些结论是上界估计, 一般不要求取等号.

本文其余部分安排如下. 第 2 节介绍有限树的线性度量、Bowen 距离、多项式熵、单调边剖分、总变差与 Markov 剖分. 第 3 节证明两个主定理, 并通过 Y 形树上的分支轮换映射和区间上的帐篷映射说明相关估计. 第 4 节总结主要结论, 并讨论进一步的研究问题.

2 预备知识与例子

2.1 有限树、顶点、边与线性度量

定义 2.1. 有限树 T 是一个紧连通度量空间. 本文只考虑非退化的有限树. 它可以由有限多条闭弧段沿端点粘合得到, 并且不含简单闭曲线. 对 $x \in T$, 记

$$\text{val}_T(x) = \#\{T \setminus \{x\} \text{ 的连通分支}\}.$$

若 $\text{val}_T(x) = 1$, 称 x 为端点; 若 $\text{val}_T(x) \geq 3$, 称 x 为分岔点. 令

$$V(T) = \{x \in T : \text{val}_T(x) \neq 2\}.$$

集合 $T \setminus V(T)$ 的每个连通分支的闭包称为 T 的一条边, 即去掉所有顶点后剩下的各条开路段, 再将其两端点补回所得到的闭弧段. 边集记为 $E(T)$.

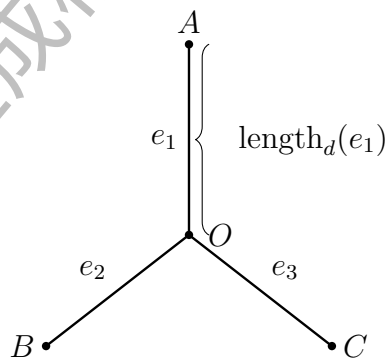
任意两点 $x, y \in T$ 之间存在唯一弧段, 记为 $[x, y]_T$. 这是树区别于一般图的核心性质, 即两点之间有且仅有一条确定的路可走, 没有环路等.

定义 2.2. 称度量 d 是 T 上的线性度量, 如果它与 T 的拓扑相容, 并且当 $z \in [x, y]_T$ 时,

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

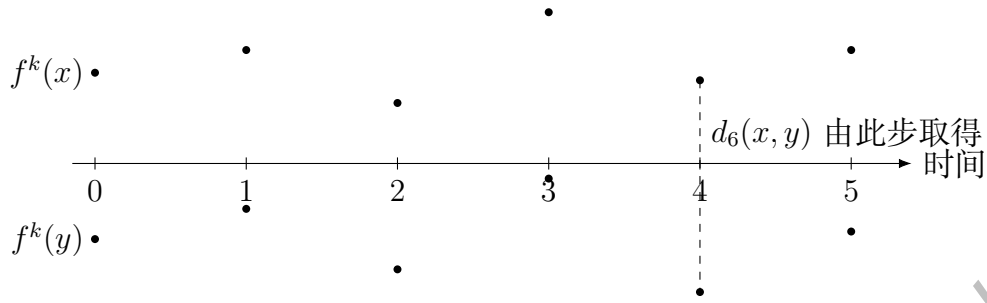
定义树的总长度为

$$L_d(T) = \sum_{e \in E(T)} \text{length}_d(e).$$



$$L_d(T) = \text{length}_d(e_1) + \text{length}_d(e_2) + \text{length}_d(e_3)$$

图 1: Y 形树的自然边结构与总长度

图 2: Bowen 距离记录前 n 步中最大的轨道分离

2.2 Bowen 距离、分离集与生成集

设 (X, d) 是紧度量空间, $f: X \rightarrow X$ 连续. 对 $n \geq 1$, 定义迭代第 n 次 Bowen 距离

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq k < n} d(f^k(x), f^k(y)).$$

它不是只比较 x 与 y 的当前位置, 而是比较迭代前 n 次形成的最大距离.

定义 2.3. 给定 $n \geq 1$ 与 $\varepsilon > 0$.

- (i) 若 $E \subset X$ 中任意不同的 x, y 都满足 $d_n(x, y) > \varepsilon$, 则称 E 为 (n, ε) -分离集; 记其最大可能基数为 $s(n, \varepsilon)$.
- (ii) 若对每个 $x \in X$, 都存在 $y \in F$ 满足 $d_n(x, y) \leq \varepsilon$, 则称 F 为 (n, ε) -生成集; 记其最小可能基数为 $r(n, \varepsilon)$.

注 2.4. 分离集即在点集 X 中找到一组相互之间的 Bowen 距离都大于精度的点组成的集合, 它元素的最大个数记为 $s(n, \varepsilon)$; 生成集是在点集 X 中找一些点中, 取与这些点 Bowen 距离不大于精度的几个点来代表这一些点, 代表这些点的点组成该点集的生成集, 它元素的最小个数记为 $r(n, \varepsilon)$.

引理 2.5. 对任意 $n \geq 1$ 与 $\varepsilon > 0$, 有

$$r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq r\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

证明 (反证法). 取一个基数为 $s(n, \varepsilon)$ 的 (n, ε) -分离集 E . 假设 E 不是生成集, 那么存在某个点 $x \in X$, 使得对 E 中所有 y 都有 $d_n(x, y) > \varepsilon$. 现在考虑集合 $E \cup \{x\}$. 对于任意 $y \in E$, 我们有 $d_n(x, y) > \varepsilon$, 所以新集合仍然是 (n, ε) -分离的. 而这与我们假设的极大性矛盾, 因为我们可以再往 E 中添加一个点. 因此

$$r(n, \varepsilon) \leq \text{card}(E) \leq s(n, \varepsilon)$$

另一方面, 再取一个基数为 $r(n, \varepsilon/2)$ 的 $(n, \varepsilon/2)$ -生成集 F . 因为 F 是生成集, 所以对 E 里的每一个点 x , 都能在 F 里找到至少一个点 y , 使得 $d_n(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 我们给每个 $x \in E$ 选择这样的一个人 y , 如果两个不同的分离点 $x_1, x_2 \in E$ 都被同一个 y 代表, 那么

$$d_n(x_1, x_2) \leq d_n(x_1, y) + d_n(x_2, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

但 E 是 (n, ε) -分离集, 任意两个不同点之间的距离必须严格大于 ε , 上式与分离性矛盾. 因此每个 $z \in F$ 至多对应一个分离点, 故

$$s(n, \varepsilon) \leq \text{card}(F) = r\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

□

定义 2.6. 连续映射 f 的多项式熵定义为

$$h_{\text{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s(n, \varepsilon)}{\log n}.$$

由引理 2.5, 也可等价地用 $r(n, \varepsilon)$ 定义. 具体地, 对引理中的不等式取对数、除以 $\log n$ 并取上极限, 再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由夹逼关系得到

$$h_{\text{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log r(n, \varepsilon)}{\log n}.$$

例 2.7. 若对充分小的 ε , 存在两个常数 C_1, C_2 有

$$C_1 \cdot n^3 \leq s(n, \varepsilon) \leq C_2 \cdot n^3,$$

则

$$\frac{\log s(n, \varepsilon)}{\log n} \rightarrow 3,$$

因而 $h_{\text{pol}}(f) = 3$. 若 $s(n, \varepsilon)$ 保持有界, 则多项式熵为 0.

命题 2.8. 若 $h_{\text{top}}(f) > 0$, 则 $h_{\text{pol}}(f) = +\infty$.

证明. 由拓扑熵的分离集定义, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与 $a > 0$, 使无穷多个 n 满足

$$s(n, \varepsilon_0) \geq e^{an}.$$

于是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s(n, \varepsilon_0)}{\log n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\log n} = +\infty.$$

□

2.3 单调边剖分与树的 lap 数

定义 2.9. 设 X, Y 是两条弧段, 若映射 $g: X \rightarrow Y$ 满足以下条件:

- (i) g 是连续的
- (ii) g 是双射的 (单射且满射)
- (iii) g^{-1} 也是连续的

则称映射 g 是同胚.

定义 2.10. 若有限集 $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ 满足:

- (i) 每个 J_i 是一段有长度的, 包含两个端点的弧段, 并包含在某条自然边中;
- (ii) $T = \bigcup_{i=1}^m J_i$, 即所有弧段并起来会覆盖整一颗树, 树上任意一点都至少属于一个弧段;
- (iii) 任意两段弧段 J_x, J_y 剔除端点之后不会有任何的重叠部分.

则称集合 $\mathcal{P}$ 为 T 的一个边剖分.

定义 2.11. 设连续映射 $f: T \rightarrow T$, 如果存在有限边剖分 $\mathcal{P}$, 使对每个 $J \in \mathcal{P}$, 都满足

$$x \in J \quad \mapsto \quad f(x) \in f(J)$$

是到非退化弧段 (有长度的, 包含两个端点的弧段) $f(J)$ 的同胚, 则称 f 是分段严格单调的.

定义 2.12. 若 $\mathcal{P}_n$ 是 T 的边剖分, 且对每个 $J \in \mathcal{P}_n$, 限制映射 $f^n|_J: J \rightarrow f^n(J)$ 是同胚, 则称 $\mathcal{P}_n$ 为 f^n 的单调边剖分. 定义

$$c_n^T = \min\{\text{card}(\mathcal{P}_n) : \mathcal{P}_n \text{ 是 } f^n \text{ 的单调边剖分}\}.$$

本文把 c_n^T 称为树的 lap 数.

注 2.13. c_n^T 回答的问题是: 为了让 f^n 在每一小段上都不折叠, 最少要把树切成多少段? 迭代越复杂, 通常需要的切分越多.

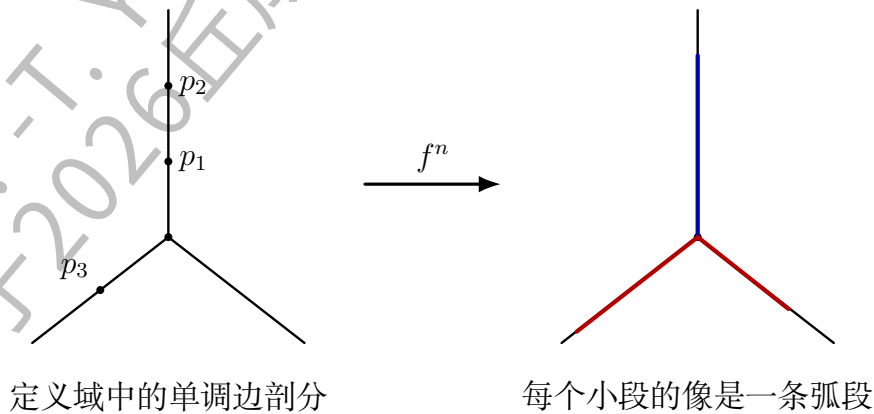


图 3: 单调边剖分的示意图

2.4 树上的总变差

定义 2.14. 设 $J \subset T$ 是非退化弧段, $g: T \rightarrow T$ 连续. 取 J 上任一方向, 并定义

$$\text{Var}_{J,d}(g) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^r d(g(t_{i-1}), g(t_i)) : t_0 <_J t_1 <_J \cdots <_J t_r \right\}.$$

树上的总变差定义为

$$\text{Var}_d(g) = \sum_{e \in E(T)} \text{Var}_{e,d}(g).$$

注 2.15. 在一条自然边上, 确定一个方向并按顺序取有限个点, 算相邻像的距离和, 并观察其像走过的总路程. 对沿着所有有限个、按自然顺序排列的点走出来的路程取上确界, 就得到这条边上的变差. 再把所有边的变差相加, 就是树上的总变差.

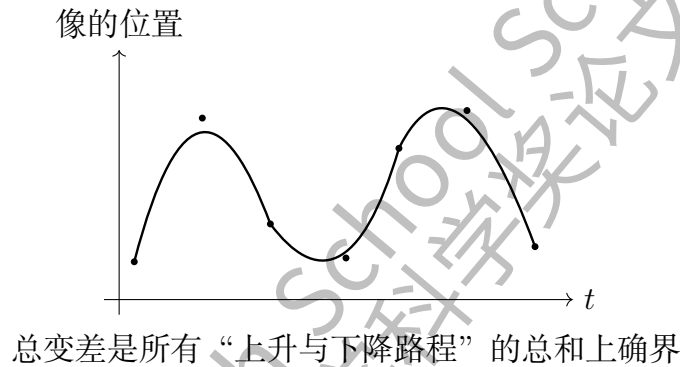


图 4: 一维总变差的直观图像

引理 2.16. 若

$$J = J_1 \cup \cdots \cup J_r$$

且 J_i 是按顺序排列、内部两两不交且相邻子弧仅共享端点的非退化闭子弧, 则

$$\text{Var}_{J,d}(g) = \sum_{i=1}^r \text{Var}_{J_i,d}(g).$$

特别地, 若 $\mathcal{P}$ 是边剖分, 则

$$\text{Var}_d(g) = \sum_{J \in \mathcal{P}} \text{Var}_{J,d}(g).$$

证明. 我们把 $=$ 的证明拆分成证明 $\leq$ 与 $\geq$:

任意 J 上的分点列都可加入各 J_i 的公共端点, 故其变差和不超过右端.

反之, 记 $V_i = \text{Var}_{J_i,d}(g)$. 若各 V_i 均有限, 则对任意 $\delta > 0$, 在每个 J_i 上取变差和大于 $V_i - \delta/r$ 的分点列, 并加入其端点. 将这些分点列拼接, 得到 $\text{Var}_{J,d}(g) \geq \sum_i V_i - \delta$. 令 $\delta \downarrow 0$ 即得相反不等式. 若某个 $V_i = +\infty$, 则将该子弧上的分点列扩充到 J 上, 得到 $\text{Var}_{J,d}(g) = +\infty$, 结论同样成立. $\square$

引理 2.17 (有限覆盖下的次可加性). 若闭子弧段 $K_1, \dots, K_s$ 覆盖弧段 J , 则

$$\text{Var}_{J,d}(g) \leq \sum_{i=1}^s \text{Var}_{K_i,d}(g).$$

证明. 用 K_i 的端点来切割 J 得到 $J_1, J_2, \dots, J_r$, 由引理 2.16 得

$$\text{Var}_{J,d}(g) = \sum_{i=1}^r \text{Var}_{J_i,d}(g)$$

由于未限制 K_i 两两不重合, 因此会重复计算重合部分弧段上的变差, 有

$$\sum_{i=1}^r \text{Var}_{J_i,d}(g) \leq \sum_{i=1}^s \text{Var}_{K_i,d}(g)$$

得证. □

2.5 Markov 剖分与转移矩阵

定义 2.18. 设 $\mathcal{Q} = \{I_1, \dots, I_m\}$ 是有限树的边剖分. 若

- (i) 剖分时的所有切点和树本身的分岔点和端点, 经过 f 作用后, 仍然落在这个剖分的各种切点里, 不会被映射到某一段的内部;
- (ii) 限制映射 $f|_{I_i} : I_i \rightarrow f(I_i)$ 是同胚, 且 $f(I_i)$ 是若干个剖分片 I_j 的并;

则称 $\mathcal{Q}$ 为 f 的一个 Markov 剖分. 定义转移矩阵

$$A = (a_{ij})_{m \times m}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & I_j \subset f(I_i), \\ 0, & I_j \not\subset f(I_i). \end{cases}$$

注 2.19. 连续空间上缀着无穷多个点, 动起来就像整条街上的人流, 即“连续空间上的运动”. 转移矩阵不看人流里每个人的具体坐标, 只看每个人从哪个街区出发、到哪个街区落脚. 于是无穷条轨道被压缩成有限字母表上的序列, 剖分片之间的转移就由一张 0-1 表格描述. 矩阵第 i 行告诉我们: 从第 i 个小块出发, 下一步可能进入哪些小块.

例 2.20 (三条分支的周期轮换). 设 $T = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ 是三条等长边组成的 Y 形树. 令 f 保持每一点到中心的距离, 并循环置换三条边:

$$e_1 \mapsto e_2, \quad e_2 \mapsto e_3, \quad e_3 \mapsto e_1.$$

其转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个矩阵代表了 P 迭代一次时, e_1 只能走到 e_2 , e_2 只能走到 e_3 , e_3 只能走到 e_1 .

因为 $P^3 = I$, 即 P 迭代三次又变回了 I , 所以该系统只有周期轮换而无新的组合分支.

第 3 节将严格计算其 c_n^T 、总变差与多项式熵.

3 主要定理、详细证明与 Markov 算例

3.1 迭代仍具有有限单调边剖分

引理 3.1. 若 f 有一个包含 m 个单调区间的边剖分, 则每个点 $y \in T$ 至多有 m 个原像 (所有被 f 映射到 y 的点).

证明. 在每个单调区间 J 上, $f|_J: J \rightarrow f(J)$ 是双射, 因此在 J 这个小段内部, 能映射到 y 的点最多只有一个. 把 m 个单调区间里的原像个数加起来即可. $\square$

命题 3.2. 若 $f: T \rightarrow T$ 连续且分段严格单调, 则对每个 $n \geq 1$, f^n 存在有限单调边剖分. 因而 $c_n^T < \infty$.

证明 (数学归纳法). 取 f 的一个有限单调边剖分 $\mathcal{P}$, 令 C 为所有剖分片端点组成的有限集. 定义

$$C_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(C).$$

由引理 3.1, 有限集的原像是有限集, 故 C_n 有限.

用有限集 $V(T) \cup C_n$ 在每条自然边上切分 T , 得到有限边剖分 $\mathcal{P}_n$. 取任一 $J \in \mathcal{P}_n$, 并记 J° 为 J 去掉两个端点后所得的开弧. 由 $J^\circ \cap C_n = \emptyset$, 特别有 $J^\circ \cap C = \emptyset$, 故存在 $I_0 \in \mathcal{P}$ 使

$$J \subset I_0.$$

因此 $f|_J$ 是到其像的同胚.

下面归纳证明: 对每个 $0 \leq j \leq n$, $f^j|_J: J \rightarrow f^j(J)$ 是双射, 因而是到其像的同胚; 并且当 $0 \leq j < n$ 时, 存在 $I_j \in \mathcal{P}$ 使

$$f^j(J) \subset I_j.$$

当 $j = 0$ 时, 上述结论已经成立. 假设结论对某个 $0 \leq j < n$ 成立. 由于 $f|_{I_j}: I_j \rightarrow f(I_j)$ 是双射, 限制映射 $f|_{f^j(J)}$ 也是到其像的双射, 从而

$$f^{j+1}(J) = f(f^j(J))$$

是 J 到 $f^{j+1}(J)$ 的双射. 又因为 J 紧而 T 是 Hausdorff 空间, 所以 $f^{j+1}|_J$ 是到其像的同胚.

若 $j+1 < n$, 则对任意 $x \in J^\circ$, 由 $x \notin f^{-(j+1)}(C)$ 可知 $f^{j+1}(x) \notin C$. 因此连通集

$$f^{j+1}(J^\circ)$$

包含在 $T \setminus C$ 的某个连通分支中. 取该分支闭包所对应的剖分片为 $I_{j+1} \in \mathcal{P}$, 便有

$$f^{j+1}(J) \subset I_{j+1}.$$

归纳完成, 故 $f^n|_J$ 是到其像的同胚. $\square$

注 3.3. 紧致空间: 其任意开覆盖都有有限子覆盖的拓扑空间.

Hausdorff 空间: 空间内任意两个不同的点都可以被一个互不相交的开邻域分开, 不会出现两个点“粘在一起”的情况. 实数轴, 平面以及本文研究的树都是 Hausdorff 空间.

拓扑学中我们了解到: 紧致空间到 Hausdorff 空间的连续双射一定是同胚. (如果一个连续映射是一一对应的, 而且起点空间“没有漏洞、不会开到无穷”, 终点空间又能把不同的点分开, 那么逆映射自动连续. 这样双射就升级成同胚.)

3.2 单调区间上的轨道长度与生成估计

引理 3.4. 若 $f^n|_J: J \rightarrow f^n(J)$ 是双射, 则对每个 $0 \leq k \leq n$, $f^k|_J: J \rightarrow f^k(J)$ 也是双射, 所以 $f^k|_J$ 是到其像的同胚.

证明 (反证法). 假设存在不同的 $x, y \in J$ 使 $f^k(x) = f^k(y)$, 则对于 f^n 和剩下的 $n-k$ 步, 有

$$f^n(x) = f^{n-k}(f^k(x)) = f^{n-k}(f^k(y)) = f^n(y)$$

于是 $f^n(x) = f^n(y)$. 但 $f^n|_J$ 是双射, 所以必须满足 $x = y$, 矛盾.

因此 $f^k|_J$ 一定是单射.

又因为值域是 $f^k(J)$, 所以每个像都有原像. 所以 $f^k|_J: J \rightarrow f^k(J)$ 是满射. 于是 $f^k|_J$ 是双射.

于是 $f^k|_J$ 是双射. 再加上 J 长度有限且包含端点的紧致空间、树是 Hausdorff 空间, 连续双射 $f^k|_J: J \rightarrow f^k(J)$ 一定是同胚. $\square$

若 $f^n|_J$ 是同胚, 定义

$$\rho_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} d(f^k(x), f^k(y)), \quad x, y \in J.$$

显然 $d_n(x, y) \leq \rho_n(x, y)$.

引理 3.5. 若 $x <_J y <_J z$, 则 ρ_n 满足可加性:

$$\rho_n(x, z) = \rho_n(x, y) + \rho_n(y, z).$$

证明. 在弧段 J 上, 三个点满足 $x <_J y <_J z$, 即 y 在 J 上位于 x 和 z 之间.

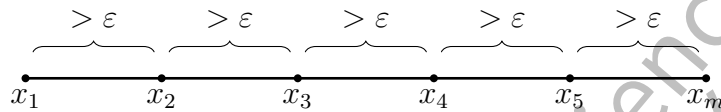
由引理 3.4, 每个 $f^k|_J$ 都是到其像的同胚. 因此 $f^k(y)$ 位于弧段

$$[f^k(x), f^k(z)]_T$$

上. 线性度量给出

$$d(f^k(x), f^k(z)) = d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^k(z)).$$

对 $0 \leq k < n$ 求和即可. □



取一个极大的 ρ_n - ε -分离集

图 5: 用极大 ρ_n - ε -分离集构造生成集

引理 3.6. 若 J 是非退化弧段且 $f^n|_J$ 是到其像的同胚, 则对任意 $\varepsilon > 0$, J 存在元素个数不超过

$$1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}$$

的 (n, ε) -生成集.

证明. 固定 J 的一个端点 a , 定义

$$\phi(x) = \rho_n(a, x), \quad x \in J.$$

由引理 3.5, 在 J 上固定左端点 a , 让 $\phi(x)$ 表示从 a 沿 J 按 ρ_n 量到 x 的累计距离. 因为 ρ_n 可加, 所以 x 越靠右, $\phi(x)$ 就越大; 而且 $\phi(x)$ 随 x 连续变化. 于是当 x 从 J 的左端走到右端时, $\phi(x)$ 恰好从 0 连续地增加到 L , 这样 J 上的每个点就一一对应到了区间 $[0, L]$ 里的一个数, 其中

$$L = \text{Length}_{\rho_n}(J)$$

同时也是 ϕ 的值域长度

对 J 上任意分点列, 由 ρ_n 定义得

$$\sum_i \rho_n(t_{i-1}, t_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_i d(f^k(t_{i-1}), f^k(t_i))$$

对固定的 k , $\sum_i d(f^k(t_{i-1}), f^k(t_i))$ 是 $f^k(J)$ 上沿着分点走的总路程, 它不超过 $f^k(J)$ 的总长度, 即 $f^k(J)$ 在度量 d 下的长度.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_i d(f^k(t_{i-1}), f^k(t_i)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \text{Length}_d(f^k(J))$$

每一步 $f^k(J)$ 的长度都不超过整棵树的总长度 $L_d(T)$, 总共 n 步, 所以

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Length}_d(f^k(J)) \leq nL_d(T).$$

因此 $L \leq nL_d(T)$.

取 J 中一个关于度量 ρ_n 的极大 ε -分离集 $F = \{x_1, \dots, x_m\}$. 若 $m = 1$, 所需基数估计显然成立; 若 $m \geq 2$, 按 J 上的顺序排列为

$$x_1 <_J x_2 <_J \dots <_J x_m.$$

由分离性,

$$\rho_n(x_i, x_{i+1}) > \varepsilon, \quad 1 \leq i < m.$$

再由引理 3.5,

$$L \geq \rho_n(x_1, x_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \rho_n(x_i, x_{i+1}) > (m-1)\varepsilon.$$

因此

$$m < 1 + \frac{L}{\varepsilon} \leq 1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}.$$

由 F 的极大性, 对任意 $x \in J$, 都存在 $x_i \in F$ 使

$$\rho_n(x, x_i) \leq \varepsilon$$

否则可以把 x 加入 F , 仍得到一个 ε -分离集, 与极大性矛盾. 因为 Bowen 距离是各步距离的最大值, 而 ρ_n 是各步距离的总和, 所以总和 $\geq$ 最大值, 即 $d_n \leq \rho_n$, 所以有

$$d_n(x, x_i) \leq \rho_n(x, x_i) \leq \varepsilon$$

所以集合 F 是一个 (n, ε) -生成集, 并且

$$\text{card}(F) = m \leq 1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}.$$

□

3.3 Lap 数上界

注 3.7. 此上界证明思路: 把 T 切成 c_n^T 个 n -步单调区间. 每个片内部只需要 $O(n)$ 个点就可以在 Bowen 距离下覆盖. 因此整个树只需要

$$c_n^T \cdot O(n)$$

个点. 取 $\log_n$ 后, 因为每个单调区间大约需要 n 个点, 所以总点数比段数多乘了一个 n , 这个多乘的 n 取对数后正好让上界多了 1.

定理 3.8. 若 $f: T \rightarrow T$ 连续且分段严格单调, 则

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n^T}{\log n}.$$

证明. 取 f^n 的最小单调边剖分

$$\mathcal{P}_n = \{J_1, \dots, J_{c_n^T}\}.$$

由引理 3.6, 每个 J_i 有一个元素个数不超过

$$1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}$$

的 (n, ε) -生成集. 把这些集合合并, 得到 T 的生成集, 因此

$$r(n, \varepsilon) \leq c_n^T \left(1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}\right).$$

于是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log r(n, \varepsilon)}{\log n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n^T}{\log n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + nL_d(T)/\varepsilon)}{\log n}$$

对固定的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\frac{\log(1 + nL_d(T)/\varepsilon)}{\log n} \rightarrow 1.$$

因而

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log r(n, \varepsilon)}{\log n} \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n^T}{\log n}.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由定义 2.6 即得结论. □

推论 3.9. 在上述定理的条件下, 若存在 $q \geq 0$ 与 $C > 0$, 使对所有充分大的 n 有

$$c_n^T \leq Cn^q,$$

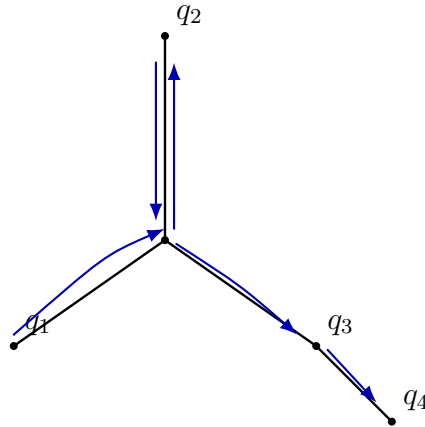
则

$$h_{\text{pol}}(f) \leq q + 1.$$

3.4 深度优先遍历与分离集估计

设 $E \subset T$ 是有限集. 记 $[E]$ 为包含 E 的最小子树. 把 $[E]$ 的每条边复制两次, 可形成一条每棵子树都依次、完整地走, 每条边走两次的遍历; 等价地, 可以从一个起点出发进行深度优先搜索, 沿每条边走出去再走回来.

引理 3.10. 取任意有限树, 其边长总和为 L , 则存在一条每条边恰好经过两次的闭游走, 总长度为 $2L$. 此外, 对任意非空有限集 $E \subset T$, 可以将其排列为 $q_1, \dots, q_M$, 并选取一个有限集 $D \subset T$, 使每个 $x \in T \setminus D$ 至多属于两条弧 $[q_i, q_{i+1}]_T$ 的内部.



遍历每条边至多两次, 并按首次到达时间排列 E 中的点

图 6: 最小子树上的深度优先遍历

证明. 在树的有限图表示中选定根顶点. 从根出发, 依次遍历各分支, 并在遍历完每个分支后沿原边返回. 由于树无圈, 每条边恰好经过两次, 故总长度为 $2L$.

若 $M = 1$, 第二个结论显然. 设 $M \geq 2$, 在包含 E 的最小子树 $[E]$ 中, 将 E 中的点加入顶点集, 并记所得有限顶点集为 D . 从 E 中一点出发作上述闭游走, 按首次到达的时间将 E 排列为 $q_1, \dots, q_M$.

相邻首次到达时刻之间的游走, 其像包含唯一连接弧 $[q_i, q_{i+1}]_T$. 这些时间段的内部互不相交. 若一条连接弧经过某条细分边的内部, 则对应时间段中的游走必须经过该细分边. 由于每条细分边总共只被经过两次, 它至多属于两条连接弧. 因此, 对任意 $x \in [E] \setminus D$, 内部覆盖重数至多为二. $[E]$ 外的点不属于这些连接弧, 结论成立. $\square$

引理 3.11. 设 $K_j = [a_j, b_j]_T, 1 \leq j \leq r$, 是一族弧段, 并且存在有限集 $D_0 \subset T$, 使每个 $x \in T \setminus D_0$ 至多属于其中 m 条弧段去掉 endpoints 后的内部. 则对任意连续 $g: T \rightarrow T$,

$$\sum_{j=1}^r d(g(a_j), g(b_j)) \leq m \text{Var}_d(g).$$

证明. 沿 K_j 经过的所有自然顶点将其切分为按顺序排列的子弧

$$L_1, L_2, \dots, L_s,$$

并记

$$c_0 = a_j, \quad c_1, \quad \dots, \quad c_s = b_j$$

为这些子弧依次的端点, 即

$$L_i = [c_{i-1}, c_i]_T, \quad 1 \leq i \leq s.$$

则我们可以给出假说:

$$d(g(a_j), g(b_j)) \leq \sum_{i=1}^s d(g(c_{i-1}), g(c_i)).$$

下面用数学归纳法证明该假说. 当 $s = 1$ 时, $a_j = c_0$, $b_j = c_1$, 该式是等式, 显然成立. 假设当子弧个数为 $s - 1$ 时该式成立. 现在有 s 条子弧. 先只看前 $s - 1$ 条, 即从 c_0 到 c_{s-1} 的弧段. 由归纳假设,

$$d(g(c_0), g(c_{s-1})) \leq \sum_{i=1}^{s-1} d(g(c_{i-1}), g(c_i)).$$

另一方面, 对三点 $g(c_0), g(c_{s-1}), g(c_s)$, 由度量的三角不等式,

$$d(g(c_0), g(c_s)) \leq d(g(c_0), g(c_{s-1})) + d(g(c_{s-1}), g(c_s)).$$

代入上式得,

$$d(g(c_0), g(c_s)) \leq \sum_{i=1}^{s-1} d(g(c_{i-1}), g(c_i)) + d(g(c_{s-1}), g(c_s)) = \sum_{i=1}^s d(g(c_{i-1}), g(c_i)).$$

即

$$d(g(a_j), g(b_j)) \leq \sum_{i=1}^s d(g(c_{i-1}), g(c_i)).$$

固定一条自然边 e , 考虑落在 e 内的所有子弧段. 把这些子弧段按左端点从左到右排序, 然后依次处理, 并按每一条新弧段放入“第一个与它相对内部不相交的组”的规则分组.

设当前处理到的弧段是 $A = [a, b]$, 观察所有在 A 之前已经处理过、并且与 A 的相对内部相交的弧段 B . 由于 B 已经在 A 之前处理, 所以 B 的左端点不超过 a . 又因为 B 与 A 的内部相交, B 必须延伸到 a 的右边. 因为已处理弧段只有有限条, 可以在 a 的右侧选取充分接近 a 且不属于 D_0 的点 t , 使 t 同时属于 A 以及所有与 A 内部相交的已处理弧段的内部. 由覆盖重数假设, 这样的已处理弧段至多有 $m - 1$ 条. 在分组时, 这 $m - 1$ 条弧段最多占据 $m - 1$ 个组. 因此至少还剩一个组可以放 A . 所以无论处理到哪一条, 需要的组数都不会超过 m . 最后, 同一组里的任意两条弧段相对内部互不相交: 因为后放进去的那条, 当时被要求与该组已有的所有弧段都不相交.

对其中任意一组, 按照 e 上的顺序排列各子弧段, 并把它们的所有端点加入同一个分点列. 因为:

$$\text{Var}_{e,d}(g) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^r d(g(c_{i-1}), g(c_i)) \right\}.$$

定义取的是上确界, 所以该组中所有子弧段的端点映射后像的距离之和不超过 $\text{Var}_{e,d}(g)$. 至多有 m 组, 所以边 e 上全部子弧段的贡献不超过

$$m \text{Var}_{e,d}(g).$$

最后对所有自然边 $e \in E(T)$ 求和, 得到

$$\sum_{j=1}^r d(g(a_j), g(b_j)) \leq m \sum_{e \in E(T)} \text{Var}_{e,d}(g) = m \text{Var}_d(g).$$

□

引理 3.12. 若 $E \subset T$ 是有限 (n, ε) -分离集, 则

$$(\text{card}(E) - 1)\varepsilon \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}_d(f^k).$$

因此

$$s(n, \varepsilon) \leq 1 + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}_d(f^k).$$

证明. 若 $\text{card}(E) \leq 1$, 结论显然. 以下设 $\text{card}(E) \geq 2$. 将 E 按引理 3.10 排成 $q_1, \dots, q_M$. 对每个 $i < M$, 由分离性, 存在 $0 \leq k_i < n, k_i \in \mathbb{N}$ 使

$$d(f^{k_i}(q_i), f^{k_i}(q_{i+1})) > \varepsilon.$$

因此

$$(M - 1)\varepsilon < \sum_{i=1}^{M-1} d(f^{k_i}(q_i), f^{k_i}(q_{i+1})). \quad (1)$$

按迭代的次数分组: 把所有满足 $k_i = 0$ 的放一组, 满足 $k_i = 1$ 的放一组, 以此类推, 则对于上式, 有:

$$\sum_{i=1}^{M-1} d(f^{k_i}(q_i), f^{k_i}(q_{i+1})) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i: k_i=k} d(f^k(q_i), f^k(q_{i+1})). \quad (2)$$

由引理 3.10, 对固定 k , 相应的弧段族 $[q_i, q_{i+1}]_T$ 在一个有限集之外的内部覆盖重数至多为 2. 由引理 3.11, $m = 2$, 则有:

$$\sum_{i: k_i=k} d(f^k(q_i), f^k(q_{i+1})) \leq 2 \text{Var}_d(f^k). \quad (3)$$

对 k 求和, 得:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i: k_i=k} d(f^k(q_i), f^k(q_{i+1})) \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}_d(f^k). \quad (4)$$

再结合 (1) (2) 和 (4):

$$(M - 1)\varepsilon < \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i: k_i=k} d(f^k(q_i), f^k(q_{i+1})) \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}_d(f^k).$$

得证. □

3.5 满射复合不降低总变差

引理 3.13. 设 $u: J \rightarrow K$ 是两条弧段之间的同胚, $h: K \rightarrow T$ 连续, 则

$$\text{Var}_{J,d}[h(u)] = \text{Var}_{K,d}(h).$$

证明. 同胚 u 把 J 上的有序分点列连续地映射到 K 上, 可能保持或反转方向, 但变差和不受影响. $\square$

引理 3.14. 若 $f: T \rightarrow T$ 连续、满射且分段严格单调, 则对任意连续 $h: T \rightarrow T$,

$$\text{Var}_d[h(f)] \geq \text{Var}_d(h).$$

证明. 取 f 的单调边剖分 $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$, 则每个 J_i 在一条自然边内, 且 $f|_{J_i}: J_i \rightarrow f(J_i)$ 是同胚.

固定目标边 $e \in E(T)$. 由于 f 满射, 定义弧段族 $I_{i,e} = f(J_i) \cap e$ 中的有长度的弧段覆盖 e . 树中两条弧段的交为空集、单点或弧段, 因此它已经是一整段连续的弧, 可以直接用来做变差估计. 由引理 2.17,

$$\text{Var}_{e,d}(h) \leq \sum_{i: I_{i,e} \text{ 中有长度的弧段}} \text{Var}_{I_{i,e},d}(h).$$

令

$$D_{i,e} = \{x \in J_i : f(x) \in e\}.$$

有 $D_{i,e} \subset J_i$, 即 $f(D_{i,e}) = I_{i,e}$. 又因为 $f|_{J_i}: J_i \rightarrow f(J_i)$ 是同胚, $I_{i,e} \subset f(J_i)$. 因此 $f|_{D_{i,e}}: D_{i,e} \rightarrow I_{i,e}$ 是一个同胚.

由引理 3.13,

$$\text{Var}_{I_{i,e},d}(h) = \text{Var}_{D_{i,e},d}[h(f)].$$

对所有目标边 e 求和. 对固定 i , 当 e 变化时, $I_{i,e}$ 按自然边切分弧段 $f(J_i)$, 相应的 $D_{i,e}$ 按顺序切分 J_i . 由引理 2.16, 对这些非退化子弧求和可得

$$\sum_e \text{Var}_{D_{i,e},d}[h(f)] \leq \text{Var}_{J_i,d}[h(f)].$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Var}_d(h) &= \sum_e \text{Var}_{e,d}(h) \\ &\leq \sum_e \sum_{i: I_{i,e} \text{ 中有长度的弧段}} \text{Var}_{I_{i,e},d}(h) \\ &= \sum_e \sum_{i: I_{i,e} \text{ 中有长度的弧段}} \text{Var}_{D_{i,e},d}[h(f)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_i \text{Var}_{J_i, d}[h(f)] \\ &= \text{Var}_d[h(f)], \end{aligned}$$

其中最后一个等号再次使用引理 2.16. $\square$

推论 3.15. 在引理 3.14 的条件下,

$$\text{Var}_d(f^0) \leq \text{Var}_d(f) \leq \text{Var}_d(f^2) \leq \dots$$

证明. 在引理 3.14 中依次取 $h = \text{id}_T, f, f^2, \dots$, 则结论成立. $\square$

3.6 总变差上界

注 3.16. 此上界证明思路: 引理 3.12 把分离集的大小控制为前 n 次迭代总变差之和. 满射性进一步保证总变差单调不减, 所以

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}_d(f^k) \leq n \text{Var}_d(f^n).$$

这再次产生一个线性因子 n , 从而在多项式熵上界中贡献 1.

定理 3.17. 若 $f: T \rightarrow T$ 连续、满射且分段严格单调, 则

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \text{Var}_d(f^n)}{\log n}.$$

证明. 由引理 3.12 与推论 3.15,

$$s(n, \varepsilon) \leq 1 + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}_d(f^k) \leq 1 + \frac{2n}{\varepsilon} \text{Var}_d(f^n).$$

对 $n \geq 1$, 有

$$1 + \frac{2n}{\varepsilon} \text{Var}_d(f^n) \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) n \max\{1, \text{Var}_d(f^n)\}.$$

取对数并除以 $\log n$, 得到

$$\frac{\log s(n, \varepsilon)}{\log n} \leq \frac{\log(1 + 2/\varepsilon)}{\log n} + 1 + \frac{\log^+ \text{Var}_d(f^n)}{\log n}.$$

先令 $n \rightarrow \infty$ 取上极限, 再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由定义 2.6 即得结论. $\square$

推论 3.18. 在上述定理的条件下, 若存在 $q \geq 0$ 与 $C > 0$, 使

$$\text{Var}_d(f^n) \leq Cn^q$$

对所有充分大的 n 成立, 则

$$h_{\text{pol}}(f) \leq q + 1.$$

3.7 算例一：多项式熵为零的分支轮换

令 $T = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ 为三条长度均为 1 的边组成的 Y 形树, 中心为 O . 把每条边参数化为 $[0, 1]$, 其中 0 对应 O . 定义

$$f(t, e_1) = (t, e_2), \quad f(t, e_2) = (t, e_3), \quad f(t, e_3) = (t, e_1).$$

于是 f^3 是恒等映射.

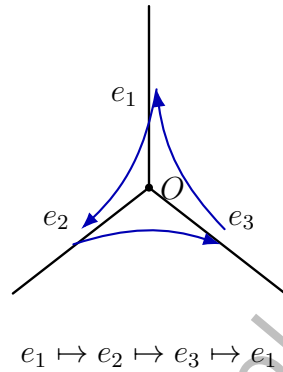


图 7: 三条分支的周期轮换

自然边剖分本身就是每个 f^n 的单调边剖分, 而且按本文的边内定义不能把经过中心 O 的两条边合并, 因此

$$c_n^T = 3, \quad n \geq 1.$$

又因为 f^n 把每条单位边等距映到一条单位边, 三条单位边的像路程分别是 1, 所以 $\text{Var}_d(f^n) = 3$. 于是当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\log^+ \text{Var}_d(f^n)}{\log n} \rightarrow 0.$$

定理 3.8 与定理 3.17 都只给出 $h_{\text{pol}}(f) \leq 1$; 但利用 f^3 是恒等映射可以得出实际值是 0. 事实上, d_n 中只出现有限个不同的迭代位置, 故对固定 $\varepsilon, s(n, \varepsilon)$ 关于 n 有界. 因此 $h_{\text{pol}}(f) = 0$.

其转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = I.$$

这个例子说明: 本文的上界不一定取等号; 它们的作用是可靠控制复杂度, 而不是在所有情形下给出精确公式.

3.8 算例二：帐篷映射

设 $T = [0, 1]$, 自然边只有一条 $e = [0, 1]$. 定义帐篷映射

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

显然 f 连续、满射、分段严格单调. 取剖分

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

顶点像为

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f(1) = 0.$$

在每个 I_i 上 f 是线性同胚, 并且

$$f(I_1) = [0, 1] = I_1 \cup I_2,$$

$$f(I_2) = [0, 1] = I_1 \cup I_2.$$

因此 $\{I_1, I_2\}$ 是 f 的一个 Markov 剖分, 转移矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2),$$

所以谱半径为

$$\rho(A) = 2.$$

因此拓扑熵

$$h_{\text{top}}(f) = \log \rho(A) = \log 2 > 0.$$

在这个函数中, 因为每个单调区间的像都覆盖整个 $[0, 1]$, 所以每迭代一次, 每个单调区间在下一步都会被一分为二, 段数翻倍. 所以

$$c_n^T = 2^n.$$

又 f^n 有 2^n 个单调区间, 每个单调区间都把长度为 $\frac{1}{2^n}$ 的区间映到区间 $[0, 1]$, 所以每个片贡献总变差 1, 所以

$$\text{Var}_d(f^n) = 2^n.$$

代入定理 3.8 和 3.17:

$$\begin{aligned} h_{\text{pol}}(f) &\leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n^T}{\log n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log n} = +\infty, \\ h_{\text{pol}}(f) &\leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \text{Var}_d(f^n)}{\log n} = +\infty. \end{aligned}$$

又由命题 2.8, $h_{\text{top}}(f) = \log \rho(A) = \log 2 > 0$, 所以

$$h_{\text{pol}}(f) = +\infty.$$

在第一个例子中, 由于 $f^3 = \text{id}_T$, 多项式熵为零; 在帐篷映射例子中, 由于拓扑熵为正, 多项式熵为无穷大.

4 总结与后续研究

4.1 主要结论

本文在有限树的自然边结构下定义最小单调边剖分数 c_n^T , 并证明了两个上界:

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n^T}{\log n}$$

以及在连续、满射且分段严格单调时

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \text{Var}_d(f^n)}{\log n}.$$

第一个证明的核心是: 在一个 n -步单调区间上, 轨道长度 ρ_n 沿弧段可加, 且总长度至多为 $nL_d(T)$. 第二个证明的核心是: 最小子树的深度优先遍历可以让每条边至多被经过两次, 从而把分离集的元素个数转化为总变差估计.

本文使用的是最小单调边剖分数, 即定义域中的每个单调区间必须位于某条自然边内. 这一定义保证 c_n^T 明确且有限, 并足以完成两个上界证明.

总变差上界使用满射性, 原因是满射性保证每条目标边都被单调区间的像覆盖, 从而能够证明

$$\text{Var}_d[h(f)] \geq \text{Var}_d(h).$$

若满射性不成立, 该单调性一般会失败. 例如区间映射 $f(x) = x/2$ 满足

$$\text{Var}(f^{n+1}) < \text{Var}(f^n).$$

4.2 后续研究问题

问题 1. 树的 lap 数能否给出 $h_{\text{pol}}(f)$ 的下界?

问题 2. 对于非满射树映射, 集合 $T_\infty = \bigcap_{n \geq 0} f^n(T)$ 是否承载全部多项式熵?

问题 3. 文中给出的深度优先遍历法是否可应用于一般的有限图? 对于有环图来说, 如果所画的图不是树, 就会有新重数的情形.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

参考文献

- [1] L. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, 2nd ed., Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 5, World Scientific, Singapore, 2000, ISBN 981-02-4053-8.
- [2] J. F. Alves and J. Sousa Ramos, Kneading theory for tree maps, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24** (2004), no. 4, 957–985, doi:10.1017/S014338570400015X.
- [3] M. Baillif, A polynomial bound for the lap number, *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **3** (2002), 325–329, doi:10.1007/BF02969409.
- [4] J. Barbosa Gomes and M. J. Dias Carneiro, Polynomial entropy for interval maps and lap number, *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **20** (2021), no. 1, Paper No. 21, 16 pp., doi:10.1007/s12346-021-00456-y.
- [5] F. Grycan-Gérard and J.-P. Marco, Polynomial entropy and polynomial torsion for fibered systems, *Regular and Chaotic Dynamics* **28** (2023), nos. 4–5, 613–627, doi:10.1134/S156035472304007X.
- [6] J.-P. Marco, Polynomial entropies and integrable Hamiltonian systems, *Regular and Chaotic Dynamics* **18** (2013), no. 6, 623–655, doi:10.1134/S1560354713060051.
- [7] J. Milnor and W. Thurston, On iterated maps of the interval, in: *Dynamical Systems (College Park, MD, 1986–87)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1342, Springer, Berlin, 1988, 465–563.
- [8] M. Misiurewicz and W. Szlenk, Entropy of piecewise monotone mappings, *Studia Mathematica* **67** (1980), no. 1, 45–63, doi:10.4064/sm-67-1-45-63.
- [9] S. Ruelle, *Chaos on the Interval*, University Lecture Series, Vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, ISBN 978-1-4704-2956-0.
- [10] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982, ISBN 0-387-90599-5.

致谢页

一、致谢

本文的完成是老师与同学共同协助的结果。首先对指导教师璩斌老师作诚挚的感谢。有关选题、结构、证明思路乃至论文多次修改的种种问题，都是由璩老师用耐心方式加以说明或引导的。当研究没有进展时，他并不直接给出答案而是提出问题，促使我们自己去分析、思考，因而较完整地认识了数学研究的实际情况。

其次感谢我们父母对本次研究过程的默默支持。为了能更好的讨论项目，我们在暑假期间频繁返校，劳烦家长接送以及晚上送饭到校，让我们能更专注高效地完成项目的研究。

还要感谢广州市第六中学，研究为时数月，学校为我们提供了安静舒适的数学竞赛课室以及电脑设备。老师们在看到我们研究到夜晚的时候也会为我们送水果以犒劳我们的辛苦。

最后，感谢我们自己在数月研究中的通力合作。正是彼此的讨论、争辩与鼓励，才使这篇论文从想法最终变为成果。

二、研究背景与选题来源

本论文选题来源于我们在化学课中学到的热力学熵的问题，我们据此联想到数学作为化学的基础，是否也存在类似热力学熵一样衡量系统复杂程度的值？于是在询问数学璩斌老师之后，了解到了数学领域拓扑熵与多项式熵现有的成果。我们在学习过程中发现，已有研究主要针对区间映射，而对具有分岔结构的有限树映射研究较少。经师生共同讨论，确定了“将多项式区间映射的 lap 数和总变差上界推广到有限树映射”这一研究方向。

三、指导老师与学生关系及指导情况

指导老师璩斌系广州市第六中学数学教师，与我们是师生关系。指导工作属于学校正常教学指导范畴，不涉及任何有偿指导。

在论文撰写过程中，指导老师主要负责确定选题方向、提供方法引导和修改意见。指导老师还推荐了许多重要参考文献，帮助我们建立了研究的理论基础。在学生遇到证明困难时，璩老师通过提问方式启发我们自己找到解法，没有代笔撰写论文的具体内容。论文撰写工作均由我们独立完成。除指导老师外，没有其他外部人员实质性参与本研究的成果产出。

四、团队分工与具体贡献

我们共同完成了文献研读、讨论和论证工作，同时各有侧重：

陈星云担任组长，他负责安排项目进度和编排全文，重点承担了 lap 数上界的理论证明工作。单调边剖分定义、引理 3.5 与 3.6 的证明，以及轨道长度生成估计的关键论证都是由他完成。文中的符号说明表也由他整理完成。

欧阳霏负责总变差上界的证明工作，重点完成了深度优先遍历方法、覆盖重数估计和分离集估计等核心部分，并撰写了 3.5 节满射复合不降低总变差的证明。

陈禹硕负责绘图与算例分析。他计算了 Y 形树分支轮换和帐篷映射两个算例，验证了定理的有效性，并完成了文中全部示意图的绘制及文献整理工作。

五、研究过程中的困难与解决

研究过程中主要遇到三个困难：

1. 由于高中校内从未接触拓扑学相关知识，我们在学习本项目必要的拓扑学知识基础的过程中遇到不少困难。经过璩老师的耐心指导与三人的共同讨论，我们逐渐克服了概念问题带来的困难。

2. 有限树不像区间那样有自然的代数顺序，如何定义有限树上的“单调”和“ lap 数”成为一大难题。与璩老师多次讨论后，我们决定采用自然边结构限制剖分片，保证了定义的明确性和有限性。

3. 证明过程中深度优先遍历的覆盖重数问题。我们发现直接计数十分困难，经过一周反复推演，最终借助“每条边至多经过两次”的遍历性质巧妙解决了这一问题。

以上困难均通过小组讨论、教师指导和自主查阅文献的方式解决。

六、AI 使用情况说明

AI 工具名称: Deepseek

版本: DeepSeek V3.2、深度思考 R1

具体使用环节: 论文规范修改

用途: 论文写作规范查询

使用时间: 8.26-9.15

频率: 一周 1-2 次

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示