

# 2026 年丘成桐中学科学奖研究报告

参赛学生姓名：李灏宇 王彦杰 雷印才

中学：楚雄实验中学

省份：云南省

国家/地区：中国

指导老师姓名：李子宝

指导老师单位：楚雄实验中学

论文题目：利用混合整数非线性规划进行多无人机  
集群区域协同搜索的覆盖收益建模与最优规模渐近分  
析

# 利用混合整数非线性规划进行多无人机集群区域协同搜索 的覆盖收益建模与最优规模渐近分析

李灏宇 雷印才 王彦杰

**摘要：**无人机集群在灾害应急中有着重要作用，目前，对于如何平衡无人机数量，覆盖范围，碰撞风险与通信带宽限制导致的集群规模限制缺少具有参考性和指导性的文献。本文通过建立无人机数量与搜索覆盖范围模型，进行混合整数非线性规划（MINLP）求解其临界值，结合欧拉-麦克劳林求和公式与展开渐近分析推导出临界数量的求解公式。此外，本文同时建立起耦合碰撞风险与通信带宽限制收益模型，利用泰勒展开式，推导出最优解。本文突破了求解器易陷入局部最优解和数值病态的问题，构建并证明了收益全局最优解的存在性和唯一性，在处理指对函数时渐近分析较 MINLP 避开了上万次非线性迭代，提升了应急响应速率，保证救援及时高效。

**Abstract ;** unmanned aerial vehicle ( UAV ) cluster plays an important role in disaster emergency response. At present, there is a lack of reference and guidance literature on how to balance the number of UAVs, coverage, collision risk and cluster size limitation caused by communication bandwidth limitation. In this paper, the number of UAVs and the search coverage model are established, and the mixed integer nonlinear programming ( MINLP ) is used to solve the critical value. By combining the Euler-Maclaurin summation formula with asymptotic analysis of expansions, we derive a formula for solving the threshold quantity. Furthermore, this paper establishes a revenue model that couples collision risk with communication bandwidth constraints and uses the Taylor expansion to derive the optimal solution. This paper breaks through the problem that the solver is easy to fall into the local optimal solution and the numerical ill-posedness, constructs and proves the existence and uniqueness of the global optimal solution of the revenue. Compared with MINLP, the asymptotic analysis avoids tens of thousands of nonlinear iterations when dealing with the pointing function, improves the emergency response rate and ensures the timely and efficient rescue.

**关键词：**无人机集群，混合整数线性规划（MINLP），渐进分析，欧拉-麦克劳林公式

## 目录

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 一、引言 .....                             | 3  |
| 二、知识预备和工具简介 .....                      | 3  |
| 2.1 知识预备 .....                         | 3  |
| 2.1.1 混合整数的非线性 (MINLP) .....           | 3  |
| (1) 凸包络理论 <sup>[1]</sup> : .....       | 3  |
| (2) 凸函数证明: .....                       | 4  |
| 2.1.2 渐进分析 .....                       | 4  |
| 2.1.3 欧拉-麦克劳林求和公式 <sup>[3]</sup> ..... | 4  |
| 2.2 PyCharm 介绍 .....                   | 4  |
| 三、模型建立 .....                           | 4  |
| 3.1 单架无人机探测范围模型 .....                  | 4  |
| 3.2 N 架无人机覆盖范围模型 .....                 | 5  |
| 3.2.1 一种思路: .....                      | 5  |
| 3.2.2 另一种推导思路: .....                   | 6  |
| 3.3 MINLP 模型建立 .....                   | 8  |
| 四、渐近分析 .....                           | 10 |
| 4.1 最优临界数量 .....                       | 10 |
| 五、收益模型 .....                           | 13 |
| 5.1 收益模型与现实约束 .....                    | 13 |
| 5.2 综合收益极值导数分析与极值唯一性证明 .....           | 13 |
| 5.3 对比优化 .....                         | 16 |
| 六、结论与展望 .....                          | 17 |
| 参考文献 .....                             | 18 |
| 致  谢 .....                             | 19 |

## 一、引言

近年来,无人机技术高速发展,在应急救援,物流运输,军事作战上有了深度发展.对于灾情处置来说,无人机具有灵活机动,部署简单,成本低廉等优势,在比较传统灾情勘探手段在多数情况下有着极为明显的优势.在此情况下,高效协同的无人机集群势必会成为未来发展的主要方向.无人机集群协同搜索既能增大搜索面积又能提高态势感知能力,对无人机集群协同有重要意义.

无人机集群协同搜索目前有着几大核心挑战:一方面,需要最大化搜索面积确保对目标区域的有效覆盖;另一方面,搜索无人机数量,碰撞风险和通信带宽等存在耦合关系.增加无人机数量来增大探测范围,同时也意味着更高的碰撞风险,更加严峻的通信条件.面对这些问题,混合整数的非线性规划(MINLP)就是优化这类问题的专业模型.然而,当目标函数在较大规模下进入渐近平坦区时,传统 MINLP 求解算法(如分支定界法、Outer Approximation 等)极易因梯度消失与容差限制发生数值病态.将无人机数量,探测面积,碰撞风险和通信带宽统一到收益模型中,再结合欧拉-麦克劳林求和公式对覆盖范围函数进行精确的渐近分析,建立级数求和与连续积分之间的定理级联系,从理论上可以得出无人机集群的数量增长收益边界递减规律及解析临界规模.

研究结果旨在为抢险救灾场景下无人机集群方案提供理论依据和量化模型.

## 二、知识预备和工具简介

### 2.1 知识预备

#### 2.1.1 混合整数的非线性(MINLP)

(1) 凸包络理论<sup>[4]</sup>:

给定非凸函数  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  ( $C$  为凸紧集), 其凸包络  $f^{cv}$  定义为:

$$f^{cv}(x) = \sup\{h(x) | h \text{ 凸}, h \leq f \text{ 在 } C \text{ 上恒成立}\}.$$

即所有“在  $f$  下方”的凸函数中,逐点上届最大的那个.其本质是  $f$  的上方图的凸包在边界上的投影.

凸包络本身就是凸函数,是凸函数中的特例,对凸函数而言,凸函数本身就是自己的凸包络.即  $(f = f^{cv})$ , 在求解包含离散整数变量  $N \in \mathbb{Z}^+$  与连续非线性覆盖函数的 MINLP 问题时,凸包络用于对非凸割平面进行松弛,提供全局最优值的下界.

## (2) 凸函数证明:

设  $f$  为区间  $I$  上的二阶可导函数, 则在  $f$  为凸 (凹) 函数的充要条件是

$$f''(x) \geq 0 (f''(x) \leq 0), x \in I.[2]$$

### 2.1.2 渐进分析

渐进分析 (Asymptotic Analysis) 是研究函数在自变量趋于某极限 (通常是无穷大或奇点) 时的性态. 它的核心思想就是用简单的“尺度函数”去近似复杂的函数, 并精确刻画出两者之间的误差.

核心比较符号 (严格数学定义)

设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x \rightarrow \infty$  时定义:

$f \sim g$  (等价):  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 1$ . 这就是最强的逼近, 用于主导项提取

$f = O(g)$  (同阶): 存在常数  $M > 0$ , 使得  $|f| \leq M|g|$  (大范围成立).

$f = o(g)$  (高阶小):  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0$ , 表示  $f$  远小于  $g$ .

$f = \Theta(g)$  (同阶紧界): 同时满足  $f = O(g)$  和  $g = O(f)$ .

### 2.1.3 欧拉-麦克劳林求和公式<sup>[3]</sup>

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[m, n]$  上具有  $2p$ -阶连续导数 ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ), 则离散级数求和与连续定积分之间的关系可精确表示为:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x) dx + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)] + R_p.$$

其中  $B_{2k}$  为伯努利数 (Bernoulli Numbers):  $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$ ; 余项  $R_p$  可表示为:  $R_p = \int_m^n \frac{P_{2p}(x)}{(2p)!} f^{(2p)}(x) dx$ ; 其中  $P_{2p}(x) = B_{2p}(x - [x])$  为周期伯努利多项式. 引入该公式的目的是在离散覆盖级数求和中实现解析积分化, 并精确量化离散化截断误差.

## 2.2 PyCharm 介绍

本文使用 PyCharm (JetBrains 公司) 作为 Python 集成开发环境, 用于代码编写、调试、测试与项目管理. PyCharm 基于 IntelliJ 平台, 支持智能代码补全、语法检查、断点调试、虚拟环境管理及 Git 版本控制等功能.

本文应用的 PyCharm 版本为 2026.2.1, Python 的版本为 3.13.14.

## 三、模型建立

### 3.1 单架无人机探测范围模型

常量定义: 单架无人机的探测半径为  $r$ . 无人机覆盖范围为  $s_0 = \pi r^2$ .

### 3.2 N 架无人机覆盖范围模型

实际多无人机协同搜索中的有效覆盖面积受到无人机区域边界、障碍物分布等多种因素影响.对于一般非规则搜索区域,新增有效覆盖面积通常难以仅通过无人机数量  $N$  给出统一的严格几何表达式.因此,本文尝试从集群规模与覆盖收益之间的宏观关系出发,构建一个用于优化分析的参数化简化模型.

核心变量定义:  $N$  架无人机叠加搜索,存在重叠区域,不能简单认为覆盖范围  $S(N) = N \cdot S_0$ , 结果将是无人机数量  $N$  越大,  $S(N)$  越大.忽略了无人机叠加搜索时,存在重叠区域.

第一架无人机范围覆盖完整的  $S_0$ ;

第二架无人机存在重叠区域,新增有效覆盖范围小于  $S_0$ ;

第三架无人机与先前两架无人机存在重叠区域,新增有效覆盖范围进一步变小;

第  $N$  架无人机时,覆盖范围达到极限,几乎不增加有效覆盖范围.

假设存在比例系数  $f_k \in (0,1]$ , 使得第  $k$  架无人机带来的新增有效覆盖面积为  $\Delta S_k = f(k)S_0$

由此可得  $N$  架无人机总覆盖面积为:

可以得出  $N$  架无人机覆盖范围为

$$S(N) = \sum_{k=1}^N S_0 \cdot f(k).$$

假设搜索区域总面积为  $A$ , 单架无人机的探测半径为  $r$ , 无人机覆盖范围为  $S_0 = \pi r^2$   
第  $k$  架随机投放后覆盖区域与已有的  $k-1$  架的覆盖范围重叠率:

$$P_{\text{重叠}} = \frac{S(k-1)}{A}.$$

由此可以推出新增有效覆盖面积为

定义无量纲覆盖密度因子

$$\lambda = \frac{S_0}{A} \in (0,1).$$

#### 3.2.1 一种思路:

由递推关系可得

$$S(k) = S(k-1) + S_0 \cdot \left(1 - \frac{S(k-1)}{A}\right).$$

整理简化得

$$S(k) = S_0 + \left(1 - \frac{S_0}{A}\right) S(k-1).$$

代入得到

$$S(k) = S_0 + (1 - \lambda) S(k-1).$$

当  $k=1$  时  $S(1) = S_0 + (1 - \lambda) S(0) = S_0$ .

当  $k=2$  时  $S(2) = S_0 + (1 - \lambda)S(1) = S_0 + (1 - \lambda)S_0$ .

当  $k=3$  时  $S(3) = S_0 + (1 - \lambda)S(2)$ .

$$= S_0 + (1 - \lambda)[S_0 + (1 - \lambda)S_0]$$

$$= S_0 + (1 - \lambda)S_0 + (1 - \lambda)^2 S_0.$$

当  $k=4$  时  $S(4) = S_0 + (1 - \lambda)S(3)$ .

$$= S_0 + (1 - \lambda)[S_0 + (1 - \lambda)S_0 + (1 - \lambda)^2 S_0].$$

$$= S_0 + (1 - \lambda)S_0 + (1 - \lambda)^2 S_0 + (1 - \lambda)^3 S_0.$$

归纳到第  $k$  项:

$$S(k) = S_0 \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \lambda)^i.$$

$$= S_0 \frac{1 - (1 - \lambda)^k}{1 - (1 - \lambda)}$$

$$= S_0 \frac{1 - (1 - \lambda)^k}{\lambda}.$$

代入  $\lambda = \frac{S_0}{A}$  得

$$S(k) = A[1 - (1 - \lambda)^k].$$

$$\Delta S_k = f(k)S_0.$$

$$\Delta S_k = S_0 \cdot \left(1 - \frac{S(k-1)}{A}\right).$$

得出

$$f(k) = 1 - \frac{S(k-1)}{A}.$$

由  $S(k-1) = A[1 - (1 - \lambda)^{k-1}]$  得出

$$f(k) = (1 - \lambda)^{k-1}.$$

### 3.2.2 另一种推导思路:

$$S(k) = S(k-1) + S_0 \cdot \left(1 - \frac{S(k-1)}{A}\right).$$

整理简化得

$$S(k) = S_0 + \left(1 - \frac{S_0}{A}\right)S(k-1).$$

令  $\lambda = \frac{S_0}{A}$  代入得到

$$S(k) = S_0 + (1 - \lambda)S(k-1),$$

则

$$S(k) + x = (1 - \lambda)[S(k-1) + x],$$

可得

$$S(k) = (1 - \lambda)S(k - 1) + (1 - \lambda)x - x,$$

所以

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x - x &= S_0 \\ x &= -\frac{S_0}{\lambda}. \end{aligned}$$

又因为  $A = \frac{S_0}{\lambda}$

代入原式得

$$S(k) - A = (1 - \lambda)[S(k - 1) - A].$$

$$\frac{S(k) - A}{S(k - 1) - A} = 1 - \lambda.$$

所以  $\{S(k) - A\}$  是以  $S(0) - A = -A$  为首项,  $(1 - \lambda)$  为公比的等比数列

由等比数列求和得  $S(k) - A = -A(1 - \lambda)^k$

$$S(k) = A - A(1 - \lambda)^k$$

$$S(k) = A[1 - (1 - \lambda)^k]$$

所以  $\Delta S_k = S(k) - S(k - 1) = A[1 - (1 - \lambda)^k - 1 + (1 - \lambda)^{k-1}]$

$$= A[(1 - \lambda)^{k-1} - (1 - \lambda)^k]$$

$$= A(1 - \lambda)^{k-1}[1 - (1 - \lambda)]$$

$$= A\lambda(1 - \lambda)^{k-1}$$

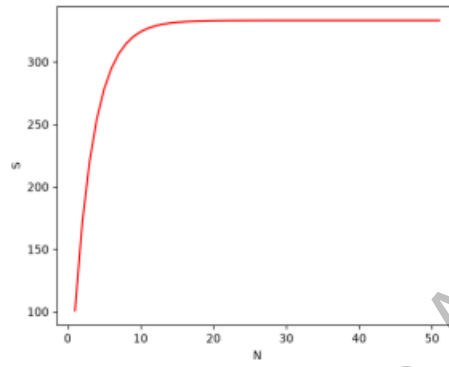
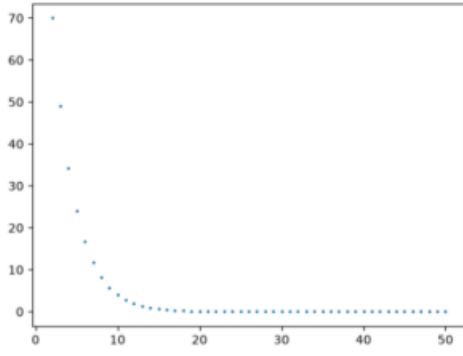
$$= S_0(1 - \lambda)^{k-1}.$$

$$f(k) = \frac{\Delta S_k}{S_0} = \frac{S_0(1 - \lambda)^{k-1}}{S_0} = (1 - \lambda)^{k-1}.$$

两种思路对推导结果无影响, 但对接下来在 MINLP 中发现问题有着启发性作用.

利用 Python 进行线性拟

本研究利用 Python 的 `scipy.optimize.curve_fit` 函数, 基于非线性最小二乘法对实验数据进行拟合. 拟合所得模型参数



当  $S_0 = 100$ ,  $\lambda = 0.3$ , 进行非线性拟合得出

参数的标准差显著较小, 极化  $p$  值  $< 0.001$ , 表明估计结果具有极高的统计可靠性. 残差标准差仅为 3.682, 拟合优度  $R^2 > 0.998$ , 说明该理论模型能够精准描述  $S_N$  的非线性饱和变化规律.

在实际情况中, 无人机延航线连续运动, 所形成的覆盖范围是带状区域, 而不是静止的圆形. 因此, 本文进行模型优化.

次要常量定义: 假设无人机的速度为  $v_t$ ; 无人机有效扫描宽度为  $d$ , 单架每次搜索时间为  $t$ , 电池能量为  $E$ , 巡航功率为  $P$   
则

$$d = 2r$$

$$\text{由 } E = Pt \text{ 得 } t = \frac{E}{P}$$

所以

$$S_0 = v_t t d = 2r v_t \cdot \left( \frac{E}{P} \right).$$

因此

$$\lambda = \frac{S_0}{A} = \frac{2r v_t E}{AP}.$$

显然, 此时的搜索面积大于  $s_0 = \pi r^2$ , 所以  $\lambda$  将增大, 但任然满足  $0 < \lambda < 1$

第三节中的模型把单架无人机覆盖范围取为  $s_0 = \pi r^2$  的简化模型; 连续搜索时采用本节模型. 两种处理只影响  $S_0$  和  $\lambda$  的取值, 对后续公式推导无影响. 这里仅做补充性介绍

### 3.3 MINLP

联立下列两式

$$S(N) = \sum_{k=1}^N S_0 \cdot f(k).$$

$$f(k) = (1 - \lambda)^{k-1}.$$

可得

$$\begin{aligned}
 S(N) &= S_0[(1-\lambda)^0 + (1-\lambda)^1 + (1-\lambda)^2 + \dots + (1-\lambda)^{N-1}] \\
 &= S_0 \left[ \frac{1 - (1-\lambda)^N}{\lambda} \right] \\
 &= S_0 \frac{1 - (1-\lambda)^N}{\lambda} \\
 &= A[1 - (1-\lambda)^N].
 \end{aligned}$$

此为原式的闭式解.

其中,  $N$  是决策变量,  $\lambda$  是离散变量;

目标是,  $S(N)$  最大化收益

求解其一阶导为:

$$\begin{aligned}
 S(N) &= A[1 - (1-\lambda)^N] \\
 &= A - A(1-\lambda)^N. \\
 S'(N) &= 0 - 0 \cdot (1-\lambda)^N - A(1-\lambda)^N \ln(1-\lambda) \\
 &= -A(1-\lambda)^N \ln(1-\lambda). \\
 &\because 1-\lambda < 1 \\
 &\therefore S'(N) > 0
 \end{aligned}$$

其二阶导为:

$$\begin{aligned}
 S''(N) &= -A(1-\lambda)^N \ln(1-\lambda) \cdot \ln(1-\lambda) - A(1-\lambda)^N \cdot 0 \\
 &= -A(1-\lambda)^N [\ln(1-\lambda)]^2. \\
 &\because \lambda = \frac{S_0}{A}. \\
 &\therefore 0 < \lambda < 1. \\
 &\therefore S''(N) < 0.
 \end{aligned}$$

$S(N) = A[1 - (1-\lambda)^N]$  是严格成立的凹函数.

为求解  $S(N)$  的最大值, 本文希望通过 Python 设计算法直接求解得到全局最优解. 但在利用 BARON 处理模型时遇到数值病态的问题, 经过本文多次改进, 本文转而寻求利用 APORT 的局部算法, 通过启发式算法多次求解和不断逼近期望得出函数的全局最优解. 需要指出的是, 多初值求解只能提供候选最优解, 不能单独构成全局最优性的证明. 因此, 本文进一步利用目标函数的单调性、凹性及离散搜索性质, 对候选解进行验证.

因为  $S'(N) > 0$ , 在  $(0, +\infty)$  上,  $S(N)$  单调递增, 函数的最优解必然在其边界条件下. 因此, 固定  $\lambda = 0.001$ , 在单一变量条件下求解最值.

利用 Python 的 GEKKO 函数库求解得

|           |         |                 |                 |                 |       |       |
|-----------|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|-------|
| 起始值       | 1~22617 | 22618~<br>24003 | 24004~<br>24694 | 24695~<br>26233 | 26234 | 26235 |
| $\lambda$ | 0.001   | 0.001           | 0.001           | 0.001           | 0.001 | 0.001 |
| N         | 22618   | 24004           | 24695           | 26233           | 26234 | 26235 |

多次求解并总结结果后, 本文发现求解  $S(N)$  始终受到限制, 本文分析后得出如下结论:

1. 数值平坦困境, 伴随  $N$  增大, 收益逐渐趋于 0, 其变化量低于求解器的数值波动识别范围 ( $RTOL=1e-10$ ), 导致求解器在平坦区丧失识别能力

2. 是求解器限制, APORT 是局部搜索算法, 容易陷入局部最优解中.

对此本文主动优化约束条件, 设置了  $N$  的极小惩罚项, 使得  $N$  偏向边界收益趋于 0 的值. 同时通过观察上面的求解结果, 在 22618~26233 之间, 求解器多次得出局部最优解, 推断出全局最优解就处在 22000~26000 之间, 在此区间内设定起始值求解可以得出最接近全局最优解的局部最优解, 且也为实际工程上的可行解

再次求解得出

|     |             |             |       |       |       |       |
|-----|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|
| 起始值 | 22000~23072 | 23073~24442 | 24443 | 24445 | 24446 | 24447 |
| N   | 23072       | 24442       | 24443 | 24445 | 24446 | 24447 |

但可以得到可行的工程解, 23072 和 24442, 两者相比, 24442 更接近本文可能的全局最优解可能值, 因此本文取 24442 为最优工程解  $N^*$ .

## 四、渐近分析

### 4.1 最优临界数量

由第三节的模型可知有效覆盖面积的表达式为:

$$S(k) = A[1 - (1 - \lambda)^k] \quad (1)$$

新增有效覆盖面积为:

$$f(k) = (1 - \lambda)^{k-1} \quad (2)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 因为  $0 < \lambda < 1$ , 所以  $0 < 1 - \lambda < 1$ , 因此:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \lambda)^{k-1} = 0$$

故极限覆盖面积为:

$$S_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = A(1 - 0) = A \quad (3)$$

将 (1) 式展开得:

$$S(k) = A - A(1 - \lambda)^k$$

代入 (3) 式得:

$$S(k) = S_{\infty} - A(1 - \lambda)^k \quad (4)$$

接下来对 $(1 - \lambda)^k$ 进行处理

对 $(1 - \lambda)^k$ 取自然对数:

$$\ln(1 - \lambda)^k = k \ln(1 - \lambda) \quad (5)$$

泰勒展开<sup>[4]</sup>:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad |x| < 1$$

令 $x = \lambda$ :

$$\ln(1 - \lambda) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} - \dots$$

代入(5)式:

$$k \ln(1 - \lambda) = -k\lambda - \frac{k\lambda^2}{2} - \frac{k\lambda^3}{3} - \frac{k\lambda^4}{4} - \dots$$

两边取指数:

$$(1 - \lambda)^k = e^{k \ln(1 - \lambda)} = \exp\left(-k\lambda - \frac{k\lambda^2}{2} - \frac{k\lambda^3}{3} - \frac{k\lambda^4}{4} - \dots\right)$$

因为 $\lambda \ll 1$ , 所以高阶项 $\frac{k\lambda^2}{2}$ 及以后的项远小于 $k\lambda$ , 可以忽略并得到下面近似式:

$$(1 - \lambda)^k \approx e^{-k\lambda}$$

将近似式代入(1)式:

$$S(k) = A[1 - (1 - \lambda)^k] \approx A(1 - e^{-k\lambda})$$

因此:

$$\Delta S(k) = S(k) - S(k-1) = A[e^{-(k-1)\lambda} - e^{-k\lambda}] = Ae^{-(k-1)\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \quad (6)$$

对 $e^{-\lambda}$ 做泰勒展开:

$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} + \dots$$

因此:

$$1 - e^{-\lambda} = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \dots$$

因为 $\lambda \ll 1$ , 所以:

$$1 - e^{-\lambda} \approx \lambda$$

代入(6)得:

$$\Delta S(k) = A\lambda e^{-(k-1)\lambda}$$

由 $\lambda = \frac{S_0}{A}$ 得:

$$\Delta S(k) = S_0 e^{-(k-1)\lambda}$$

所以:

$$f(k) = \frac{\Delta S(k)}{S_0} = \frac{S_0 e^{-(k-1)\lambda}}{S_0} = e^{-(k-1)\lambda}$$

利用欧拉-麦克劳林求和公式, 离散累积覆盖面积  $S_N = \sum_{k=1}^N \Delta S_k$  对连续积分  $\int_1^N S_0 e^{-(x-1)\lambda} dx$  的逼近关系为:

$$S_N = A(1 - e^{-(N-1)\lambda}) + \frac{S_0}{2}(1 + e^{-(N-1)\lambda}) + R_1$$

且截断余项满足严格上界:  $R_1 = O(\lambda \cdot S_0)$ .

【证明】设连续函数  $f(x) = S_0 e^{-(x-1)\lambda}$ , 其各阶导数为

$$f^{(n)}(x) = S_0 (-\lambda)^n e^{-(x-1)\lambda}$$

应用一阶欧拉-麦克劳林求和公式 (取  $p = 1, m = 1, n = N$ ) :

$$\sum_{k=1}^N f(k) = \int_1^N f(x)dx + \frac{f(1)+f(N)}{2} + \frac{B_2}{2!}[f'(N) - f'(1)] + R_1.$$

计算主导积分项:

$$\int_1^N S_0 e^{-(x-1)\lambda} dx = \left[ -\frac{S_0}{\lambda} e^{-(x-1)\lambda} \right]_1^N = \frac{S_0}{\lambda} (1 - e^{-(N-1)\lambda}) = A(1 - e^{-(N-1)\lambda}),$$

计算边界修正项:

$$\frac{f(1) + f(N)}{2} = \frac{S_0 + S_0 e^{-(N-1)\lambda}}{2} = \frac{S_0}{2} (1 + e^{-(N-1)\lambda}),$$

估计一阶导数差项与余项

$$\begin{aligned} R_{-1}; \quad \frac{B_2}{2}[f'(N) - f'(1)] &= \frac{1}{12}[-S_0 \lambda e^{-(N-1)\lambda} - (-S_0 \lambda)] \\ &= \frac{S_0 \lambda}{12} (1 - e^{-(N-1)\lambda}) = O(\lambda S_0). \end{aligned}$$

余项

$$R_1 = \int_1^N \frac{B_2(x - [x])}{2} f'''(x) dx.$$

由于  $|f'''(x)| = S_0 \lambda^2 e^{-(x-1)\lambda}$ , 积分后易知  $|R_1| \leq M \lambda^2 A = O(\lambda S_0)$ .

结论: 欧拉-麦克劳林展开式表明, 离散求和与连续积分之间的主项误差仅为  $O(S_0)$ . 在总面积  $A \gg S_0$  时, 相对误差  $\frac{S_0}{A} = \lambda \rightarrow 0$ . 这为使用连续积分代替离散级数求和提供了严格的数学奠基.

在现实工程中, 无人机集群不可能无限增加. 定义边际收益阈值  $\varepsilon > 0$  (即当单架无人机新增有效覆盖面积降至  $S_0$  的  $\varepsilon$  倍时, 认为继续增加无人机已无经济/工程效益).

给定收益阈值  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 集群的最优临界规模  $N^*$  存在严格解析解:

$$N^* = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\lambda} + O(\lambda) = 1 - \frac{A \ln \varepsilon}{S_0} + O(\lambda).$$

或采用原始参数表达为:

$$N^* = 1 - \frac{A \ln \varepsilon}{\pi r^2}.$$

【证明】临界条件定义为：

$$f_{N^*} = \frac{\Delta S_{N^*}}{S_0} = \varepsilon.$$

代入渐近连续公式  $e^{-(N^*-1)\lambda} = \varepsilon$ . 两边取自然对数：

$$-(N^* - 1)\lambda = \ln \varepsilon \Rightarrow N^* - 1 = -\frac{\ln \varepsilon}{\lambda}.$$

$$N^* = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\lambda}.$$

代入

$$\lambda = \frac{S_0}{A} = \frac{\pi r^2}{A}.$$

即得：

$$N^* = 1 - \frac{A \ln \varepsilon}{\pi r^2} + O(\lambda).$$

该闭式解一步避开了上万次非线性迭代，精准给出了临界规模。

## 五、收益模型

### 5.1 收益模型与现实约束

1. 空中碰撞风险模型<sup>[5]</sup>：假设任意两架无人机在交叉路径下的碰撞概率为  $p_0$ .  $N$  架无人机的两两组合对数为  $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ . 引入协同避障控制系数  $\alpha \in (0,1)$  (越小表示避障算法越先进)，集群无碰撞安全飞行概率为：

$$P(N) = (1 - p_0)^{\alpha \frac{N(N-1)}{2}} = \exp\left(\frac{\alpha N(N-1)}{2} \ln(1 - p_0)\right).$$

令  $\mu = -\frac{\alpha}{2} \ln(1 - p_0) > 0$ ，则安全概率简化为：

$$P(N) = e^{-\mu N(N-1)}.$$

2. 通信带宽瓶颈模型：设总通信带宽为  $B$ ，单机最低需求带宽为  $b$ ，理论信道容纳上限为  $\max = \frac{B}{b}$ . 当  $N > N_{\max}$  时，信道发生拥塞与时延剧增. 使用 Sigmoid 函数<sup>[6]</sup>构建通信有效性衰减系数  $\gamma(N)$ ：

$$\gamma(N) = \frac{1}{1 + e^{\beta(N - N_{\max})}}.$$

其中  $\beta > 0$  为带宽陡峭度惩罚因子。

### 5.2 综合收益极值导数分析与极值唯一性证明

结合区域覆盖面积  $S(N)$ 、安全概率  $P(N)$  与通信效率  $\gamma(N)$ ，定义综合目标收益函数  $H(N)$  ( $V$  为单位覆盖面积的价值系数)： $H(N) = V \cdot S(N) \cdot P(N) \cdot \gamma(N)$  代入表达式：

$$H(N) = V \cdot A(1 - e^{-N\lambda}) \cdot e^{-\mu N(N-1)} \cdot \frac{1}{1 + e^{\beta(N - N_{\max})}}.$$

综合收益函数  $H(N)$  在定义域  $N \in [1, +\infty)$  上存在唯一的全局最大值点  $N_{opt}$ .

【证明】对  $H(N)$  取自然对数：

$$\ln H(N) = \ln V + \ln A + \ln(1 - e^{-N\lambda}) - \mu N(N-1) - \ln(1 + e^{\beta(N - N_{\max})})$$

$$\begin{aligned}\ln H(N) &= \ln V + \ln S(N) + \ln p + \ln \gamma(N). \\ \ln H(N) &= \ln V + \ln A[1 - (1 - \lambda)^{N-1}] + \ln \left\{ 1 - \left[ 1 - (1 - p_0)^{\frac{N(N-1)}{2}} \right] \right\} + \ln \frac{1}{1 + e^{\beta(N-N_{\max})}} \\ \ln H(N) &= \ln AV + \ln [1 - (1 - \lambda)^{N-1}] + \ln (1 - p_n) + \ln \frac{1}{1 + e^{\beta(N-N_{\max})}}\end{aligned}$$

对除常数项 $\ln AV$ 外每项分别分析

1. 对于 $\ln [1 - (1 - \lambda)^{N-1}]$

$$S(N) = A[1 - (1 - \lambda)^N]$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时,  $0 < \lambda < 1$ , 衰减是单调的(无振荡)

2. 对于

$$\begin{aligned}\ln \frac{1}{1 + e^{\beta(N-N_{\max})}} &= \ln 1 - \ln(1 + e^{\beta(N-N_{\max})}) \\ &= -\ln(1 + e^{\beta(N-N_{\max})}) \\ \text{原式} &= -\ln(1 + e^{\beta x})\end{aligned}$$

提取一个 $e^{\beta x}$ 得出

$$\begin{aligned}-\ln(1 + u) &= -\ln e^{\beta x}(e^{-\beta x} + 1) \\ &= -\beta x - \ln(e^{-\beta x} + 1) \\ \text{令 } u &= e^{-\beta x}\end{aligned}$$

利用泰勒展开

$$\begin{aligned}\ln(e^{-\beta x} + 1) &\approx \ln(u + 1) \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots \\ \text{原式} &= -e^{\beta x} - \left[ u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots \right] \\ &\approx -\beta x - \left[ e^{-\beta x} - \frac{e^{-2\beta x}}{2} + \frac{e^{-3\beta x}}{3} - \dots \right].\end{aligned}$$

$$= -\beta(N - N_{\max}) - e^{-\beta(N-N_{\max})} + \frac{1}{2}e^{-2\beta(N-N_{\max})} - \frac{1}{3}e^{-3\beta(N-N_{\max})} + \dots$$

当 $N \gg N_{\max}$ 时, 此时 $x \rightarrow +\infty$ , 所以 $-\beta x \rightarrow -\infty$ .

指数项 $e^{-\beta x} \rightarrow 0$ . 高阶指数项更趋近于 0, 此时原式 $= -\beta(N - N_{\max})$ , 呈线性递减.

当 $N \ll N_{\max}$ 时, 此时 $x \rightarrow -\infty$ ,  $e^{\beta x} \rightarrow 0$ . 泰勒展开式 $u = e^{-\beta(N-N_{\max})} \rightarrow \infty$ 不再适用, 此时回到展开式的原始形式 $-\ln(1 + e^{\beta x})$ .

$e^{\beta x} \rightarrow 0$ , 所以 $\ln(1 + 0) \approx 0$ . 结果对系统没有显著贡献.

当 $N = N_{\max}$ 时, 此时 $x = 0$ .

原式实际上表示为  $-\ln(1 + e^{\beta x}) = -\ln 2$ .

展开结果

$$0 - \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right] = -\ln 2.$$

3. 对于  $\ln(1 - p_n)$

$$1 - p_n = (1 - p_0)^{a \frac{N(N-1)}{2}}.$$

$$\ln(1 - p_n) = \ln \left( (1 - p_0)^{a \frac{N(N-1)}{2}} \right),$$

$$\ln(1 - p_n) = a \frac{N(N-1)}{2} \ln(1 - p_0).$$

联系上文的

$$\mu = -\frac{a}{2} \ln(1 - p_0).$$

$$\ln(1 - p_n) = -\mu N(N-1).$$

当  $N \rightarrow \infty$  时

$$-\mu N(N-1) \rightarrow -\mu N^2$$

$$1 - p_n \sim e^{-\mu N^2} \rightarrow 0$$

$$p_n \rightarrow 1.$$

随  $N$  趋向无穷大,  $p_n$  呈指数级 ( $e^{-N^2}$ ) 衰减, 碰撞概率将无限趋近于 1. 对于整个函数模型,  $\ln(1 - p_n)$  是其最大的约束条件.

求对数一阶导数并令其等于 0 (极值必要条件  $\frac{d \ln H(N)}{dN} = 0$ ):

$$\frac{H'(N)}{H(N)} = \frac{\lambda e^{-N\lambda}}{1 - e^{-N\lambda}} - \mu(2N - 1) - \frac{\beta e^{\beta(N-N_{\max})}}{1 + e^{\beta(N-N_{\max})}} = 0.$$

定义三个子函数:

$$g_1(N) = \frac{\lambda}{e^{N\lambda} - 1}.$$

覆盖边际对数收益. 由于  $e^{N\lambda}$  随  $N$  严格单调递增, 故  $g_1(N)$  是严格单调递减函数, 且

$$\lim_{N \rightarrow 0} g_1(N) = +\infty, \lim_{N \rightarrow \infty} g_1(N) = 0.$$

$g_2(N) = \mu(2N - 1)$ : 碰撞风险惩罚项. 由于  $\mu > 0$ ,  $g_2(N)$  是严格单调递增函数.

$$g_3(N) = \frac{\beta}{1 + e^{-\beta(N-N_{\max})}}.$$

通信拥塞惩罚项. 由于  $\beta > 0$ ,  $g_3(N)$  是严格单调递增函数. 令  $\Phi(N) = g_1(N) - [g_2(N) + g_3(N)]$ . 由于  $g_1(N)$  严格单调递减, 而  $g_2(N) + g_3(N)$  严格单调递增, 因此  $\Phi(N)$  为严格单调递减函数. 又因为:

$$\lim_{N \rightarrow 1^+} \Phi(N) = \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} - \mu - \frac{\beta}{1 + e^{-\beta(1-N_{\max})}} > 0 \quad (\text{在常规参数下成立}).$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi(N) = 0 - (+\infty + \beta) = -\infty.$$

根据连续函数介值定理与单调性, 方程  $\Phi(N) = 0$  在  $(1, +\infty)$  上存在且仅存在唯一实根  $N_{\text{opt}}$ . 当时  $N < N_{\text{opt}}$  时,  $\Phi(N) > 0 \Rightarrow H'(N) > 0$  (收益递增); 当时  $N > N_{\text{opt}}$  时,  $\Phi(N) < 0 \Rightarrow H'(N) < 0$  (收益递减). 因此  $N_{\text{opt}}$  为  $H(N)$  在全域上的唯一全局极大值点.

### 5.3 对比优化

采用 MINLP 对于本文最后建立的收益模型进行处理

$$H(N) = V \cdot S(N) \cdot P(N) \cdot \gamma(N).$$

上式中涉及  $e^{-\beta x}$  和  $(1 - p_0)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ , 若没有取对数形式, 原函数将会成  $N^2$  的指数级衰退. MINLP 的常规方法无法处理这样的数值下溢, 函数模型的上界无法确定, 求解器在外外界约束的条件下会陷入无法感知的黑箱, 导致求解结果无法感知或无可行性. 当  $N_{\max} = 1000, \beta = 0.8$  时 (如下结果只是辅助理解, 数值不一定符合现实情况.)

当  $N = 10$

$$\frac{N(N-1)}{2} = 45, \quad e^{-\beta x} = e^{922}.$$

当  $N = 100$

$$\frac{N(N-1)}{2} = 4950, \quad e^{-\beta x} = e^{720}.$$

当  $N = 1000$

$$\frac{N(N-1)}{2} = 499500, \quad e^{-\beta x} = e^0.$$

当  $N = 10000$

$$\frac{N(N-1)}{2} = 49995000, \quad e^{-\beta x} = e^{-7200}.$$

1. 若取对数形式, 破坏原有的函数性质, 稳定的可变非凸函数在不同范围内出现了局部凸点或平坦, 给求解带来了不必要的麻烦. MINLP 处理这样的情况一般通过连续松弛误差, 对于  $e^{-\beta x}$  和  $(1 - p_0)^{\frac{N(N-1)}{2}}$  而言边界极度松弛, 导致分解效率低下, 无法便捷得出正确结果.

2. 计算量极大, 计算机求解结果依赖算法的准确性和人为求解的正确性.  $e^{-\beta x}$  和  $(1 - p_0)^{\frac{N(N-1)}{2}}$  为函数的计算造成了极大困难, 原式本身的复杂性也为人为求解带来了巨大的不确定性. 若转向前文类似的启发式算法配合适当约束限制的方法也为迈向无法保证得出全局最优解的. BARON 等类求解器在求解这类问题时过分依赖连续松弛变量和初始猜测值. 如果初始  $N$  不同, 收敛结果与实际全局最优解相差极大, 同时无法保证结果为真实有效的可行解, 且需求多次重复的计算验证, 计算时间也会成指数级增长.

3. 实际求解成本巨大, 导致失去应有的指导意义. 模型中参数是理想化的, 做的是

理论验证，与实际工程情况有极大的出入，实际的参数可能有误差，极易导致 MINLP 无法得出正确的结果.

## 六、结论与展望

本文针对多无人机集群协同搜救中的区域覆盖收益优化与规模选择问题，建立了混合整数非线性规划 (MINLP) 模型，取得了以下突破性的成果：破解了求解器陷入局部最优解的困境；揭示了传统 MINLP 求解器（如 BARON）在渐近平坦区因梯度消失，求解器无法感知导致求解失效的数学原因.运用欧拉-麦克劳林求和公式证明了分段离散覆盖范围向连续指数积分演化的收敛性，给出了误差范围界限  $O(\lambda)$ ，并导出了边际临界规模的闭式解公式  $N^* = 1 - \frac{A \ln \varepsilon}{\pi^2}$ .构建并证明了综合收益全局最优解；耦合了碰撞风险与通信带宽约束，建立了综合收益函数  $H(N)$ ，并严格证明了全局唯一最优规模  $N_{opt}$  的存在性与唯一性.

同时我们意识到，对于此类问题 MINLP 不一定是最优解，当模型中出现指数，对数等常见的优化情况时，MINLP 极其容易失效，求解器会陷入不可知的黑箱中，渐近分析的方法面对指数，对函数可以较为简便的绕过 MINLP 中的种种限制，不必要纠模型的凸性等 MINLP 最根本也最容易在优化模型过程中改变的问题.

## 参考文献

- [1] Marco Locatelli.Convex envelopes of bivariate functions through the solution of KKT systems[J].Journal of Global Optimization,2018,72(2):277-303.
- [2] 江芹,陈文略.严格凸函数的判定[J].高等函授学报(自然科学版),2006(04):27-28.
- [3] 郭纪宏.修正的欧拉—麦克劳林公式及其应用[D].天津大学, 2019, DOI:10.27356/d.cnki.gtjdu.2019.001865.
- [4] 张岩,李丹.泰勒展开与比较函数大小[J].数理化解题研究, 2023, No.578(13):62-64.
- [5] 李楠,闫博芸,王子实,焦庆宇.无人机进场阶段空中碰撞风险模型[J].交通信息与安全, 2025, 43(03):154-161+180.
- [6] 聂恒辉,陈大春.基于改进式 Sigmoid 函数的动态综合评价算法研究[J].数学的实践与认识, 2021, v.51(16):294-299.DOI:10.20266/j.math.2021.16.034.

## 致 谢

首先，我们要衷心感谢高中数学李子宝老师(简介：楚雄实验中学学科竞赛基地特聘专员，高三 985 班数学教师，基础数学专业硕士研究生学历)，在本研究期间给予我们的无偿的指导与持续鼓励.在研究过程中他为我们提供了必要的数学书籍和文献，并积极为我们优化内容、启发思维和指导学术写作.其次，特别感谢清华大学主办“丘成桐中学科学奖”——该赛事为高中生提供了一个可以倾注对科学研究的兴趣平台.

本研究项目的灵感来源于新闻中关于无人机搜救的相关报道和近年来无人机技术的发展.我们小组在研究《无人机集群并发覆盖搜索与目标跟踪方法研究》陈润丰.[D].国防科技大学，2018，DOI:10.27052/d.cnki.gzjgu.2018.000487.这篇论文时想到，从集群规模与覆盖收益之间的宏观关系出发，构建一个用于优化分析的参数简化模型.在求解基础模型的过程中，函数数值病态的问题始终阻挠着我们求解全局的最优解，我们通过启发式算法和条件约束突破了数值病态的问题，求解得出我们可行的工程最优解.在收益模型的建立过程中；在求解临界数量时，受到文献[3]和[4]的启发，从极限的视角出发，利用泰勒展开和欧拉-麦克劳林求和公式，推导出 $N^* = 1 - \frac{A \ln \varepsilon}{\pi r^2} + O(\lambda)$ ，避开了上万次的非线性迭代，精准给出了临界规模；受到实际约束无人机数量增长的条件极多，通过李老师的分析，引导我们受文献[5]的启发，总结简化出空中破撞风险模型，构建以空中碰撞模型和通信带宽瓶颈模型两项为约束的任务成功率收益模型，解决了我们模型构建思路混乱的问题.

在研究过程中，我们使用到了 DeepSeek V4.1 Flash，在初期研究背景调研和知识储备时，获得指导老师许可后，使用 AI 工具辅助查找了关于“凸函数”、“渐进分析”和“欧拉麦克劳林求和公式”的相关文献，在 2026 年 8 月 20 日到 9 月 14 日间 1 次用到 AI 进行获取文献，在 2026 年 9 月 3 日到 9 月 13 日内 3 次用到 AI 进行代码调试和语言润色.(后续对话将在附件 1 中展出).

在本次研究中，我们组进行以下分工：李老师负责理论指导、计算指导、论文写作指导和思路优化；李灏宇负责公式推导、内容格式的优化；王彦杰负责 PyCarm 软件的运用求解、MINLP、收益模型的建立；雷印才负责模型优化、渐近分析和结论.

本文针对多无人机集群协同搜救中的区域覆盖收益优化与规模选择问题，建立了混合整数非线性规划(MINLP)模型，并取得了以下突破性成果：破解求解器病态困境：揭示了传统 MINLP 求解器(如 BARON、APOPT)在渐近平坦区因梯度消失导致求解失效的数值机理.构建欧拉-麦克劳林渐近分析框架：运用欧拉-麦克劳林求和公式精确证明了离散覆盖级数向连续指数积分演化的收敛性，给出了余项界  $O(\lambda)$ ，并导出了边实际临界规模的解析闭式解  $N^* = 1 - \frac{A \ln \varepsilon}{\pi r^2}$ .构建并证明了综合收益全局最优解：耦合了碰撞

利用混合整数非线性规划进行多无人机集群区域协同搜索的覆盖收益建模与最优规模渐近分析

风险与通信带宽约束，建立了综合收益函数  $H(N)$ ，并严格证明了全局唯一最优规模  $N_{opt}$  的存在性与唯一性.为无人机集群的实际运用提供了可行性验证和参考.

2026 S.-T. Yau High School Science Award  
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示