

参赛学生姓名： 赵欣来、吴嘉豪

中学： 深圳中学

省份： 广东省

国家/地区： 中国

指导老师姓名： 陈婷静

指导老师单位： 深圳中学

论文题目： 有限跨组比赛数下总体排名估计的最优设计

有限跨组比较数下 总体排名估计的最优设计

赵欣来、吴嘉豪

深圳中学

摘 要

当比赛主要发生在各组内部时，仅凭组内结果难以准确比较不同群体的整体实力。本文研究固定跨组比赛预算下的赛程设计问题，以公开男足比赛数据中的跨洲比较稀疏现象为背景，在 Bradley-Terry 模型下估计两组平均对数实力之差。初步模拟表明，分位同位桥接是一种较稳定的简单方案。在此基础上，本文以提高组间实力差的估计精度为目标，引入 c -最优准则，并借助 Thomson 最小能量原理将赛程评价转化为只涉及跨组边的低维矩阵计算，进而提出逐边选择与局部替换算法。模拟结果显示，当两组整体实力接近时，该算法与分位同位桥接方案的误差相近；随着组间中心差增大，根据信息准则调整对阵相对于分位同位桥接的优势更加明显。随着跨组比赛预算增加，各方案的误差均下降，但下降速率逐渐减弱，在误差接近 0.2 时几乎停滞。根据 c -最优准则值调整对阵能够进一步降低误差，但误差降幅会逐渐减小。在对象数量较少的情形中，该算法所得的 c -最优准则值与全局最小值的相对差距不超过 5%。结果表明，该方法能够以较低的计算成本得到接近全局最优的跨组赛程，改善有限比较预算下的组间实力校准。

关键词：跨组比较；Bradley-Terry 模型； c -最优设计；赛程优化

目录

1	引言	1
2	问题设定与模型建立	3
2.1	组内相对实力与组间实力差	3
2.2	比赛模型与实力估计	3
2.3	真实数据所反映的情景	4
2.4	评价指标与主要符号	6
3	蒙特卡洛模拟预实验	6
3.1	四种简单的赛程构造方案	7
3.2	模拟过程	7
3.3	预实验结果与分析	8
4	基于 c -最优准则的跨组赛程设计	8
4.1	设计目标: c -最优准则	9
4.2	单场信息与信息拉普拉斯矩阵	9
4.3	简化 Ψ_c 的计算	10
4.4	逐边选择与局部交换算法	12
5	结果	13
6	结论	15
	附录 A 单次蒙特卡洛重复的算法	17
	附录 B 桥流二次型约束最小化的证明	17
	参考文献	18
	致谢	19

1 引言

在竞技比赛中，排名不仅用于描述参赛者的相对实力，还会影响种子分档、抽签和后续对阵 [1]。足球国家队就是一个典型例子：球队大部分时间参加本洲赛事，跨洲正式比赛主要集中在世界杯等少数比赛中。洲内比赛可以形成较稳定的洲内排名，但如果不同洲的实力没有被放在同一尺度上，某一洲的球队就可能在世界排名中被整体高估或低估。对于处在分档边界附近的球队，这种偏移可能直接改变其档位，使原本用于避免强队过早相遇的种子保护制度效果偏离预期。Sziklai 等人比较了不同赛事结构下的排名效果，发现理想排名下种子编排最多可带来约 10% 的改善，而使用带有现实噪声的赛前排名时，改善幅度最多约为 3% [2]。这说明，排名误差还会通过分档和抽签影响后续赛程，因此不同群体之间的实力校准具有实际意义。

本文采用 Bradley-Terry 模型，根据比赛胜负估计对象的相对实力参数 [3, 4]。在该模型中，比赛胜率只取决于双方的实力差。如果把同一组所有对象的实力参数同时平移一个常数，任何组内比赛的胜率都不会改变。因此，无论增加多少组内比赛，都只能改善组内相对实力的估计，不能确定不同群体在共同实力尺度上的位置。只有跨组比赛才能提供这部分信息。然而，跨组比较通常数量有限，安排成本也更高。真正需要解决的问题并不只是增加跨组比赛，而是在给定预算下决定哪些对象应当参赛，以及它们之间应当如何配对。

已有研究讨论了比较网络结构对参数估计误差的影响，也研究了如何选择更有信息量的比较对象 [5, 6]。这些工作说明，比较次数相同时，不同网络结构可能产生不同的估计精度。本文关注其中一个更具体的情形：两个群体内部已经积累了较充分的比较结果，但群体之间只有少量比赛；此时需要估计的主要未知量，是两个群体在共同尺度上的相对位置。Sziklai 等人的研究将赛前排名噪声作为给定条件，而本文进一步考察这种噪声的一类来源，即跨组比赛不足造成的群体均值偏移，并研究如何通过设计少量跨组比赛减小这一误差。

为此，本文将两组平均实力参数之差作为组间校准参数，并使用带岭惩罚项的最大似然法估计全部对象的实力。我们先比较随机桥接、均匀覆盖随机匹配、头部集中桥接和分位同位桥接四种简单方案，分析参赛范围与配对方式对估计结果的影响。随后，本文以组间均值差的 c -最优准则评价跨组赛程，并借助信息拉普拉斯矩阵和 Thomson 最小能量原理，将原本涉及全部对象的赛程评价转化为只涉及跨组边的低维矩阵计算 [7, 8, 9]。在此基础上，我们构造逐边选择与局部替换算法，以较低的计算成本搜索跨组赛程。模拟实验同时考察组间均值差误差和跨组两两排序准确度；在能够穷举全部赛程的小规模情形下，该算法所得准则值与全局最优值的相对差距不超过 5%。这些结果说明，在跨组比赛数量受限时，合理选择参赛对象和配对方式可以减少群体之间的系统性误差，并为后续的总体排名和种子分档提供更可靠的依据。

下文第2节给出问题设定、数据背景和评价指标；第3节介绍四种简单赛程及蒙特卡洛模拟；第3.3节分析预实验结果；第4节推导赛程的信息评价准则并构造选边算法；第5节比较不同方案，并检验算法所得准则值与全局最优值的差距。

2 问题设定与模型建立

2.1 组内相对实力与组间实力差

设两个互不重叠的群体为 A 和 B ，每组包含 n 个对象。对象的实力参数记为 θ ，数值越大表示实力越强。令 A 、 B 两组的平均实力分别为 μ_A, μ_B ，则可以把每个对象的实力参数写为：

$$\theta_i^A = \eta_i^A + \mu_A, \quad \theta_j^B = \eta_j^B + \mu_B. \quad (1)$$

其中 η_i^A 和 η_j^B 分别为中心化后的组内相对实力参数，定义如下：

$$\sum_{i \in A} \eta_i^A = \sum_{j \in B} \eta_j^B = 0. \quad (2)$$

因此，两个跨组对象的实力差为

$$\theta_i^A - \theta_j^B = \eta_i^A - \eta_j^B + \Delta_\mu, \quad (3)$$

其中 $\Delta_\mu = \mu_A - \mu_B$ 。

我们把跨组对象对视为连接两组的边，所选赛程记为 $M \subseteq A \times B$ ， M 即为代表跨组赛程的边集。若共有 K 场跨组比赛，则元素数 $|M| = K$ 。

2.2 比赛模型与实力估计

我们采用二元 Bradley-Terry 模型来模拟每场比赛的结果 [3, 10]，只有胜负，没有平局。对于两个对象 i, j ，设 $Y_{ij} = 1$ 表示 i 获胜， $Y_{ij} = 0$ 表示 j 获胜，

$$p_{ij} = \mathbb{P}(Y_{ij} = 1 \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\theta_i - \theta_j)]} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j}, \quad (4)$$

其中 $\alpha_i = e^{\theta_i}$ 。给定各个对象的实力参数后，各场比赛可以独立生成结果。双方实力相同时各有一半胜率。实力差越大，强者获胜的概率越高。该场比赛的对数似然可以写为

$$\ell_{ij} = \ln [p_{ij}^{Y_{ij}} (1 - p_{ij})^{1-Y_{ij}}] = Y_{ij} \ln p_{ij} + (1 - Y_{ij}) \ln(1 - p_{ij}) \quad (5)$$

令考虑范围内所有对象（假设有 m 个）的实力参数向量为 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^\top$ 。由于所有实力参数同时平移不会改变对比赛结果的预测，我们规定 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\theta} = 0$ 。其中 $\mathbf{1}$ 是元素全为 1 的列向量。因此对比赛集合 E ，总对数似然为

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; E) = \sum_{(i,j) \in E} [Y_{ij} \log p_{ij} + (1 - Y_{ij}) \log(1 - p_{ij})]. \quad (6)$$

估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 时应当使总对数似然最大。但是在比赛数较少的情况下，若某个对象出现了全胜或者全负的战绩，那么让总对数似然取最大值将会导致该对象的估计

实力参数发散至无穷。因此我们需要加入惩罚项以避免这种情况：

$$\hat{\theta} = \arg \max_{1^T \theta = 0} \left\{ \ell(\theta; E) - \frac{\lambda}{2} \|\theta\|_2^2 \right\}. \quad (7)$$

其中 $\frac{\lambda}{2} \|\theta\|_2^2$ 为岭惩罚项。在本文中我们使用 $\lambda = 0.1$ 。

我们假设整个赛程分为两个阶段：组内比赛与组间比赛。首先我们得知组内比赛的所有结果后可以用式 (7) 估计出各个组内的中心化实力参数 $\hat{\eta}^A, \hat{\eta}^B$ 及组内预排名。然后我们一次性分配完全部 K 场跨组比赛。在这些比赛结束后，将所有组内与跨组比赛结果合并，按式(7)重新估计出各个对象的总体中心化实力参数。

2.3 真实数据所反映的情景

我们使用公开男足国家队比赛数据库中的比赛记录及点球决胜记录 [11]，提取 2016–2025 年的成年男子国家队赛事。筛选时排除友谊赛，以及任一方不在程序所列 FIFA 会员球队名单中的比赛，并按名单中的洲际归属将队伍归类至各个足联。由于我们的二元 Bradley–Terry 模型只能模拟胜负，因此我们将最终未分出胜负的平局予以剔除，而比分相同但经点球决胜的比赛保留，按点球获胜方记为胜者。图1统计这一范围内的洲内和跨洲比赛数量。

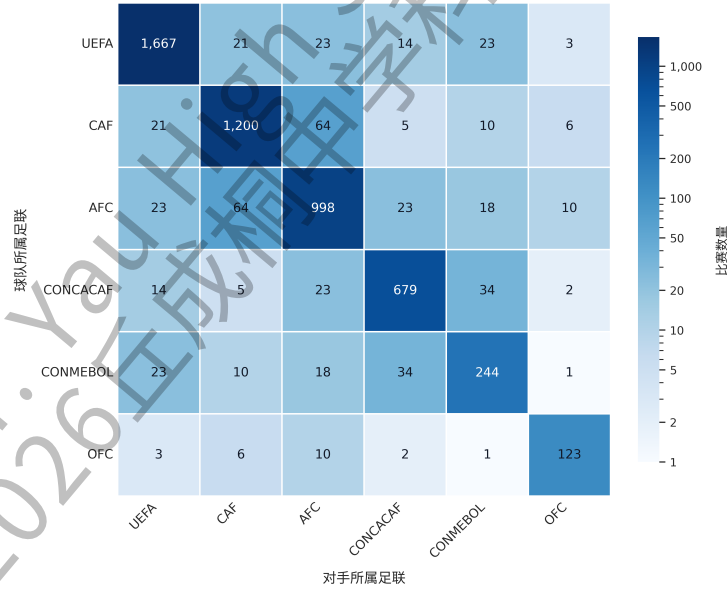


图 1: 2016–2025 年正式男足国家队赛事的洲际足联比赛数量矩阵

注：矩阵的行和列表示各洲际足联。对角元表示同一洲际足联内部的比赛数量，非对角元表示不同洲际足联之间的比赛数量。颜色越深表示比赛数量越多。

图中对角元明显大于多数非对角元，说明国家队更多地在本洲内部比赛。以比赛数量较多的 UEFA、CAF 和 AFC 为例，可以看出一个洲与另外某个洲的洲

间比赛数与洲内比赛数的比值大致为 0.01 量级。我们在后续进行的蒙特卡洛模拟中设置 A、B 两个组，每个组各有 $n = 50$ 个对象，并令每个组内都完成了一遍单循环比赛，即每个组内部比赛数为 $\binom{50}{2} = 1225$ 。相应地，我们设置跨组比赛数为 $K = 1, \dots, 50$ ，分别模拟每个 K 取值下的情况以研究增大跨组比赛数对估计总体排名的效果。

同时，我们可以利用这些比赛数据估计各洲球队实力参数的经验分布。考虑到球队实力会随时间变化，本文选取 2022–2025 年即一个世界杯周期内的正式比赛。估计时将全部球队纳入同一个比较网络，并按式 (7) 使用 $\lambda = 0.1$ 的岭惩罚最大似然法联合估计各队的对数相对实力。图 2 展示全部球队的估计结果及其在六个洲际足联中的分布。



图 2: 2022–2025 年正式男足比赛的各队伍实力参数分布

注：直方图表示估计所得对数相对实力 $\hat{\theta}$ 的经验分布。全部球队在同一个比较图上统一估计，并对全体球队的对数相对实力减去总体均值。

从图中可以看出各足联内部的实力参数分布大致呈单峰分布。因此，我们使用正态分布以简化我们的模型。虽然 AFC 的足联内部实力参数分布为双峰分布，但双峰分布中涉及的参数过多，不方便用统计量表述总体排名准确度，因此本文中我们不予考虑。

我们在后续的蒙特卡洛模拟中先按照如下方式生成各个对象的真实实力参数:

$$\theta_i^A = \frac{\delta}{2} + z_i^A, \quad \theta_j^B = -\frac{\delta}{2} + z_j^B, \quad z_i^A, z_j^B \sim N(0, 1), \quad (8)$$

值得注意的是这里 δ 是初始化参数时的组间中心差, 而 Δ_μ 是一次模拟中实际生成的两组均值之差, 满足 $\Delta_\mu \sim N(\delta, 2/n)$ 。

2.4 评价指标与主要符号

令最终估计的组间均值差为

$$\hat{\Delta}_\mu = \frac{1}{n} \sum_{i \in A} \hat{\theta}_i - \frac{1}{n} \sum_{j \in B} \hat{\theta}_j, \quad (9)$$

则对该值的估计误差为 $E_\mu = |\hat{\Delta}_\mu - \Delta_\mu|$ 。由于我们假设组内实力参数分布是正态的, 因此在估计两组合并后的总体排名时可以用 E_μ 代表排名准确度。因此, 我们在评估估计结果时考察的主指标为 E_μ 的平均值 $\bar{E}_\mu$, 数值越小代表估计越准确。为了更直观地呈现预测精确度, 我们也给出两两排序的准确度 A_{cross} 这一辅助指标。令 $d_{ij} = \theta_i^A - \theta_j^B$, $\hat{d}_{ij} = \hat{\theta}_i^A - \hat{\theta}_j^B$, 则

$$A_{\text{cross}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \mathbf{1}\{d_{ij} \hat{d}_{ij} > 0\}. \quad (10)$$

其中 $\mathbf{1}\{d_{ij} \hat{d}_{ij} > 0\}$ 在 $d_{ij} \hat{d}_{ij} > 0$ 时取 1, 其他时候取 0。

表 1: 主要符号及其在研究中的作用

符号	含义
n, K, M	每组对象数、跨组比赛预算、所选跨组边集合
θ_i, η_i	对数实力、相对本组均值的偏离
δ	模拟生成分布的中心差
$\Delta_\mu, \hat{\Delta}_\mu$	实际组间均值差及其估计
λ	最终实力估计中的岭惩罚项系数

3 蒙特卡洛模拟预实验

我们先使用预实验比较四种容易实施的跨组赛程, 定性分析什么样的跨组比赛安排能够帮助我们更精确地估计出总体排名。

3.1 四种简单的赛程构造方案

令 $a(r), b(r)$ 分别为两组预排名第 r 的对象，排名越靠前表示估计实力越强。为使参赛对象近似均匀地覆盖各个排名位置，取

$$r_k = \left\lfloor \frac{(k - 1/2)n}{K} \right\rfloor + 1, \quad (11)$$

其中 $k = 1, \dots, K$ 。当 $K \leq n$ 时，这些位置互不相同。四种策略均安排 K 个不同的跨组对象对，并在跨组比赛开始前确定全部赛程。

表 2: 预实验中的四种跨组桥接策略

策略	安排方式
随机桥接 R	从全部 n^2 个跨组对象对中无放回地均匀抽取 K 对；同一对象可以多次参赛。
均匀覆盖随机匹配 C	两组各选式(11)中的 K 个位置，再随机排列一侧对象进行一一配对。
头部集中桥接 T	从两组预排名前 10 名构成的 100 个对象对中，无放回地均匀抽取 K 对。
分位同位桥接 M	选择与 C 相同的对象，直接安排 $a(r_k)$ 对阵 $b(r_k)$ 。

C 与 M 使用完全相同的参赛对象，因此它们的差别直接反映匹配方式的作用。T 把比赛集中到较强的对象，R 则提供不参考预排名信息的完全随机参照。

3.2 模拟过程

每次模拟按式(8)生成两组实力，再为每组生成完整单循环赛果。组内相对实力参数估计和最终的全体实力参数估计均取 $\lambda = 0.1$ 。跨组比赛数采用 $K = 1, 2, \dots, 50$ 。 δ 的取值为 $\{0, 0.5, 1\}$ ，对每个 δ 独立生成 5000 次模拟样本，每次样本用于全部 50 个跨组比较数和四种策略。因此，每个 (δ, K) 情景下均有 5000 次重复。

四种策略共享同一次模拟的真实实力、组内比赛和潜在跨组赛果。这样，某种策略误差较小就不会只是因为它恰好遇到了另一批更容易估计的对象。每种赛程完成后重新将两组中的所有对象共同使用带惩罚项的最大似然法估计，并记录每次模拟得到的 E_μ 和 A_{cross} 。

蒙特卡洛模拟的单次重复算法可见于附录A。

3.3 预实验结果与分析

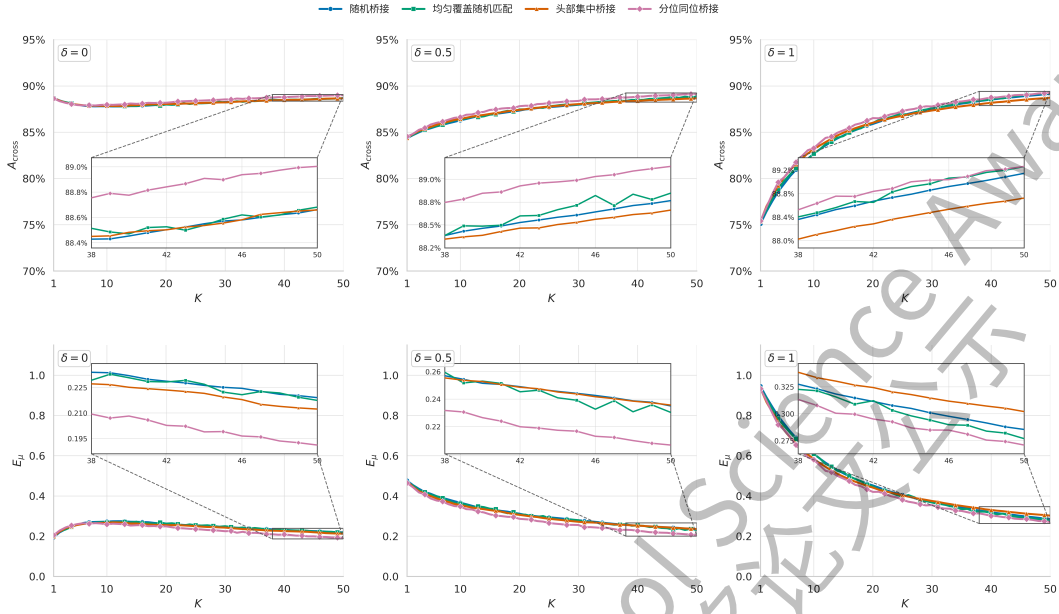


图 3: $K = 1, \dots, 50$ 时四种跨组桥接策略的二元 Bradley-Terry 模拟结果

注：上排表示跨组排序准确率 A_{cross} ，数值越大表示估计表现越好；下排表示组间平均实力差绝对误差 E_{μ} ，数值越小表示估计表现越好。三列依次对应 $\delta = 0, 0.5$ 和 1。不同颜色和标记表示不同的跨组桥接策略，各点及其连线表示 5000 次独立蒙特卡洛模拟结果的均值。

图3表明，跨组比赛的数量和配对方式都会影响估计。对于中心差不为零的情景，随着比赛数增加，均值差误差总体下降，跨组排序准确率逐渐提高；预算较大后，改善幅度趋缓。

分位同位桥接总体表现较好，可以作为后续方法的比较基准。它与均匀覆盖随机匹配选择相同的参赛对象，只改变对手的配对方式。两者的差异说明，即使参赛范围已经确定，怎样配对仍然影响校准效果。头部集中桥接没有表现出稳定优势，尤其在组间差距较大时，仅安排两组强者交手并不利于估计两组整体相差多少。

中心差为零时，误差在最初几场比赛后先上升，再逐渐下降。这与岭惩罚项把组间均值差向零收缩有关：跨组信息很少时，收缩后的估计恰好接近该情景的生成中心；增加少量赛果后，随机胜负会使估计偏离零附近；待比赛进一步积累，误差才逐渐减小。

4 基于 c-最优准则的跨组赛程设计

预实验比较了四种较为简单的跨组赛程设计方式，本节我们进一步研究如何求出最优的赛程安排。我们先建立赛程的信息评价标准，再降低计算这一标准的成本，最后给出逐边选择与局部替换的高效算法。

4.1 设计目标：c-最优准则

前文中所定义的组间平均实力差可以重写为

$$\Delta_\mu = \bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B = \mathbf{c}^\top \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} n^{-1} \mathbf{1}_A \\ -n^{-1} \mathbf{1}_B \end{pmatrix}. \quad (12)$$

利用这一点，我们可以使用 c-最优准则以将 Δ_μ 估计得尽量精确。

令 A、B 两组共 $2n$ 个队伍的实力参数向量为 $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_1^A, \dots, \theta_n^A, \theta_1^B, \dots, \theta_n^B)^\top$, $L(M; \boldsymbol{\theta}_0)$ 为加入跨组边集合 M 后的 Fisher 信息矩阵。则 c-最优设计要求

$$\Psi_c(M; \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{c}^\top L(M; \boldsymbol{\theta}_0)^+ \mathbf{c}, \quad (13)$$

$$M_K^*(\boldsymbol{\theta}_0) \in \arg \min_{\substack{M \subseteq A \times B \\ |M|=K}} \Psi_c(M; \boldsymbol{\theta}_0). \quad (14)$$

其中 L^+ 表示 Moore–Penrose 广义逆, Ψ_c 是需要尽量取到最小值的 c-最优准则函数。需要注意岭惩罚项 λ 仅用于保障数值模拟稳定, 并非比赛提供的信息, 故不计入 L 。

4.2 单场信息与信息拉普拉斯矩阵

对一个比赛边 $e = (i, j)$, 令 $\mathbf{h}_e = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, 并记实力差 $d_e = \mathbf{h}_e^\top \boldsymbol{\theta}_0$ 。若 $Y_e = 1$ 表示 i 胜, 则

$$p_e = \mathbb{P}(Y_e = 1 \mid \boldsymbol{\theta}_0) = \frac{e^{d_e}}{1 + e^{d_e}}, \quad (15)$$

单场对数似然可以写为

$$\begin{aligned} \ell_e(\boldsymbol{\theta}_0) &= \ln [p_e^{Y_e} (1 - p_e)^{1-Y_e}] \\ &= Y_e d_e - \ln(1 + e^{d_e}) \\ &= Y_e \mathbf{h}_e^\top \boldsymbol{\theta}_0 - \ln(1 + e^{\mathbf{h}_e^\top \boldsymbol{\theta}_0}) \end{aligned} \quad (16)$$

对 $\boldsymbol{\theta}$ 求导, 得到

$$\nabla \ell_e = (Y_e - p_e) \mathbf{h}_e, \quad (17)$$

$$\nabla^2 \ell_e = -p_e(1 - p_e) \mathbf{h}_e \mathbf{h}_e^\top. \quad (18)$$

按照 Fisher 信息矩阵的定义 [7, 8], 单场比赛的信息矩阵为

$$-\mathbb{E} \nabla^2 \ell_e = p_e(1 - p_e) \mathbf{h}_e \mathbf{h}_e^\top. \quad (19)$$

记 $w_e = p_e(1 - p_e)$ 是该场比赛提供的信息量, 可得 $w_e \leq 1/4$, 等号仅在 $d_e = 0$ 时成立。因此双方实力越悬殊, 比赛结果越可预测, 但其对实力差的局部辨识能力越弱。由于在计算 d_e 时需要知道 Δ_μ , 因此我们可以给定一个其预估值 x_0 , 在计算中使用它为组间均值差。

独立比赛的信息可以相加，所以全部比赛的信息矩阵为

$$L(M; \theta_0) = \sum_{e \in E_{\text{within}} \cup M} w_e \mathbf{h}_e \mathbf{h}_e^\top. \quad (20)$$

每一项 $w_e \mathbf{h}_e \mathbf{h}_e^\top$ 都是单边加权拉普拉斯矩阵，权重为 w_e ，故 $L\mathbf{1} = 0$ 。在约束 $\mathbf{1}^\top \theta = 0$ 下， L 在 $\mathbf{1}^\perp$ 上的广义逆即为 L^+ 。由此可以按照前述 c -最优准则搜索最优的 K 条跨组边。然而，候选边集共有 $\binom{n^2}{K}$ 个，且每次均需处理 $2n \times 2n$ 矩阵 $L(M; \theta_0)$ ，导致总计算量不在可算范围内。下文中我们将给出降低计算量的方法。

4.3 简化 Ψ_c 的计算

直接评价赛程需要处理 $2n \times 2n$ 的信息矩阵。由于在改变跨组赛程的时候只会改变 K 条边的选法，而原本已经完成的组内比赛不会再改变；因此，根据数学直觉，在寻找最优的跨组赛程时每种方案下应当只需重新组合并计算 $K \times K$ 的矩阵，而非 $2n \times 2n$ 的矩阵。顺着这一思路，我们利用信息拉普拉斯与电网络拉普拉斯的对应关系，可以先将 c -最优准则写成电网络中的最小耗散功率问题，再利用两组的结构将计算转化为仅涉及 K 条跨组边的二次型。

首先固定实力参数向量 θ_0 与赛程 M ，并简记 $L = L(M; \theta_0)$ 。设增加跨组边后的整体比较图联通，各边的信息权重 $w_e = p_e(1 - p_e) > 0$ 。将每条比赛边任意定向，定义节点-边关联矩阵 B ：每一列在该边起点处为 1、终点处为 -1，其余位置为 0。令 $W = \text{diag}(w_e)$ ，则

$$L = BWB^\top. \quad (21)$$

因此，可以将比较图视为以 w_e 为电导、 $1/w_e$ 为电阻的电网络。用向量 $\mathbf{f}$ 表示各边的电流，用向量 $\mathbf{z}$ 表示外部向各节点的净注入电流，其中正值表示注入、负值表示取出。节点电流守恒条件为 $B\mathbf{f} = \mathbf{z}$ ，电网络上的总能量耗散功率为

$$\mathcal{E}(\mathbf{f}) = \sum_e \frac{f_e^2}{w_e} = \mathbf{f}^\top W^{-1} \mathbf{f}. \quad (22)$$

Thomson 最小能量原理指出：在满足给定节点净注入的所有可行流中，由欧姆定律与节点电流守恒共同确定的电流使总能量耗散功率最小 [9]。对于连通图及任意满足 $\mathbf{1}^\top \mathbf{z} = 0$ 的净注入电流向量，其矩阵形式为

$$\min_{B\mathbf{f}=\mathbf{z}} \mathbf{f}^\top W^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{z}^\top L^+ \mathbf{z}. \quad (23)$$

这与 c -最优准则要最小化的目标形式相同。因此我们取

$$\mathbf{z} = \mathbf{c} = \begin{pmatrix} n^{-1} \mathbf{1}_A \\ -n^{-1} \mathbf{1}_B \end{pmatrix}. \quad (24)$$

这表示从 A 组每个节点注入 $1/n$ 单位电流，从 B 组每个节点取出 $1/n$ 单位电流，总注入量与总取出量均为 1。由于 $\mathbf{1}^\top \mathbf{c} = 0$ ，由式(23)得到

$$\Psi_c(M; \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{c}^\top L^+ \mathbf{c} = \min_{B\mathbf{f}=\mathbf{c}} \mathbf{f}^\top W^{-1} \mathbf{f}. \quad (25)$$

由此，赛程的 c -最优评价值恰好等于上述指定注入方式下的电网络最小总耗散功率。

下面将这一最小能量耗散功率表示应用于两组比较图：先固定跨组边上的流量，分别求出两组内部实现剩余净注入所需的最小耗散功率，再对跨组流量求最小值。这样即可消去组内边的流量变量，得到在跨组边上计算 Ψ_c 的公式。

令 L_A, L_B 为两组内部的信息拉普拉斯矩阵，并且假设两组内部图各自连通。设跨组边集为

$$M = \{(i_k, j_k) : k = 1, \dots, K\}, \quad i_k \in A, \quad j_k \in B,$$

并定义端点矩阵与跨组权重矩阵

$$S_A = (\mathbf{e}_{i_1}^A, \dots, \mathbf{e}_{i_K}^A), \quad S_B = (\mathbf{e}_{j_1}^B, \dots, \mathbf{e}_{j_K}^B), \quad D_M = \text{diag}(w_{e_1}, \dots, w_{e_K}). \quad (26)$$

我们把跨组边定向为从 A 组指向 B 组，用向量 $\mathbf{x}$ 记录各条跨组边的流量，则 $S_A \mathbf{x}, S_B \mathbf{x}$ 分别汇总每个参赛端点承载的流量。

由于 A 组总注入为 1，跨组流必须满足 $\mathbf{1}_K^\top \mathbf{x} = 1$ 。固定 $\mathbf{x}$ 后，两组内部尚需分配的净注入分别为

$$\mathbf{z}_A = n^{-1} \mathbf{1}_A - S_A \mathbf{x}, \quad (27)$$

$$\mathbf{z}_B = S_B \mathbf{x} - n^{-1} \mathbf{1}_B. \quad (28)$$

由 Thomson 最小能量恒等式，跨组边与两组内部的最小耗散功率之和为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top D_M^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{z}_A^\top L_A^+ \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B^\top L_B^+ \mathbf{z}_B \\ &= \mathbf{x}^\top (D_M^{-1} + S_A^\top L_A^+ S_A + S_B^\top L_B^+ S_B) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (29)$$

第二个等号使用了 $L_A^+ \mathbf{1}_A = L_B^+ \mathbf{1}_B = 0$ 以化简。将括号中的矩阵记为

$$Q_M = D_M^{-1} + S_A^\top L_A^+ S_A + S_B^\top L_B^+ S_B. \quad (30)$$

这样，给定跨组流量时的最小耗散功率就是 $\mathbf{x}^\top Q_M \mathbf{x}$ 。我们只需进一步在总流量为 1 的约束下选择跨组电流向量 $\mathbf{x}$ ，便可将 Ψ_c 转化为：

$$\Psi_c(M) = \min_{\mathbf{1}_K^\top \mathbf{x} = 1} \mathbf{x}^\top Q_M \mathbf{x}.$$

由于 Q_M 的表达式中 D_M^{-1} 正定，后面两项半正定，因此 Q_M 正定。故上述约束最小化问题有唯一的最小值点。用拉格朗日乘子法可得达到最小耗散功率的跨组电流为

$$\mathbf{x}_M^* = \frac{Q_M^{-1} \mathbf{1}_K}{\mathbf{1}_K^T Q_M^{-1} \mathbf{1}_K}, \quad (31)$$

对应的最小总耗散功率为

$$\Psi_c(M) = \mathbf{x}_M^{*T} Q_M \mathbf{x}_M^* = (\mathbf{1}_K^T Q_M^{-1} \mathbf{1}_K)^{-1}. \quad (32)$$

详细步骤见附录B。

这个公式保留了完整的信息准则。预先算好 L_A^+, L_B^+ 后，评价一个赛程只需计算 $K \times K$ 的矩阵 Q_M 并求逆。

式(30)还解释了选边时需要兼顾的因素。第一项反映跨组比赛本身的信息；后两项反映信息如何经过两组内部网络到达参赛端点。若一个对象在组内的实力位置尚不稳定，即使安排它与实力接近的对手比赛，也不一定是最有价值的选择。多条边共同使用哪些端点同样会影响整个赛程的效果。

该降维方法可以使 n 较大而 K 较小的情景变得可算，从而求出跨组赛程的最优解。然而，若 n 与 K 都较大，该方法依旧需要面临 $\binom{n}{K}$ 种跨组边集导致的巨大计算量。因此在下文中我们继续优化方案，给出一种高效且能够接近最优解的算法。

4.4 逐边选择与局部交换算法

我们使用如下的贪心算法：先每次加入一条使信息增加最多的边，选完全部 K 条边后再对已选边作局部替换以不断接近最优解。

只有一条跨组边时，式(32)直接给出

$$\Psi_c(\{(i, j)\}) = w_{ij}^{-1} + (L_A^+)_{ii} + (L_B^+)_{jj}. \quad (33)$$

首场比赛选择使右侧最小的对象对，兼顾比赛本身的信息与两名对象的组内定位精度。

当目前已有 m 条边，下一条候选边为 $f = (i_f, j_f)$ 时，加入它后的矩阵写为

$$Q_{M \cup \{f\}} = \begin{pmatrix} Q_M & \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_f^T & q_{ff} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

其中

$$\mathbf{q}_f = S_A^T L_A^+ \mathbf{e}_{i_f}^A + S_B^T L_B^+ \mathbf{e}_{j_f}^B, \quad (35)$$

$$q_{ff} = w_f^{-1} + (L_A^+)_{i_f i_f} + (L_B^+)_{j_f j_f}. \quad (36)$$

令 $s_f = q_{ff} - \mathbf{q}_f^\top Q_M^{-1} \mathbf{q}_f > 0$, $\mathbf{a}_f = Q_M^{-1} \mathbf{q}_f$, 并定义 $T_M = 1/\Psi_c(M)$ 。则分块矩阵求逆公式给出

$$Q_{M \cup \{f\}}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_M^{-1} + s_f^{-1} \mathbf{a}_f \mathbf{a}_f^\top & -s_f^{-1} \mathbf{a}_f \\ -s_f^{-1} \mathbf{a}_f^\top & s_f^{-1} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

分别在等式两侧的左右两边乘以全 1 向量, 便可得到

$$T_{M \cup \{f\}} = T_M + \Gamma_f, \quad (38)$$

其中

$$\Gamma_f = \frac{(1 - \mathbf{1}_m^\top Q_M^{-1} \mathbf{q}_f)^2}{s_f}. \quad (39)$$

所以, 每一步选择 Γ_f 最大的未选边, 就使当前这一步的 c -信息增加最多。

选满 K 条边后, 依次尝试用一条未选边替换当前边。只接受降低 Ψ_c 的替换, 并重复扫描, 直至一轮中没有改善。但需要注意, 这个方法得到的是不能通过单边替换继续改善的赛程, 无法保证全部 K 条边的组合全局最优。

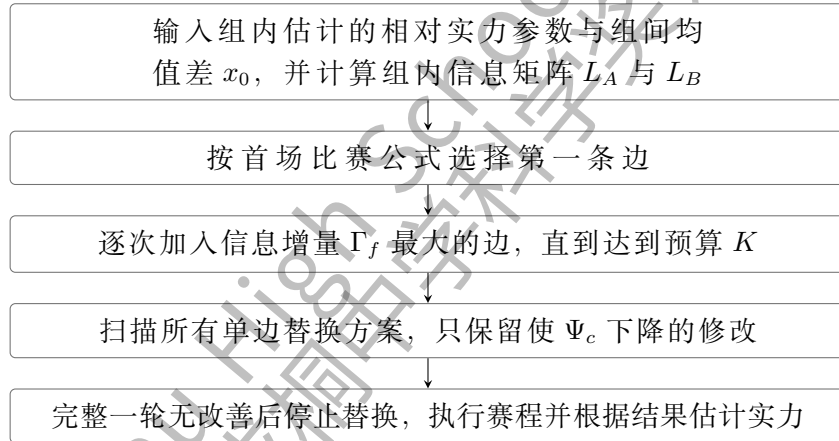


图 4: 固定信息设计的计算与执行流程。

5 结果

固定赛程需要给定预测均值差 x_0 , 以计算跨组边的权重。有时我们可以根据过往经验等得知 δ , 并取 $x_0 = \delta$ 。在这种情况下, 图5比较逐边选择与局部替换方案和分位同位桥接的平均绝对误差 $\bar{E}_\mu$ 。

当 $\delta = 0$ 时, 两条曲线基本重合, 说明两组整体实力接近时, 分位同位桥接已经能够安排较多实力相近的对手。随着中心差增大, 逐边选择与局部替换的误差逐渐降低得更快; 在 $\delta = 1$ 时, 两种方案的差别最为明显。

逐边选择与局部替换能够持续降低 Ψ_c , 但这一过程本身不能保证得到全局最优赛程。为检验算法给出的赛程安排是否接近最优解, 我们在 $(n, K) = (8, 4)$ 和 $(10, 5)$ 下各生成 100 个实例, 并对每个实例穷举全部可行的跨组赛程。图6和

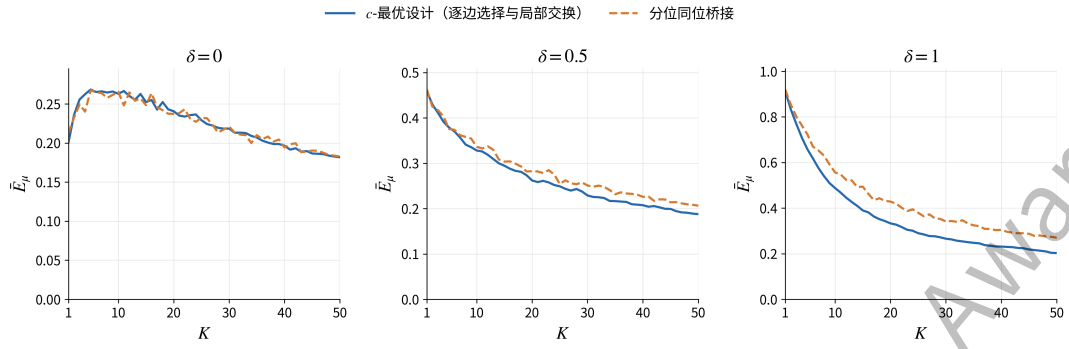


图 5: 两种桥接方案的组间均值差估计误差。

图7以穷举得到的全局最优值 Ψ_c^* 为横轴，以两种方案得到的 Ψ_c 为纵轴。点越接近参考线代表方案越接近全局最优。

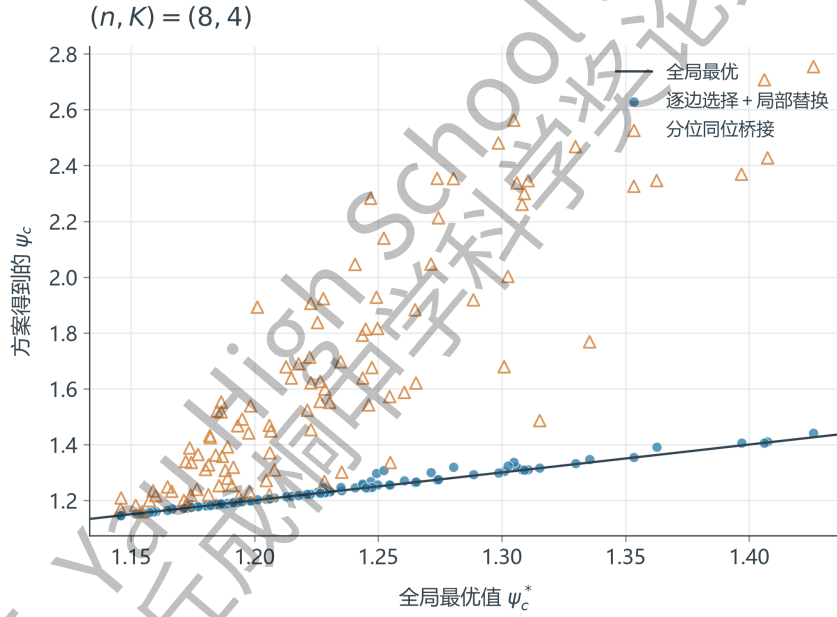


图 6: $(n, K) = (8, 4)$ 时两种方案与全局最优值的比较。

可以看出两张图中的蓝色点几乎贴近 $\Psi_c = \Psi_c^*$ 的参考线。所有模拟结果得出的 c-最优准则值 Ψ_c 与最优解对应的 Ψ_c^* 的相对差距均不超过 5%。而分位同位桥接方案得到的数据点则更分散，并显著偏离最佳方案参考线。由此可见，逐边选择与局部替换算法虽然没有全局最优保证，但通常能找到非常接近全局最优的赛程，显著提高对总体排名的预测精确度。

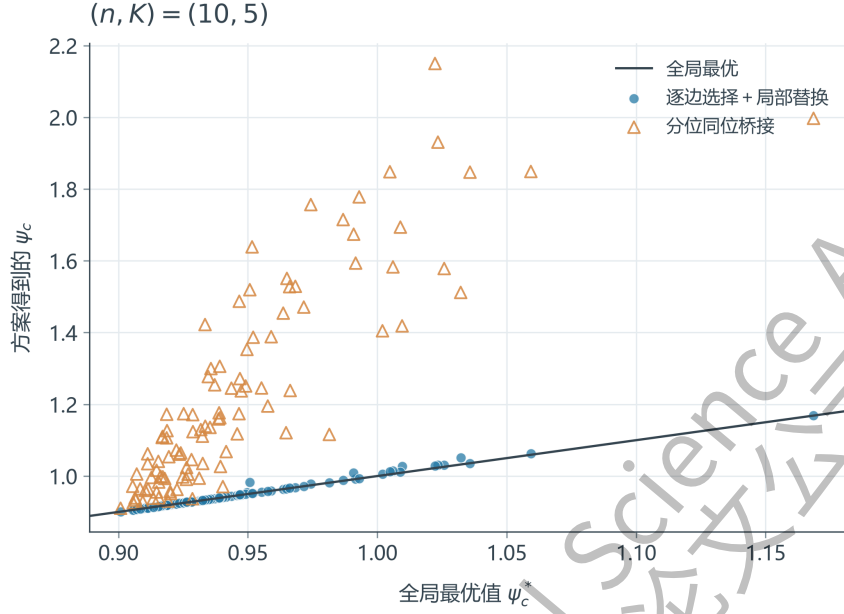


图 7: $(n, K) = (10, 5)$ 时两种方案与全局最优值的比较。

6 结论

本文研究了跨组比赛预算有限时的组间实力校准与赛程设计问题。我们以两组平均对数实力参数之差为主要估计目标，使用带岭惩罚项的最大似然法估计实力参数，并比较了四种简单的跨组赛程。在此基础上，本文引入 c -最优准则，借助 Thomson 最小能量原理将赛程评价转化为只涉及跨组边的低维矩阵计算，进而构造逐边选择与局部替换算法。

模拟结果表明，两组整体实力接近时，分位同位桥接已经能够取得较稳定的估计；随着组间差异增大，根据信息准则调整对阵可以进一步降低组间均值差的估计误差。在能够穷举全部赛程的小规模情形下，逐边选择与局部替换算法所得的信息准则值接近全局最优。跨组比赛的效果由比赛数量、参赛对象和配对方式共同决定。增加跨组比赛数通常能够减小组间均值差误差，但边际改善会逐渐减弱；在本文的模拟设定中，当 $\bar{E}_\mu$ 接近 0.2 后，继续增加比赛带来的下降已不明显。

为了说明这一误差在足球排名中的数值尺度，可以将 Bradley-Terry 模型的对数实力参数换算为 Elo 分值排名。根据 Sziklai 等人在研究排名噪声与种子编排时采用的二元 Elo 胜率公式，我们可以得到组间均值差的平均绝对误差在 Elo 分数的尺度上对应为 $\bar{E}_{\mu, \text{Elo}} \approx 174\bar{E}_\mu$ 。例如， $\bar{E}_\mu = 0.2$ 对应为 $\bar{E}_{\mu, \text{Elo}} \approx 35$ 。表 3 给出目前各个足球国家队的 Elo 分数 [12]。从表中可以看出 35 的 Elo 误差对世界排名产生的误差可以达到 3 位以上。而 1998-2022 年世界杯采取按照世界排名每

8 个队伍分为一档的方式避免高排名队伍过早相遇，2026 年世界杯采用每 12 个队伍分为一档 [13, 14, 15]。由此可见，35 的 Elo 误差足以改变部分队伍的档位，从而影响种子保护机制的效果，进而影响最终比赛结果。我们计划在日后继续研究该误差具体如何影响比赛结果。

表 3: 男足国家队 Elo 世界排名第 10–29 名

排名	国家队	Elo	排名	国家队	Elo
10	比利时	1947	20	土耳其	1852
11	瑞士	1928	21	乌拉圭	1841
12	墨西哥	1913	22	奥地利	1821
13	德国	1907	23	塞内加尔	1816
14	摩洛哥	1901	24	巴拉圭	1814
15	日本	1888	25	澳大利亚	1794
16	克罗地亚	1881	26	乌克兰	1780
17	厄瓜多尔	1871	27	俄罗斯	1772
18	丹麦	1869	28	尼日利亚	1767
18	意大利	1869	29	伊朗	1764

注：数据来源于 World Football Elo Ratings [12]。网站页面标注的评级日期为 2026 年 9 月 11 日。丹麦与意大利分值相同，并列第 18 名，因此没有第 19 名。

此外，本文将各组内部的实力参数简化为正态分布，而真实分布可能具有双峰或偏态等特征。我们也计划在未来继续研究不同的分布模型会对结果有什么影响。

附录 A 单次蒙特卡洛重复的算法

对于固定的 (δ, K) ，一次蒙特卡洛重复按照以下顺序进行：

1. 按照正文的数据生成模型生成两个群体共 100 个对象的真实对数实力，并记录真实组间平均实力差；
2. 为两个群体分别生成完整单循环比赛结果，并根据组内比赛结果拟合组内模型、形成两组预排名；
3. 为全部 n^2 个潜在跨组对象对预先生成比赛结果，使四种策略在同一次重复中共享相同的真实实力、组内比赛和潜在跨组比赛结果；
4. 按照表2为每种策略构造 K 条桥接边，并读取相应的跨组比赛结果；
5. 合并组内比赛和跨组比赛，根据正文的正则化 Bradley-Terry 估计拟合总体排名。
6. 计算组间平均实力差绝对误差和跨组排序准确率。
7. 记录每种策略在同一次重复中的评价指标，完成全部重复后输出各情景的均值。

对每个 δ 独立生成 5000 次模拟样本，同一次样本用于全部 $K = 1, \dots, 50$ 和四种策略。因此，每个 (δ, K) 情景均有 5000 次重复，不同预算共用同一批样本。正文曲线报告蒙特卡洛均值。

附录 B 桥流二次型约束最小化的证明

由于 Q_M 正定，考虑在约束 $\mathbf{1}_K^\top \mathbf{x} = 1$ 下最小化 $\mathbf{x}^\top Q_M \mathbf{x}$ 。取拉格朗日函数

$$G(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^\top Q_M \mathbf{x} - 2\lambda(\mathbf{1}_K^\top \mathbf{x} - 1). \quad (\text{B.1})$$

对 $\mathbf{x}$ 求导并令其为零，得到

$$Q_M \mathbf{x} = \lambda \mathbf{1}_K, \quad \mathbf{x} = \lambda Q_M^{-1} \mathbf{1}_K. \quad (\text{B.2})$$

代入约束 $\mathbf{1}_K^\top \mathbf{x} = 1$ ，再利用 $Q_M \mathbf{x}_M^* = \lambda \mathbf{1}_K$ ，依次得到

$$\lambda = (\mathbf{1}_K^\top Q_M^{-1} \mathbf{1}_K)^{-1}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{x}_M^* = \frac{Q_M^{-1} \mathbf{1}_K}{\mathbf{1}_K^\top Q_M^{-1} \mathbf{1}_K}, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{x}_M^{*\top} Q_M \mathbf{x}_M^* = \lambda \mathbf{x}_M^{*\top} \mathbf{1}_K = (\mathbf{1}_K^\top Q_M^{-1} \mathbf{1}_K)^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

由于目标函数严格凸，上述驻点即为唯一最小点。

参考文献

- [1] O. Engist, E. Merkus, and F. Schafmeister, “The effect of seeding on tournament outcomes: Evidence from a regression-discontinuity design,” *Journal of Sports Economics*, vol. 22, no. 1, pp. 115–136, 2021, doi: 10.1177/1527002520955212.
- [2] B. R. Sziklai, P. Biró, and L. Csató, “The efficacy of tournament designs,” *Computers & Operations Research*, vol. 144, Art. no. 105821, 2022, doi: 10.1016/j.cor.2022.105821.
- [3] R. A. Bradley and M. E. Terry, “Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons,” *Biometrika*, vol. 39, no. 3/4, pp. 324–345, 1952.
- [4] D. R. Hunter, “MM algorithms for generalized Bradley–Terry models,” *The Annals of Statistics*, vol. 32, no. 1, pp. 384–406, 2004.
- [5] N. B. Shah, S. Balakrishnan, J. K. Bradley, A. Parekh, K. Ramchandran, and M. J. Wainwright, “Estimation from pairwise comparisons: Sharp minimax bounds with topology dependence,” *Journal of Machine Learning Research*, vol. 17, no. 58, pp. 1–47, 2016.
- [6] B. Osting, C. Brune, and S. J. Osher, “Optimal data collection for informative rankings expose well-connected graphs,” *Journal of Machine Learning Research*, vol. 15, no. 85, pp. 2981–3012, 2014.
- [7] F. Pukelsheim, *Optimal Design of Experiments*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2006, doi: 10.1137/1.9780898719109.
- [8] U. Graßhoff and R. Schwabe, “Optimal design for the Bradley–Terry paired comparison model,” *Statistical Methods & Applications*, vol. 17, no. 3, pp. 275–289, 2008, doi: 10.1007/s10260-007-0058-4.
- [9] P. G. Doyle and J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, Carus Mathematical Monographs, vol. 22. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America, 1984.
- [10] M. Cattelan, “Models for paired comparison data: A review with emphasis on dependent data,” *Statistical Science*, vol. 27, no. 3, pp. 412–433, 2012.
- [11] M. Jüriso, “international_results,” GitHub. [Online]. Available: https://github.com/martj42/international_results. Accessed: Sep. 10, 2026.
- [12] World Football Elo Ratings, “World football Elo ratings,” [Online]. Available: <https://www.eloratings.net/>. Accessed: Sep. 15, 2026.
- [13] FIFA, “Close-up on Final Draw procedures,” Nov. 27, 2017. [Online]. Available: <https://inside.fifa.com/tournaments/mens/worldcup/2018russia/news/close-up-on-final-draw-procedures-2921440>. Accessed: Sep. 15, 2026.
- [14] FIFA, “Procedures for the Final Draw for the FIFA World Cup Qatar 2022 released,” Mar. 22, 2022. [Online]. Available: <https://inside.fifa.com/tournaments/mens/worldcup/qatar2022/media-releases/procedures-for-the-final-draw-for-the-fifa-world-cup-qatar-2022-tm-released>. Accessed: Sep. 15, 2026.
- [15] FIFA, “Procedures for the FIFA World Cup 2026 Final Draw revealed,” Nov. 25, 2025. [Online]. Available: <https://www.fifa.com/en/tournaments/mens/worldcup/canadamexicousa2026/articles/procedures-pots-final-draw>. Accessed: Sep. 15, 2026.

致谢

本文的研究内容主要源自于我们的兴趣爱好。观看 2026 美加墨世界杯的同时我们也意识到随着参赛队伍由先前的 32 支队伍到现在的 48 支队伍、再到 2030 年世界杯可能扩充至的 64 支队伍，比赛可能会迎来更多“黑马”，提高比赛的不确定性。因此最初我们计划研究新的世界杯赛制相比于过往的赛制会对结果造成什么影响。在阅读相关文献时我们得知世界杯的“种子保护机制”——即根据世界排名来分组从而防止强队过早相遇的机制——的效果对世界排名的噪声非常敏感。我们还注意到，本届世界杯的最大“黑马”佛得角队在 2022-2025 周期内没有与非洲外的国家进行任何一场正式比赛，导致其在世界杯前的世界排名 67 无法准确反映其真实实力。将个例扩展到群体后，我们意识到洲际比赛数量远小于洲内比赛数量很可能会导致总体世界排名有非常大的噪声，并且这样的问题不局限于足球运动，也不局限于国家队的排名，而是一个在各领域都非常普遍的问题，因此解决这一问题至关重要。带着这样的想法，我们改变了原有的选题，希望构建出一套方案，在较少数量的跨组比赛内尽量准确预测出各组内对象的总体排名。在确定选题后几乎每天我们都会在图书馆或者咖啡店一起探讨研究思路并学习需要补充的相关知识。

参赛的吴嘉豪同学有参与数学建模比赛的经历并取得了不错的成绩，在研究初期给出将实际问题转化为数学模型的初步方案，并主要负责了数据获取、数据分析、绘制图片以及撰写论文的第 2-4 节部分。参赛的赵欣来同学则主要负责最优策略的理论推导并撰写了论文的相关部分以及摘要、引言、结果。指导老师陈婷静老师是我们在校内的数学竞赛老师，她对我们学术写作规范与格式等方面给予了专业指导，指导无偿。

起初我们较为顺利地建立了模型并将评价指标转化为 c -最优准则中的准则函数 Ψ_c ，但是很快意识到计算该函数的计算量过大，因此暂时陷入困境。后来在视频<https://www.bilibili.com/video/BV1Yqhwz9E9B/>的启发下，我们意识到对战网络与电路十分相似，可能可以利用电路的物理性质。顺着这一想法，我们查询到关于 Thomson 最小能量原理的矩阵形式的文献，并将其中给出的基本结论应用到我们的模型上，成功降低了每种组合的计算量。而对于组合数过大的问题，我们共同讨论并决定使用先逐边选择再进行局部替换的贪心算法，这样便无需遍历所有可能的跨组比赛组合。

在此，我们由衷感谢陈婷静老师对我们论文写作的指导以及对我们研究的支持。同时，我们也十分感谢我们在校内的统计老师鲁灏老师，为我们打下了坚实的统计基础。

在研究过程中我们使用了 OpenAI 提供的 ChatGPT 5.6 模型作为辅助工具。使用时间主要集中在研究初期的阅读文献阶段以及完成理论推导后的编写蒙特卡洛模拟程序以及绘制图表阶段。在数据处理、程序调试和论文排版阶段使用较

为频繁，通常根据处理结果进行多轮交流；在理论研究和论文写作阶段则根据实际需要使用。具体用途如下：

1. 数据处理与程序编写：我们使用 AI 协助整理研究所需的数据，并将我们确定的实验步骤、计算方法和参数设置编写为 Python 程序。AI 还协助运行模拟、汇总计算结果。研究问题、实验设计、方法选择和参数设定均由我们完成，AI 生成的程序及其输出也经过了我们的检查。
2. 语言润色与论文排版：在论文撰写过程中，我们使用 AI 检查部分段落的语言表达、术语使用和前后衔接，并根据建议自行修改和确定最终表述。AI 还协助我们处理公式编号、符号格式、图表位置、封面信息和其他 Overleaf 排版问题。
3. 文献搜索与阅读：我们使用 AI 辅助查找与研究主题相关的文献和资料，并对部分概念、模型和文献内容进行初步解释。论文中实际使用的文献均由我们自主查阅原文，并核对作者、题目、出处和具体观点后再决定是否引用。研究所使用的数据来源和统计范围同样经过人工确认，不存在虚构文献或数据的情况。
4. 图表制作与结果整理：我们使用 AI 将数据处理和模拟得到的结果绘制成图表，并根据论文排版需要调整坐标轴、图例、颜色、图片尺寸和清晰度。AI 还协助检查图表、正文和公式之间的变量名称及编号是否一致。图表需要展示的内容、采用的形式以及对图表结果的分析和解释均由我们确定。
5. 最终检查：我们还是使用 AI 对我们的最终论文进行详细检查，包括错别字、引用错误、符号定义错误等。我们在得到 AI 给的反馈后逐一自行查看，并结合 AI 给出的建议进行适当修改。

所有由 AI 辅助生成或修改的代码、文字、公式和图表都经过了我们的核对与修改。论文最终内容由我们审核确认，我们对研究的真实性、准确性和学术规范承担全部责任。