

参赛学生姓名： 王馨珩

中学： 青岛市第二中学

省份： 山东省

国家/地区： 中国

指导老师姓名： 张睿

指导老师单位： 青岛市第二中学

论文题目： 传统木构建筑动态响应控制：从
新型准静态时温等效阻尼表征到偏心调制协调
阻尼器设计

传统木构建筑动态响应控制：从新型准静态时温等效阻尼表征到偏心调制协调阻尼器设计

摘要

木结构古建筑凭借其独特的榫卯体系与材料柔性具有较好的抗震性能，但在极端强震下仍面临结构损伤与倒塌风险。为在不破坏原结构整体性的前提下提升其抗震安全性，本文以故宫凝香亭为研究对象，建立了一套涵盖“理论建模—实验测试—减振设计—材料标定”的完整结构动力学与振动控制研究框架。

首先，基于 1:10 缩比物理模型的力锤激振实验 (EMA) 与高保真有限元模型修正 (FEMU)，本文表明了该类木结构在水平荷载下表现出的强烈平动与扭转耦合动力学特征。针对这一特性，本文构建了兼顾计算效率与高保真度的四自由度 (4-DOF) 集中参数降阶模型。在参数反演中，本研究放宽了传统各向同性材料模型的假设，为木质立柱分别赋予了独立的弯曲等效杨氏模量与扭转等效剪切模量，用于表征天然木材的正交各向异性物理本质，提高了模型对复杂平扭耦合运动的预测精度。

其次，为协同控制结构的多维空间振动，本文设计了一种偏心双向调谐质量阻尼器 (TMD)。该方案不同于常规阻尼器对中布置与单一自由度控制的定式，策略性地将其布置于刚性屋盖平面的极值偏心节点。通过利用几何杠杆效应，该装置将正交方向上的平动弹性恢复力高效转化为抑制主结构全局扭转的抵抗力矩。基于 Den Hartog 最优调谐理论的数值仿真表明，该偏心双向 TMD 能使主结构的弯曲共振响应峰值削减达 80%，扭转响应峰值削减达 70%，实现了对双重模态的高效协同抑制。

最后，为解决传统动态热机械分析 (DMA) 设备造价高昂、难以获取的痛点，本文提出了一种基于低成本准静态加卸载试验的黏弹性阻尼参数标定新路径。该方法将恒定速率的力-位移迟滞回线在动力学上等效为三角波动态激振，并借助傅里叶级数分解，分析了基频正弦分量对总耗散能的主要贡献，从而提出了利用 0.8 修正系数提取基频损耗因子的理论映射关系。通过施加多梯度的准静态压缩速率模拟不同等效激振频率，该方法实现了对橡胶材料储能模量与损耗因子的宽频段外推评估。

综合而言，本文不仅丰富了复杂木结构古建的降阶建模与多维减振理论，更为现代阻尼技术在工程实践中的低成本参数标定与高保真物理落地提供了科学依据与创新路径。

Keywords: 古建筑，抗震，偏心调制协调阻尼器，准静态实验，损耗因子

目录

1 引言	4
2 常见建筑的理论建模与动力学基础	5
2.1 修正的四自由度剪切形建筑模型	5
3 中国古典建筑的实验模态分析 - 以凝香亭为例	9
3.1 凝香亭的实物的搭建	9
3.2 模态实验的实验设置	10
3.3 实验的结果与分析	13
4 基于实验数据的有限元建模与参数反演	18
4.1 三维模型的建立	18
4.2 有限元模型的简化	21
4.3 有限元模型的建立	23
4.4 实验结果与分析	24
4.5 木材杨氏模量的有限元逆向提取	25
5 凝香亭动力学模型的降阶	29
5.1 简化的动力学模型	29
5.2 基于简化四自由度模型的凝香亭动力学响应分析	32
6 凝香亭减震阻尼器的参数优化与效果分析	35
6.1 系统动力学方程建模	36
6.2 调制协调阻尼器的参数设计	38
6.3 设计结果	41
7 阻尼材料的频变特性标定：基于准静态试验的方法	42
7.1 理论背景	42
7.2 实验设备	47
7.3 实验结果与分析	49
7.4 本章小结	53
8 结论和展望	54
8.1 主要工作	54

目录	3
8.2 结论	55
8.3 展望	55
9. 参考文献	57
10 致谢	59
11 人工智能工具使用说明	60

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

1 引言

在贵州进行田野调查期间，当我踩在当地独特的侗族传统木结构民居（图 1）时，让我产生了很多思索。这些建筑完全采用杉木建造，当我行走在木质楼板上时，明显的地板晃动常使人对整体的结构强度产生顾虑。然而调查表明，这些建筑不仅耐久性优异，且在历次地震中展现出了出色的抗震性能与整体稳定性。这种鲜明的反差，使得我对于类似结构的抗震机理展开了深入研究。



图 1: 典型侗族木构建筑：(a) 建筑外观；(b) 内部结构

结合相关文献 [1, 2]，传统木结构之所以能够“以柔克刚”，核心在于其榫卯节点、斗拱及浮筑柱脚构成的柔性连接系统。该系统允许结构产生适度的转动、滑移与变形，进而通过构件间的摩擦大量耗散地震能量。为了解构这种复杂的动力学行为，现阶段研究主要依赖“缩放台试验 [3]、拟静力试验 [4] 与有限元 (FEM) 建模 [5]”这三种互补的研究方法。其中，物理试验能真实还原节点局部变形与耗能机制 [6]，但受限于缩尺效应及拟静力试验无法捕捉实时加速度的局限；Fang 等采用半刚性有限元模型研究了斗拱与榫卯节点对古代木结构动力特性的影响 [7]；但木材非线性摩擦的准确模拟仍具有挑战。

然而，已有研究同时指出 [1, 2]，随着结构老化、节点松动及构件损伤，仅依靠木结构自身的榫卯与斗拱变形已难以满足现代高标准抗震要求。在寻求提升其抗震性能的方法时，传统抗震工程中常用的刚性加固或开缝隔离手段并不适用——木材本身具有良好的弹性与韧性，强行切割或刚性性拆改会破坏其已形成的牢固整体性。已有研究表明，附加摩擦阻尼器可提高木—钢混合结构的耗能能力并减轻主体构件损伤 [8]；但将该方案直接用于历史木建筑仍需考虑可逆性、构造干预和真实性保护要求。

基于对传统木结构动力特性与现有加固手段局限性的认识，本文汲取了超高层建筑中调谐质量阻尼器 (TMD，如上海中心大厦 TMD) 的减震思想，提出设计一种适用于传统木结构的新型 TMD 阻尼系统。该方案旨在不破坏原建筑结构真实性与柔性耗能特征的前提下，实现低成本、高安全性的精确减震。

2 常见建筑的理论建模与动力学基础

在实际建筑的结构动力学建模中，简化的剪切型建筑模型（Shear Building Model）被广泛应用 [9]。该模型通常假设楼板具有无限大的刚度，因为与细长的竖向承重柱相比，典型的混凝土楼板厚度大、配筋密，且在水平方向上连续跨越较大空间。基于这一假设，结构的自重可集中于各楼层标高处，将每层简化为一个集中质量。同时，由于楼层节点的水平状态有效限制了楼板的转动，结构的水平侧向刚度主要由竖向柱的剪切刚度决定。

尽管一栋真实木结构建筑在宏观形态与空间布局上与上述建筑非常类似，但其抗侧力机制却有本质的区别。该木结构建筑的侧向变形主要由竖向柱控制。在水平力的作用下，建筑表现出底部固定、上部自由摆动的特征，其整体表现为弯曲变形，而非层间的剪切变形。这种受力形态与经典结构动力学中的悬臂梁高度一致。因此，可以将这栋真实的木结构建筑的竖向柱合理地等效为悬臂梁进行动力学分析。

对于一根连续的悬臂梁而言，理论上存在无限多阶的振动模态（振型）。然而，在实际的动力响应中，前四阶模态通常贡献了结构总振动能量（或总有效模态质量）的 90% 以上，而更高阶模态的贡献微乎其微，在工程分析中可以合理忽略 [10]。此外，木材作为一种弹塑性材料，具有较低的弹性模量，使得建筑的前四阶固有频率相对较低。在相同的外部动力能量输入下，系统频率越低，其激发的振动位移幅值往往越大，进而导致结构构件产生更为显著的拉压应变与应力。因此，要掌握整栋建筑的主要振动特性和关键受力状态，我们仅需重点研究其前四阶振型即可。这一动力学特征为我们的理论建模提供了一个清晰的简化思路：即可以建立一个四自由度（4-DOF）的理想动力学模型，来等效且高效地表征该木结构建筑的整体动力学行为。

2.1 修正的四自由度剪切形建筑模型

图 2 展示了一个典型的四自由度（4-DOF）剪切型建筑模型。在该模型中，各层楼板被简化为集中的质量块（Lumped masses）。结构各层的侧向刚度由竖向承重柱的抗弯刚度提供。此外，在求解结构的固有模态参数时，通常忽略阻尼的影响，即进行无阻尼模态分析。为了研究该 4-DOF 模型在不同外部动力激励下的振动响应特性，我们首先需要明确该模型的固有动力学属性，即固有频率（Natural frequencies）及其对应的振型（Mode shapes）。首先，我们对整个模型进行受力分析（见图 3）：以每个集中质量块为隔离体，基于牛顿第二定律，可建立多自由度系统的运动微分方程。需要强调的是，我们当前的目标是求解固有频率与模态振型，这些参数是结构在自由振动状态下的固有动力学属性，完全独立于外部激励。因此，在模态分析中必须令外部荷载项 $u_g(t) = 0$ 。

其次，阻尼项矩阵 $\mathbf{C}$ 反映了振动过程中的能量耗散机制。本研究的重点并非高阻尼结构——因为若结构自身阻尼足够大，其动力响应会被自然抑制，进而削弱了其研发减振/隔震措施的工程必要性。基于此，我们假定原结构的固有阻尼较小。对于小阻尼系

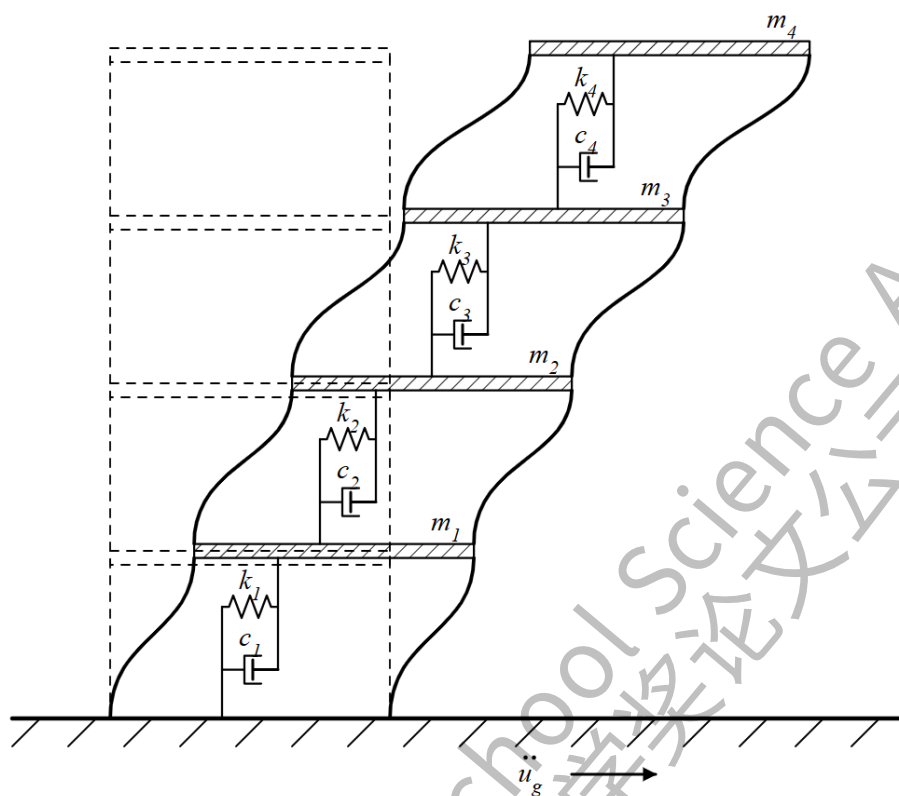
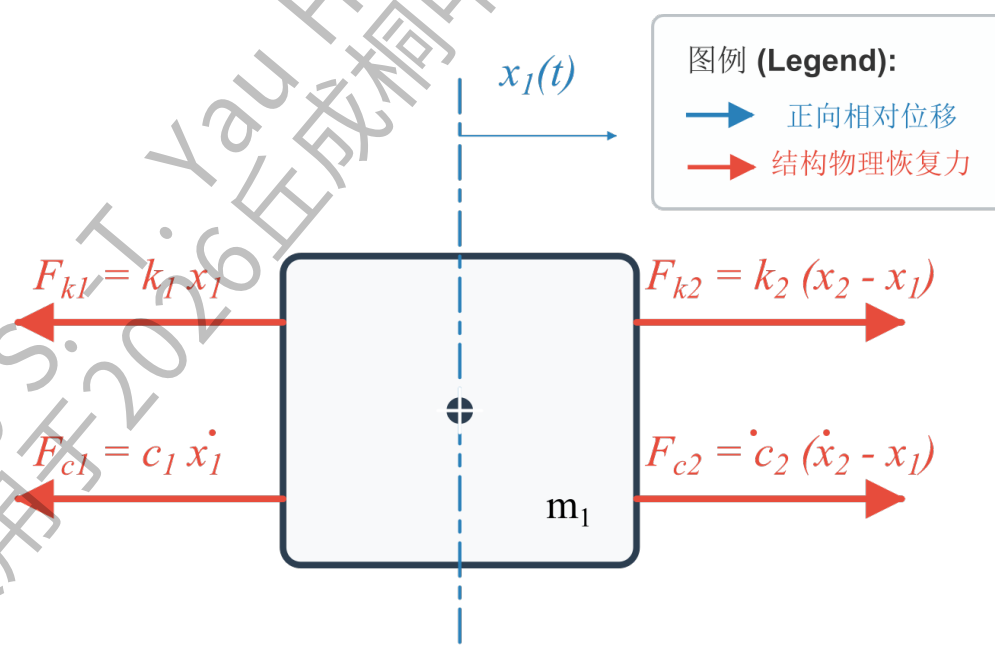


图 2: 四自由度系统简化动力学模型

图 3: 质量块 m_1 的典型受力图

统，阻尼对结构固有频率的折减效应微乎其微（即阻尼固有频率近似等于无阻尼固有频率）。与此同时，虽然阻尼的存在会使各自由度之间产生一定的相位延迟（Phase delay，即表现为复模态特征），但对于小阻尼木结构而言，这种微小的相位偏离并不会从根本上改变结构的宏观模态振型。因此，在提取结构固有模态属性时，假设系统阻尼为零。

根据我们的牛顿第二定律对于我们 4 个质量进行分别分析，此，我们可以得到以下 4 个运动方程：

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1(x_1 - x_2), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_2 - x_3), \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -k_2(x_3 - x_2) - k_3(x_3 - x_4), \\ m_4 \ddot{x}_4 &= -k_3(x_4 - x_3) - k_4 x_4 \end{aligned} \quad (1)$$

将这四个方程进行重新整理，我们可以得到运动方程的矩阵形式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{M}$ 为质量矩阵，可以表达为：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\mathbf{K}$ 为刚度矩阵，可以表达为：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

为了求这个系统的自然频率和他的模态，这个微分方程的通解可以假设为：

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}, \quad \boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]^T \quad (5)$$

其中， $\boldsymbol{\phi}$ 为该阶模态的模态振型向量，表示四个集中质量在固有圆频率 ω 下的相对位移比。

将式 (5) 代入式 (2) 并进行简化，我们可以得到：

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (6)$$

由于模态振型向量不能为零向量（零向量在物理上意味着各集中质量块处于绝对静止状态，无任何振动，即数学上的“平凡解”），因此系统必须存在非零解。根据线性代数理论，齐次线性方程组存在非平凡解的充要条件是其系数矩阵（即特征矩阵）的行列式必须等于零（详见式 (7)）。

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (7)$$

由此，令特征矩阵的行列式为零，即可求解出该系统的四个固有频率。将求得各阶固有频率分别代回式 (6) 中，便可解得各个集中质量点在对应频率下的相对振幅比。这组相对位移比构成的列向量，即为该系统对应的模态振型向量 ϕ 。

根据上文所述，我们已经建立了 4 自由度建筑的理论剪切模型。对于这个项目的最终目的而言，我们时为了探究传统建筑在实验中的真实振动特性。为了直观地理解建筑的振型，并为下一节中加速度传感器（Accelerometer）的布置位置提供理论依据，我们先进行了一个简单的数值仿真。假设我们有一个古建筑，它由四层组成，每一层的集中质量均为 1 kg，每一层立柱的等效刚度均为 1 N/m，基于前文的理想 4-DOF 模型进行模态分析，前四阶模态如图 4 所示。

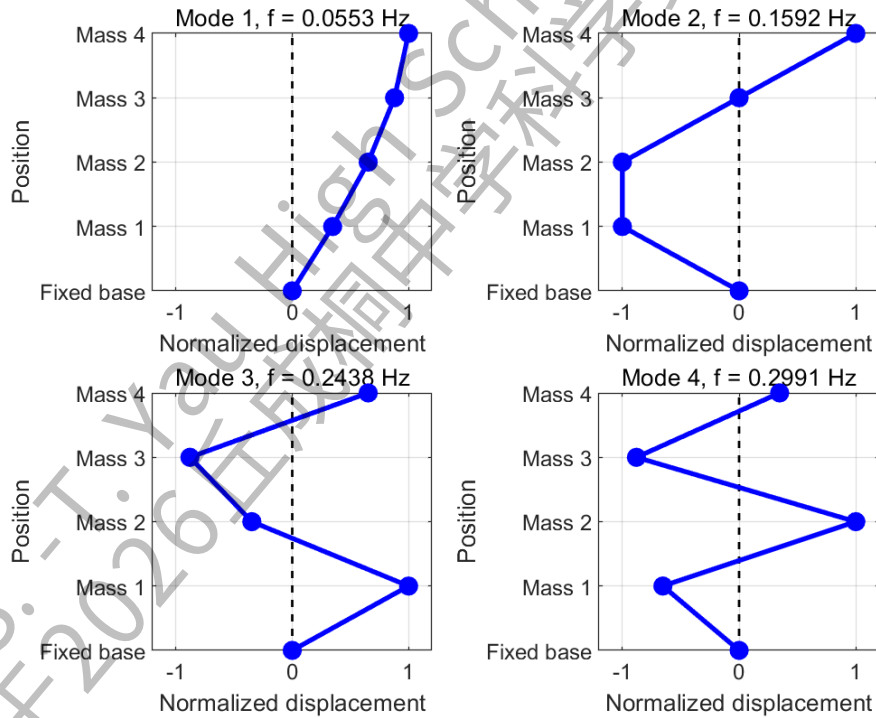


图 4: 4 自由度剪切楼层结构的前四阶模态频率与模态振型

图 4 表明，对于建筑的前四阶模态，至多存在 4 个波腹（Anti-nodes）与 4 个波节（Nodes）。为了完整地重构和表征这些空间模态振型，必须确保在每个波腹处至少布置一个测量点。此外，还需要在底部的波节位置（基座）固定一个参考测点，以提供相位基准。基于上述仿真结果，我们将该建筑模型在高度方向上等分为 4 个区段，并在每一

个区段的端点上布置一个敲击点，最终，我们一共使用 5 个力锤敲击点。

3 中国古典建筑的实验模态分析 - 以凝香亭为例



图 5: 凝香亭 1:10 缩比物理模型

3.1 凝香亭的实物的搭建

我们网购了一个 1:10 的凝香亭的模型，对于这个模型，他一共由近 400 个离散的小型构件组成。在此，我们仅简要的叙述了主承重结构框架的组装过程。我们使用从下到上的装配顺序。首先，我们将 4 根主檐柱安置于刚性基座上，在这 4 根立柱的顶端都设有 4 个卯口，用于嵌合作为主要水平承重构件的箍头枋。在箍头枋之上叠加安装了一层厚度较薄的水平梁，即平板枋。随后，安装作为关键传力枢纽的斗拱，并利用传统木销将其固定于箍头枋上。在斗拱层之上，继续交替向上组装三层箍头枋与平板枋，这些梁件的几何尺寸随标高的增加而逐层递减。最后，搭建由 4 根弧形梁构成的曲面骨架，并最终完成顶层瓦面的铺设。

在原始的模型之中，结构构件之间的连接应完全依赖于传统的销钉或榫卯节点。然而，本研究的下一阶段需要在“自由-自由 (Free-Free)”边界条件下进行力锤敲击实验 (Experimental Modal Analysis)。由于商业缩比模型不可避免地存在制造公差，部分节点的配合间隙较大。在使用力锤敲击时，这些松动的间隙极易引发局部塌陷和和散架。为了实验的可靠性与可重复性，本实验采用高强度快干胶 (super glue) 对大部分节点进行了局部粘接固化。尽管这种刚性化处理会不可避免地改变原结构的全局阻尼耗散机制，但阻尼参数识别并非本研究的重点。因此，为确保能准确提取建筑的固有频率与模态振型，采取这样的妥协方案在力学研究上是合理且可接受的。

3.2 模态实验的实验设置

在进行实验模态分析 (Experimental Modal Analysis, EMA) 时，通常可采用两种实际的测试方案：移动力锤法 (Roving Hammer) 或移动加速度计法 (Roving Accelerometer)。对于连续结构，在 i 点进行激振、在 o 点提取响应的频响函数可表达为：

$$H(\omega) = \frac{\phi_i \phi_o}{(k - m\omega^2) + jc\omega} \quad (8)$$

式中， ϕ_i 与 ϕ_o 分别代表激振点与响应点处的模态振型分量； m 、 k 、 c 与 ω 分别表示质量、刚度、阻尼系数和圆频率。根据式 (8) 可知，频响函数具有互易性，因此采用移动力锤法还是移动加速度计法在理论上是完全等效的。鉴于本项目仅配备了一只加速度传感器，采用移动力锤法在实验操作上将更加便捷高效。因此，本研究将固定该加速度计的位置，并在结构上选取多个不同的位置进行力锤激振测试。

对于此实验，其具体的实验设备与数据采集 (DAQ) 系统链路如图 6 所示。

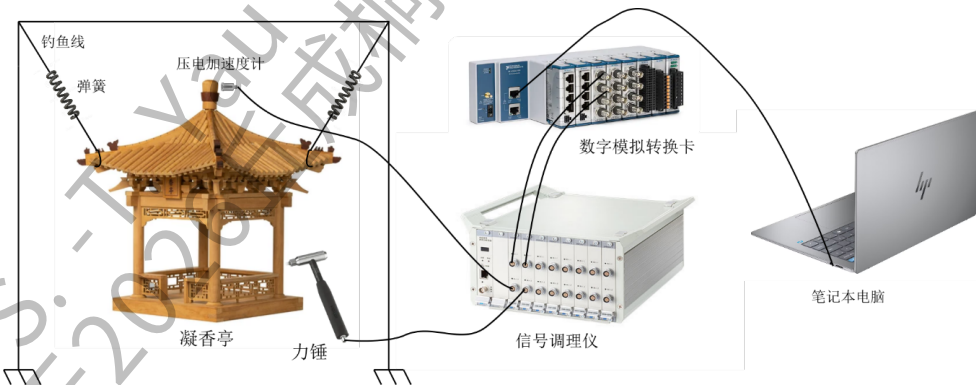


图 6: 实验设备与数据采集系统

本实验采用一把内置压电式力传感器的力锤对凝香亭施加脉冲激振，以精确获取瞬态的输入激振力信号。在凝香亭顶部的圆球状构件（即“宝珠”）处，我们固定安装了一只加速度传感器。选择该位置不仅因为其易于稳固安装，更重要的是，如前文理论计算所示，顶层在各阶模态中均具有显著的振幅响应（始终处于波腹位置），非常适合作为全局响应的参考测点。



图 7: 加速度传感器的连接

在加速度计的固定过程中,起初,我们曾尝试采用常规透明胶带进行固定(见图 7 左),但实际测试表明该方案并不可行——在大幅度动态摆动历程中,传感器极易发生滑移甚至脱落。随后,我们尝试改用双面胶带进行贴附(见图 7 中);然而,在承受瞬态冲击激励时,传感器基底与接触面之间仍能观察到微小的松动与倾斜。此外,通过第二轮测试的振动数据反演,明确了系统的主振动响应主要集中在水平方向。在我们最初的两种加速度计的安装方法中,加速度计都是测量竖直方向的振动。据此,在第三轮测试中确定了最终安装策略(见图 7 右):采用高强度瞬干胶(Superglue)将加速度计刚性粘接于结构立柱(构件)的末端。该工艺为传感器提供了极高刚度且极为稳定的机械耦合界面,减少了界面松动,从而确保了数据采集的可靠性与可重复性。

力锤与加速度传感器的输出信号均接入信号调理仪,由其为传感器提供恒流源激励,并对微弱的原始模拟信号进行放大与低通滤波处理。随后,经过调理的信号输入至数据采集卡(DAQ 卡)完成模数转换(A/D 转换),最终通过数据线传输至笔记本电脑,实现力与加速度时域信号的同步采集与存储。考虑到凝香亭在几何结构和质量分布上具有高度的轴对称性,其正交方向上的固有频率与振型具有高度的相似性。因此,为提高实验效率,本次测试仅需选取结构的四分之一对称立面进行敲击激振,即可全面推演其空间振型特征。我们在该区域内精心布设了 9 个均匀分布的激振点,此布局的核心依据在于:前文分析表明,系统第四阶模态共存在 4 个波腹(Anti-nodes)与 4 个波节(Nodes)。为了能高保真地重构包括第四阶在内的高阶振型,在预测的波腹位置及其两侧均布设激振点,能够有效避免空间混叠,更精确地描绘出结构变形的空间几何形态。

具体而言,这 9 个敲击测点分别位于:屋角檐端、檐口中点、柱间横枋中点、柱头上部承托节点处、檐柱柱身、檐柱柱脚、台基上表面、台基前侧中点以及台基角。图 8 详细标定了每个测点的空间位置。实验建立了一个统一的全局笛卡尔坐标系,其坐标系原点(Origin)定义于凝香亭台基底面的左下角。我们为每个敲击点依次分配了从 1 到 9 的独立编号,以确保在后续的模式识别与数据分析阶段,各节点的传递函数能够被准确匹配与映射。

为了在实验中模拟“自由-自由(Free-Free)”边界条件,整个凝香亭物理模型通过

两根低刚度螺旋弹簧自由悬吊于刚性支撑框架上。尽管这种物理悬吊配置不可避免地系统引入了微弱的附加刚度，导致结构的前 6 阶刚体模态频率从理论上的 0 Hz 发生了轻微上移，但由于所选弹簧的刚度极低，这些刚体模态的频率依然远低于凝香亭目标柔性模态（即弯曲与剪切模态）的固有频率。因此，该悬吊系统有效避免了刚体运动与弹性振动的动态耦合，确保了实验边界条件不会对本研究所关注的目标模态参数识别产生显著干扰。

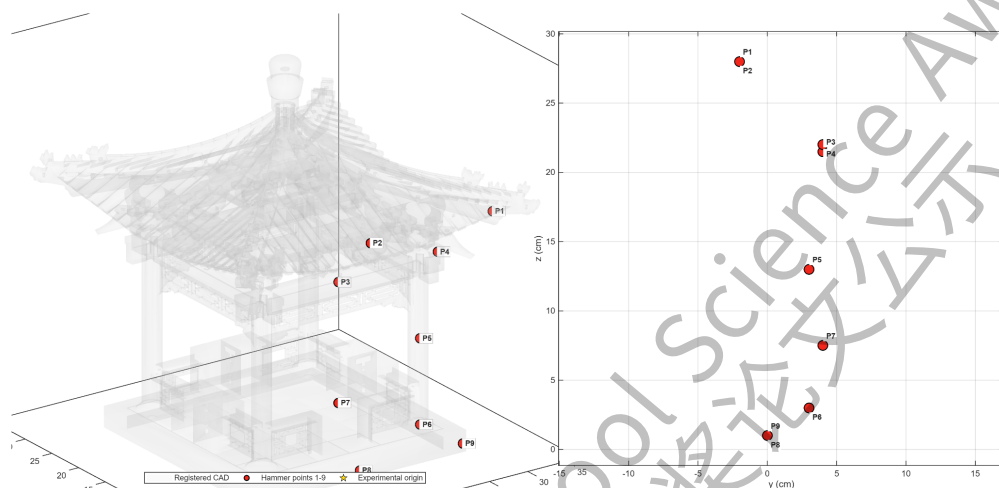


图 8: 凝香亭缩比模型的激振点布设与坐标系示意图。

在力锤的配置上，本次实验特意选用了硬质塑料锤头（Hard Plastic Tip）作为激振工具。其主要选型依据在于：凝香亭模型的前四阶目标固有频率均分布在低频段，远低于 1000 Hz。根据相关实验模态分析文献及测试规范，硬质塑料锤头所能激发的有效能量频带上限可达 1500 Hz 左右。这一激振频宽能够完全覆盖并充分激发本研究中所关注的全部目标模态，从而保证了系统在低频段响应的高相干性与测试数据的可靠性。

在数据采集过程中，为有效抑制随机噪声的干扰、提高频响函数（FRF）测量的信噪比，我们对每个测点均进行了 4 次有效的重复敲击，并对采集到的频响数据进行了集合平均（Ensemble Averaging）处理。

为了进一步提升频域数据的质量、抑制信号泄漏并提高信噪比，本研究在信号预处理阶段应用了两种特定的时域窗函数。首先，理论上力锤产生的脉冲激振信号应呈现理想的半正弦波形，但在实际测试中，传感器在无真实物理接触的时段内往往会输出一定的微弱电气噪声。若直接进行傅里叶变换，这些噪声会污染激振力频谱。为此，我们对力信号施加了力窗（本质为特定宽度的矩形窗/Boxcar Window），该窗函数仅在力脉冲发生的有效时间段内保持信号增益为 1，而将该时段之外的背景噪声强制置零。其次，受限于有限的采样长度，结构受激后的加速度响应信号在采样结束时刻往往尚未完全衰减至零，直接截断会导致严重的频域信号泄漏现象。鉴于典型的欠阻尼系统其自由振动响应具有指数衰减的包络特性，我们对加速度响应信号应用了指数窗。通过引入这一人工指数衰减因子，能够加速信号的衰减过程，强制其在采样周期结束前完全收敛至零，从而在数学上严格满足快速傅里叶变换（FFT）的周期性假设，显著提高了最终频响函

数 (FRF) 的计算精度。

在获取时域数据后, 通过快速傅里叶变换 (FFT) 将激振力与加速度信号由时域转换至频域, 得到各自的频谱数据。随后, 利用加速度的频谱 (系统响应) 除以力的频谱 (系统输入), 即可计算出特定点位间的频率响应函数 (FRF)。这一核心步骤使我们能够直观地提取并分析凝香亭结构在不同频率下的振动共振峰及其动力学响应特性。

3.3 实验的结果与分析

由于所使用的力锤和加速度计精度相对有限, 数据处理的首要步骤是评估测量质量。为此, 我们采用了两种不同的手段: 检查力时间历程 (力信号时域图) 和进行相干性检验。

鉴于该木结构非常轻且处于自由悬挂状态, 力锤敲击时结构会迅速回弹。因此, 结构会在极短的时间内再次撞击力锤。这种二次能量输入会导致两个自由振动响应发生重叠, 从而增加了模态特性识别的难度。这种现象被称为“连击” (Double hit)。

在测量过程中, 每个测点都进行了多次敲击。在后处理阶段, 第一步就是剔除所有存在连击的数据组。图 9 展示了某个测点典型的连击数据剔除示意图。

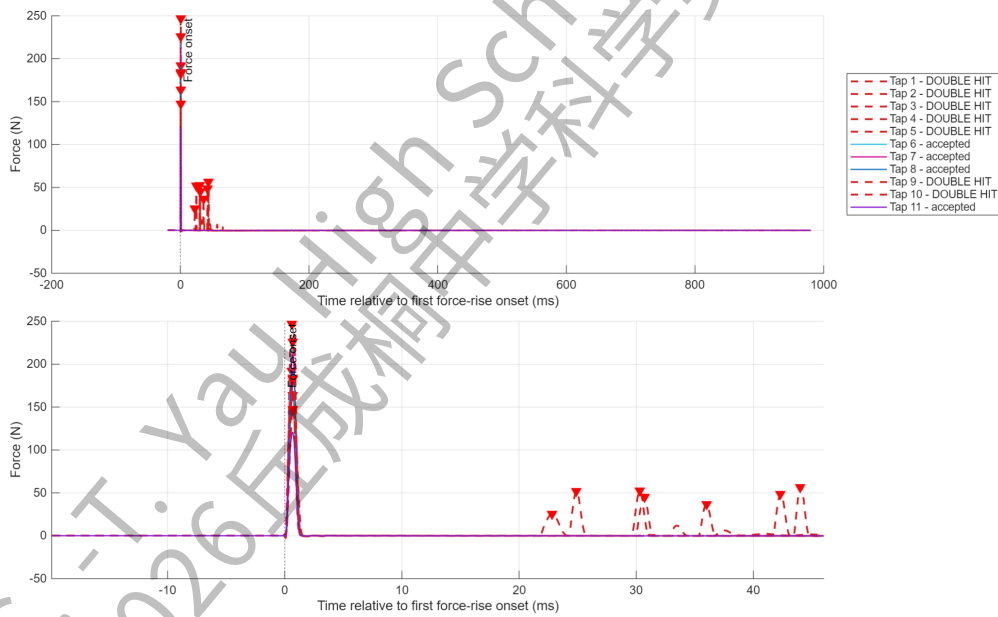


图 9: 基于某测点力时间历程 (时域力信号) 的典型数据剔除示例

第二个质量指标是相干性。相干性定义为两个波形的相似程度。其数学表达式为:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \quad (9)$$

其中, G_{xx} 和 G_{yy} 是在同一个测试条件下 (相同的敲击位置和加速度计位置) 进行两次不同测试得到的频率响应函数的自谱密度函数, 而 G_{xy} 则是这两个估计值之间的互谱密度函数。相干性为 1 意味着这两个频响函数是完全相等的。在本次测量中, 使用相

邻两次实验所得的频响函数来计算相干性。如果在 0 到 400 Hz 的频带内，平均相干性大于 0.75，这表明测量的结果是可以接受的。图 10 显示了一些典型的良好相干性示例：

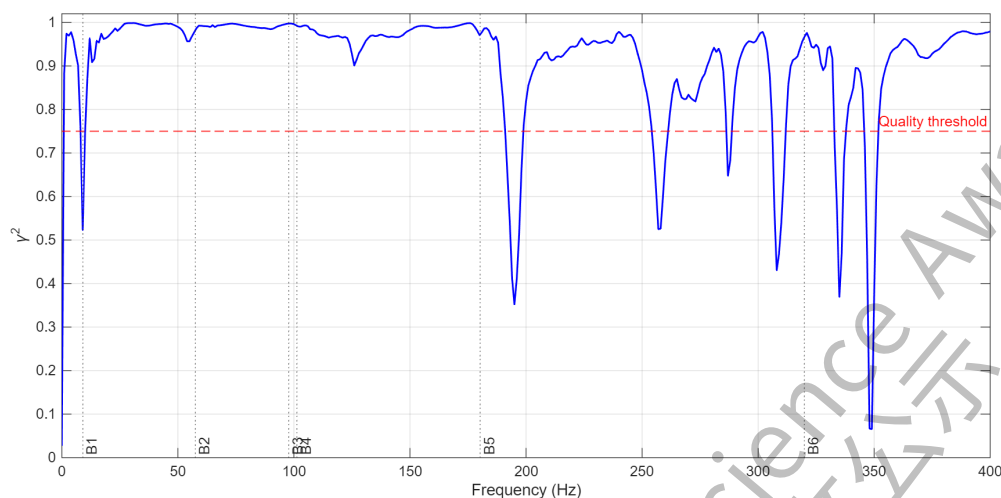


图 10: 典型的良好频响函数的相关性曲线

图 11 显示了一个典型的频率响应函数 (FRF)。事实上，在这个频响函数是通过平均所有测点的数据来获取的。在图中，红点表示已识别的共振峰。事实上，我们可以辨别出更多的峰值。但是，并不是所有的峰值都是代表共振峰，其中有些峰是由平均处理产生的人工产物 (Artifacts)，而另一些可能源于非线性。当撞击力过大时，榫卯接头之间的摩擦可能会发生变化，从而导致频率轻微偏移。在识别过程中，有时可以观察到由于频率偏移而导致的带有多个微小次峰的较平坦区域。为了识别真正的线性峰并确保模态识别的可靠性，采用了两种质量指标：相位检查和奈奎斯特图 (Nyquist plot) 中圆拟合度。

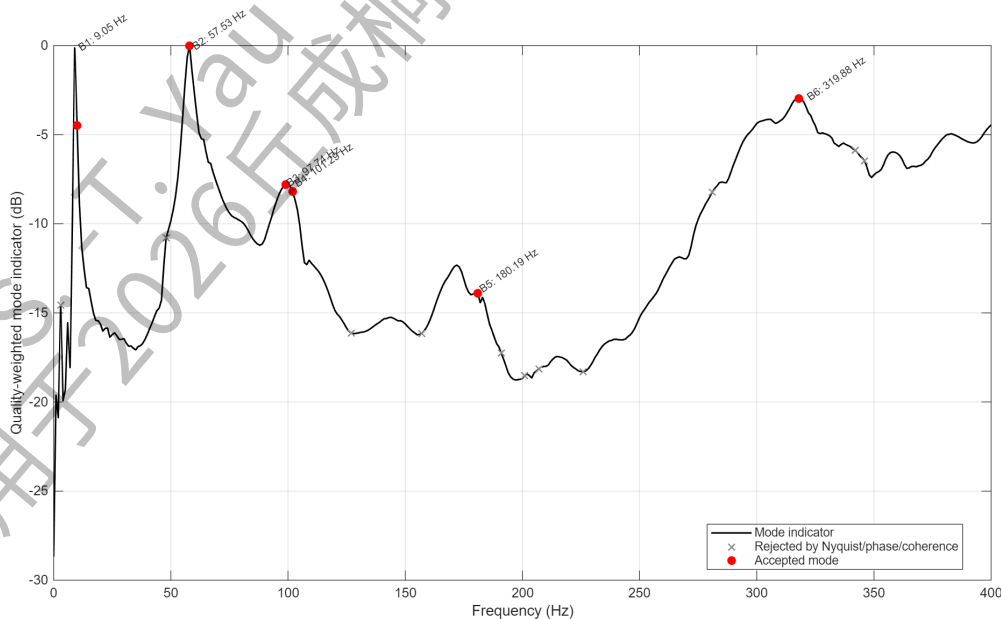


图 11: 典型的平均频响函数

对于典型的连续体系统，利用模态振型的正交性，其动力学响应可以被解耦为多个独立的单自由度（SDOF）系统。在单自由度系统中，一个显著的动力学特征是：当结构发生共振时，位移频响函数（FRF）的相位角通常会精确地跨越至 -90° 。此外，若将频响函数的实部与虚部绘制在复平面上（Nyquist Plot），系统在任意给定共振频率附近的响应轨迹总是呈现为一个闭合的圆。

为了从频谱中准确筛选出可靠的线性模态，本研究为上述两个指标设定了严格的阈值。在相位评估方面，考虑到实验测量的不确定性，其可接受的相位区间被设定为目标相位 -90° 的 $\pm 10^\circ$ 偏差以内。在拟合质量评估方面，奈奎斯特圆拟合的相对误差上限被设定为 20%。图 12 直观地展示了典型的奈奎斯特圆拟合结果以及其相应的误差。

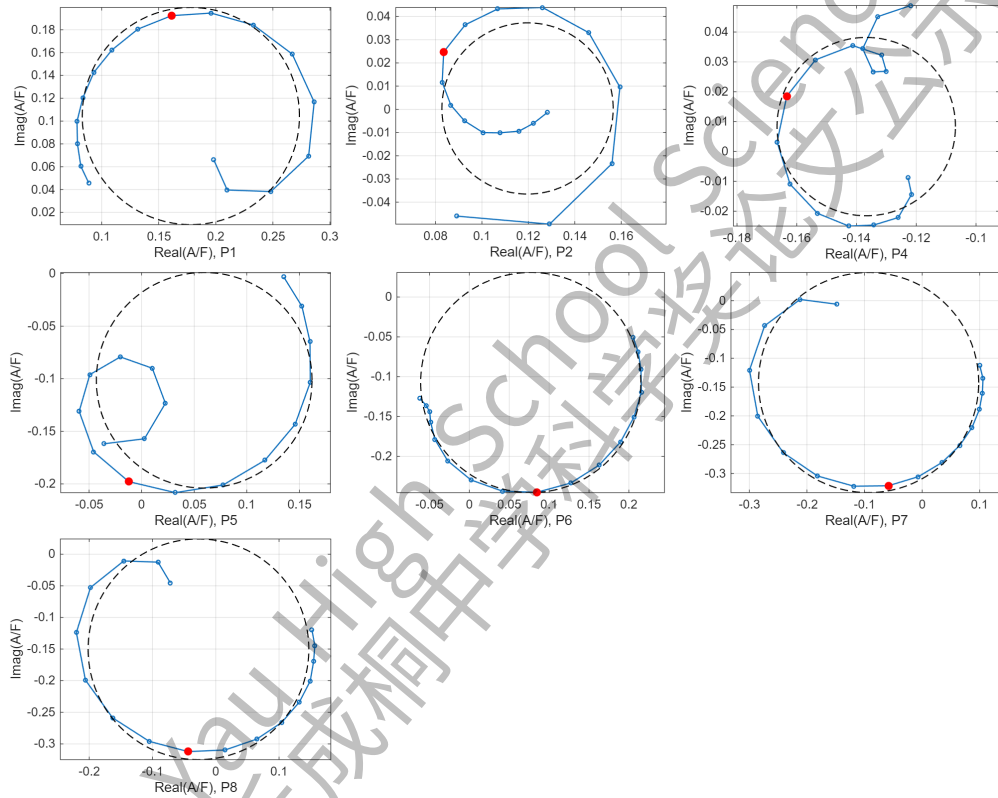


图 12: 用于模态参数识别的典型奈奎斯特圆拟合

基于图 11 的频响函数数据，我们成功识别出前 6 阶固有频率。在直观展示模态振型之前，为了检验数据的可靠性，我们再一次引入了模态置信度（Modal Assurance Criterion, MAC）进行质量评估。MAC 的核心原理是量化评估不同识别模态之间振型向量的相似度。其数学定义如下：

$$\text{MAC}(\phi_A, \phi_B) = \frac{|\phi_A^H \phi_B|^2}{(\phi_A^H \phi_A)(\phi_B^H \phi_B)} \quad (10)$$

其中 ϕ_A 与 ϕ_B 代表待比较的两个模态振型列向量，上标 H 表示厄米特转置（Hermitian transpose，即复共轭转置）。当模态振型为纯实数（即实模态）时，该项可直接退化为标准向量转置；

当 MAC 值趋近于 1 时,表明两个模态振型向量高度一致;反之,基于模态的正交性原理,任意两个不同物理模态之间的 MAC 值应理想地趋近于 0。如果在识别结果中,两个模态的 MAC 值接近 1,且它们的固有频率也十分相近,这通常意味着它们实际上提取的是同一阶物理模态。在此情况下,频率上的微小差异可能是由测量过程中的不确定性或结构的局部非线性引起的。

此外,需要指出的是,如果测点布设数量不足,不同阶模态在这些有限测点上的局部空间向量可能会表现出较高的人为相似度。这种现象在动力学测试中被称为空间混叠(Spatial aliasing)。当增加测点密度(即提高空间分辨率)后,这种虚假的相似性通常会被有效消除。基于本次实验测量数据计算得出的自相干模态置信度(Auto-MAC)矩阵如图 13 所示。

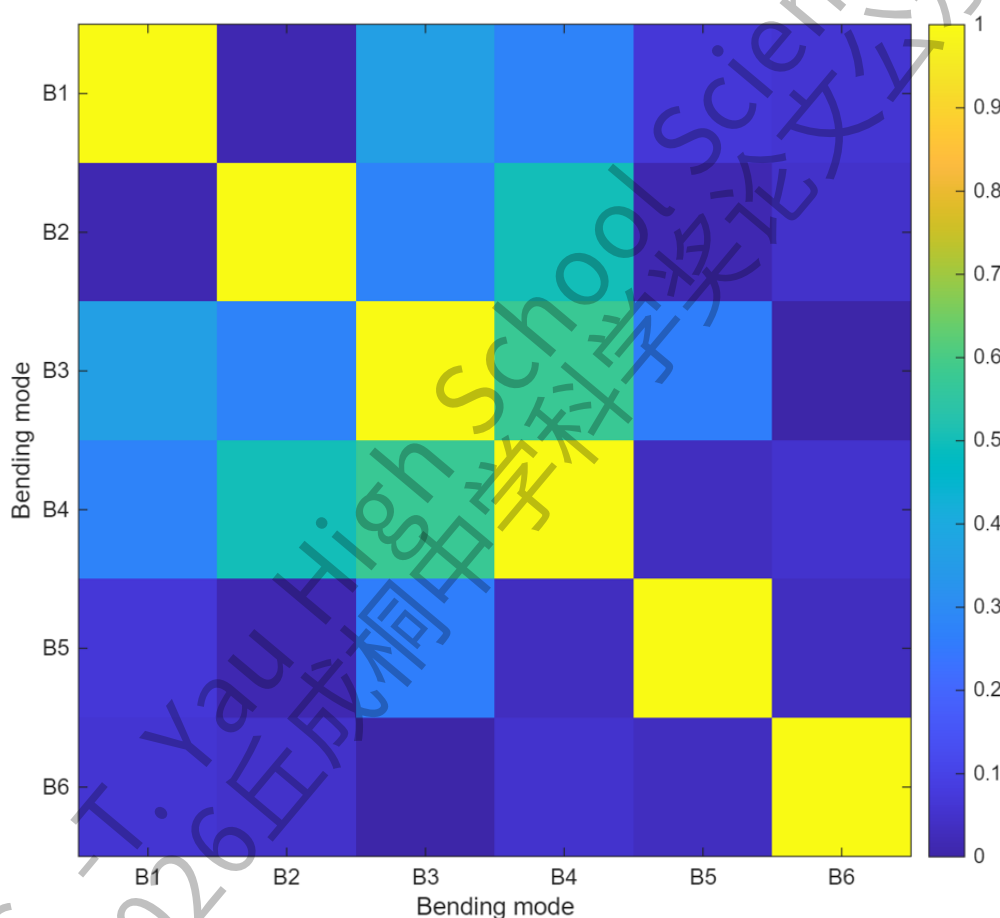


图 13: 实验测量结果的自动模态置信准则 (Auto-MAC) 矩阵

由图 13 的 Auto-MAC 矩阵可知,模态 B3 与 B4 之间的空间相似度达到了 70% (即 MAC 值为 0.70),且两者的固有频率相对偏差在 10% 以内。因此,在动力学特性上,这两者基本可以被认定为同一阶物理模态。由于本研究的核心目标是探究结构在水平面内的固有频率与模态振型,因此本节仅提取并重点展示了两个最为关键的水平向目标模态。其对应的模态振型如图 14 所示,分别为 97 Hz 的扭转模态与 180 Hz 的弯曲模态。

从实验模态分析 (EMA) 的结果来看,该结构前四阶识别模态并未呈现出简单剪切

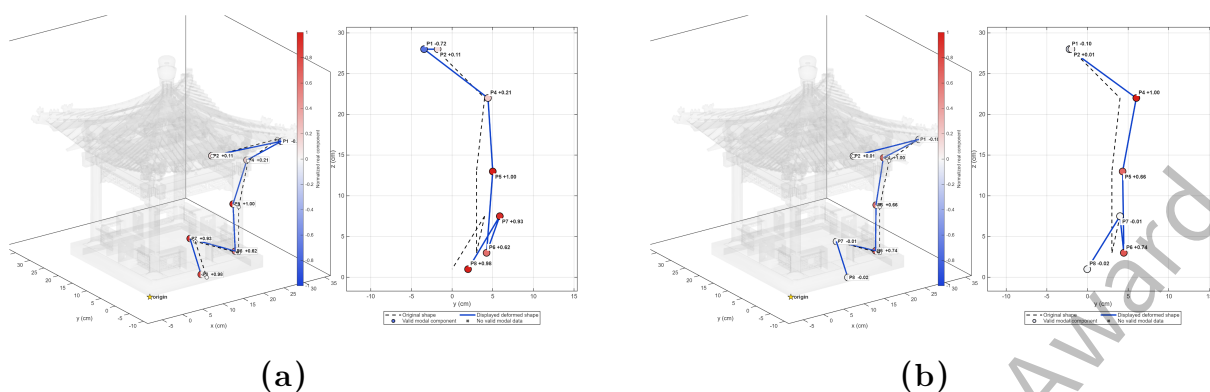


图 14: 识别的目标模态频率与振型: (a) 扭转模态 (97 Hz); (b) 弯曲模态 (180 Hz)

型框架中典型的连续弯曲模态序列, 而是表现为一阶弯曲、扭转、轴向拉伸 (纵向) 以及二阶弯曲模态的复杂组合。本章最终的核心研究目标是提出一套结合有限元分析 (FEA) 与实验测试的综合策略, 旨在为这座古建亭阁研发一种创新的阻尼减振装置。因此, 在当前阶段, 是否对所有的高阶剪切模态进行全面剖析并非至关重要。基于后续减振系统设计的核心需求, 本研究接下来的重心将战略性地聚焦于主导结构水平动力学响应的一阶水平向模态, 即基频弯曲模态与扭转模态。

由于在实验模态分析中布设的测点 (自由度) 数量有限, 凝香亭原型的高分辨率空间模态振型难以被完全观测。因此, 本研究引入了有限元分析 (FEA), 以提供全局模态振型的详尽可视化。然而, 该木质原型的关键材料属性 (如有效弹性模量和泊松比) 目前仍是未知数。

在结构动力学中, 固有频率从根本上取决于系统的刚度质量比。结构的全局质量可以通过测量木材的物理体积与密度来准确确定; 而结构刚度则主要受几何特性 (如截面惯性矩) 和材料的弹性模量共同支配。由于本研究所构建的 3D 有限元模型是物理原型的高保真数字孪生体, 其几何形状对全局刚度的影响已被精确计入, 因此, 木材的弹性模量成为了主要的未知变量。

以实验识别出的共振频率作为目标基准, 我们可以通过逆向工程手段 (即有限元模型修正技术, FEMU) 进行迭代计算, 从而反演出木材的有效弹性模量。从数学机理上值得注意的是, 对于均匀材质的结构, 弹性模量的变化主要起到了对全局刚度矩阵进行线性缩放的作用, 这会显著改变系统的特征值 (固有频率), 但对特征向量 (模态振型) 的影响微乎其微。因此, 基于初始有限元模型计算得出的模态振型, 依然能够高度准确地代表凝香亭实际的振动空间形态。

4 基于实验数据的有限元建模与参数反演

基于上一节的实验分析结果，后续研究需进一步开展有限元模态分析与减振设计优化。在这一数值模拟阶段，首要任务是完成凝香亭原型的高保真几何建模。

4.1 三维模型的建立

在搭建凝香亭物理模型之前，为了方便建立三维模型，本研究首先使用游标卡尺对所有构件进行了测量，以便确定大部分零件基本尺寸。然而，该亭阁中包含大量外形不规则的异形构件（如雕花、榫卯及曲面瓦片）。若完全依赖人工测量与手工绘图，不仅工作量庞大，且极易引入累积误差。因此，本节引入了一种基于图像处理的逆向建模方法，旨在从照片中提取构件的外部轮廓。

对于图像处理的方法，我们先对构件图像进行背景预处理，将构件以外的区域尽可能进行涂）处理，这个操作的目的是最大化构件与背景之间的对比度。随后，我们将彩色图像转化为灰度图，并采用全局阈值法将其分割为构件与背景区域。鉴于本研究中木质构件颜色较深而背景趋近于纯白，因此可选取较高的灰度阈值。由于原始照片中不可避免地存在木材纹理以及噪点，初步的二值化结果通常伴有瑕疵。为此，本研究进一步应用了形态学滤波（Morphological filtering），以滤除面积低于设定阈值的孤立黑点区域，并对局部断裂的边缘进行闭合连接。

为忽略构件内部细节并提取最外围轮廓，需对内部孔洞进行填充。构件内部的瓦片缝隙、格栅及榫卯孔隙会在黑白图像中形成孔洞。本研究采用基于边界的泛洪填充算法（Flood-fill algorithm）处理该问题：算法从图像边界的背景像素起向内扩散，凡能与外边界连通的像素均被标记为绝对背景；反之，被前景像素完全包围的封闭背景区域则被判定为内部孔洞并予以填充。经此处理，构件即被转化为一个内部无孔洞的实心连通域（Solid mask）。

随后，采用 Moore 邻域边界追踪算法（Moore neighborhood tracing）提取外轮廓。该算法从任一边界像素作为种子点出发，按顺时针固定顺序搜索其 8-连通邻域，沿构件边界逐点步进，并记录所有边界像素的离散坐标集合 P_{outer} ：

$$P_{\text{outer}} = \{(r_1, c_1), (r_2, c_2), \dots, (r_n, c_n)\} \quad (11)$$

当搜索路径重新闭合并返回起始像素时，追踪过程终止。按序连接集合 P_{outer} 中的像素坐标，即可重构出构件完整的外部闭合边界。

提取完成后，需将图像的像素坐标系转换为标准的笛卡尔物理坐标系。若设定图像的纵向像素总高度为 H ，则像素坐标 (x, y) 向物理平面坐标 (X, Y) 的映射关系为：

$$X = x, \quad Y = H - y \quad (12)$$

最终，将上述离散坐标点按序样条插值连接，即可重现构件的二维几何轮廓。需要强调的是，上述提取的轮廓仅反映构件的相对几何形态。为获取用于有限元建模的真实绝对尺寸，还需基于参照物的已知物理长度计算像素当量（Scale factor）进行全局比例换算。一个典型的非规则构件几何轮廓提取过程如图 15 所示。

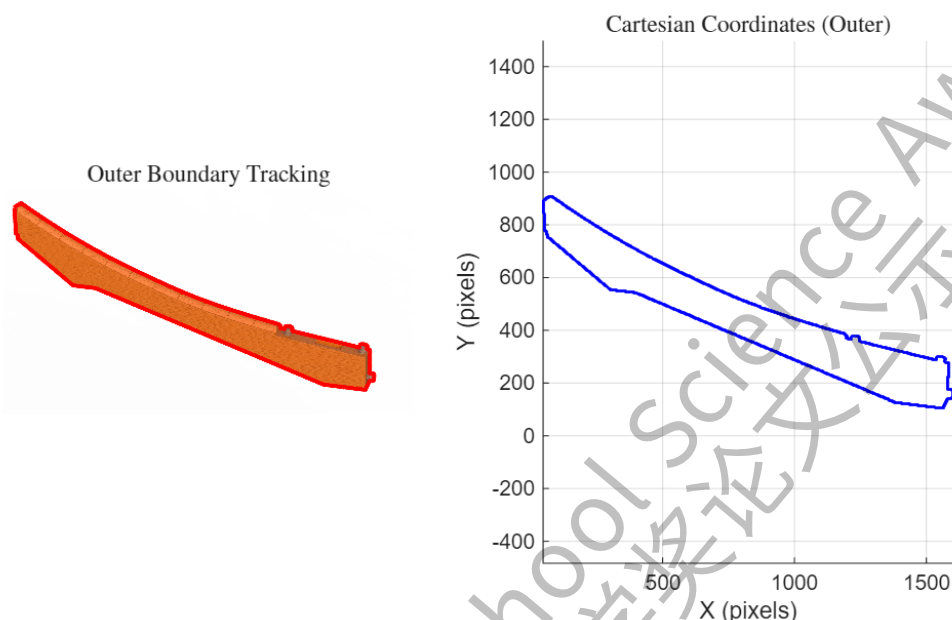


图 15: 一个典型非规则构件几何轮廓提取

接下来，我们将此实物模型搭建起来，可以确定亭子的柱间距，楼层高度等空间布局。因此，我们可以在 Solidworks 中建立亭子的三维几何模型。首先，建立统一的坐标系。随后，建造单个构件，再按照亭子的空间布局将各构件定位和组装，形成完整的几何结构。

在本次三维几何建模过程中，本研究采用“自下而上 (Bottom-up)”的装配策略来构建完整的木亭数字模型 (见图 16)。首先，在软件环境内建立统一的全局坐标系，并将底部台基作为核心参考基准导入。通过施加“固定 (Grounding/Fixed)”约束锁定其全部六个空间自由度，为后续构件的装配提供绝对静止的物理参考系。随后，数字装配过程严格遵循传统木结构古建的真实物理搭建顺序展开。在地基与柱础装配阶段，利用“同轴 (Coaxial)”与“面重合 (Coincident/Mate)”几何约束，将四根主承重柱准确定位至台基的柱础孔位上，并辅以“平行 (Parallel)”约束校准柱头榫槽的空间朝向，以确保整体结构的三维正交对齐。

进入核心的梁枋与斗拱阶段后，为在高保真数字模型中真实还原复杂的榫卯连接机理，本研究采用“对称/对中 (Width/Symmetric)”与“底面贴合 (Mate)”约束来模拟凸榫 (Tenon) 与卯眼 (Mortise) 的物理空间配合关系。在上述约束条件下，横梁与斗拱等构件能够实现自动居中对齐与空间锁定，有效消除了冗余的刚体位移自由度，再现了传统节点紧密的结构咬合特性。最后，在屋顶与正脊装配阶段，针对屋盖结构中带有特定倾角的燕尾榫节点，通过施加“斜面贴合”与“角度 (Angle)”约束保障了边缘构件

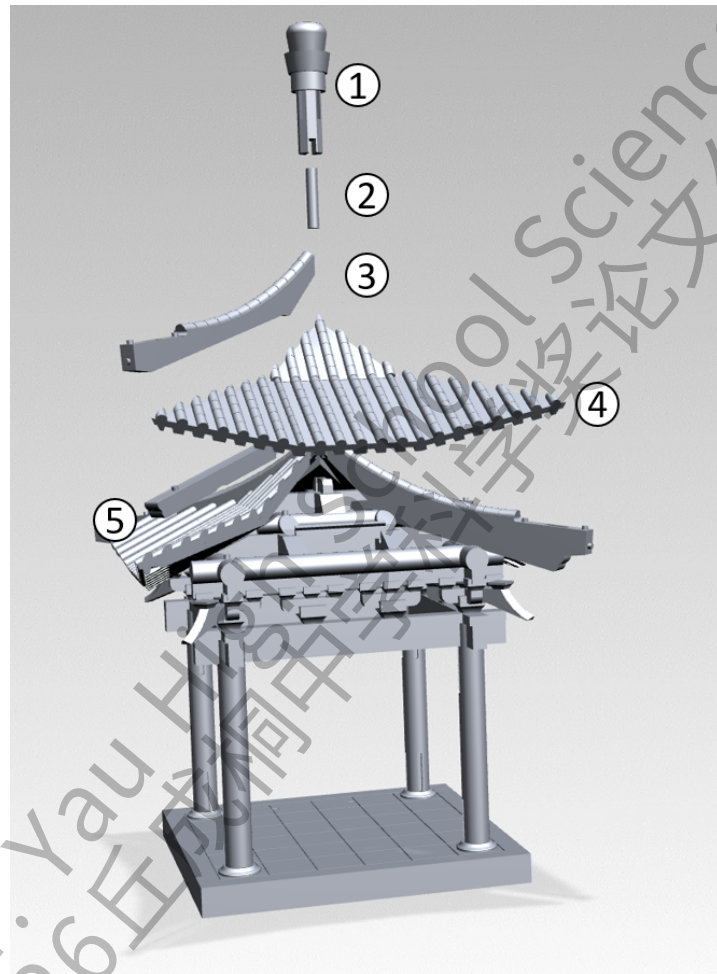


图 16: 凝香亭几何模型的“自下而上”典型装配过程

的精确卡合；而对于屋面上大量重复分布的瓦片构件，则调用软件的“阵列 (Pattern)”功能沿预设空间路径进行了批量参数化铺设。通过实施上述系统化的装配拓扑逻辑，本研究不仅在三维数字空间中精确重现了传统榫卯节点的拼装机理，更成功建立了一个通过干涉检查 (Interference-free/无几何穿透) 的高质量实体模型，为后续的有限元网格划分与结构动力学受力分析奠定了坚实的几何基础。

4.2 有限元模型的简化

为了在有限元计算精度与分析效率之间取得最佳平衡，本研究对凝香亭的高保真几何模型进行了必要的结构简化处理。在建模初期，数字模型中完整保留了大量原汁原味的榫卯节点细节 (如图 17 所示)。

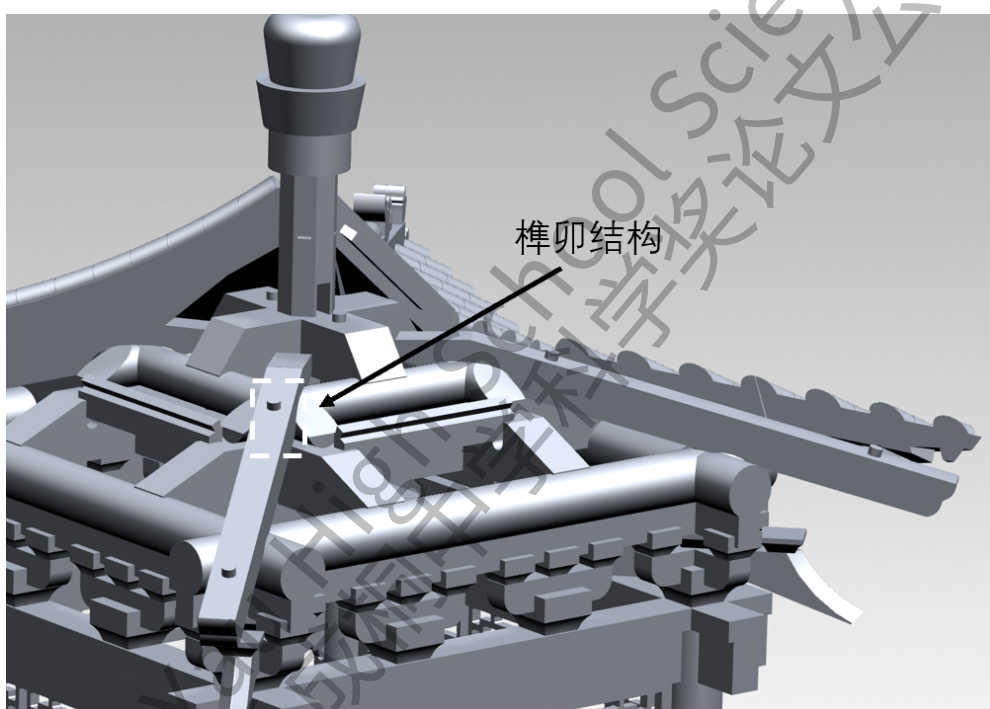


图 17: 建模初期保留的典型屋盖榫卯结构细节

然而，考虑到经典的有限元模态分析 (特征值提取) 本质上属于线性动力学求解过程，求解器内部并不会考虑节点摩擦、接触滑移等局部非线性物理现象。强行保留这些微观的榫卯几何特征不仅会极大地增加网格划分的难度、容易导致局部网格畸变，还会引发系统自由度 (DOFs) 的指数级增长，从而使得计算时间成本难以承受。基于这一理论前提，我们将复杂的榫卯连接区域在几何上等效简化为了连续的整体连接。此外，我们还主动剔除了对全局刚度和质量分布 (即模态特性) 没有显著影响的非结构构件或装饰性元素。经过上述合理的几何降维与拓扑简化，凝香亭模型最终被整合并划分为五个宏观结构层 (如图 18 所示)，以便于后续的高效有限元分析。

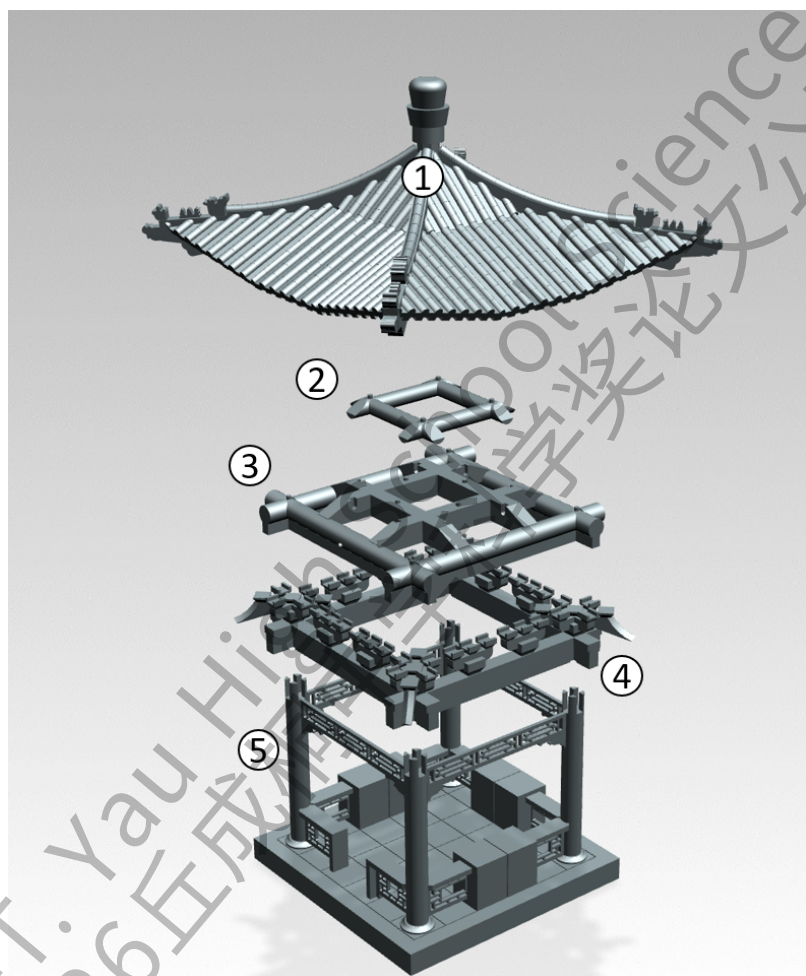


图 18: 简化后的凝香亭有限元几何模型及其五层宏观结构划分

4.3 有限元模型的建立

随后,本研究对该模型开展了详尽的有限元网格划分。针对主体结构,采用了几何适应性较强的四面体单元进行空间离散,并设定了 2 mm 的全局网格基准尺寸,从而在保障结构全局计算精度的同时,有效控制了总单元数量与计算成本。然而,对于插孔这一关键局部区域,鉴于其几何构型复杂,为了保证网格的几何结构不出现畸变,因此必须实施局部网格加密策略。具体而言,在插孔的内壁及过渡边缘处,网格特征尺寸被精细化至 0.8 mm,并过渡采用了六面体主导单元 (Hexahedral-dominant elements),以最大程度降低由于网格质量造成的误差。如图 19 所示,经过上述全局与局部相结合的网格控制策略,整个有限元几何模型最终生成了 479,814 个节点与 169,758 个实体单元。

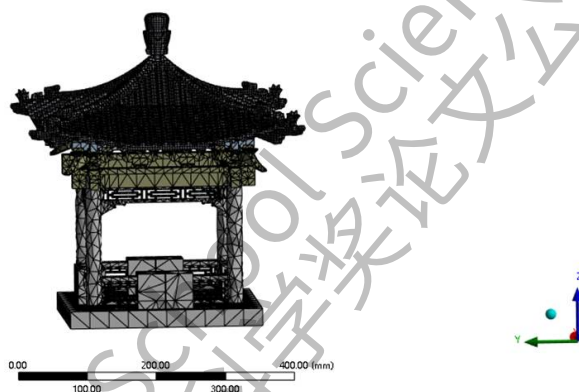


图 19: 凝香亭的有限元模型

针对凝香亭模型所采用的木质材料,影响其固有频率的核心宏观物理参数主要为材料密度与杨氏模量。如前文所述,该木质原型的真实杨氏模量目前尚属未知,后续将基于实验测试的共振频率,通过有限元模型修正 (FEMU) 技术进行逆向推演。在初始的有限元模态分析阶段,我们采用典型硬木 (例如: 柚木等常见的古建木材品种) 的通用参数作为预设基准值。在这个项目中,我们定义杨氏模量为 10 GPa 左右 [11]。至于材料的等效密度,则通过宏观质量与体积的实测数据计算求得。经测量,亭子物理原型的总质量 m 约为 3300 g; 而其总体积 V 则通过三维 CAD 建模软件精确提取,约为 $5.3 \times 10^6 \text{ mm}^3$ (如图 20 所示)。根据上述物理量,该木质材料的等效密度 ρ 计算如下:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (13)$$

因此,在初始有限元模型中,该木材的密度被统一设定为 622.6 kg/m^3 。本次仿真采用了自由-自由边界条件,并提取了前 20 阶振动模态。

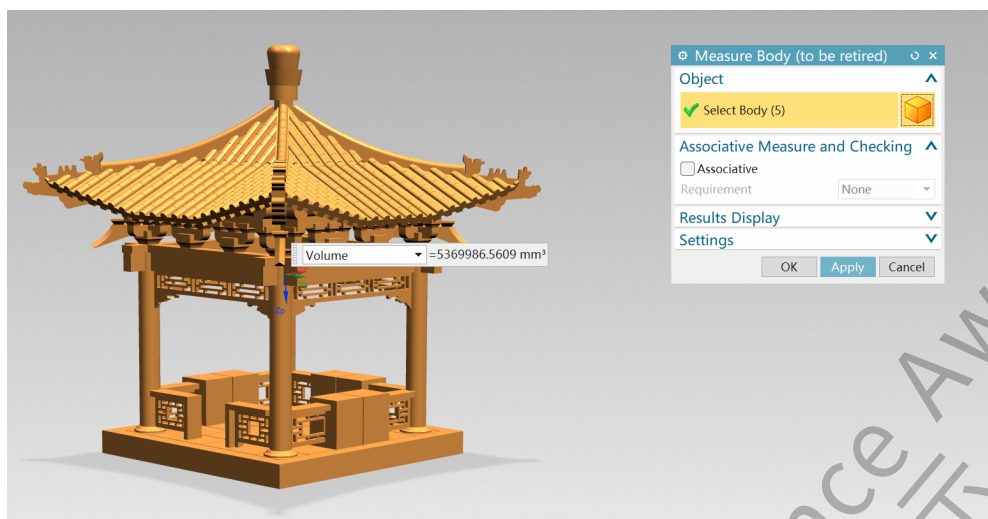


图 20: 三维建模软件中识别的凝香亭体积

4.4 实验结果与分析

图 21 展示了通过初始有限元模型计算得出的基频扭转与弯曲模态空间振型。对比前文数据可以观察到，数值模拟得出的固有频率显著高于实验测量值。这一明显的频率偏差主要归因于初始模型中赋予的通用木材杨氏模量缺乏针对性（大概率存在高估）。尽管绝对频率数值目前存在较大差异，但由于高保真几何模型精确反映了原型的质量与刚度空间分布，结构固有频率的出现序列（即模态阶数）以及对应的空间振型特征依然保持了高度的结构一致性。因此，当前的初始有限元分析结果仍能准确反映凝香亭的宏观动力学行为，并完全可作为后续开展有限元模型参数修正（FEMU）的可靠理论参考基准。

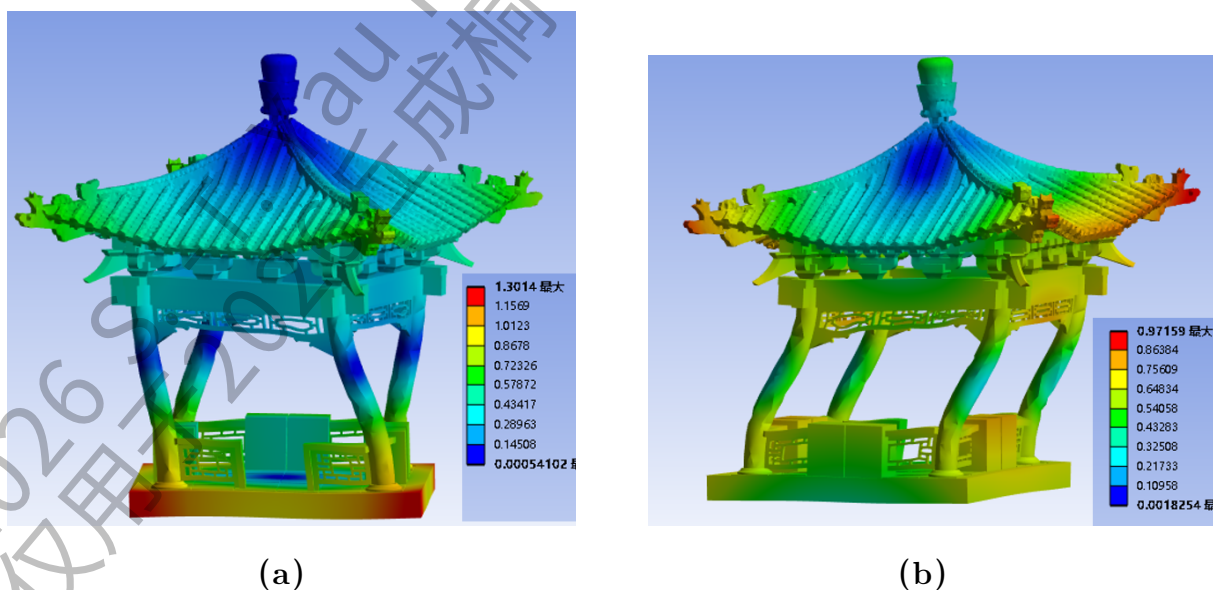


图 21: 凝香亭有限元模态分析结果：(a) 扭转模态（251 Hz）；(b) 弯曲模态（341 Hz）

为了验证数值模型的可靠性，本研究对实验模态分析（EMA）与有限元（FE）模

态分析的结果进行了详细的对比验证, 相关对比情况如图 22 所示。首先, 定性的视觉检验 (Visual inspection) 清楚地表明, 有限元计算出的模态空间振型与实验识别结果之间呈现出高度的一致性。为了对这种空间相关性进行严格的定量评估, 本节进一步计算了目标基频模态的交叉模态置信度 (Cross-MAC)。在对模态振型向量进行相位对齐 (Phase-aligned) 处理后, 计算得出扭转模态的 Cross-MAC 值为 0.85, 而弯曲模态的 Cross-MAC 值达到了 0.94。这两个显著的高相似度指标充分表明, 经过几何简化处理的有限元模型能够以相当高的数值精度, 准确表征凝香亭在水平方向上的关键弯曲与扭转动力学行为。

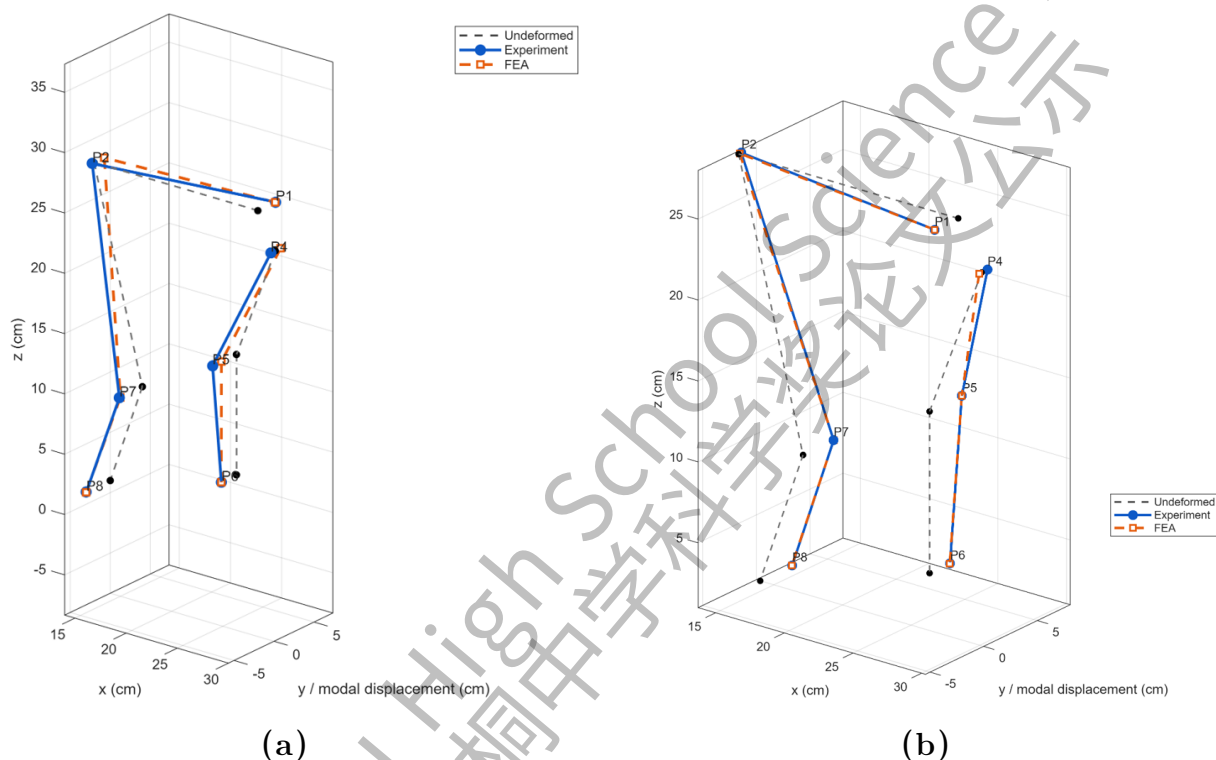


图 22: 实验与有限元模态向量对比: (a) 扭转模态; (b) 弯曲模态

4.5 木材杨氏模量的有限元逆向提取

如前节所述, 本研究采用有限元模型修正 (FEMU) 与逆向工程方法来推导木材的真实弹性属性。本次优化的目标模态明确设定为基频扭转与弯曲模态, 而目标函数 (Cost function) 则被定义为有限元计算的固有频率与实验识别频率之间的绝对残差。在初始阶段, 木材被理想化为各向同性的均匀材料模型, 优化设计变量被设定为杨氏模量与泊松比。为实现目标函数的全局绝对最小化, 本节引入了多目标遗传算法 (MOGA) 进行参数寻优。设计变量的初始全局搜索区间被界定为: 杨氏模量介于 0 至 10 GPa 之间, 泊松比介于 0.1 至 0.5 之间。在算法执行初期, 系统首先在上述区间内随机生成包含 10 组参数组合的初始种群, 并依次完成有限元求解以评估其特征频率。随后, 算法采用精英保留策略, 筛选出拟合优度最高的 5 组结果作为繁衍下一代的种子 (Seeds)。

基于这些优质种子，通过交叉（Crossover）、变异（Mutation）以及加权组合等标准遗传操作，算法衍生出 10 组全新的参数组合以构建子代种群，并再次投入有限元模拟。此“求解-评估-繁衍”的进化迭代过程将持续循环，直至目标函数残差满足 0.1 的预设收敛容差，或算法整体达到全局收敛状态为止。

有限元响应面分析的结果如图 23 所示。我们可以直观地观察到，泊松比的数值变化对结构固有频率的影响微乎其微。然而值得注意的是，通过响应面拟合出的等效杨氏模量在扭转模态与弯曲模态之间表现出了显著的数值差异。导致这一现象的一种可能的解释在于木材本身固有的各向异性物理特征。亭阁类框架结构的整体扭转模态主要受控于支撑木柱的抗剪切刚度。因此，其扭转固有频率实质上与材料的剪切模量呈高度相关性，其比例关系可近似表示为：

$$f_t \propto \sqrt{\frac{GJ_{\text{eff}}}{\rho I_p L^2}} \quad (14)$$

式中， G 代表木材的剪切模量， J_{eff} 代表柱截面的有效极惯性矩。相对地，结构的整体弯曲模态则主要取决于构件的抗弯刚度，其固有频率的关联方程为

$$f_b \propto \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (15)$$

式中， E 为杨氏模量， I 为截面惯性矩。对于天然木材而言，其剪切模量与弹性模量在不同纹理方向上相互独立且往往存在显著差异 [12]。因此，基于各向同性假设的单一杨氏模量无法同时准确拟合弯曲与扭转动力学行为。为了更准确地还原该古建亭阁的真实受力响应，在后续的有限元模型中有必要引入正交各向异性材料本构，为结构的两个主轴方向分别定义独立的弹性模量与剪切模量。

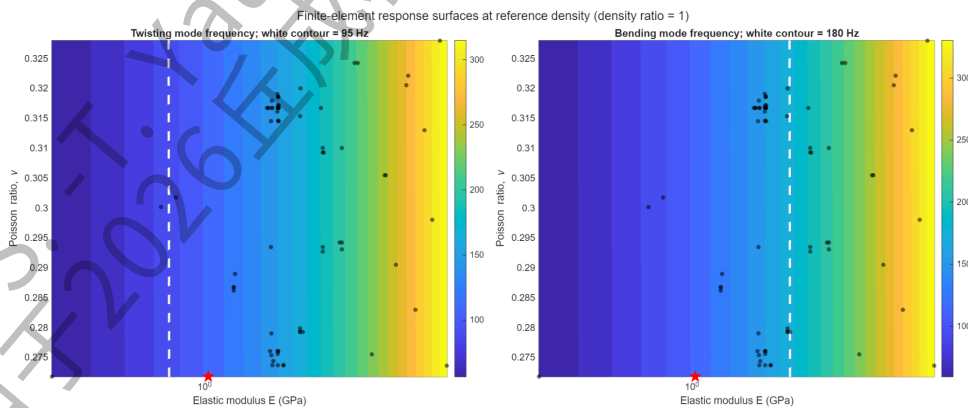


图 23: 有限元响应面分析（左：扭转模态；右：弯曲模态；黑点：仿真点；白色虚线：实验识别频率）

除了杨氏模量，材料密度变化对结构固有频率也会有显著影响。由于密度参数并未作为设计优化的参数之一，我们使用质量比例缩放原理进行了精确的解析推导。假设结

构的全局刚度和空间模态振型保持不变，仅均匀改变材料密度，则系统全局质量矩阵的缩放关系可由下式表示

$$M(\rho) = r_\rho M(\rho_{\text{ref}}), \quad r_\rho = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \quad (16)$$

式中， ρ_{ref} 为参考密度， r_ρ 为密度缩放比。基于特征值方程的推导，第 j 阶固有频率在密度缩放后的精确数学表达如式 (17) 所示：

$$f_j(E, \nu, r_\rho) = \frac{f_j(E, \nu, 1)}{\sqrt{r_\rho}} \quad (17)$$

由此解析公式可以清晰地得出结论：在弹性模量 (E) 和泊松比 (ν) 等参数恒定的前提下，结构的固有频率与材料密度的平方根成反比。基于该理论模型计算得出的固有频率随密度变化的敏感性分析 (Sensitivity analysis) 曲线详见图 24：

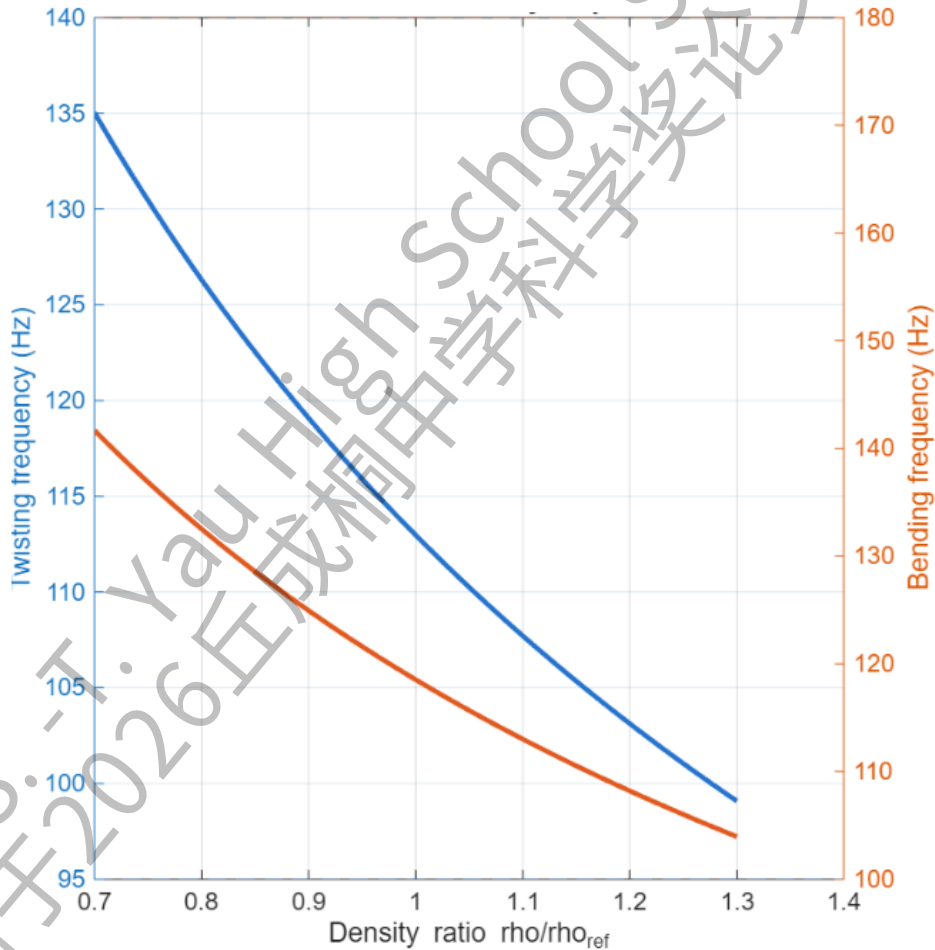


图 24: 密度比对共振频率影响的敏感性分析（弯曲与扭转模式）

如图 24 所示，可以观察到，无论密度如何变化，这两阶模态的频率比始终保持在 1.049 左右。这个差异可能是由于木材在不同方向上存在不同的杨氏模量，由于这两个模量的比值恒定，所以最终得到两阶的频率比也是恒定。

因此，基于各向同性假设的木材的材料模型无法同时准确拟合弯曲与扭转动力学行为。为了更准确地还原该古建亭阁的真实受力响应，基于所设计算出的基准木材密度 (622.6 kg/m^3)，我们最终定义模型的立柱木材在扭转主导下的等效剪切模量约为 0.728 GPa ，而在弯曲主导下的等效杨氏模量约为 2.376 GPa 。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

5 凝香亭动力学模型的降阶

为了便于后续开展旨在抑制地震响应的附加减振阻尼器设计，必须将复杂的结构几何模型降阶为等效的集中质量-弹簧模型 (Lumped mass-spring model)。在阻尼器参数的迭代优化设计阶段，若直接耦合高保真的三维有限元实体模型，往往会带来难以承受的计算时间成本。因此，本节将对凝香亭进行系统的结构等效与动力学降阶。通过充分利用前文实验模态分析与有限元数值模拟中已验证的动力学特征——特别是基频、等效模态质量与模态刚度，高维度的空间实体模型将被在数学上浓缩为一个低阶的集中参数系统。这一简化后的等效动力学模型不仅保留了原结构最核心的振动特性，更将为后续减振装置的理论推导、参数寻优以及地震波激励下的时域响应评估提供高效的分析平台。

5.1 简化的动力学模型

基于有限元模态分析的结果，凝香亭的前四阶宏观振动特征可分别归纳为一阶扭转模态、一阶竖向拉压模态以及两阶正交的水平弯曲模态。为了从宏观力学层面准确描述该亭阁的整体动力学行为，本节将其简化为经典的单层框架模型：将庞大且厚重的屋盖系统等效为一个具有集中质量与转动惯量的刚体，并将底部的四根立柱视为提供主要弹性恢复力的支撑构件。由于屋盖系统的物理体积与绝对质量均远超这四根承重立柱，因此在最终构建的集中参数动力学简化模型中，我们仅将屋盖质量作为系统的主动运动质量进行保留，从而忽略了立柱自身的分布质量。然而值得重点强调的是，必须在模型中完整保留立柱的刚度特性。这是因为立柱是连接上部屋盖与底部固定台基的唯一承载结构，当刚性屋盖受激发生水平平移、竖向位移或绕轴扭转时，立柱势必会产生相应的弯曲变形或轴向变形，进而向屋盖系统提供维持动态平衡所需的弹性恢复力。这一合理的物理抽象使得原本复杂的三维连续体成功降阶为易于求解的离散参数动力学系统。

为了在动力学方程中定量描述该等效集中质量模型的空间运动轨迹，本节针对刚性屋盖系统设定了 4 个相互独立的主自由度 (Degrees of Freedom, DOFs)。这 4 个自由度分别定义为：沿水平 X 轴方向的平移位移、沿水平 Y 轴方向的平移位移、沿竖直 Z 轴方向的竖向拉压位移（或铅垂向位移），以及绕竖直 Z 轴的水平扭转角位移。

$$\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & \theta_z \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

在确立了系统自由度之后，需依据经典力学原理推导其惯性参数。依据牛顿-欧拉刚体动力学方程，系统在水平与竖直方向上的平动位移严格遵循牛顿第二定律，其对应的运动惯性项为屋盖的等效集中质量 m 。而对于绕竖直 Z 轴的扭转运动，则遵循牛顿第二定律的转动形式（即动量矩定理），其对应的转动惯性项为屋盖绕 Z 轴的质量转动惯量 J_z 。由于这四个主自由度在所建立的质心坐标系下相互正交且在惯性上彼此解耦，该系统的全局质量矩阵 $\mathbf{M}$ 呈现为标准的对角阵形式。因此，其质量矩阵可明确表达为：

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

在构建了系统质量矩阵之后,需进一步推导并构建等效四自由度系统的全局刚度矩阵。由于四根立柱在承受不同方向的外部载荷时表现出截然不同的变形机制,其在各自由度上的等效刚度必须分别予以推导:当承受沿 Z 轴的竖向作用力时,立柱主要发生轴向的拉压变形,这取决于材料的竖向轴向刚度;而当承受沿 X 轴或 Y 轴的水平作用力时,立柱则表现为宏观的侧向弯曲变形,这对应着结构的水平抗侧刚度(或抗弯刚度)。为便于解析推导,本研究将亭阁的四根主承重木质立柱理想化为高度为 H 、截面直径为 D 的等截面实心圆柱,并设该木材的等效完全杨氏模量为 E_b 。基于此几何假设,该实心圆形截面的有效受力面积 A 以及其绕任意形心主轴的截面惯性矩 I 可分别通过以下标准几何解析式求得:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}, \quad I = \frac{\pi D^4}{64} \quad (20)$$

当柱顶受到竖直向下的力 F_z 时,柱子的轴向缩短量为 Δ_z 。根据圆柱的轴向变形公式:

$$\Delta_z = \frac{F_z H}{E_b A} \quad (21)$$

其中 F_z 为作用在柱顶的竖向力; Δ_z 为柱子的竖向压缩量。则根据刚度的定义:

$$k_z = \frac{F_z}{\Delta_z} \quad (22)$$

将式 (20) 和式 (21) 带入式 (22), 单个圆柱的轴向刚度可以表示为

$$k_z = \frac{E_b A}{H} \quad (23)$$

进一步地,鉴于凝香亭的主体结构由四根几何尺寸与力学性能完全相同的木质立柱并列支撑,在受激发生纯竖向平移运动时,这四根立柱在受力变形特征上保持高度一致。因此,在集中参数动力学模型中,它们在力学拓扑上可被严格视作四个相互并联的弹性元件。根据结构力学中的并联刚度叠加原理,系统在竖直方向上的整体等效轴向刚度直接等于各分支刚度之和。由此可明确得出,凝香亭系统的总体竖向轴向刚度 K_z 即为单根立柱轴向刚度 k_z 的四倍,其完整的解析表达式为:

$$K_z = 4k_{\text{lat}} \quad (24)$$

单根立柱的水平抗侧刚度解析式可以被推导为：

$$k_{lat} = \frac{12E_b I}{H^3} \quad (25)$$

当刚性屋盖绕竖直 Z 轴转动微小角度 θ_z 时，除了前文所述因刚体运动效应产生的附加水平平移外，立柱自身也会被迫绕其局部的纵向中轴线发生同步扭转变形。为了在刚度矩阵中完整量化这一局部变形对结构整体抗扭能力的贡献，首先需要推导单根立柱的局部扭转刚度。在整体扭转过程中，上部屋盖环梁发生旋转。位于不同侧的立柱向不同方向移动。因此，梁系统承受的是错动变形（racking）和面内剪切，而不是均匀的平移。尽管立柱在物理上与上部梁相连，但它在切向传递的弯矩可能相对较小。从力学角度来看，其受力行为类似于悬臂柱：

$$k_t \approx \frac{3E_{twist,eff} I}{H^3} \quad (26)$$

式中， $E_{twist,eff}$ 为立柱在扭转主导变形下的等效弹性模量， I 为截面惯性矩， H 为立柱高度。

基于微小转动假设下的刚体运动学关系，第 i 根立柱因全局扭转而在 X 轴与 Y 轴方向产生的附加位移分别为 $-y_i \theta_z$ 与 $x_i \theta_z$ ，且该扭转运动不会引起 Z 轴方向的竖向位移。根据空间位移叠加原理，将屋盖的全局平动位移与扭转附加位移进行线性叠加，即可得到第 i 根立柱柱顶的实际空间变形分量：

$$u_{xi} = u_x - y_i \theta_z, \quad u_{yi} = u_y + x_i \theta_z, \quad u_{zi} = u_z \quad (27)$$

在集中参数模型中，每根立柱在三个正交方向上独立提供弹性抗力。设第 i 根立柱在 X 、 Y 、 Z 方向的等效抗侧与轴向刚度分别为 k_{xi} 、 k_{yi} 和 k_{zi} 。依据线弹性系统的应变能理论，该立柱的弹性势能可表示为：

$$V_i = \frac{1}{2} (k_{xi} u_{xi}^2 + k_{yi} u_{yi}^2 + k_{zi} u_{zi}^2) \quad (28)$$

将各柱顶位移分量代入并对上式进行代数展开与同类项合并，可得总势能的二次型多项式表达：

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} & \left[\left(\sum_i k_{xi} \right) u_x^2 + \left(\sum_i k_{yi} \right) u_y^2 + \left(\sum_i k_{zi} \right) u_z^2 \right. \\ & - 2 \left(\sum_i k_{xi} y_i \right) u_x \theta_z + 2 \left(\sum_i k_{yi} x_i \right) u_y \theta_z \\ & \left. + \left(\sum_i k_{xi} y_i^2 + \sum_i k_{yi} x_i^2 \right) \theta_z^2 \right] \quad (29) \end{aligned}$$

在多自由度 (MDOF) 系统动力学中, 系统总弹性势能的基于 $\mathbf{q}_s$ 与 $\mathbf{K}_4$ 的标准矩阵形式为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}_s^T \mathbf{K}_4 \mathbf{q}_s \quad (30)$$

通过将上述展开多项式与势能标准二次型进行逐项系数比对, 即可精确提取出凝香亭等效四自由度系统的全局刚度矩阵 $\mathbf{K}_4$:

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} \sum_i k_{xi} & 0 & 0 & -\sum_i k_{xi} y_i \\ 0 & \sum_i k_{yi} & 0 & \sum_i k_{yi} x_i \\ 0 & 0 & \sum_i k_{zi} & 0 \\ -\sum_i k_{xi} y_i & \sum_i k_{yi} x_i & 0 & \sum_i (k_{xi} y_i^2 + k_{yi} x_i^2) \end{bmatrix} \quad (31)$$

5.2 基于简化四自由度模型的凝香亭动力学响应分析

凝香亭模型的关键几何尺寸与材料物理属性详见表 1。

表 1: 凝香亭的几何与材料参数

参数	符号	数值	单位
密度	ρ	622	kg/m ³
弯曲模量	E_b	2.376	GPa
扭转等效模量	$E_{\text{twist,eff}}$	0.728	GPa
泊松比	ν	0.4	无量纲
立柱直径	D	22.6	mm
立柱高度	H	85	mm
亭顶体积	V	3.38×10^6	mm ³
亭顶质量	m	2.10	kg

将表 1 中确定的各项物理参数准确代入前文推导的质量矩阵 (式 (19)) 与刚度矩阵 (式 (31)) 后, 我们采用第二章所述的本征值和向量的求解方法, 即可精确提取出该简化四自由度系统的各阶固有频率及其对应的模态振型 (如图 25 所示)。

计算结果表明, 该简化模型提取出的前四阶模态振型与前文有限元预测的模态振型相吻合。为了进一步验证该等效模型的准确性, 我们将简化模型计算所得的固有频率与实验模态分析 (EMA) 测试结果进行对比 (详见图 26)。

对比模态分析结果可知, 理论模型在整体刚度上呈现出一定程度的‘偏柔’现象。具体而言, 模型对结构扭转频率的低估最为明显, 偏差约为 15%; 而在弯曲模态方面, 4 自由度 (4-DOF) 简化模型对弯曲频率的低估约为 6.11%。产生上述误差的可能原因是: 在简化模型时, 我们忽略了实际古建筑中复杂的刚度强化机制。首先是扭转方向的

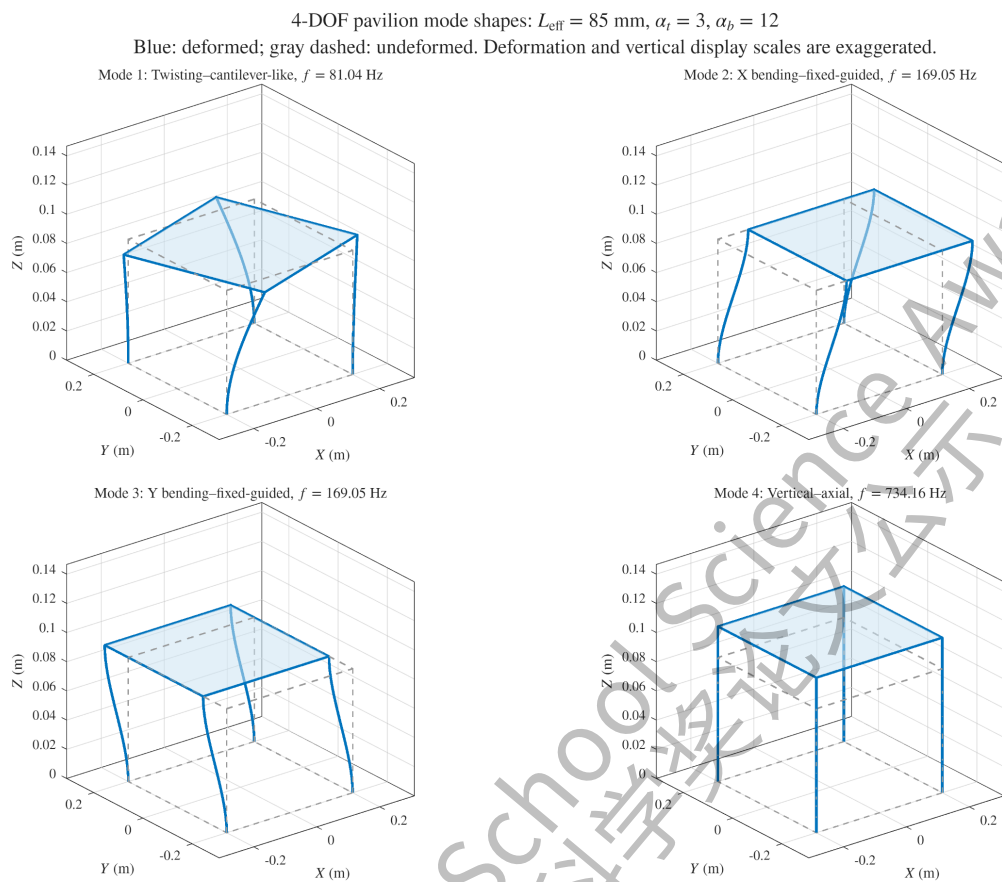


图 25: 凝香亭前四阶宏观模态振型（一阶扭转、两阶弯曲与一阶竖向拉压模态）

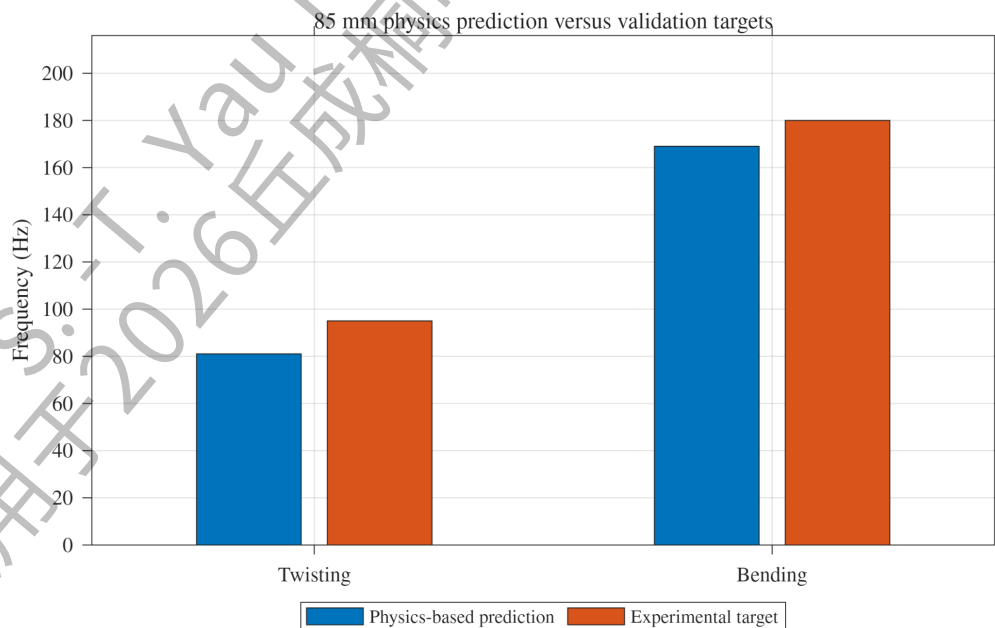


图 26: 实验模型与简化四自由度系统的固有频率比较（扭转模态与弯曲模态）

半刚性连接效应。实际结构中的榫卯节点在发生扭转变形时，接触面会产生明显的挤压与摩擦，表现出较强的半刚性特征，而现有模型在扭转自由度上的弹簧刚度取值偏于保守；其次是屋顶体系的面内刚度贡献。传统重型屋盖（含望板、檩条及瓦作层）在整体变形时会发挥类似“刚性隔板”的约束作用，显著增大了结构抗扭和抗弯的协同工作能力，这在简化模型中往往被弱化；最后是斗拱铺作层的附加刚度。斗拱作为柱网与屋盖之间的过渡层，其纵横交错的木构件在多向受力状态下会产生复杂的咬合与摩擦，不仅传递竖向荷载，更在水平剪切和扭转中提供了不可忽视的附加抗侧与抗扭刚度。

总体而言，上述对比结果充分表明，本文所构建的四自由度集中参数模型不仅合理地剥离了原复杂三维结构的非核心自由度，实现了系统的动力学降阶，而且在预测结构宏观共振频率等核心动力学特征时，保持了令人满意的工程预测精度。这一兼具高保真度与高计算效率的等效简化模型，能够满足结构振动控制的力学需求，为后续高效开展减振阻尼器的理论推导与参数寻优奠定了坚实的动力学基础。

6 凝香亭减震阻尼器的参数优化与效果分析

在上一个章节，我们已经辨别出了最重要的两阶模态：水平弯曲模态以及绕竖直轴的转动模态。本研究引入了调谐质量阻尼器（TMD）作为减振控制手段。经典 TMD 系统的基本控制逻辑在于：向主结构附加一个具备特定质量的弹簧与阻尼元件系统。通过对附加质量、刚度与阻尼参数的合理调谐，使质量块在主结构受激时发生反相位的谐振运动，进而通过惯性力抵消主结构振动并耗散能量。然而，对于凝香亭这类存在明显平扭耦合振动特征的空间结构，传统的普通 TMD 往往只能针对单一运动模式提供附加阻尼，控制效果具有显著局限性。针对这一局限，我们采用了一种偏心双向调谐质量阻尼器（Eccentric Bi-directional TMD），实现对平动与扭转响应的协同控制（如图 27 所示）。该减振装置核心弹性恢复力源自内部悬臂梁在两个正交方向上的挠曲变形。在实际工作状态下，该装置沿某一主轴方向的恢复力直接作用于抑制结构的水平平动；而另一正交方向的恢复力则利用偏心距转化为抵抗扭矩，从而高效地遏制结构的整体扭转振动。

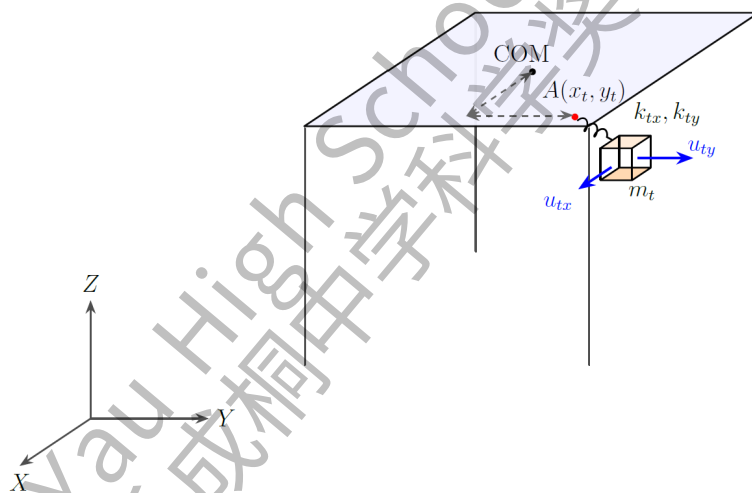


图 27: 配置偏心悬臂梁双向 TMD 的 6 自由度系统动力学简图

在具体的工程布置上，该偏心双向 TMD 被安装于凝香亭刚性屋盖平面内的一处特定偏心节点，其在全局坐标系下的位置标记为 $A(x_t, y_t)$ 。该减振装置的物理构型主要由一根提供弹性恢复力的悬臂梁以及固定于其自由端的集中质量块构成，设该附加质量块的等效质量为 m_t 。对于本章节，我们引入了以下几项合理的力学假设来简化分析：首先，忽略悬臂梁自身的局部抗扭刚度，即不考虑其局部扭转对主结构产生的微小影响；其次，将附加质量块理想化为纯质点，即完全忽略其自身的转动惯量；最后，将悬臂梁在两个正交主轴方向上的挠曲变形机制在力学上进行严格解耦，将其等效为分别沿水平 X 轴与 Y 轴布置的两个独立线弹性弹簧。基于上述物理抽象，该 TMD 系统在平面内仅具备两个正交的独立平动自由度。

6.1 系统动力学方程建模

如前文所述，凝香亭主结构已被等效为一个四自由度系统，其运动状态由刚性屋盖沿水平 X 轴的平动位移 u_x 、沿水平 Y 轴的平动位移 u_y 、沿竖直 Z 轴的竖向位移 u_z 以及绕竖直 Z 轴的扭转角位移 θ_z 共同描述。在引入偏心双向调谐质量阻尼器后，由于其悬臂梁在正交方向上的弯曲变形被等效解耦，附加质量块在水平面内额外引入了两个独立的平动自由度，分别记为沿 X 轴的绝对位移 u_{tx} 与沿 Y 轴的绝对位移 u_{ty} 。因此，耦合该 TMD 后的整体结构动力学模型被精确扩阶为一个六自由度（6-DOF）系统，其全局位移向量 $\mathbf{U}$ 可完整表示为：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & \theta_z & u_{tx} & u_{ty} \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

值得注意的是，由于该调谐质量阻尼器（TMD）并未布置于主结构的质心处，而是策略性地安装于特定的偏心节点，因此当刚性屋盖发生绕竖直轴的扭转时，TMD 安装点的空间绝对位移不仅取决于主结构的全局水平平动，还受到刚体运动学中转动效应的显著影响。具体而言，主结构的局部扭转运动会因偏心距（Lever arm）的存在而在 TMD 安装点处激发额外的附加水平位移，且该附加平移量与偏心距离成严格的正比关系。偏心距越大，因扭转引发的局部放大位移就越显著。正是基于这一位移放大效应，安装在偏心位置的 TMD 能够较为敏锐地捕捉到主结构的微小扭转，从而通过其内部悬臂梁弹簧的拉压变形产生方向相反的抵抗力矩。这正是偏心双向 TMD 能够高效抑制结构全局扭转振动的内在力学机制。

基于前述的刚体运动学耦合机制，可进一步精确推导出 TMD 等效弹簧的相对变形量。首先，TMD 在屋盖平面内的安装点 $A(x_t, y_t)$ 的绝对空间位移可由主结构的全局位移线性叠加而成。进而，TMD 悬臂梁在两个正交方向上的实际受力变形，在数值上严格等于附加质量块的绝对位移与安装点绝对位移之差。因此，TMD 在 X 轴与 Y 轴方向的相对变形量为：

$$\Delta_x = u_{tx} - u_x + y_t \theta_z, \quad \Delta_y = u_{ty} - u_y - x_t \theta_z \quad (33)$$

通过引入这一组相对变形变量，TMD 系统的附加弹性势能可以直接表示为

$$V_{\text{TMD}} = \frac{1}{2} k_{tx} \Delta_x^2 + \frac{1}{2} k_{ty} \Delta_y^2 \quad (34)$$

下一步，系统的刚度矩阵需要被求出，以扭转自由度 θ_z 为例，依据势能驻值原理，对总弹性势能求偏导即可得出对应自由度的广义弹性恢复力。将前文定义的相对变形量 Δ_x 与 Δ_y 代入偏导方程后，可以清晰地观察到，TMD 对主结构扭转响应的控制能力（即等效附加抗扭刚度）主要受两大物理因素支配：其一是悬臂梁的正交平动刚度 k_{tx} 与 k_{ty} ；其二是 TMD 安装点的空间偏心距 x_t 与 y_t 。特别地，偏心距是以“平方放大”的非线性形式增强结构的抗扭能力的。因此，在主体结构几何尺寸允许的范围内，适当最

大化 TMD 与结构质心之间的偏心距离, 将极大地提升该装置对全局扭转振动的抑制效能。顺此逻辑, 通过对增广系统总势能关于各个独立自由度逐一求偏导, 即可推导出包含 TMD 的 6 自由度全局刚度矩阵。若设原主结构的刚度矩阵为 $\mathbf{K}_4$, 则耦合 TMD 后的整体系统分块刚度矩阵可表达为:

$$\mathbf{K}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_{\text{TMD,add}} & \mathbf{K}_{\text{coup}} \\ \mathbf{K}_{\text{coup}}^T & \mathbf{K}_{\text{TMD}} \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中, $\mathbf{K}_{\text{coup}}$ 代表主结构与 TMD 之间的刚度耦合矩阵。该矩阵中非零的非对角线元素直观地映射了具体的力学耦合机制: 它表明主结构的平动响应与扭转运动在空间上发生了深度耦合, 而这两种宏观运动形态的叠加又共同主导了 TMD 内部悬臂梁的相对位移。基于前述势能偏导, 该 4×2 维的耦合刚度矩阵 $\mathbf{K}_{\text{coup}}$ 的具体解析形式可精确写为

$$\mathbf{K}_{\text{coup}} = \begin{bmatrix} -k_{tx} & 0 \\ 0 & -k_{ty} \\ 0 & 0 \\ k_{tx}y_t & -k_{ty}x_t \end{bmatrix} \quad (36)$$

基于刚度矩阵的推导逻辑与矩阵相似性, 全局阻尼矩阵的构造只需将 TMD 悬臂梁在 X 和 Y 方向的平动刚度 k_{tx} 与 k_{ty} 替换为对应的线性粘滞阻尼系数 c_{tx} 与 c_{ty} , 而作为几何转换参数的安装偏心距 x_t 与 y_t 保持不变。耦合 TMD 后的整体系统 6×6 全局分块阻尼矩阵可表达:

$$\mathbf{C}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_{\text{TMD,add}} & \mathbf{C}_{\text{coup}} \\ \mathbf{C}_{\text{coup}}^T & \mathbf{C}_{\text{TMD}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

与前文推导的全局刚度矩阵相对应, 由于新增的附加质量块被严谨地抽象为理想质点, 且悬臂梁自身的质量被忽略, 整个增广系统在惯性属性上呈现出完全解耦的对角阵特征。因此, 该六自由度系统的全局质量矩阵 $\mathbf{M}$ 可直观地表示为一个 6×6 对角矩阵。其中, m 为主结构刚性屋盖的等效集中质量, J_z 为主结构绕竖直 Z 轴的等效转动惯量, 而 m_t 则为 TMD 附加质量块的绝对质量。该质量矩阵的具体解析形式可明确写为:

$$\mathbf{M}_6 = \text{diag}(m, m, m, J_z, m_t, m_t) \quad (38)$$

综合上述推导所得的全局质量矩阵 $\mathbf{M}$ 与全局刚度矩阵 $\mathbf{K}$, 并引入系统的全局阻尼矩阵 $\mathbf{C}$ (在实际工程数值计算中, 主结构的阻尼通常采用瑞利阻尼模型构建, 而 TMD 的局部阻尼则通过悬臂梁的等效耗能系数直接叠加至矩阵对角项), 即可建立引入偏心双向 TMD 后, 凝香亭在外部动态荷载 (如地震动加速度或风振激励) 作用下的完整运动微分方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (39)$$

6.2 调制协调阻尼器的参数设计

在构建耦合系统的动力学方程时，首要任务是确立 TMD 的空间布置方案。基于前文刚度矩阵的理论推导可知，偏心双向 TMD 对结构扭转响应的抑制效能与偏心距的平方呈强正相关。因此，在综合考量屋盖几何边界与实际工程施工可用空间的前提下，应当尽可能最大化该减振装置至主结构质心的距离，将其优先布置于屋盖平面的角部边缘区域。设凝香亭屋盖沿水平 X 轴和 Y 轴的特征尺寸分别为 L_x 和 L_y ，若将全局坐标系原点严格定位于结构质心，为追求抗扭刚度收益的最大化，我们可以将 TMD 的初始理论安装位置初步设定为该平面的几何极值点，即：

$$x_t \approx \frac{L_x}{2}, \quad y_t \approx \frac{L_y}{2} \quad (40)$$

诚然，在实际工程应用中，前述的理想角部极值坐标并非一成不变。其具体位置必须综合评估屋盖的承重骨架布置、TMD 装置的自重荷载分布、现场施工净空以及整体结构安全性等多重工程约束边界。因此，最终确定的安装节点并非纯粹的几何边界点，而是在严格满足上述物理与施工可行性条件的前提下，所寻求的偏心距最大化次优解。在明确了 TMD 的空间布置基准后，后续减振设计的核心便自然过渡至附加质量块与悬臂梁刚度参数的理论定标与数值寻优。为构建通用的无量纲化参数设计空间，首先引入结构动力吸振理论中最核心的无量纲设计变量——TMD 附加质量与主结构等效集中质量的平动质量比 (Translational mass ratio)，该比值可定义为：

$$\mu_x = \frac{m_t}{m} \quad (41)$$

式中， m_t 为 TMD 附加质量块的绝对质量， m 为主结构的等效集中质量。在明确质量比之后，根据经典的 Den Hartog 最优调谐理论，针对主结构沿 X 轴方向的剪切平动振动，可进一步推导 TMD 的最优频率比。需要指出的是，Den Hartog 理论在其解析推导中考虑了 TMD 附加质量对原系统整体动力学属性的耦合影响；由于附加质量的引入不可避免地增加了增广系统的总惯性，为了在频域内实现减振双峰幅值相等的“压平”最优化效果，TMD 的最优调谐频率必须相较于主结构的固有频率进行适度的理论折减。据此，可精确得到该 TMD 的最优调谐频率比解析表达式为：

$$f_{\text{opt},x} = \frac{1}{1 + \mu_x} \quad (42)$$

进一步地，TMD 最优阻尼比的理论确定本质上根植于经典的定点理论。在频域分析中，当系统被赋予不同的阻尼参数时，其产生的所有频率响应曲线均会严格交汇于两

个不随阻尼变化的不变定点。通过精细调谐系统参数以使得这两个定点处的共振幅值达到等高，并基于极小极大原理（Minimax criterion）——即在全频域内寻求最大位移响应幅值的最小化——可以推导出 TMD 的最优阻尼比。具体而言，该最优阻尼比 $\zeta_{\text{opt},x}$ 的解析表达式可写为：

$$\zeta_{\text{opt},x} = \sqrt{\frac{3\mu_x}{8(1+\mu_x)}} \quad (43)$$

设主结构沿 X 轴向剪切模态的固有圆频率为 ω_{nx} ，结合前述推导的最优频率比 $f_{\text{opt},x}$ ，即可精确得出 TMD 附加质量块在 X 方向上的目标调谐圆频率 ω_{tx} 为：

$$\omega_{tx} = \omega_{nx} f_{\text{opt},x} \quad (44)$$

随后，TMD 悬臂梁在 X 方向上所需的物理等效刚度 k_{tx} 即可被计算：

$$k_{tx} = m_t (\omega_{nx} f_{\text{opt},x})^2 \quad (45)$$

同理，对于扭转模态的控制设计，需要注意其内在机理无法通过常规的平动质量比进行简单等效。鉴于 TMD 装置布置于偏心节点，其附加质量块的局部平动将借助偏心距的“杠杆效应”转化为全局的抵抗扭矩。因此，在进行抗扭调谐时，必须将 TMD 的质量折算为等效转动惯量。在此，引入 TMD 与主结构之间的等效转动惯量比 μ_θ ，其解析定义为

$$\mu_\theta = \frac{m_t x_t^2}{J_z} \quad (46)$$

式中，分子 $m_t x_t^2$ 物理上表征了 TMD 质量块相对于主结构质心所产生的附加等效转动惯量，而 J_z 则为主结构绕竖直 Z 轴的全局等效转动惯量。

也就是说，我们的方法是先通过模态分析得到主结构的剪切频率，再根据选定的 TMD 质量计算最优频率比，最后反推出悬臂梁在 X 方向上需要具有的等效刚度。

同样的方式，但值得注意的是，与剪切模态不同，扭转模态不能只通过普通的质量比来描述。因为 TMD 安装在偏心位置，质量块的平动会通过偏心距离形成扭矩，所以我们需要将 TMD 的质量折算成等效转动惯量。主结构扭转模态的固有自振圆频率为 $\omega_{n\theta}$ ，将上述惯量比代入 Den Hartog 最优调谐关系，可得 $f_{\text{opt},\theta} = 1/(1+\mu_\theta)$ 与 $\zeta_{\text{opt},\theta} = \sqrt{3\mu_\theta/[8(1+\mu_\theta)]}$ 。据此，TMD 在扭转控制维度上的目标调谐圆频率即被确定。进而，依据单自由度振子的动力学本构关系，TMD 悬臂梁沿 Y 轴方向所需的等效物理弯曲刚度 k_{ty} 可唯一反演为

$$k_{ty} = m_t (\omega_{n\theta} f_{\text{opt},\theta})^2 \quad (47)$$

之所以将 Y 轴方向的抗侧刚度与全局扭转模态深度绑定,是因为 TMD 在该方向上的相对运动能通过 X 向偏心距 x_t 产生直接的抵抗扭矩,从而主导了减振系统对主结构扭转共振的耗散能力。至此,通过相应的逆向动力学分析,本文已成功提取出 TMD 悬臂梁在 X 与 Y 正交方向上所需的理论目标刚度。为实现该理论模型的工程物理落地,下一步需基于固体力学中的悬臂梁挠曲变形理论,将上述理想刚度精确映射并反推出悬臂梁的实际几何特征参数,即其有效长度、截面宽度与厚度。

假设 TMD 悬臂梁的有效计算长度为 L_t ,制作材料的杨氏模量为 E ,其矩形截面的宽度与高度分别为 b 和 h 。依据经典材料力学中的欧拉-伯努利悬臂梁挠曲变形理论,该梁在两个正交主轴方向上的等效抗弯刚度可表达为

$$k_{tx} = \frac{3EI_y}{L_t^3} = \frac{Ehb^3}{4L_t^3}, \quad k_{ty} = \frac{3EI_x}{L_t^3} = \frac{Ebh^3}{4L_t^3} \quad (48)$$

由此公式可见,通过参数化调节截面的几何尺寸,能够准确控制悬臂梁在正交方向上的抗弯能力。由于本设计刻意采用了非对称的矩形截面构型,使得截面惯性矩相互独立,从而赋予了刚度 k_{tx} 与 k_{ty} 截然不同的物理数值。这一截面各向异性设计使单一悬臂梁构件能够同时匹配剪切平动模态与扭转模态的双重独立调谐要求。

此外必须着重指出,在减振系统的闭环设计中,除惯性质量与弹性刚度外,耗能阻尼同样是决定控制效能的关键参数。若系统阻尼配置过小,TMD 自身的共振冲程将过度放大,不仅存在冲撞限位器的物理风险,亦无法高效吸收主结构的振动能量;反之,若阻尼配置过大,则会产生阻尼“锁死效应”,严重限制附加质量块的相对运动幅值,进而大幅削弱其共振调谐减振能力。依据前述的极小极大原理,针对剪切模态与扭转模态已分别理论推导出理想的最优阻尼比 $\zeta_{opt,x}$ 和 $\zeta_{opt,\theta}$ 。然而,在工程制造的物理限制下,实际敷设于悬臂梁表面的黏弹性阻尼层难以在两个正交挠曲方向上分别提供完全解耦且数值迥异的耗能特性。为寻求理论最优解与工程可实现性之间的最优平衡,本研究提出一种理性的妥协策略:采用这两个独立最优阻尼比的算术平均值作为该减振装置的最终设计阻尼比,即

$$\zeta_{final} = \frac{\zeta_{opt,x} + \zeta_{opt,\theta}}{2} \quad (49)$$

此种工程折中处理方式虽然在严格的数学意义上偏离了剪切与扭转各自模态的绝对理论最优状态,但它在平动控制与扭转控制之间实现了工程折中。这种设计使得偏心双向 TMD 能够克服实际制造工艺的局限,在真实服役状态下兼顾并高效抑制结构最核心的两种耦合振动响应。在完成上述全套无量纲变量与物理构件参数的理论推导及标定后,所设计出的完整 TMD 控制器模型将被耦合至前文构建的凝香亭六自由度增广动力学系统方程中。随后,本研究将全面转入数值评估阶段,通过复模态特征提取、稳态频率响应函数(FRF)分析,来定量地验证该新型偏心双向减振装置在复杂动荷载下的动态控制效能。

6.3 设计结果

基于前文建立的凝香亭简化动力学模型及其提取的模态特征，本节开展了数值仿真分析，以量化评估所设计的偏心双向调谐质量阻尼器的减振效能。对于未附加减振装置的原始主结构（即无控状态），考虑到传统古建木构件的材料耗能特性以及榫卯节点在变形过程中的摩擦滑移机制，本研究设定主系统的固有阻尼比约为 2%。在减振系统的参数配置中，综合考量结构的承重限制与工程可行性，预设该装置的平动质量比约为 10%。随后，严格依据前文推导的最优调谐理论公式（即式 (42) 与式 (49)），对该装置的核心物理参数进行了精确求解。计算结果表明，该减振系统的理论最优设计阻尼比约为 14.67%；在频率调谐参数方面，针对平动弯曲模态的最优频率比经计算为 0.91，而针对扭转模态的最优频率比则被精确调谐为 0.96。

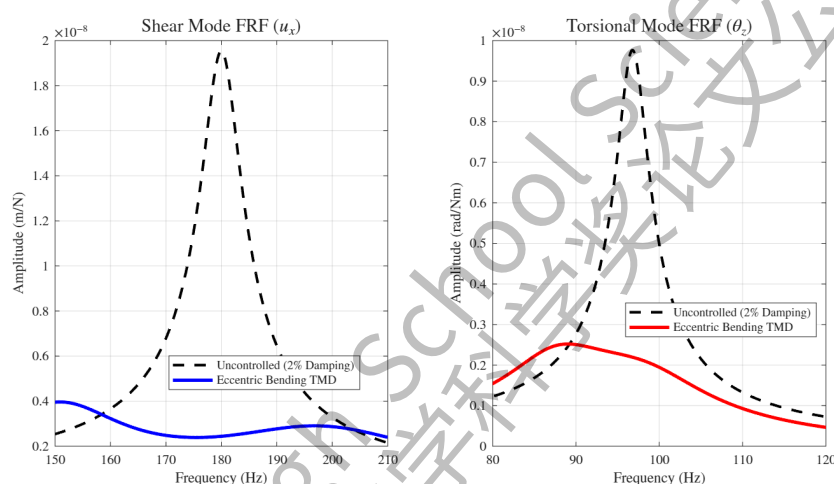


图 28: 偏心弯曲 TMD 对剪切模态和扭转模态频率响应的影响（左：弯曲模态；右：扭转模态）

上述数值仿真结果表明，所设计的偏心双向 TMD 展现出了较好的减振效果：在平动弯曲模态下，主结构的振动响应幅值实现了高达 80% 的显著衰减；而在平扭耦合更加复杂的扭转模态下，亦达到 70% 的减振率。进一步从结构局部变形与固体力学的角度考量，宏观振动位移的大幅降低通常有助于减小构件内部应变场的显著缩减，进而减小关键节点的峰值应力。这一应力集中现象的有效缓解，可能提高该木构古建抵御长期交变荷载引发的高周疲劳破坏，以及极端强震作用下低周塑性变形失效的能力，从而为保障建筑本体的结构完整性与延长其服役寿命提供了一定的参考。

7 阻尼材料的频变特性标定：基于准静态试验的方法

前一小节已在理论层面确定了减振器的最优阻尼比。随之而来的核心工程挑战在于，如何有效评估市场上现有的商业橡胶材料，以在物理实体中精确复现该目标阻尼比。此外，黏弹性橡胶的阻尼特性具有显著的频率依赖性，如何准确表征这一材料属性对于减振器的成功应用至关重要。传统上，通常采用动态热机械分析仪（Viscoanalyzer）并结合时温等效原理，通过低温环境下的复模量来等效获取材料的常温高频阻尼和弹性模量。然而，该类高精密测试仪器造价高昂，对于高中生主导的科研项目而言往往难以获取。针对这一硬件条件限制，本文提出并采用了一种基于准静态加卸载曲线（迟滞回线）的低成本材料测试新方法。该方法引入松弛模量的定义，对频率依赖曲线进行等效外推，最终实现了对特定橡胶材料在目标控制频率下实际阻尼性能的评估。

7.1 理论背景

对于处于线性黏弹性区域的橡胶材料，其随时间变化的瞬态应力响应在数学上可表示为松弛模量与应变率的时间卷积积分（见式 (50)）。因此，该材料当前的应力状态不仅取决于瞬时应变，更高度依赖于其过往完整的加卸载应变历史。

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (50)$$

对于材料阻尼的分析，通常我们假设对材料施加稳态的正弦简谐激振（如式 (51) 所示）。

$$\epsilon(t) = \epsilon_a \sin(\omega t) \quad (51)$$

将该简谐应变表达式代入式 (50) 后，所提取出的橡胶应力响应可自然解耦为两个分量，如式 (52) 所示。

$$\sigma(t) = E' \epsilon_a \sin(\omega t) + E'' \epsilon_a \cos(\omega t) \quad (52)$$

从物理本质上看，该应力响应的第二项与施加的激振应变之间存在严格的 90° 相位滞后。由于材料的应变能定义为应力对应变的积分，当该相位差导致应力与应变乘积为负值时，即表征了机械能向热能的不可逆转化与耗散。在复数域的数学框架下，虚数单位 i 可表示这一 90° 的相位超前或滞后关系。由此，材料的动态本构关系可由复动态模量表征。

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (53)$$

在该复数表达式中, 实部 E' 代表储能模量, 主导了材料内部可逆的弹性应变能; 虚部 E'' 则代表损耗模量, 直接量化了系统耗散的能量。其中, φ 为应力与应变之间的损耗角, $\eta = \tan \varphi$ 为损耗因子, 即损耗模量 E'' 与储能模量 E' 的比值。

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{E''}{E'} \right), \quad \eta = \tan \varphi = \frac{E''}{E'} \quad (54)$$

针对本文所提出的材料表征方法, 本研究采用了准静态加卸载循环测试来提取橡胶的真实阻尼特性。从动力学等效激振的角度分析, 将这一连续且单调的加卸载物理过程合理近似为标准三角波激振序列的周期, 在运动学上是在所述假设下合理的。在严格设定测试设备运行于恒定应变率控制模式下 (即加载与卸载速率保持绝对常数) 的基本假设前提下, 完成整个单向加载阶段所需的物理时间跨度即可被明确推导为:

$$t_L = \frac{\Delta\delta}{v_L} \quad (55)$$

式中, $\Delta\delta$ 代表橡胶试件在拉压过程中所经历的绝对控制变形量 (即物理位移), 而 v_L 表示试验机施加的恒定加载速率。

基于完全相同的运动学原理, 试件从最大变形状态回弹至初始状态, 完成整个卸载阶段所需的物理时间同样可推导为:

$$t_U = \frac{\Delta\delta}{v_U} \quad (56)$$

式中, v_U 为控制系统在回弹阶段施加的恒定卸载速率。基于前文将整个“加载-卸载”物理历程严格等效为半个动态激振周期的核心力学假设, 该等效动态三角波的完整基础周期即可顺理成章地被构建为:

$$T_{eq} = t_L + t_U \quad (57)$$

进而, 该等效加卸载动力学模式的基础激振频率 (基频) 即可通过上述完整周期的倒数精确求得, 其解析表达式为:

$$f_{eq} = \frac{v_L v_U}{\Delta\delta (v_L + v_U)} \quad (58)$$

然而, 鉴于该等效三角波激振在波形特征上仍与理想的稳态正弦波存在固有差异, 为实现两种激振模式下耗散能量的严格数学等效, 本研究系统性地引入了傅里叶级数展开 (Fourier series expansion)。通过该积分变换机制, 连续的三角波信号被分解为基频及其对应的各阶高次正弦谐波分量, 从而建立起时域三角波与频域正弦响应之间的精确解析映射:

$$x(t) = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin(n\omega_0 t) \quad (59)$$

尽管经过傅里叶级数提取出的第一阶基频正弦分量，在激振频率上与原始的等效三角波保持严格一致，但第三阶、第五阶乃至更高次谐波分量的客观存在，不可避免地材料阻尼特性的精确表征引入了一定的理论不确定性。然而，从宏观热力学与能量守恒的物理视角来看，高阶谐波的能量占比随阶数迅速衰减，系统的主导耗散行为仍由基频控制。因此，该等效三角波激振在一个完整周期内所耗散的机械能，可直接通过对准静态加卸载试验中应力-应变迟滞回线（Hysteresis loop）所包围的几何面积进行数值积分来精确量化。对于该三角波激励模式，其单圈耗散能的解析表达式可写为：

$$W_d = \pi \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n E''(n\omega_0) \varepsilon_n^2 \quad (60)$$

基于前述的傅里叶级数展开解析，各阶正弦谐波的应变幅值 ε_n 与其阶数 n 的平方严格呈反比关系（即 $\varepsilon_n \propto n^{-2}$ ）。从能量耗散的物理机制来看，这意味着随着谐波阶次的升高，高频分量对系统总耗散能的贡献呈随阶数快速减小。为了评估由高次谐波截断所引发的理论误差，并定量评估其对最终损耗因子估算所带来的不确定性影响，本研究专门引入了一项参数敏感性分析。

我们假设系统的损耗因子约为 0.4。利用傅里叶级数，可以将三角波分解为多个具有不同谐波频率的正弦波分量。在线性黏弹性假设下，每个正弦波分量都会形成一个典型的椭圆形滞回环，而所有分量的叠加可以重构三角波加载下的滞回响应。具体的分解与重构结果如图 29 所示。

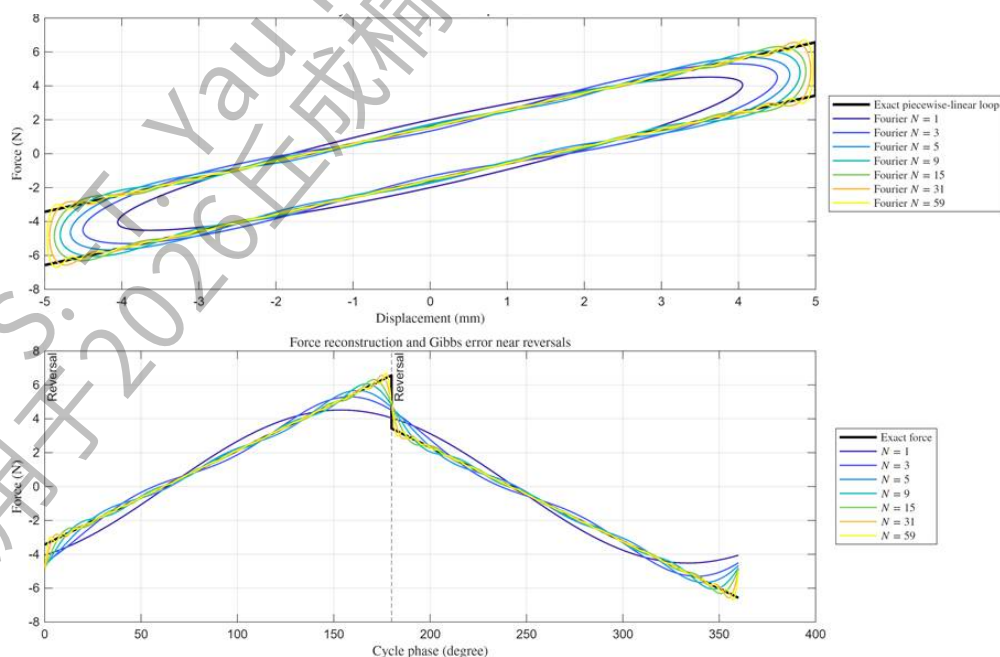


图 29：基于傅里叶级数的三角波加载分解与重构结果：(a) 滞回环重构；(b) 力的重构

从图 29 可知，傅里叶级数的低阶谐波主要决定滞回环的整体形状和包围面积，而高阶谐波主要用于描述加载方向反转处的快速变化。提高滞回环的重构精度有助于更准确地估算材料的阻尼和能量耗散特性。随着阶数增大，重构曲线逐渐接近理想的分段线性滞回环。

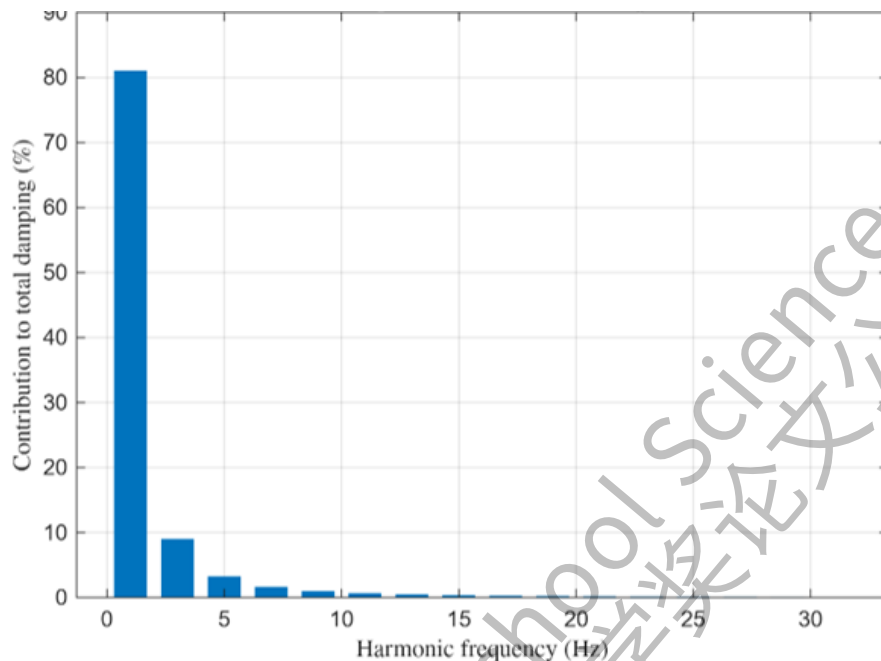


图 30: 不同阶次谐波分量对总能量耗散的贡献比例

图 30 展示了不同阶次谐波分量对系统总能量耗散的贡献。结果表明，第一阶谐波，即基频正弦分量，贡献了约 80% 的总耗散能量；随着谐波阶数升高，各阶分量的贡献迅速减小。

因此，如果三角波试验得到的损耗因子代表所有谐波分量的总贡献，而研究目标是估算基频正弦加载下的损耗因子，则可以采用第一阶谐波的能量贡献比例进行近似修正：

$$\eta_{\text{sine}} \approx 0.8\eta_{\text{triangle}} \quad (61)$$

其中，系数 0.8 表示基频正弦分量对三角波总耗散能量的近似贡献比例。换言之，本项目中由三角波加载得到的损耗因子需要乘以约 0.8，才能得到对应的基频正弦分量的近似损耗因子。

综上所述，利用等效三角波理论估算材料阻尼的数学一致性已得到初步检验。随之而来的关键实验挑战在于，如何高精度地获取橡胶材料在加卸载过程中的真实力-位移迟滞曲线。理论上，采用圆柱形试件进行传统的单轴压缩试验是一种常规标准方法。然而，在受限的实验设备条件下，该方案面临多重严峻的物理瓶颈。首先，橡胶材料在压缩模式下极高的表观刚度需要极大的载荷才能达到所需的目标应变水平。其次，试件产生的巨大反作用力极易导致试验机压缩机构（Compressing head）产生不期望的柔性让

位与微小形变，从而为力-位移的真实测量数据引入显著的机架柔性误差。此外，这种剧烈的加载阻力会引起试验机驱动电机输出扭矩的显著波动，进而严重破坏加载速率的均匀性——而“恒定加载速率”正是前文等效动力学推导中最核心的先决理论假设。综合考量上述全部限制因素，本研究选择采用三点弯曲（Three-point bending）测试构型。相较于单轴压缩，弯曲模式能够在显著降低的外加荷载下使试件实现充分的整体变形。这一策略不仅降低了电机扭矩的波动，从物理底层确保了应变率的严格恒定，同时亦提高了加载夹具与横梁的机械稳定性。因此，本文后续所有的力学建模、参数反演与数据分析均将严格聚焦于三点弯曲实验范式。

针对三点弯曲测试构型，基于经典的欧拉-伯努利梁理论（Euler-Bernoulli beam theory），矩形截面橡胶试件在跨中集中荷载作用下的宏观载荷-挠度关系可被解析表达为：

$$\delta_b = \frac{FL^3}{48EI} \quad (62)$$

式中， F 为试验机施加的跨中集中载荷， δ_b 为对应的跨中挠度， E 为材料的等效弹性模量， L 为三点弯曲夹具的有效支撑跨距， I 为试件截面惯性矩。对于宽度为 b 、厚度为 h 的标准矩形截面试件，其截面惯性矩为

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (63)$$

需要特别指出的是，本研究在进行理论建模时并未引入铁摩辛柯（Timoshenko）剪切变形修正。相关文献研究 [13] 已经明确证实，在此类测试构型下，由横向剪切变形所引起的附加位移仅占宏观总挠度的 2% 左右。因此，这种微乎其微的剪切效应完全落在工程允许的误差范围之内，不会对材料整体阻尼特性的精确估算产生任何实质性干扰。摒弃复杂的剪切修正，直接基于结构力学中刚度的基本物理定义，该橡胶试件的三点弯曲等效刚度 K 即可被推导表示为：

$$K = \frac{48EI}{L^3} \quad (64)$$

鉴于在等效动态力学框架下，橡胶材料的弹性模量 E 本质上表现为复数形式，且前述推导已证实在三点弯曲构型下，结构等效刚度 K 与材料模量 E 存在严格的线性正比例关系。因此，该弯曲试件的整体刚度必然同步继承这一复数属性，即转化为复刚度。基于这一相应的数学与力学映射关系，表征材料内在耗能特性的损耗因子 η 即可从宏观刚度层面进行定义，较为简便地从宏观结构刚度的维度予以等效定义，其最终的解析表达式为：

$$\eta = \tan \delta = \frac{K''}{K'} \quad (65)$$

因此，无需借助昂贵的动态高频测试设备，通过直接对三点弯曲实验所测得的宏观力-位移迟滞回线进行面积积分计算，即可较为精确地反演获得该橡胶材料在等效基频下的实际能量损耗。

7.2 实验设备

为开展上述材料表征实验，我们专门研发并搭建了一套简易的载荷-挠度测试平台（系统总览详见图 31）。

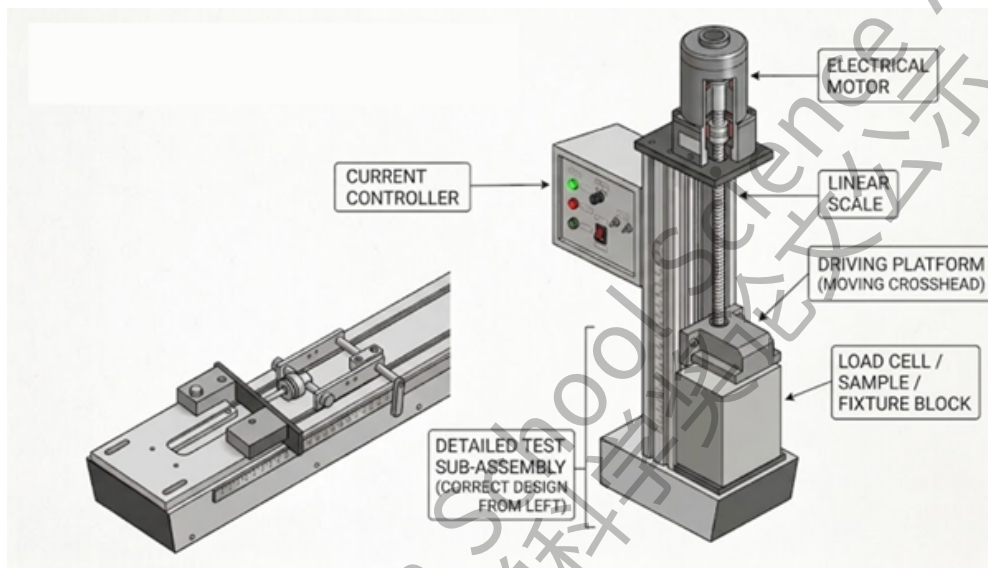


图 31: 三点弯曲测试平台结构示意图。

该测试系统的核心设计亮点在于其采用了水平卧式工作架构，这一构型不仅减少了垂直布置中重力对定位精度的干扰，还极大简化了传感器的安装需求。整个测试平台由电流控制器、驱动电机（M540-402 型）、丝杠滑台、运动平台、高精度压力传感器（DS2-200N-XD 型）以及橡胶试件固定基座等核心机电组件构成。在底层控制机理上，电机的输出扭矩与驱动电流严格成正比，通过精密调节电流的幅值与极性，即可准确控制压缩平台的直线进给速度及其加卸载（前进与后退）的运动方向。在机械传动端，驱动平台的中心位置由双螺母锁紧的螺柱提供了一个平整的推力面（见图 32）。

对于这个试验台，压力传感器无需与驱动平台进行复杂的刚性机械绑定，而是可以直接自由放置于推力螺母与施压组件之间，并使用双面胶连接。该施压组件末端配备了一个半径为 3 毫米的球形压头，以确保跨中集中荷载的准确施加。压力传感器用于采集压力的数字信号，对于这个实验而言，压力传感器的采样频率为 2000Hz。在试件支承端，橡胶试件下方布置有两个矩形铝合金支承块，两者之间的净间距被精确标定为 40 毫米。这两个支承块通过螺纹紧固于下方的大型铝合金主基座上，而该主基座则通过底部凹槽与整体丝杠滑台无缝对接。特别值得一提的是，在基座的连接装配处设置了两个长圆形槽孔（Slotted holes），这一容差设计不仅为系统装配提供了充足的调节余量，从而确保了整个加载轴线的水平与高精度对中。



图 32: 自主设计的测试台架（支撑 + 施力组件）

在橡胶位移的测量方面，由于受限的测试条件限制我们并未配备位移传感器。作为替代方案，我们使用丝杆滑台的转动速度进行间接推算。鉴于压力传感器的数据采集系统保持着 2000 Hz 的严格恒定采样频率，通过精确统计加卸载历程中所记录的离散数据点数量，并结合平台的恒定进给速率，即可在时间域上精确积分出瞬态位移。为确保平台移动速度估算的准确性，系统在正式测试前经历了相应的运动学标定程序。具体而言，向控制系统输入特定的驱动电流，并记录运动平台在预设时间窗口（设定为 5 秒）内的总行程。该物理移动距离通过平行安装于测试平台侧面的刻度基准尺进行精确读取。基于行程与耗时的比值，即可成功建立不同输入电流与平台直线运行速度之间的校准映射关系。最终，针对后续的材料阻尼表征，本研究精心标定了三种不同的目标加载速率：0.5 mm/s、0.7 mm/s 以及 1.4 mm/s。



图 33: 平台运行速度运动学标定的实验装置图。

7.3 实验结果与分析

图 34 直观展示了准静态三点弯曲测试中提取的典型载荷-时间历程曲线。

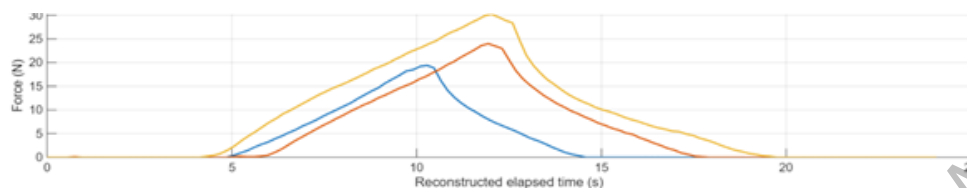


图 34: 典型力—时间历程曲线

受限于驱动电机的电控响应与机械惯性，系统在由正转（加载阶段）向反转（卸载阶段）切换时存在固有的换向延迟。这一硬件迟滞在历程曲线上显式表现为加卸载转换阶段的平坦应力峰值（Load plateau）。在后续的数据后处理中，本研究对该静态保载波段进行了合理的截断滤除。由于该静止波段内未发生任何位移变化，即不产生额外的做功与能量耗散，因此该截断操作在物理上合理，完全不会对最终阻尼参数的评估产生任何偏差。此外，鉴于本测试平台的电机系统采用开环控制架构，理论上无法实现带载速度的闭环反馈修正。为补偿外部物理抗力可能引发的潜在速率微小衰减，本研究在计算等效动力学频率时（见式 (58)），严格将加载与卸载的实际行程时间同时纳入模型，从而最大化了时频映射的精确度。在接触力学层面，尽管橡胶试件在施压过程中会不可避免地发生微观滑移（Micro-slip），导致每次重复测试的局部接触边界条件出现极微小波动（受限于极小的变形幅度，此类滑移在宏观上难以用肉眼甄别）。然而，结构刚度的变化从根本上受控于材料本构非线性与几何大变形非线性。由于本实验预设的跨中挠度极小，橡胶材料始终严格服役于线弹性微变形区间。因此，这种由边界微观扰动引起的轻微载荷偏差，在数学计算上完全不会对最终等效杨氏模量与损耗因子的稳定求解构成实质性干扰。

针对设定的三种加载速率，系统分别平行执行了三次独立的加卸载循环（Run 1-3）以验证数据的重复性（见图 35）。

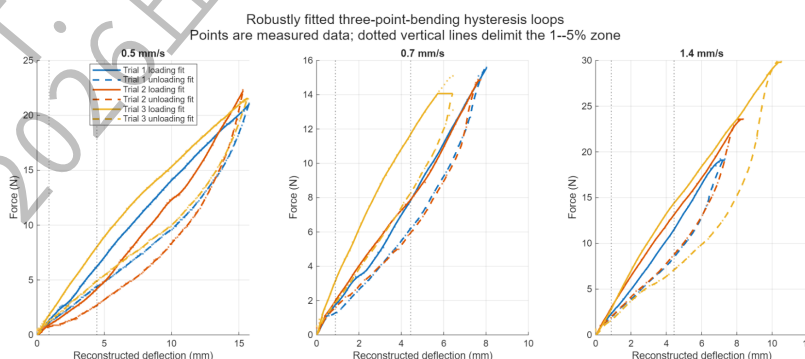


图 35: 不同加载速度下橡胶样品的力位移滞回曲线

在提取的原始力-位移迟滞曲线中，甄别出两个具有显著离散特征的异常样本。其一是在 0.5 mm/s 加载速率下的第二次测试（Trial 2），其曲线呈现出显著的异常刚化现象。

从接触力学角度剖析, 这种现象并非源于橡胶材料本身的微观软化或硬化本构, 而是由测试初期的物理接触缺陷所致。极大概率是由于压头与试件表面存在初始微观间隙, 或试件在基座上未完全找平。这导致前 5 mm 的推算位移被大量消耗在了“压实间隙”或“推平表面形貌”的过程中 (即经典力学测试中的“趾区效应”), 而并未真实转化为试件内部的有效弹性应变能。其二是在 0.7 mm/s 加载速率下的第三次测试 (Trial 3), 该曲线不仅在峰值区域出现明显的奇异截断, 且整体表观刚度异常偏高。这种突变行为与橡胶材料常规的屈服或松弛机制完全脱节, 物理上极有可能是试验机夹具或试件支承端发生了严重的宏观滑移, 导致边界条件瞬间重构。鉴于上述两个异常工况 (Outliers) 的产生机制均归咎于外部物理干涉而非材料内在属性, 为确保本构分析的可靠性, 这两组离群数据在最终的杨氏模量与损耗因子计算中被严格予以剔除。

在经典力学中, 黏弹性材料的复动态模量高度依赖于施加的激振频率, 这一现象已在相关研究中得到广泛讨论。为了系统性地探究并量化这一频率相关性的内在物理机制, 本研究引入了经典的动力学理论模型进行分析。针对材料在服役中所承受的典型周期性动态激振, 基于傅里叶级数 (Fourier series) 展开原理, 将材料的瞬态应变响应等效并表达为标准的简谐激振序列, 在力学上是在所述假设下可接受的。

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (66)$$

式中, ε_0 为动态激振的应变振幅, 而 ω 代表系统的圆频率。将上述定义简谐应变的式 (66) 代入至前文推导的微分本构式 (50) 中, 即可严格求解出橡胶材料在稳态受迫振动下的动态应力响应, 其解析表达式为:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \left[i\omega \int_0^\infty E(s) e^{-i\omega s} ds \right] \quad (67)$$

基于上述积分代换, 将系统响应转换至频域维度后, 即可利用动态应力与动态应变之比, 对该黏弹性材料频率相关的复数模量 $E^*(\omega)$ 进行相应的物理定义。其最终解析表达式可写为

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} \quad (68)$$

根据欧拉公式 (Euler's formula) 的数学解析法则, 复指数时域项可被展开为包含实部与虚部的三角函数组合, 即:

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (69)$$

通过将应变激振模型 (式 (66))、动态应力响应 (式 (67)) 以及欧拉解析法则 (式 (69)) 同步代入至基础复数模量定义式 (式 (68)) 中进行相应的代数降解与解耦, 该黏弹性材料的频域复数模量即可被最终解析表达为:

$$E^*(\omega) = \left[\omega \int_0^\infty E(s) \sin(\omega s) ds \right] + i \left[\omega \int_0^\infty E(s) \cos(\omega s) ds \right] \quad (70)$$

在上述解析表达式中，复数模量等式右侧的第一项即为表征材料弹性储能特性的储能模量，而第二项则为表征粘性耗散特征的损耗模量。然而，在真实的宏观物理世界中，诸如橡胶此类的高分子黏弹性材料并非受控于单一的松弛机制。由于其内部高分子链段网络长度与缠结状态的极度复杂性，该类材料本质上具有较为广泛的多重松弛时间 (Multiple relaxation times) 谱。为了更精确地捕捉这一微观复杂的宽频本构行为，通常需要引入广义麦克斯韦模型 (Generalized Maxwell model) 或 Prony 级数进行高阶表征。在此理论框架下，该材料在频域内的真实动态弹性模量可被展开与表示为：

$$E(s) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-s/\tau_i} \quad (71)$$

在上述方程中， E_∞ 表示材料的平衡模量 (Equilibrium modulus)，其物理实质可被定义为当观测时间趋于无穷大（即材料处于完全松弛状态）时，系统所保留的长期渐近弹性抵抗能力。此外， E_i 与 τ_i 分别代表在第 i 阶独立松弛机制中，相应的弹性模量贡献分量与其固有的特征松弛时间。为了进一步解耦系统的黏弹性行为，将包含多重松弛时间谱的定义式（式 (71)）严格代入至复数模量频域基础方程（式 (70)）中，该材料宏观的储能模量与损耗模量即可被重新展开并解析写为：

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{E_i (\omega \tau_i)^2}{1 + (\omega \tau_i)^2}, \quad E''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{E_i \omega \tau_i}{1 + (\omega \tau_i)^2} \quad (72)$$

在真实的物理构型中，鉴于高分子聚合物内部长链分子缠结的极度复杂性，其松弛机制往往是无限且连续分布的。因此，当上述方程中描述松弛机制的级数 N 趋于无穷大 ($N \rightarrow \infty$) 时，离散的 Prony 级数求和便在数学极限上较为平滑地转化为了连续积分形式。基于这一渐近极限过程，材料的连续松弛模量分布即可被重新构建，其动态弹性模量相应地转化为以下连续谱积分格式：

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= E_\infty + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) \frac{(\omega \tau)^2}{1 + (\omega \tau)^2} d(\ln \tau), \\ E''(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} d(\ln \tau) \end{aligned} \quad (73)$$

在上述连续积分方程中， $H(\tau)$ 代表材料的连续松弛时间谱。深入至高分子微观力学层面，聚合物链段的蠕动与网络解缠结运动遵循特定的统计热力学规律。基于此微观物理机理，可以合理地假设该连续松弛谱在时间域内呈现出一种典型的指数衰减 (Exponential decay) 函数分布形态，其解析表达式可构建为：

$$H(\tau) = H_0 \tau^{-\alpha} \quad (74)$$

式中, H_0 为表征谱初始强度的内在材料常数, 而 α 则代表该松弛过程的指数阶数 (用以量化松弛谱的展宽效应)。通过将上述假设的指数型松弛谱分布函数 (式 (74)) 代入连续复数模量的积分主方程 (式 (73)) 中进行解析求解, 该黏弹性材料最终的复数模量即可被降解并表达为:

$$E'(\omega) - E_\infty = H_0 \omega^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2} dx, \quad E''(\omega) = H_0 \omega^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x^2} dx \quad (75)$$

由上述积分结果可知, 橡胶的储能模量与损耗模量最终均表现为频率相关的指数函数形式。针对本研究所选用的丁腈橡胶 (NBR) 材质而言, 其典型的玻璃化转变温度 (T_g) 远低于 -30°C [13]。根据时温等效原理 (TTSP) 所揭示的温度-频率等效映射关系, 引发该材料发生玻璃化转变的特征临界频率大致落在 10^5 Hz 的高频量级。因此, 结合本系统实际的服役工况, 该橡胶试件在整个工作频段内始终稳定运行于高弹态 (Rubbery zone) 区间, 并未跨入玻璃态或过渡态。基于这一坚实的物理前提, 前述推导出的连续谱本构关系 (式 (75)) 在当前分析框架下在当前分析范围内仍然适用。

因此, 本文分别对储能模量和损耗模量进行了指数拟合, 拟合结果如图 36 所示。

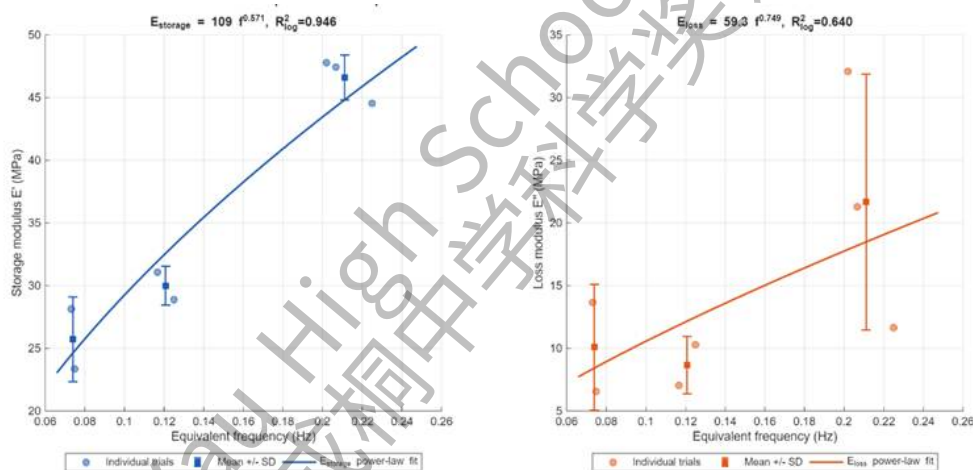


图 36: 加载和卸载过程中橡胶表观模量与等效频率的关系 (左: 储能模量; 右: 损耗模量)

储能模量和损耗模量的拟合公式分别为:

$$E' = 109 f^{0.571}, \quad E'' = 59.3 f^{0.749} \quad (76)$$

其中, f 为频率 (单位为 Hz)。储能模量拟合的决定系数 R^2 约为 0.946, 说明拟合效果较好。然而, 损耗模量的拟合结果存在较大的不确定性, 其 R^2 仅为 0.64。造成这一现象的一个可能原因是实验装置中存在摩擦, 例如支撑结构与橡胶试样之间的摩擦, 以及压头与力传感器之间的摩擦。由于橡胶试样尺寸较小, 橡胶本身耗散的能量相对较少, 因此, 即使实验装置中只存在较小的摩擦, 也可能引入较为显著的额外阻尼, 从而影响实验结果。

图 37 对比了基于拟合储能模量和损耗模量计算得到的损耗因子与实验结果。拟合损耗因子随等效频率的增加呈缓慢上升趋势，表明材料的能量耗散特性可能具有一定的频率依赖性。在三种加载速度下，拟合值均位于实验均值加减一个标准差的范围内，且模型没有表现出持续高估或低估的系统性偏差。因此，在当前实验条件和数据范围内，拟合结果与实验结果具有较好的一致性。然而，由于实验数据离散性较大且数据点数量有限，尚不能对损耗因子的频率依赖性作出强结论，仍需通过增加重复试验和频率测点进一步验证。

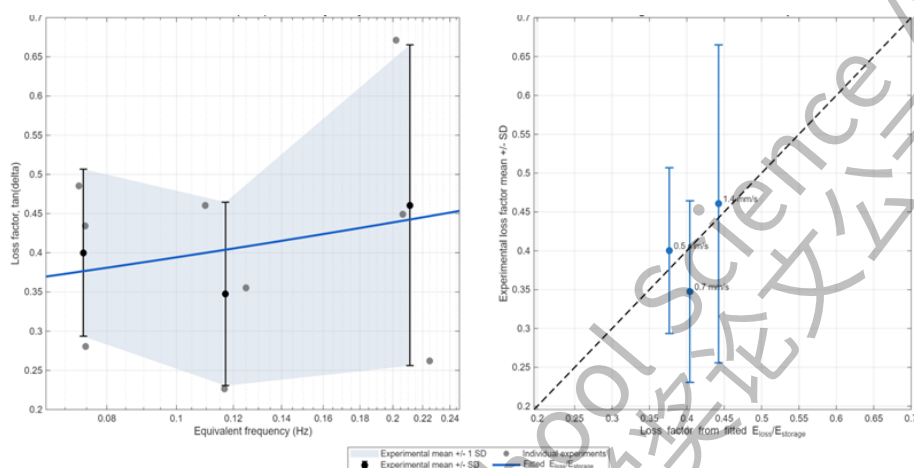


图 37: 基于拟合储能模量和损耗模量得到的损耗因子及其与实验结果的对比

7.4 本章小结

本章提出了一种基于准静态三点弯曲试验的低成本橡胶阻尼特性标定方法，用于解决传统动态热机械分析设备成本较高、难以获取的问题。该方法将恒速加载—卸载过程等效为三角波激励，并根据加载位移与实际运行时间计算等效频率；随后通过力—位移滞回环的面积获得单周期耗散能量，进而估算材料的储能模量、损耗模量和损耗因子。

为评估三角波与正弦波之间的等效性，本研究采用傅里叶级数将三角波分解为不同频率的正弦谐波。结果表明，第一阶基频分量约占总能量耗散的 80%，而高阶谐波的贡献随阶数增加迅速减小。因此，在当前模型假设下，可采用约 0.8 的修正系数，将三角波试验结果换算为基频正弦加载下的近似损耗因子。

在实验方面，本研究自主搭建了三点击弯测试平台，并在 0.5、0.7 和 1.4 mm/s 三种加载速度下开展重复试验。实验结果显示，储能模量与等效频率之间的指数拟合效果较好，决定系数 R^2 约为 0.946；损耗模量的拟合结果离散性较大， R^2 约为 0.64。尽管如此，由拟合模量计算得到的损耗因子均位于实验均值加减一个标准差的范围内，且未表现出明显的系统性高估或低估，说明该方法能够在当前实验条件下合理反映橡胶材料阻尼特性的频率变化趋势。

总体而言，本章建立了从准静态加载试验、等效频率计算、滞回能量提取到频率相

关阻尼参数拟合的完整方法，为后续减振器的阻尼设计提供了依据。由于目前的测试频率和重复试验数量有限，且结果可能受到装置摩擦、接触状态和间接位移估算的影响，未来仍需增加测试频率与样本数量，并通过直接位移测量或标准动态测试对本方法进行进一步验证。

8 结论和展望

8.1 主要工作

本文围绕传统木结构的动力特性识别、集中参数建模、减振装置设计与阻尼材料测试开展了连续研究。各部分工作由实验识别结果相互衔接，并共同服务于偏心双向 TMD 的参数分析。

在结构动力学研究中，本文通过缩比模型的力锤激振试验识别凝香亭的固有频率与模态振型，并结合三维有限元模型开展材料参数反演。考虑到单一各向同性参数难以同时描述弯曲和扭转响应，模型分别采用弯曲等效模量与扭转等效参数。由此建立的四自由度集中参数模型保留了屋盖平动、竖向运动和绕竖直轴扭转等主要自由度。与实验结果相比，该模型对扭转和弯曲频率的低估分别约为 15% 和 6.11%，说明其能够反映主要动力学趋势，同时仍受到节点刚度、构件连接和质量分布简化的影响。

在减振系统研究中，本文将双向 TMD 布置于屋盖偏心位置，使装置的水平恢复力通过偏心距形成抗扭力矩。基于主结构四自由度与 TMD 两个水平自由度，建立了六自由度质量、阻尼和刚度矩阵，并分别利用平动质量比与转动惯量比计算两个控制方向的调谐参数。悬臂梁矩形截面的两个主轴惯性矩相互独立，可用于调整正交方向的等效刚度。为简化实体阻尼元件，文中采用两个理论最优阻尼比的平均值作为设计值；这一处理属于工程近似，后续仍需通过参数敏感性分析检验其适用范围。

在材料参数测试中，本文搭建了准静态三点弯曲平台，将恒速加载—卸载过程近似为三角波，并利用傅里叶级数估计其基频正弦分量对应的损耗因子。测试覆盖 0.5、0.7 和 1.4 mm/s 的加载速度，力—位移迟滞回线用于计算耗散能、储能模量和损耗模量。该方案降低了对专用 DMA 设备的依赖，但位移由平台速度和采样时间间接换算，结果可能受到机架柔度、接触摩擦、速度波动和样本数量的影响。因此，本研究将其定位为面向装置初步选材的估算方法，而非标准动态材料测试的替代方案。

8.2 结论

本文形成了由实验模态分析、有限元参数修正、集中参数建模、TMD 数值分析和橡胶材料测试组成的研究流程。实验结果为模型校准提供目标频率和振型，简化模型为减振参数分析提供计算基础，材料试验则用于估计实体阻尼元件可能采用的橡胶参数。下述结论均限定于本研究的缩比试件、线性模型和加载条件。

力锤激振结果表明，凝香亭缩比模型除水平弯曲外，还存在明显的绕竖直轴扭转模态，因此仅采用单向平动模型不足以描述其主要响应。经有限元参数修正后，弯曲与扭转模态能够分别采用不同的等效材料参数进行描述。四自由度模型计算得到的模态顺序与实验观察一致，但扭转和弯曲频率仍分别低估约 15% 和 6.11%。这些偏差表明，集中参数模型适合用于控制方案的趋势比较和参数初选，不宜替代包含节点接触与构件细节的有限元分析。

在主结构阻尼比取 2%、TMD 平动质量比取 10% 的数值设定下，偏心双向 TMD 的设计阻尼比约为 14.67%，平动和扭转方向的频率比分别为 0.91 和 0.96。通过所设计的 TMD，我们可以使得弯曲与扭转响应峰值分别降低约 80% 和 70%。这些结果说明偏心布置具有同时降低平动和扭转响应的应力。

最终，我们通过准静态的材料测试，得到了材料阻尼的估算方法。通过静态加载卸载曲线，我们可以估计等效得材料耗损因子。值得注意的是，我们实际用于设计得阻尼系数因为我们实验估计得阻尼系数得 80 %。然后通过对储能模量指数与损耗模量得对数拟合，我们可以获得材料在常温高频下得损耗因子。由拟合模量计算的损耗因子在当前测试范围内与实验均值具有一定一致性，从而可以可作为 TMD 阻尼元件选材的初步参考。

8.3 展望

本研究目前完成了模型构建与初步数值验证，但然后一定空间可以进行提告。

现有实验和有限元模型主要针对小振幅线性模态。真实榫卯连接在较大变形下可能出现接触分离、局部挤压、摩擦滑移与刚度退化，这些行为会改变结构频率、阻尼以及 TMD 的调谐状态。后续可通过振动平台测试，来研究榫卯连接对于不同振幅得非线性。再将经标定的非线性节点模型引入整体结构分析，并比较这些非线性刚度对模态与地震响应的影响。

偏心双向 TMD 的效果目前主要由稳态谐波频率响应评价。实际地震动具有非平稳、宽频和随机特征，结构参数还会随温湿度、材料老化及节点松动发生变化。后续需要选取代表性地震记录开展时程分析，考察峰值位移、加速度、节点内力和 TMD 行程，同时通过参数扰动分析评估质量、刚度、阻尼及安装偏心误差引起的调谐失配。若控制效果对参数变化较敏感，还需进一步研究多重 TMD、半主动控制或更宽频的优化方案。

材料测试平台尚未配置直接位移传感器，当前位移由标定速度和采样时间换算。后

续可增加 LVDT，同步测量力、位移与平台运动，并通过空载试验和刚性试件试验分离机架柔度与装置摩擦。测试频率、试件数量和重复次数也需扩展，并与标准 DMA 数据进行交叉比较。在材料参数和控制参数得到独立验证后，可制作偏心双向 TMD 实体，开展扫频试验与振动台试验，检验模型预测、装置行程和实际减振效果之间的一致性。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

9. 参考文献

- [1] Pan L, Zhou M, Zhuang H, et al. Construction forms and seismic performance of the ancient Chinese buildings joined by tenon–mortise joints. *Applied Sciences*, 2022, 12(15): 7505.
- [2] Shiping H. The earthquake-resistant properties of Chinese traditional architecture. *Earthquake Spectra*, 1991, 7(3): 355–389.
- [3] Ye C, Xue J, Zhou R, et al. Shaking table test and numerical analyses of ancient timber structure with a double hip and gable roof. *Journal of Building Engineering*, 2025: 113835.
- [4] Fang S, Wang Z, Guo X, et al. Seismic performance of traditional Chinese timber structures with Geshan: Numerical and experimental study. *Structures*, 2025, 82: 110757.
- [5] Wang J, Cui Z, Yu L, et al. Analysis of the seismic behavior of traditional Chinese timber structures in the Tang Dynasty. *Structures*, 2022, 41: 447–462.
- [6] Meng X, Wang Z, Li T, et al. Study on the improvement of seismic performance of tower-style ancient timber structure by adding friction energy-dissipating braces between columns. *Structures*, 2025, 77: 109115.
- [7] Fang D P, Iwasaki S, Yu M H, et al. Ancient Chinese timber architecture. II: Dynamic characteristics. *Journal of Structural Engineering*, 2001, 127(11): 1358–1364. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:11(1358).
- [8] Li Z, Dong H, Wang X, et al. Experimental and numerical investigations into seismic performance of timber–steel hybrid structure with supplemental dampers. *Engineering Structures*, 2017, 151: 33–43. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.08.011.
- [9] Pizarro P N, Massone L M, Rojas F R. Simplified shear wall building model for design optimization. *Journal of Building Engineering*, 2023, 76: 107368.
- [10] Shabana A A. *Theory of Vibration*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [11] Niklas K J, Spatz H C. Worldwide correlations of mechanical properties and green wood density. *American Journal of Botany*, 2010, 97(10): 1587–1594.
- [12] Hutchinson J R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, 68(1): 87–92.

- [13] Menard K P. *Dynamic Mechanical Analysis: A Practical Introduction*. CRC Press, 2002.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

10 致谢

本项目的选题来源于我去贵州省黔东南苗族侗族自治州从江县高增乡的一次田野调查。通过走访当地居民家庭，我有机会近距离观察侗族木构建筑的整体布局、构件连接方式和日常使用情况，也亲身感受到了木结构房屋在行走和使用过程中的独特体验。同时，我有机会与当地侗族木构建筑国家级非物质文化遗产传承人杨光锦爷爷和当地居民深入交流，从实际生活和传统建造经验的角度认识中国木结构建筑。这些超越书本和图片的真实体验深深地激发了我对中国木构建筑的好奇心与探索欲，也由此激发了我对其结构特点、振动特性和抗震性能的研究兴趣。

在本文接近尾声时，我首先要感谢在田野调查过程中给予我支持和帮助的高增乡村民。感谢他们对我的到访和拍摄给予理解与支持，并愿意与我分享居住在木结构房屋中的生活经验。我还要特别感谢杨光锦爷爷。作为侗族木构建筑国家级非物质文化遗产传承人，他从传统掌墨师的角度向我讲解了木构建筑的搭建原理、构件连接方式和并用老照片的方式向我展示了实际建造过程。其次，我诚挚地感谢青岛二中物理组张睿老师和刘继祥老师对我的无偿指导，他们在理论研究、实验设计、实验器材搭建、实验数据处理、和论文撰写过程都为我提供了极大的帮助。在研究推进过程中，我们不断提出新的研究设想与问题。老师们始终耐心倾听并深入讨论，从理论依据、实验可行性和研究方法等方面给予指导，帮助我们将初步设想逐步转化为具有可行性的研究方案，并推动研究内容不断完善。

在本项目中，我主要负责资料查询与归纳、理论模型建立、有限元模型搭建以及实验设备搭建等工作。我和两位导师共同完成了实验数据处理、理论推导、研究讨论、论文撰写、修改和校对等工作。在研究过程中，我们曾在材料参数获取、实验数据处理和实验设备搭建等方面遇到许多困难。例如，在确定凝香亭的材料与刚度参数时，由于木材具有明显的各向异性，初始模型难以同时匹配实验测得的弯曲与扭转模态，因此我们进行了多次参数调整、模型修正和结果对比。在橡胶材料测试过程中，设备换向延迟、接触摩擦以及位移测量条件的限制也给实验和数据处理带来了困难。通过不断调整实验方案、检查异常数据并改进分析方法，我们逐步完成了本研究。然而，本研究仍存在不足，许多问题还需要在今后的学习和研究中继续探索与完善。

最后，谨以此文感谢所有曾经帮助和支持过我的人，他们的支持、关心与鼓励激励着我始终以饱满的热情和严格地自我要求完成次项目。这段完整的科研经历使我对科学研究的严谨性和长期性有了更深的认识，也为今后的学习与科研奠定了基础。我将以此为起点，在未来学习与科研之路上笃行致远。

11 人工智能工具使用说明

本论文在撰写、排版及程序调试过程中使用了 Google Gemini (Gemini 3.1 扩展)。该工具的具体使用范围严格限定于辅助性学术文本处理与编程技术支持环节：主要用于对文稿进行错别字与语病校对 (Proofread) 以优化学术行文流畅度；将作者自主起草的部分英文草稿段落翻译为中文并进行文意校对润色，以及辅助研读外文参考文献时的术语汉译对照；将 Word 文稿中的数学公式、数据表格及章节结构转换为标准 LaTeX 排版代码；辅助排查作者自主编写的 MATLAB 脚本中的语法错误 (Code Debugging) 并优化数据可视化绘图 (Plotting) 的版面与图例样式。该工具未参与任何学术观点的提出、核心机理建模与算法逻辑的设计，亦未生成或篡改任何实验及仿真数据，更未参与实质性结论的推导。所有由 AI 辅助翻译、润色的文本及修改的代码均经作者逐一运行验证与严格人工审校，作者对本文的最终文本、程序代码及全部学术成果承担完全责任。