

引力势阱中的莱顿弗罗斯特水滴动力学研究

摘要

将一滴水滴在超过一定温度的热锅上，会观察到一个令人惊叹的现象：水滴并不像在常温表面那样迅速铺展并蒸发，而是像一颗晶莹剔透的玻璃珠，在锅面上悬浮、滑行、弹跳、合并，甚至可以持续存活数十秒至数分钟——这就是莱顿弗罗斯特效应，由德国医生莱顿弗罗斯特于 1756 年首次发现和系统研究。

本次研究首先从 2009 年 APhO 赛题入手，分析出在静止状态下莱顿弗罗斯特效应可有效消除水滴与接触面的阻力，但在运动状态下阻力不可忽略，并与速度成正比。其次利用 3D 打印的金属引力势阱，将莱顿弗罗斯特效应下的水滴类比为天体绕中心恒星运动，建立了单个水滴的动力学模型，并进行实验探究。然后从实验和理论的角度解释了妊神星碰撞族的可能形成过程。最后通过类比星体的洛希极限现象，定量分析了影响液滴潮汐形变的因素。

本次研究的创新之处主要在于以下三个部分：

1. 将金属引力势阱和莱顿弗罗斯特水滴结合，在同一实验平台呈现轨道运动，碰撞合并，碎片逃逸和潮汐形变等实验；
2. 引入线性阻力以在数学形式上类比行星动力模型的线性阻力；
3. 在有限势阱和线性阻力条件下建立更加符合实验边界的逃逸判据，并将理论临界速度与液滴实际速度进行比较分析。

关键词：莱顿弗罗斯特效应，引力势阱，3D 打印，液滴碰撞，潮汐形变，洛希极限

目录

一、引言	1
二、 预实验	3
2.1 实验器材准备	3
2.2 势阱标定	4
三、莱顿弗罗斯特效应	6
3.1 现象描述	6
3.2 液滴阻力分析	7
四、势阱中的单个莱顿弗罗斯特水滴动力学	9
4.1 圆形轨道	9
4.2 考虑线性阻力，微扰和进动的情形	10
4.2.1 从无量纲常数角度分析近似条件：	10
4.2.2 考虑线性阻力、进动和微扰，推导单水滴的动力学方程	11
4.3 实验探究和数据处理分析	16
4.3.1 实验方案	16
4.3.2 数据分析	17
五、 双水滴碰撞逃逸势阱解释妊神星碰撞族形成原因	20
5.1 背景	20
5.2 钱德拉塞卡动力摩擦模型	21
5.3 星子碰撞的逃逸判据	22
5.3.1 碎片从主残骸逃逸的临界速度	22
5.3.2 碎片从中心恒星逃逸的临界速度	24
5.4 势阱中碰撞逃逸的水滴动力学类比	25
5.4.1 水滴进入势阱后发生碰撞的动力学方程	25
5.4.2 计算水滴逃逸速度	26
5.5 实验探究和数据处理	30
5.5.1 实验方案	30
5.5.2 数据处理	30
六、 水滴潮汐形变和洛希极限的类比探究	32
6.1 背景	32
6.2 洛希极限理论模型	33
6.3 引力势阱中水滴潮汐指数的理论模型	33
6.3.1 潮汐张量与理论指数	33
6.3.2 水滴的潮汐梯度	34
6.4 实验探究与数据处理	36
6.4.1 实验流程	36
6.4.2 采集数据	36
七、 研究结论	37
参考文献	39
致谢	41

一、引言

天体系统的形成与演化并非仅由平稳的轨道运动决定，碰撞、合并、碎片抛射、能量耗散以及潮汐作用同样具有重要影响。在行星形成早期，大量星子通过碰撞逐渐聚集为更大的天体；而高速或偏心碰撞也可能使天体发生破碎，产生新的卫星、碰撞族或尘埃结构。当较小天体运动至大质量天体附近时，近端与远端所受引力不同，由此产生的潮汐作用还可能导致天体形变、解体，并影响碎片能否重新聚集。妊神星碰撞族和土星环分别为研究碰撞抛射与洛希极限提供了具有代表性的天体物理情景[1]。

妊神星(如图 1)是柯伊伯带中的大型矮行星，具有快速自转、显著扁长的形状以及较高的表面水冰含量[2-5]。天文学观测发现，妊神星附近存在一组轨道性质相近、光谱中具有明显水冰吸收特征的天体，这些天体通常被认为组成妊神星碰撞族。一种具有代表性的解释认为，妊神星的前身天体在演化过程中经历了大规模碰撞，碰撞使母体发生形变，同时向外抛射冰质碎片。不同碎片获得的速度、方向和能量不同：部分碎片仍处于中心引力的束缚之下，部分则可能离开原有系统并形成了独立轨道。碰撞族成员的轨道分布因此保存了早期碰撞和后续动力学演化的信息。



图 1-1 妊神星及其卫星的哈勃望远镜观测图[6]

妊神星位于图像中央，附近两个亮点分别为卫星纳玛卡和希伊阿卡。

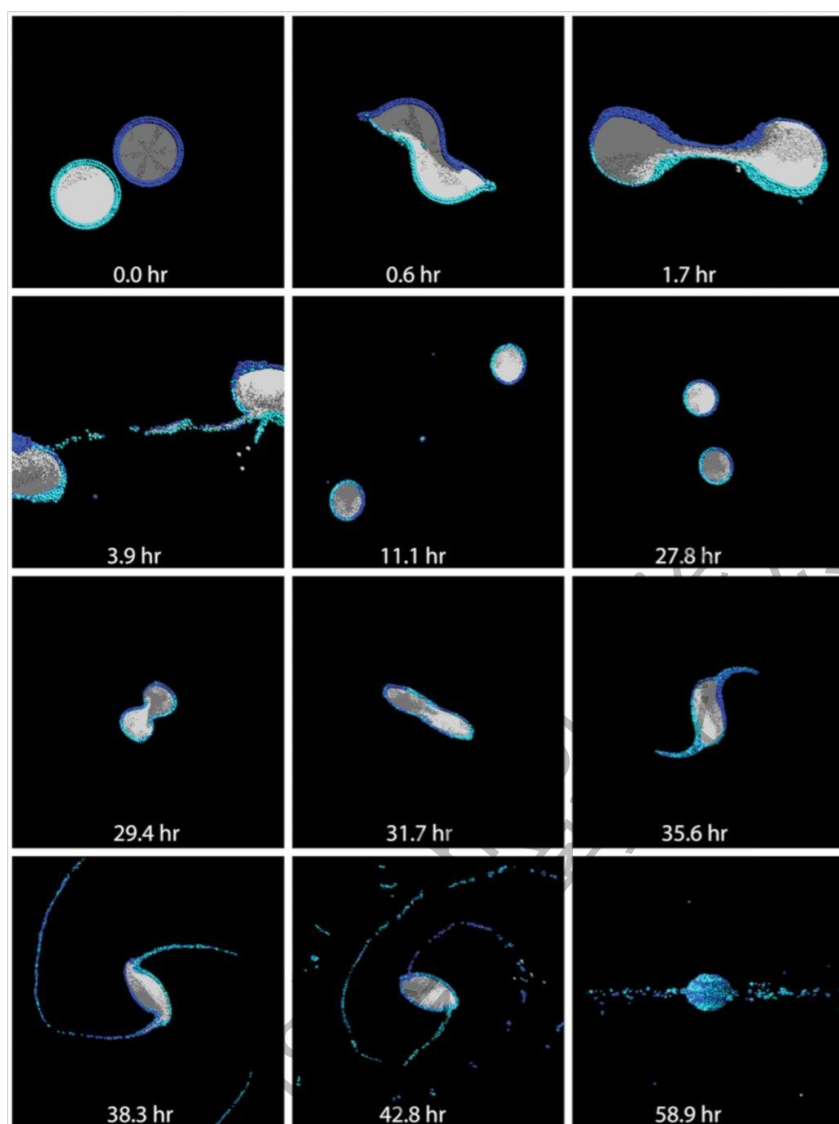


图 1 妊神星碰撞族形成过程示意图[4]

图片来源：Leinhardt 等（2010）

另外，洛希极限是典型天体力学现象（如图 2），小天体接近大质量中心天体时，中心引力产生的潮汐差异足以与小天体自身的聚集作用或内部结合力相抗衡[1、7]。在洛希极限以内，较大的流体天体可能发生明显形变甚至分裂，分散物质也难以单纯依靠自引力重新聚集为大型卫星[1、6]。土星主环（如图 3）位于土星洛希极限以内，其位置关系可以用于说明潮汐作用对环状物质聚集和演化的影响。

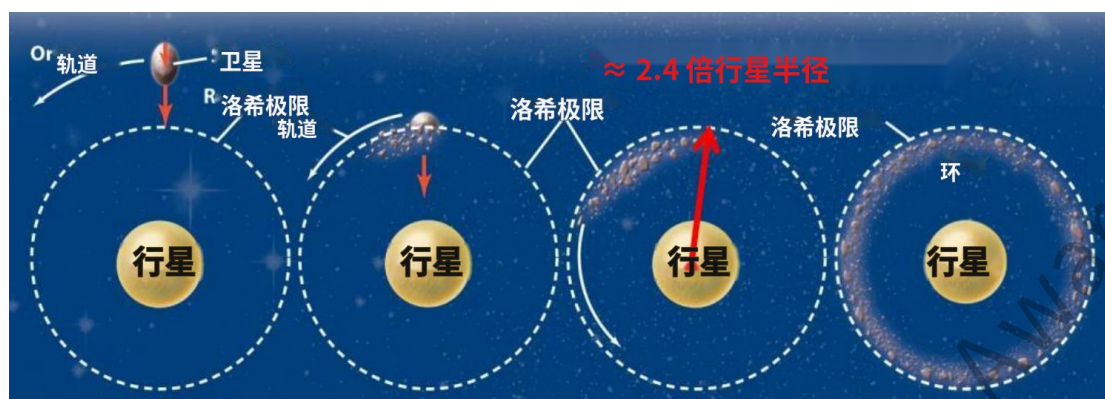


图 2 洛希极限理论示意图

图片来源于网络

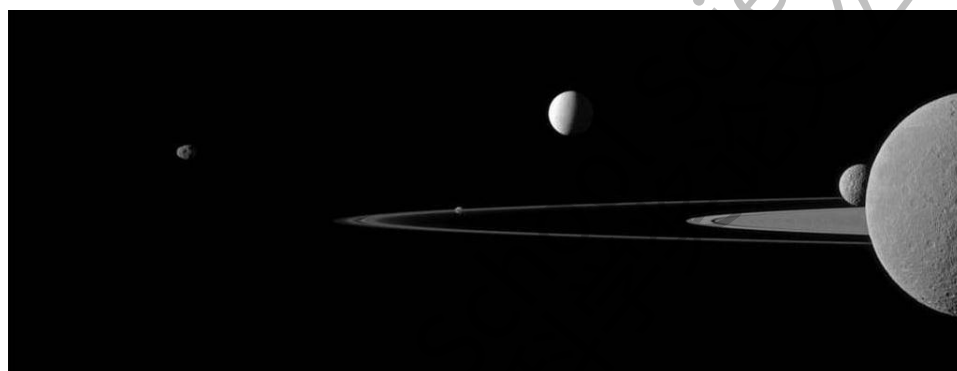


图 3 卡西尼号拍摄的土星环图像[8]

该图展示了环状物质的实际分布。土星环主要分布在洛希极限以内，在这一区域，潮汐作用会抑制环中物质重新聚集成大型卫星。图片来源：NASA/JPL/Space Science Institute

本实验背景来源于 2009 年第 9 届亚洲物理奥林匹克竞赛的理论试题莱顿弗罗斯特效应[8]，这个效应由德国医生莱顿弗罗斯特于 1756 年首次发现和系统研究。由于库埃特流影响，莱顿弗罗斯特效应液滴在运动时仅产生较小线性阻力，我们能否将其与天体运动进行类比，并将其置于一个等效的引力场中？我们能否利用这样一个人工构建的简易“恒星系”探究广袤宇宙中的一些规律和现象？

二、预实验

2.1 实验器材准备

该研究使用的实验器材如下：利用不锈钢材质 3D 打印的引力势阱（图 4a），用于构建等效引力场；本生灯（图 4b），用于加热金属引力势阱，加热快速；铁架台（图 5a），用于架设引力势阱；手机支架（图 5b），用于固定手机，并

能调整手机拍摄角度；智能手机，用于拍摄 240fps 的慢动作视频。



图 4a

图 4b



图 5a

图 5b

2.2 势阱标定

本实验通过 *Wolfram Mathematica 15* 绘制函数 $z(r) = -\frac{A}{r}$ 的 3D 图像(如图 6a) [9], A 为任意参数, 将这个图转换成 3D 打印的 *STL* 文件, 并采用 3D 金属打印, 材质为不锈钢(网上 3D 打印材料加工费约 700 元), 如图 6b。

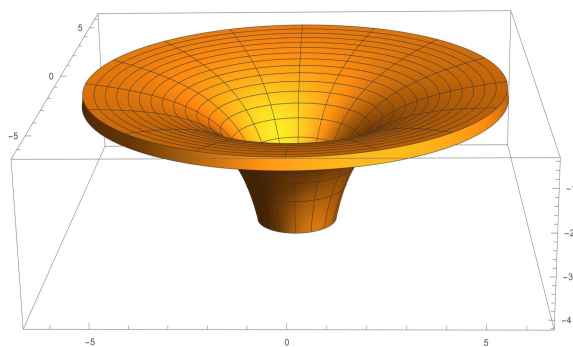


图 6a



图 6b

拍摄引力势阱的侧面图，截面右侧内边缘建立如图 7 所示的坐标系（ z 和 r 的单位均为 mm），其中 C 点为引力势阱右侧内边缘上顶点（C 点在 r 轴上），D 点为下顶点：

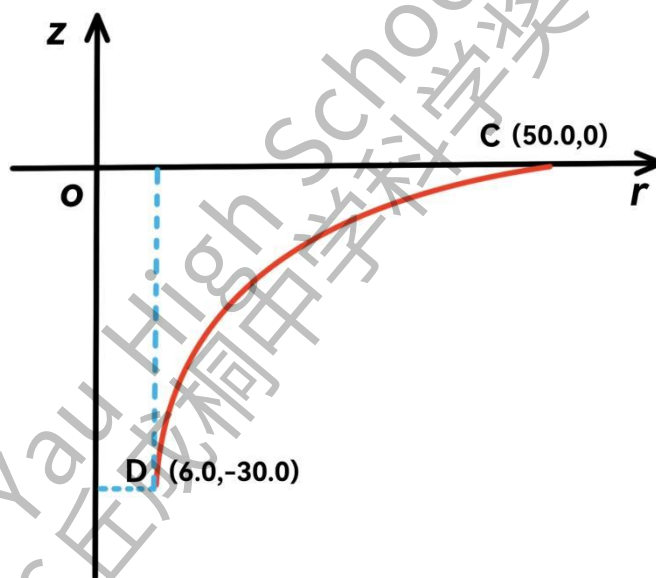


图 7

设势阱右侧内边缘方程为：

$$z(r) = -\frac{A}{r} + z_0 \quad (r > 0) \quad (2.1)$$

其中 A , m 为参数。

我们使用游标卡尺测出 C 点坐标为（50.0mm，0），D 点坐标为（6.0mm，-30.0mm），带入方程，解得： $A \approx 2.05 \times 10^{-4} \text{m}^2$ ， $z_0 \approx 4.09 \times 10^{-3} \text{m}$ 。

下面讨论质点 m 在引力势阱中的势能和受力情况。平移坐标系，使势阱右

边缘方程写为：

$$z(r) = -\frac{A}{r} \quad (r > 0) \quad (2.2)$$

其中 $A \approx 2.05 \times 10^{-4} \text{m}^2$ ，设新坐标系中 r 轴所在水平面为零势能面，则位于 (z, r) 处水滴的重力势能为：

$$E_p(r) = mgz(r) = -mg\frac{A}{r} \quad (2.3)$$

则径向力为：

$$F(r) = -\nabla E_p(r) = -\frac{Amg}{r^2} \propto -\frac{1}{r^2} \quad (2.4)$$

故可类比成万有引力。

不妨定义 $k_A = Amg$ ，于是：

$$E_p(r) = -\frac{k_A}{r} \quad (2.5)$$

$$F(r) = -\frac{k_A}{r^2} \quad (2.6)$$

三、莱顿弗罗斯特效应

3.1 现象描述

莱顿弗罗斯特效应是指液体在接触远超其沸点的高温表面时，其底部会迅速形成一层具有隔热作用的蒸汽层，使液滴悬浮于表面之上，从而大大减慢液体沸腾（蒸发）速度的物理现象[10、11]（如图8）。该现象发生的最低表面温度称为莱顿弗罗斯特点。在下面研究的一系列实验中，水-不锈钢界面的莱顿弗罗斯特点约为 220°C （红外热像仪测量）。

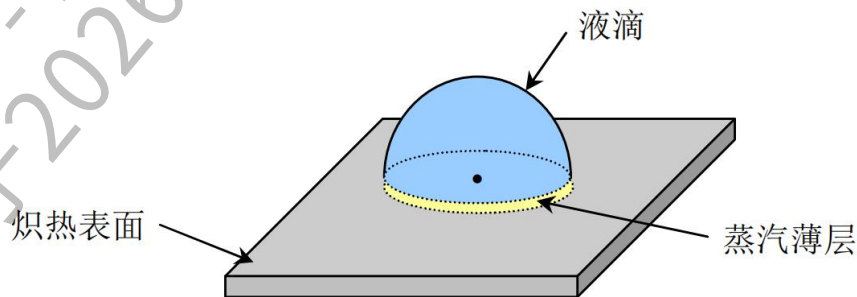


图 8

图片来源：APhO 2009 年莱顿弗罗斯特试题[8]

3.2 液滴阻力分析

蒸汽薄层中的压强 p 沿径向由内向外递减，中心 O 处压强最大，从而驱动蒸汽自内向外流动。这一流动能平衡液滴重力，使其悬浮于蒸汽层之上。径向流呈轴对称分布，故径向流产生的力在水平面上合力为零，因此径向流不会产生水平阻力。可见，莱顿弗罗斯特效应在静止情形下可以有效消除阻力。

若给予液滴一定水平的初速度 v ，则蒸汽层（库埃特流）会产生水平方向的剪切力，从而贡献了水平方向的阻力。

下面讨论液滴具有水平初速度 v 时，由于剪切力而产生阻力的情况。

建立如图 9 所示的坐标系：

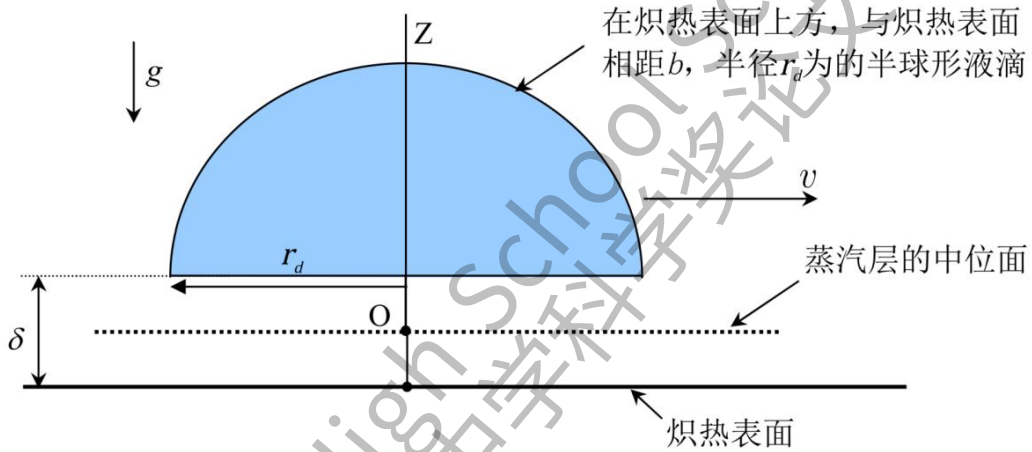


图 9

假设蒸汽薄层是厚度为 δ 、导热率为 κ 、粘滞系数为 μ_v 的牛顿流体且满足层流条件。液滴单位质量汽化热为 l 。液态水沸点时密度为 ρ_l ，水蒸汽密度为 ρ_v 。炽热表面与液滴间的温度差为 ΔT 。

由于蒸汽层极薄（ $b \ll R$ ），故速率梯度可近似为：

$$\frac{dv}{dz} \approx \frac{v}{\delta} \quad (3.1)$$

由牛顿流体可知剪切应力大小为：

$$\frac{F_{couette}}{S} = \mu_v \frac{dv}{dz} = \mu_v \frac{v}{\delta} \quad (3.2)$$

其中 $S = \pi r_d^2$ ，则水平阻力大小为：

$$F_{couette} = \frac{\pi \mu_v r_d^2}{\delta} \cdot v \quad (3.3)$$

不妨令 $k_d = \frac{\pi \mu_v r_d^2}{\delta}$ ，于是水平阻力大小可记为：

$$F_{couette} = k_d \cdot v \quad (3.4)$$

水滴质量：

$$m = \frac{2}{3} \pi r_d^3 \rho_l \quad (3.5)$$

由牛顿第二定律得：

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{couette} \quad (3.6)$$

即：

$$\frac{2}{3} \pi r_d^3 \rho_l \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi \mu_v r_d^2}{\delta} \cdot v \quad (3.7)$$

化简得微分方程：

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau_v} \quad (3.8)$$

其中， τ_v 为速度衰减特征时间（速度由 v 衰减到 $\frac{v}{e}$ 所用时间）：

$$\tau_v = \frac{2 \rho_l r_d \delta}{3 \mu_v} \quad (3.9)$$

带入 $\delta = \left(\frac{9 \mu_v \kappa r_d \Delta T}{4 \rho_l \rho_v g l} \right)^{\frac{1}{4}}$ [8]：

$$\tau_v = \frac{2 \rho_l r_d}{3 \mu_v} \left(\frac{9 \mu_v \kappa r_d \Delta T}{4 \rho_l \rho_v g l} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.10)$$

结合其寿命[8]：

$$t = \frac{8}{5} \left[\frac{9 \mu_v \rho_l^3 l^3}{4 \kappa^3 \rho_v g (\Delta T)^3} \right]^{\frac{1}{4}} r_d^{\frac{5}{4}} \quad (3.11)$$

得：

$$\frac{\tau_v}{t} = \frac{5}{12} \frac{\kappa \Delta T}{l \eta} \quad (3.12)$$

在标准大气压下，取蒸汽层温度为 373 K，此时 $\mu_v = 1.23 \times 10^{-5} Pa \cdot s$ ， $\kappa = 0.0248 W/(m \cdot K)$ ， $l = 2257 kJ/kg$ ， $\Delta T = 120 K$ ，估算得：

$\frac{\tau_v}{t} \approx 0.045$ ，即液滴在总寿命的约 4.5% 时间内，其水平初速度会衰减至原来的 37% 左右。

该结果说明在等厚蒸汽膜和低雷诺数近似下，水平黏性阻力的主导项与水滴速度成正比[10-11]，从而为采用线性阻力模型提供理论依据，因而水平阻力不可忽略。

四、势阱中的单个莱顿弗罗斯特水滴动力学

4.1 圆形轨道

下面我们以最简单的匀速圆周轨道为例，先忽略阻力和液滴蒸发，分析理想情况下水珠的运动。

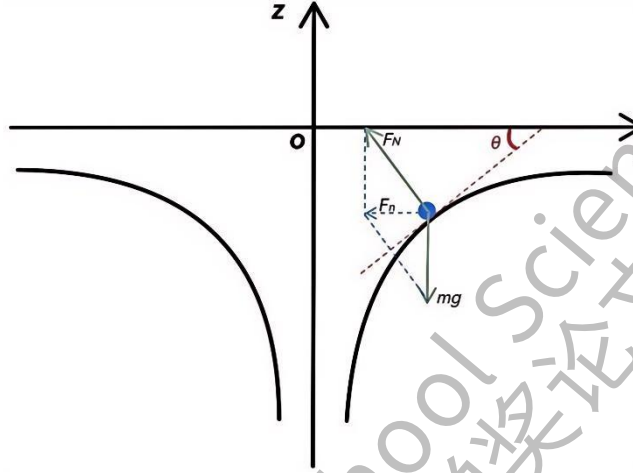


图 10

建立如图 10 所示的直角坐标系，研究 r - z 平面。势阱边界的方程为 $z(r) = -\frac{A}{r}$ 。由于水滴体积较小，故可将水滴视为质点，位置坐标为 (r_0, z_0) ，其中 $z_0 = -\frac{A}{r_0}$ 。该处势阱的切线 l 方程为 $z = \frac{A}{r_0^2} \cdot r - \frac{2A}{r_0}$ ，斜率为 $\frac{A}{r_0^2}$ ，设 θ 为直线 l 的倾斜角，则 $\tan \theta = \frac{A}{r_0^2}$ 。

由于液滴在垂直于纸面的平面内做匀速圆周运动，故液滴重力 mg 与轨道支持力 F_N 的合力提供向心力 F_n 且沿水平方向指向 z 轴，大小为：

$$F_n = mg \tan \theta = mg \frac{A}{r_0^2} \quad (4.1)$$

因此匀速圆周轨道周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{gA}} \quad (4.2)$$

但经过 3.2 部分的讨论可知，液滴阻力不可忽略，故上述匀速圆周轨道模型只是一种理想化的假设。

4.2 考虑线性阻力，微扰和进动的情形

由之前分析，水滴在势阱中的运动情形下，我们引入与速度成正比的阻力：

$$\mathbf{F}_d = -k_d \mathbf{v} = -k_d \dot{\mathbf{r}} \quad (4.3)$$

4.2.1 从无量纲常数角度分析近似条件：

取各个物理量的一般特征量：

$$r_d = 5 \times 10^{-3} m$$

$$\delta \sim 2.5 \times 10^{-5} m$$

$$V \sim 0.1 m/s$$

$$\mu_v = 1.23 \times 10^{-5} Pa \cdot s$$

$$\rho_v = 0.598 kg/m^3$$

$$\rho_l = 958 kg/m^3$$

$$g = 9.8 m/s^2$$

1. 蒸汽层雷诺数（此处雷诺数仅用于估计由水滴平移产生的剪切流，未计入蒸发压力驱动的径向流动）：

$$Re_\delta \sim \frac{\rho_v V \delta}{\mu_v} \sim 0.12 \ll 1$$

$Re_\delta \sim 0.1$ 意味着惯性力远小于黏性力，蒸汽层处于 Stokes 蠕流区。

在此区域内，Navier-Stokes 方程

$$\rho_v \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu_v \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.4)$$

其惯性项 $\rho_v (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ 可整体忽略。

2. 润滑比

$$\epsilon = \frac{\delta}{r_d} \sim 5 \times 10^{-3} \ll 1 \quad (4.5)$$

蒸汽层厚度比水滴半径小三个数量级，润滑理论成立，三维问题可简化为二维，径向速度 u_r 远大于垂向速度 u_z 。

3. 弱阻尼比：

$$\frac{k_d}{m \omega_c} = \frac{k_d}{m \cdot \sqrt{k_A / (m a^3)}} \sim 8 \times 10^{-3} \ll 0.1 \quad (4.6)$$

其中 $k_A = A m g$ ， a 为液滴椭圆轨道半长轴长。

这说明每弧度能量损失约 0.8%，一个完整轨道周期（ 2π rad）损失约 5%。
轨道在多圈演化中缓慢衰减，这给出了后文使用周期内平均近似的合理性。

4.2.2 考虑线性阻力、进动和微扰，推导单水滴的动力学方程

把势阱进一步写为开普勒主导项加小扰动项的形式：

$$U(r) = U_0(r) + U_1(r) \quad (4.7)$$

其中 $U_0(r)$ 为 r 处液滴引力势能的单位质量势 $U_0(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{k_A}{mr}$ 。

由牛顿定律有 $m\ddot{\mathbf{r}} = -m\frac{dU}{dr}\hat{\mathbf{r}} - k_d\dot{\mathbf{r}}$,

扰动径向加速度记为： $a_r^{(1)}(r) = -\frac{dU_1}{dr}$ 。极坐标下分解：

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k_A}{mr^2} + a_r^{(1)}(r) - \frac{k_d}{m}\dot{r} \quad (4.8)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{k_d}{m}r\dot{\theta} \quad (4.9)$$

在极坐标下，比奈换元令 $u = \frac{1}{r}$ ，角动量 $L = mr^2\dot{\theta}$ ，

有：

$$\frac{dL}{d\theta} = -\frac{k_d}{u^2} \quad (4.10)$$

联立解得：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk_A}{L(\theta)^2} - \frac{m}{L^2(\theta)u^2} a_r^{(1)}\left(\frac{1}{u}\right) \quad (4.11)$$

特殊情况下，无阻力的开普勒轨道：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk_A}{L_0^2} = \frac{1}{p} \quad (4.12)$$

解得：

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi_0)}, \quad \text{其中 } p = \frac{L_0^2}{mk_A}. \quad (4.13)$$

其中 ϖ_0 是近心点方位角，表示极坐标下，近心点（水滴到力心最近位置）所在方位的极角，由边界条件 $\theta = \theta_0, r = r_0$ ，得：

$$\cos(\theta_0 - \varpi_0) = \frac{1}{e_0} \left(\frac{p_0}{r_0} - 1 \right)$$

$$\varpi_0 = \theta_0 \mp \arccos \left[\frac{1}{e_0} \left(\frac{p_0}{r_0} - 1 \right) \right] \quad (4.14)$$

接下来考虑线性阻力 $f_d = -k_d \dot{\mathbf{r}}$ ，总能量 $E = -\frac{k_A}{2a}$ ，能量损耗率： $\frac{dE}{dt} = -k_d v^2$ 。

由维里定理 $\langle v^2 \rangle = \frac{k_A}{ma}$ ，可得：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{k_A}{2a^2} \langle \dot{a} \rangle = -k_d \frac{k_A}{ma} \\ \langle \dot{a} \rangle &= -2\gamma_d a, \quad \gamma_d = \frac{k_d}{m} \end{aligned} \quad (4.15)$$

从而给出半长轴随时间的衰减：

$$a(t) = a_0 e^{-2\frac{k_d}{m}t} = a_0 e^{-2\gamma_d t} \quad (4.16)$$

由旋转对称势，阻力矩：

$$\tau = -k_d r^2 \dot{\theta} \quad (4.17)$$

$$\dot{L} = -\frac{k_d L}{m} \quad (4.18)$$

解得：

$$\dot{L} = -\gamma_d L \quad (4.19)$$

$$L(t) = L_0 e^{-\gamma_d t} \quad (4.20)$$

将 $p(t) = \frac{L(t)^2}{mk_A}$ 带入：

$$p(t) = \frac{L(t)^2}{mk_A} = p_0 e^{-2\gamma_d t} \quad (4.21)$$

由开普勒方程：

$$p = a(1 - e^2) \quad (4.22)$$

等式两边对时间求导：

$$\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e} \quad (4.23)$$

由前文可知：

$$\dot{p} = -2\gamma_d p \quad \dot{a} = -2\gamma_d a \quad (4.24)$$

代入得：

$$-2\gamma_d a(1 - e^2) = (-2\gamma_d a)(1 - e^2) - 2ae\dot{e} \quad (4.25)$$

解得：

$$\dot{e} = 0 \quad (4.26)$$

在线性各向同性弱阻尼及轨道平均近似下，偏心率的一阶长期变化为零：

$$\langle \dot{e} \rangle = 0 \quad (4.27)$$

$$e(t) \simeq e_0 \quad (4.28)$$

考虑势阱满足旋转对称性 $U = U(r)$ ，引入无量纲小参数 $\alpha \ll 1$ 和半径标度 a_0 ，把旋转对称势阱的单位质量势按径向高阶扰动展开：

$$U(r) = -\frac{k_A}{m r} \left[1 + \alpha \left(\frac{a_0}{r} \right)^2 \right] + O(\alpha^2) \quad (4.29)$$

当 $\alpha = 0$ 时，在半径 $r = a$ 处，中心力平衡：

$$m \omega_c^2 a = \frac{k_A}{a^2} \quad (4.30)$$

未扰动开普勒圆频率：

$$\omega_c^2 = \frac{k_A}{m a^3} \quad (4.31)$$

在旋转对称势下径向小振动的本征频率由等效径向“弹簧常数”给出：

$$\omega_r^2 = \frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} \Big|_{r=a} \quad (4.32)$$

引入守恒比角动量：

$$\ell = r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{m} \quad (4.33)$$

有效势为：

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2 r^2} \quad (4.34)$$

将

$$U(r) = -\frac{k_A}{m r} \left[1 + \alpha \left(\frac{a_0}{r} \right)^2 \right] + O(\alpha^2) \quad (4.35)$$

展开后带入：

$$U_{eff}(r) = -\frac{k_A}{m r} - \frac{\alpha a_0^2 k_A}{m r^3} + \frac{\ell^2}{2 r^2} + O(\alpha^2) \quad (4.36)$$

圆轨道平衡条件：

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{k_A}{m r^2} + \frac{3 \alpha a_0^2 k_A}{m r^4} - \frac{\ell^2}{r^3} = 0 \quad (4.37)$$

在 $r = a$ 处：

$$\frac{k_A}{m a^2} \left[1 + 3 \alpha \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] = \frac{\ell^2}{a^3} \quad (4.38)$$

解得：

$$\ell^2 = \frac{k_A a}{m} \left[1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \quad (4.39)$$

选择初始轨道尺度 a_0 作为扰动势的参考长度，并考虑 $a \approx a_0$ 的近圆轨道，有：

$$\frac{a_0}{a} = 1 + O(\alpha) \quad (4.40)$$

$$\ell = a^2 \dot{\theta} \quad (4.41)$$

在一阶 α 近似及 $a \approx a_0$ 下，由 $\frac{a_0}{a} = 1 + O(\alpha)$ ：

$$\ell^2 = \frac{k_A a_0}{m} (1 + 3\alpha) \quad (4.42)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{k_A}{ma^3} \left[1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] = \omega_c^2 \left[1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \quad (4.43)$$

求径向小振动频率：

$$\omega_r^2 = \frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} = \frac{d^2}{dr^2} \left(-\frac{k_A}{mr} - \frac{\alpha a_0^2 k_A}{mr^3} + \frac{\ell^2}{2r^2} \right) = -\frac{2k_A}{mr^3} - \frac{12\alpha a_0^2 k_A}{mr^5} + \frac{3\ell^2}{r^4} \quad (4.44)$$

消去 ℓ^2 ，在 $r = a \approx a_0$ 的条件下：

$$\frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} = -\frac{2k_A}{ma^3} - \frac{12\alpha k_A}{ma^3} + \frac{3\ell^2}{a^4} \quad (4.45)$$

代入 $\ell^2 = \frac{k_A a_0}{m} (1 + 3\alpha)$ 得：

$$\frac{d^2 U_{eff}}{dr^2} = \frac{k_A}{ma^3} (1 - 3\alpha) \quad (4.46)$$

由前文

$$\omega_c^2 = \frac{k_A}{ma^3} \quad (4.47)$$

$$a \approx a_0 \quad (4.48)$$

得径向小振动频率：

$$\omega_r^2 = \omega_c^2 (1 - 3\alpha) \quad (4.49)$$

在 $a \approx a_0$ 下，频率比为：

$$k = \frac{\omega_r}{\dot{\theta}} = \frac{\sqrt{1 - 3\alpha \left(\frac{a_0}{a} \right)^2}}{\sqrt{1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{a} \right)^2}} \approx \sqrt{\frac{1 - 3\alpha}{1 + 3\alpha}} = 1 - 3\alpha \quad (4.50)$$

每转过惯性极角 $\Delta\theta = 2\pi$ ，径向振动经历的相位为：

$$\Delta\phi_r = \omega_r T = \frac{2\pi\omega_r}{\omega_c} \quad (4.51)$$

若 $\Delta\phi_r = 2\pi$ ，即径向振动恰好完成一整圈，则进心点闭合，二者之差为近心点前进角：

$$\Delta\varpi = 2\pi\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_c} - 1\right) = 2\pi\left(\frac{1}{k} - 1\right) \simeq 6\pi a \quad (4.52)$$

则单位时间进角频率为：

$$\Omega_p = \dot{\theta} - \omega_r = \sqrt{1 + 3\alpha\left(\frac{a_0}{a}\right)^2} - \sqrt{1 - 3\alpha\left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \simeq 3\alpha\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \omega_c \simeq 3\alpha\omega_c \quad (4.53)$$

考虑无阻力和微扰的开普勒椭圆轨道：

$$r_0(\theta) = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos(\theta - \varpi_0)} \quad (4.54)$$

在无进动的绝热轨道下($e = e_0$, $p = p(t)$)，由上文：

$$p(t) = p_0 e^{-2\gamma_d t} \quad (4.55)$$

$$\gamma_d = \frac{k_d}{m} \quad (4.56)$$

带入得：

$$r(t, \theta) = \frac{p_0 e^{-2\gamma_d t}}{1 + e_0 \cos(\theta - \varpi_0)} \quad (4.57)$$

考虑弱阻尼条件 $\gamma_d \ll \omega_c$ 下，轨道角频率在一个周期内的波动可以忽略：

$$\dot{\theta} = \omega_c = \sqrt{1 + 3\alpha\left(\frac{a_0}{a}\right)^2} \quad (4.58)$$

$$t - t_0 \simeq \frac{\theta - \theta_0}{\dot{\theta}} \quad (4.59)$$

我们可以定义每弧度衰减系数：

$$\varepsilon = \frac{2\gamma_d}{\omega_c} \quad (4.60)$$

则：

$$2\gamma_d t = 2\gamma_d \frac{\theta}{\omega_c} = \varepsilon\theta \quad (4.61)$$

由：

$$k = \frac{\omega_r}{\omega_c} \quad (4.62)$$

相位替换：

$$\cos(\theta - \varpi_0) \rightarrow \cos(k\theta - \varpi_0)$$

$$k = 1 - 3\alpha \quad (4.63)$$

考虑如上因素，给出：

$$r(\theta) = \frac{p_0 e^{-\varepsilon\theta}}{1 + e_0 \cos(k\theta - \varpi_0)} \quad (4.64)$$

其中：

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{L_0^2}{m k_A} = a_0(1 - e_0^2) \\ \varepsilon &= \frac{2\gamma_d}{\omega_c} = \frac{2k_d}{m \omega_c} \\ k &= 1 - 3\alpha \end{aligned} \quad (4.65)$$

4.3 实验探究和数据处理分析

4.3.1 实验方案

将不锈钢引力势阱置于金属支架上（如图 11a），确保安全后点燃本生灯，加热势阱，并使用 Fluke iSee 红外热成像仪进行实时温度测定（如图 11b），温度大概达到 220℃。



图 11a

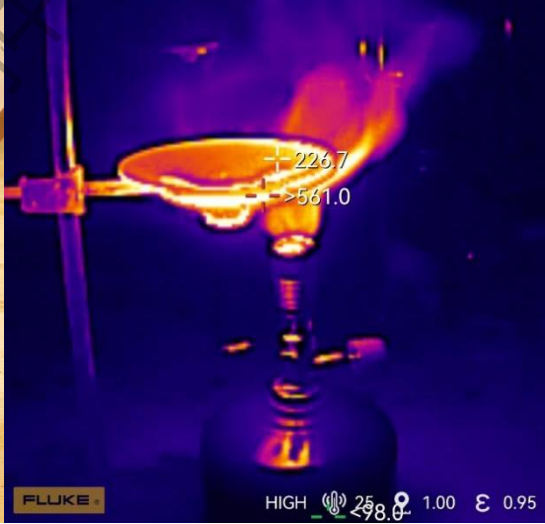


图 11b

用手机支架将智能手机架于势阱正上方，打开手机相机慢动作功能，调整为 1080P 240fps，正对势阱进行拍摄。

我们使用注射器（带针头），用来注入体积较小的水滴。吸取适量纯净水，

将注射器针头置于势阱边缘上方 2-3cm 处，挤压注射器活塞，在水滴脱离注射器时手部迅速沿水平切向甩动，使水滴获得水平初速度，从而水滴将会以椭圆轨道进入势阱。

使用视频分析软件 video tracker[14]对视频进行定标并建立直角坐标系（如图 12），逐帧追踪水滴，提取其随时间变化的直角坐标，绘制 $y-x$ ， $y-t$ ， $x-t$ ，图像。

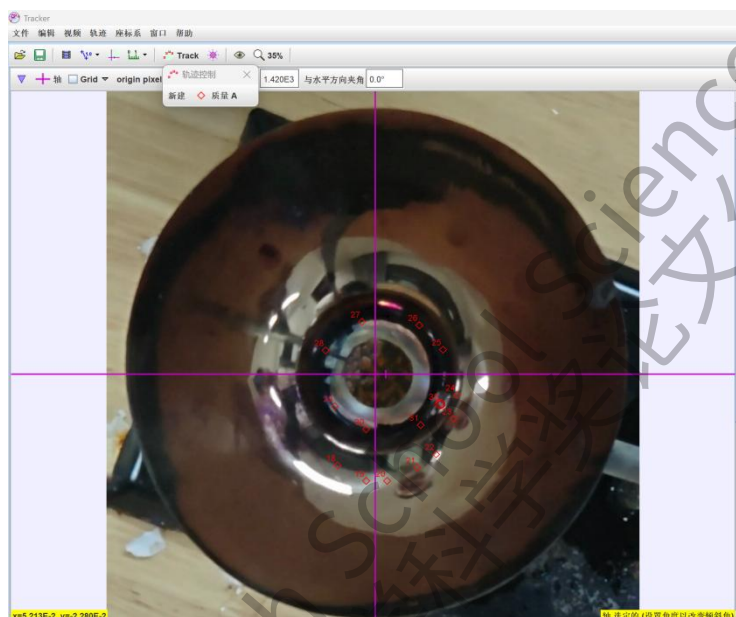


图 12

4.3.2 数据分析



t=32.4 s

t=33.3 s



$t=34.2s$

$t=35.1s$

图 13

我们导出水滴的坐标记录文件，使用 python 程序进行数据处理和函数拟合（详见附录 B：单个水滴的轨迹数据及其 Python 绘图程序），得到水滴图像，如图 13。根据实验数据画出的 $y-x$ ， $y-t$ ， $x-t$ 图像，如图 14。

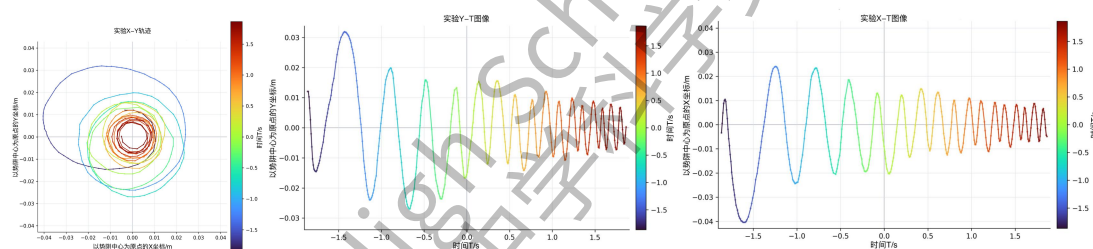


图 14

理论拟合 $y-x$ ， $y-t$ ， $x-t$ 图像，如图 15：

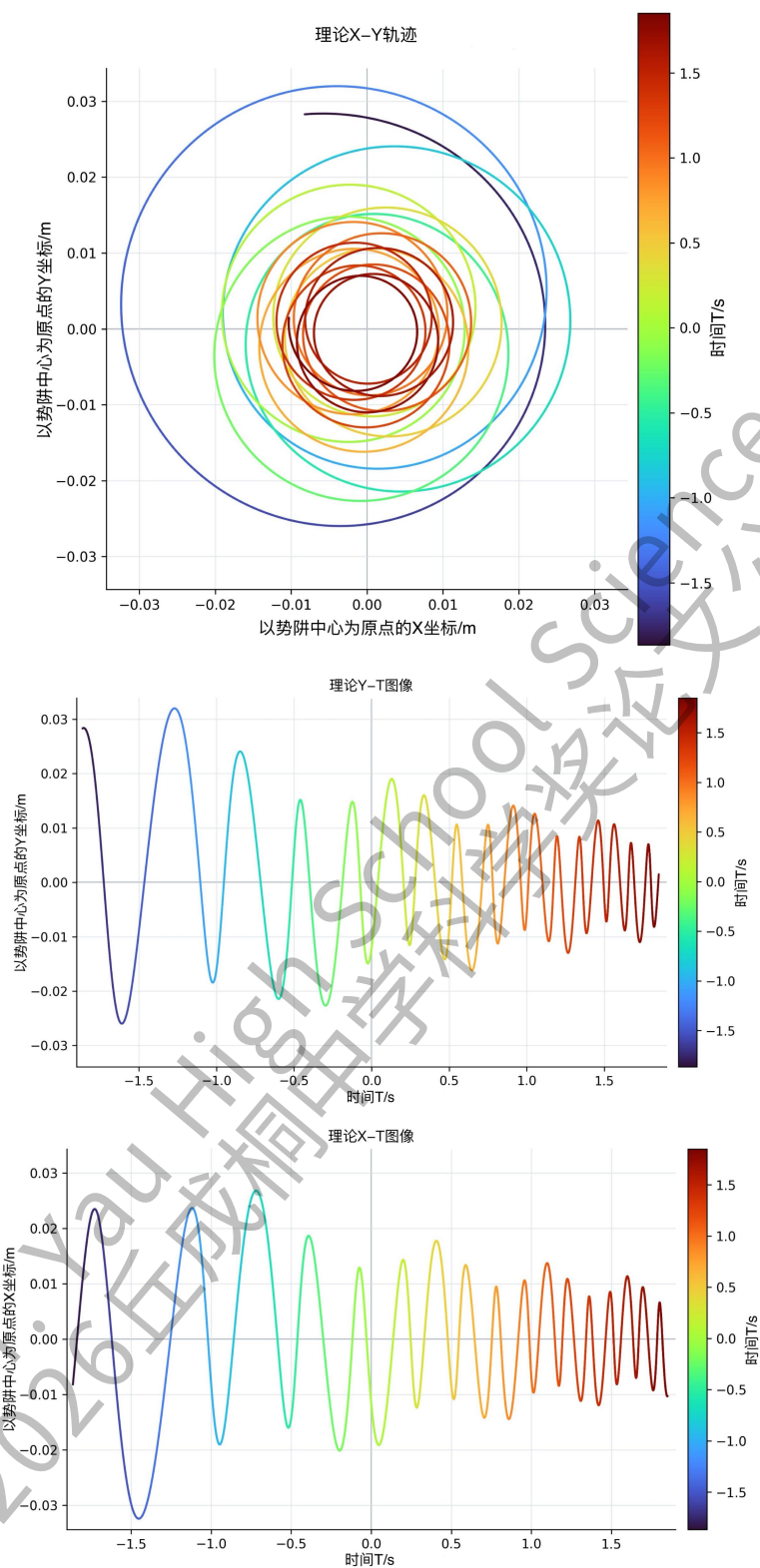


图 15

其中,取全过程时间的中点作为图像的时间零点,用渐变色来指示时间变化。

轨迹方程:

$$\begin{aligned}
r(\theta) &= \frac{0.028 \exp[-0.018(1.85 - \theta)]}{1 + 0.23 \cos[0.75(1.85 - \theta) - 1.28]} \\
\alpha &= 0.085 \\
a_0 &= 0.029m \\
\Delta\varpi &= 2.05rad
\end{aligned} \tag{4.66}$$

由图像可知，莱顿弗罗斯特水滴进入势阱后做偏心轨道运动。随着时间增加，轨道逐渐衰减，水滴逐渐向势阱中心靠近；与此同时，相邻轨道的长轴方向持续发生转动，表现出明显的近心点进动。 $x-t$ 和 $y-t$ 曲线均呈现振幅衰减、频率增加的非等周期振荡，并具有明显的相位差。由此可知，我们建立的动力学方程基本可以描述单个水滴在势阱中的运动情况。

五、双水滴碰撞逃逸势阱解释妊神星碰撞族形成原因

5.1 背景

妊神星位于柯伊伯带，距离太阳约 43 AU，自转周期约 4 小时，具有明显的快速自转和拉长形状，周围还有卫星及一批轨道和光谱性质相近的小天体。这些小天体被称为“妊神星碰撞族”。它们共同具有明显的水冰光谱特征，说明它们可能来自同一颗富含冰层的母体。

一种解释妊神星碰撞族形成理论认为：妊神星前身遭遇撞击，碎片获得不同速度。低于逃逸速度的被引力束缚、重新吸积形成扁球体或卫星；略高于逃逸速度的少量碎片脱离束缚逃逸出去。

本实验中，当两个水滴在势阱中沿不同轨道运动并发生碰撞时，系统不仅会经历质量合并、表面能释放和动量重新分配，还可能在蒸汽膜与热板的非对称反作用下产生质心反冲，使合并水滴或二次分离的小滴向势阱外侧运动。该过程在动力学结构上与中心恒星附近星子碰撞后形成主残骸和分离碎片的情形具有一定相似性，故借此进行类比分析。

5.2 钱德拉塞卡动力摩擦模型

当星子在大量背景星子构成的介质中运动时，会持续扰动周围的背景星子。背景星子经过引力散射后形成聚集，聚集的恒星对并合体产生与速度方向相反的引力作用，这种统计意义上的减速称为钱德拉塞卡动力摩擦[12]。

设并合体质量为 m_3 ，速度为 V ，背景恒星质量密度为 ρ_h ，一维速度弥散为 σ ，则动力摩擦加速度为：

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{4\pi G^2 m_3 \rho_h \ln \Lambda}{V^3} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V}{\sigma} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right) \right] V \quad (5.1)$$

其中 $\ln \Lambda$ 表示不同距离的引力散射对动力摩擦的综合贡献。

$\operatorname{erf}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V}{\sigma} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right)$ 表示速度小于并合速度 V 的恒星所占的质量比例。

考虑低速情况：当合并体速度满足 $V \ll \sigma$ 时，方括号中的函数可以展开为：

$$\operatorname{erf}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V}{\sigma} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{V^3}{\sigma^3} + O(V^5) \quad (5.2)$$

代入式中，消去 V^3 ，得到

$$\frac{dV}{dt} \approx -\gamma_{d,i} V \quad (5.3)$$

其中：

$$\gamma_{d,i} = \frac{4\sqrt{2}\pi G^2 m_i \rho_h \ln \Lambda}{3\sigma^3} \quad (5.4)$$

所以在低速条件下，动力摩擦力为：

$$\mathbf{F}_{df} \approx -m_i \gamma_{d,i} \mathbf{V} \quad (5.5)$$

其方向与速度相反，大小与相对速度成正比。（详细证明见附录 C：钱德拉塞卡动力摩擦模型推导）

若背景星子本身具有平均速度 $\mathbf{V}_{bg}$ ，则阻力写为：

$$\mathbf{F}_{df} \approx -m_3 \gamma_{d,i} (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{bg}) \quad (5.6)$$

由此可知，在 $V \ll \sigma$ 条件下，蒸汽膜的黏性剪切所产生的水滴阻力和背景星子的引力散射所产生的天体动力摩擦力在数学形式上可进行类比等效，也给出了水滴运动时考虑线性阻力的等效来源。

5.3 星子碰撞的逃逸判据

5.3.1 碎片从主残骸逃逸的临界速度

设中心恒星质量为 $m_{\odot}$ ，两星子质量分别为 m_1 ， m_2 。星子 i 同时受到：中心恒星引力，另一星子的引力和背景星子产生的线性动力摩擦，因此：

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\frac{Gm_{\odot}}{R_i^3}\mathbf{R}_i + Gm_j \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3} - \gamma_{d,i}(\dot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{V}_{bg}), \quad i \neq j \quad (5.7)$$

考虑两星子质量较小，其相互引力远小于中心恒星引力，可简化为：

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\frac{Gm_{\odot}}{R_i^3}\mathbf{R}_i - \gamma_{d,i}(\dot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{V}_{bg}) \quad (5.8)$$

星子相对于中心恒星的轨道能为：

$$E_i = \frac{1}{2}m_i V_i^2 - \frac{Gm_{\odot}m_i}{R_i} \quad (5.9)$$

忽略星子间相互引力，对上式求导：

$$\frac{dE_i}{dt} = m_i \mathbf{V}_i \cdot \dot{\mathbf{V}}_i - \frac{Gm_{\odot}m_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{V}_i \quad (5.10)$$

代入得：

$$\frac{dE_i}{dt} = -m_i \gamma_{d,i} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{bg}) \cdot \mathbf{V}_i \quad (5.11)$$

若在背景介质的局部静止参考系中取：

$$\mathbf{V}_{bg} = 0$$

则：

$$\frac{dE_i}{dt} = -m_i \gamma_{d,i} V_i^2 \leq 0 \quad (5.12)$$

可见线性阻力会逐渐降低轨道能量，考虑碰撞持续时间很短，在碰撞时间内阻力冲量通常可以忽略。设合并前两个星子的质量、位置和速度分别为：

$$m_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{V}_1 \quad m_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{V}_2$$

合并后形成主残骸 m_3 和碎片 m_4 ：

$$m_3, \mathbf{r}_3, \mathbf{V}_3 \quad m_4, \mathbf{r}_4, \mathbf{V}_4$$

忽略质量损失：

$$m_3 + m_4 = m_1 + m_2 \quad (5.13)$$

因为碰撞时间远短于日心轨道周期，中心恒星引力和线性阻力在碰撞期间产生的冲量可以忽略，所以：

$$m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = m_3 \mathbf{V}_3 + m_4 \mathbf{V}_4 \quad (5.14)$$

由此得到主残骸速度：

$$\mathbf{V}_3 = \frac{m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 - m_4 \mathbf{V}_4}{m_3} \quad (5.15)$$

碎片获得的动量越大，主残骸获得的反向动量也越大。

有角动量守恒：

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_4 \quad (5.16)$$

碰撞过程中平动动能的减少量：

$$\Delta E_{\text{coll}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2|^2 - \frac{1}{2} \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4} |\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_4|^2 \quad (5.17)$$

考虑碰后的两天体的相对运动：

$$E_{4,3} = \frac{1}{2} |\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3|^2 - \frac{G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3|} \quad (5.18)$$

5.3.1.1 不计阻力情形

碎片从主残骸逃逸的临界速度：

$$v_{\text{escape},3} = \sqrt{\frac{2G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3|}} \quad (5.19)$$

当 $m_4 \ll m_3$ 时，近似为：

$$v_{\text{escape},3} \simeq \sqrt{\frac{2Gm_3}{|\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3|}} \quad (5.20)$$

$$|\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3| \geq v_{\text{escape},3}$$

5.3.1.2 考虑线性阻力情形

采用单位质量计算相对于主残骸 3 碎片逃离时损失的能量：

$$\Delta E_{d,3} = \int \gamma_{d,4} |\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3|^2 dt = E_{4,3}(t_0) - E_{4,3}(t_1) \quad (5.21)$$

代入得单位质量耗散能：

$$\Delta E_{d,3} = \frac{1}{2} |\mathbf{V}_4(t_0) - \mathbf{V}_3(t_0)|^2 - \frac{G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4(t_0) - \mathbf{R}_3(t_0)|} - \frac{1}{2} |\mathbf{V}_4(t_1) - \mathbf{V}_3(t_1)|^2 + \frac{G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4(t_1) - \mathbf{R}_3(t_1)|} \quad (5.22)$$

含阻力的临界条件:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3|^2 - \frac{G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3|} - \Delta E_{d,3} = 0 \quad (5.23)$$

临界初速度:

$$v_{critical,3} = \sqrt{\frac{2G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3|} + 2\Delta E_{d,3}} \quad (5.24)$$

即:

$$v_{critical,3} = \sqrt{\frac{2G(m_3 + m_4)}{|\mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_3|} + 2 \int \gamma_{d,4} |\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3|^2 dt} \quad (5.25)$$

所以阻力会提高逃离主残骸所需的初速度。

5.3.2 碎片从中心恒星逃逸的临界速度

5.3.2.1 考虑无阻力情形

即使碎片已经逃离 m_3 ，它仍可能被中心恒星束缚。

考虑碎片相对中心恒星:

$$E_4(t) = \frac{1}{2} m_4 V_4^2(t) - \frac{Gm_\odot m_4}{R_4(t)} \quad (5.26)$$

逃逸临界条件:

$$E_4 = 0$$

得:

$$v_{escape,\odot} = \sqrt{\frac{2Gm_\odot}{R_4}} \quad (5.27)$$

从中心恒星逃逸的判据为:

$$V_4 \geq v_{escape,\odot}$$

需要注意， V_4 是碎片的相对中心恒星的速度，它由主残骸的原有轨道速度和碎片相对主残骸的分离速度共同决定：

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_3 + (\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3) \quad (5.28)$$

5.3.2.2 考虑线性阻力的情形

考虑线性阻力时：

$$\Delta E_{d,\odot} = \int_{t_0}^{t_1} m_4 \gamma_{d,4} (\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_{bg}) \cdot \mathbf{V}_4 dt = E_4(t_0) - E_4(t_1) \quad (5.29)$$

代入：

$$\Delta E_{d,\odot} = \left[\frac{1}{2} m_4 V_4^2(t_0) - \frac{Gm_\odot m_4}{R_4(t_0)} \right] - \left[\frac{1}{2} m_4 V_4^2(t_1) - \frac{Gm_\odot m_4}{R_4(t_1)} \right] \quad (5.30)$$

在背景星子的局部静止参考系中：

$$\Delta E_{d,\odot} = \int_{t_0}^{t_1} m_4 \gamma_{d,4} V_4^2 dt = E_4(t_0) - E_4(t_1) \quad (5.31)$$

临界条件：

$$\frac{1}{2} m_4 V_4^2 - \frac{Gm_\odot m_4}{R_4} - \Delta E_{d,\odot} = 0 \quad (5.32)$$

得：

$$v_{escape,\odot} = \sqrt{\frac{2Gm_\odot}{R_4} + \frac{2\Delta E_{d,\odot}}{m_4}} = \sqrt{\frac{2Gm_\odot}{R_4} + \frac{2\Delta E_{d,\odot}}{m_4}} \quad (5.33)$$

如果：

$$V_4 \geq v_{critical,\odot}$$

则碎片可以从中心恒星逃逸。

5.4 势阱中碰撞逃逸的水滴动力学类比

5.4.1 水滴进入势阱后发生碰撞的动力学方程

由单个水滴的动力学方程，考虑线性阻力和势阱作用：

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{k_A \mathbf{r}_1}{m r_1^3} \left[1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{r_1} \right)^2 \right] - \gamma_{d,1} \dot{\mathbf{r}}_1 \quad (5.34)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{k_A \mathbf{r}_2}{m r_2^3} \left[1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{r_2} \right)^2 \right] - \gamma_{d,2} \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (5.35)$$

在较短合并时间 $[t_c - \delta, t_c + \delta]$ 内积分，将碰撞前后写成冲量形式得：

$$m_3 \mathbf{v}_3^+ + m_4 \mathbf{v}_4^+ = m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^- + \int_{t_c - \delta}^{t_c + \delta} \mathbf{F}_{ext} dt \quad (5.36)$$

在考虑水滴的轨迹时，不计水滴的形变，将水滴看作球体：

$$\frac{4\pi}{3} \rho (r_{d3}^3 + r_{d4}^3) = \frac{4\pi}{3} \rho (r_{d1}^3 + r_{d2}^3) \quad (5.37)$$

考虑球形水滴的表面能，则合并时释放的表面能为：

$$\Delta E_\sigma = 4\pi\sigma(r_{d1}^2 + r_{d2}^2 - r_{d3}^2 - r_{d4}^2) > 0 \quad (5.38)$$

当 $\Delta E_\sigma > 0$ 时，有表面能释放，但只有其中一部分可能通过外界非对称作用转化为质心平动能。

主滴 m_3 和分离小滴 m_4 满足：

$$\dot{\mathbf{r}}_k = -\frac{k_A \mathbf{r}_k}{m_k r_k^3} \left[1 + 3\alpha \left(\frac{a_0}{r_k} \right)^2 \right] - \gamma_{d,k} \dot{\mathbf{r}}_k, \quad k = 3, 4 \quad (5.39)$$

其机械能为：

$$E_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2 - \frac{k_A}{r_k} \left[1 + \alpha \left(\frac{a_0}{r_k} \right)^2 \right] \quad (5.40)$$

对时间求导并代入得：

$$\frac{dE_k}{dt} = m_k \mathbf{v}_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k + \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{k_A}{r_k} \left[1 + \alpha \left(\frac{a_0}{r_k} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.41)$$

$$\frac{dE_k}{dt} = -m_k \gamma_{d,k} v_k^2 \leq 0 \quad (5.42)$$

5.4.2 计算水滴逃逸速度

考虑实验情形，我们将水滴从势阱中飞出定义为逃逸，即临界的逃逸速度是在势阱边缘时径向速度恰好为0的情形，为简化模型，我们认为水滴在并合后较短时间内分裂。

初始位置为 r_c ，势阱边界为 r_b ，并且

$$r_b > r_c \quad (5.43)$$

临界条件为：

$$\begin{aligned} r_k(t_b) &= r_b \\ v_{r,k}(t_b) &= 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

水滴势能：

$$U_k(r) = -\frac{k_A}{r} \left[1 + \alpha \left(\frac{a_0}{r} \right)^2 \right] \quad (5.45)$$

水滴机械能：

$$E_k = \frac{1}{2} m_k (v_{r,k}^2 + v_{\theta,k}^2) + U_k(r_k) \quad (5.46)$$

水滴相对于势阱中心的角动量：

$$L_k = m_k r_k v_{\theta,k} \quad (5.47)$$

设碰撞后初始位置为 r_c ，碰后速度大小为 v_c ，其方向与向外径向方向的夹角为 β ，则：

$$\begin{aligned} v_{r,c} &= v_c \cos \beta \\ v_{\theta,c} &= v_c \sin \beta \\ L_{k,c} &= m_k r_c v_c \sin \beta \end{aligned} \quad (5.48)$$

5.4.2.1 计算无阻力情形的临界逃逸速度：

无阻力时角动量守恒，能量守恒：

$$L_{k,c} = L_{k,b} \quad (5.49)$$

$$E_{k,c} = E_{k,b} \quad (5.50)$$

因此，水滴在势阱边缘处的切向速度为：

$$v_{\theta,b} = \frac{L_{k,c}}{m_k r_b} \quad (5.51)$$

由于临界轨迹满足 $v_{r,b} = 0$ ，边缘处机械能为：

$$E_{k,c} = \frac{1}{2} m_k v_{\text{escape},0}^2 + U_k(r_c) \quad (5.52)$$

由机械能守恒：

$$E_{k,b} = \frac{L_{k,c}^2}{2m_k r_b^2} + U_k(r_b) \quad (5.53)$$

$$\frac{L_{k,c}^2}{2m_k r_b^2} + U_k(r_b) = \frac{1}{2} m_k v_{escape,0}^2 + U_k(r_c) \quad (5.54)$$

因此，以角动量表示的无阻力临界逃逸速度为：

$$v_{escape,0} = \sqrt{\frac{2}{m_k} [U_k(r_b) - U_k(r_c)] + \frac{L_{k,c}^2}{m_k^2 r_b^2}} \quad (5.55)$$

代入势能：

$$v_{escape,0} = \sqrt{\frac{2k_A}{m_k} \left[\frac{1}{r_c} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_c^2} \right) - \frac{1}{r_b} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_b^2} \right) \right] + \frac{L_{k,c}^2}{m_k^2 r_b^2}} \quad (5.56)$$

因为：

$$L_{k,c} = m_k r_c v_{escape,0} \sin \beta \quad (5.57)$$

代入并整理得：

$$v_{escape,0} = \sqrt{\frac{\frac{2k_A}{m_k} \left[\frac{1}{r_c} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_c^2} \right) - \frac{1}{r_b} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_b^2} \right) \right]}{1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^2 \sin^2 \beta}} \quad (5.58)$$

5.4.2.2 考虑线性阻力情形下的逃逸速度：

线性阻力为：

$$F_{d,k} = -m_k \gamma_{d,k} v_k \quad (5.59)$$

阻力引起的机械能损失：

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= -m_k \gamma_{d,k} v_k^2 \leq 0 \\ \Delta E_{d,k} &= \int_{t_c}^{t_b} m_k \gamma_{d,k} v_k^2(t) dt \end{aligned} \quad (5.60)$$

同时，线性阻力对势阱中心产生阻力矩，角动量满足：

$$\frac{dL_k}{dt} = -\gamma_{d,k} L_k \quad (5.61)$$

积分得：

$$L_k(t) = L_{k,c} e^{-\gamma_{d,k}(t-t_c)} \quad (5.62)$$

令：

$$T = t_b - t_c \quad (5.63)$$

则到达势阱边缘时:

$$L_{k,b} = L_{k,c} e^{-\gamma_{d,k} T} \quad (5.64)$$

在边缘时, 切向速度为:

$$v_{\theta,b} = \frac{L_{k,c}}{m_k r_b} e^{-\gamma_{d,k} T} \quad (5.65)$$

考虑达到逃逸临界时, 径向速度为 0:

$$E_{k,b} = \frac{L_{k,c}^2 e^{-2\gamma_{d,k} T}}{2m_k r_b^2} + U_k(r_b) \quad (5.66)$$

能量关系:

$$\frac{1}{2} m_k v_{escape,d}^2 + U_k(r_c) = \frac{L_{k,c}^2 e^{-2\gamma_{d,k} T}}{2m_k r_b^2} + U_k(r_b) + \Delta E_{d,k} \quad (5.67)$$

可得用角动量形式表示的临界逃逸速度:

$$v_{escape,d} = \sqrt{\frac{2}{m_k} [U_k(r_b) - U_k(r_c) + \Delta E_{d,k}] + \frac{L_{k,c}^2 e^{-2\gamma_{d,k} T}}{m_k^2 r_b^2}} \quad (5.68)$$

代入势能后:

$$v_{escape,d} = \sqrt{\frac{2k_A}{m_k} \left[\frac{1}{r_c} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_c^2} \right) - \frac{1}{r_b} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_b^2} \right) \right] + \frac{2\Delta E_{d,k}}{m_k} + \frac{L_{k,c}^2 e^{-2\gamma_{d,k} T}}{m_k^2 r_b^2}} \quad (5.69)$$

消去 $L_{k,c}$:

$$L_{k,c} = m_k r_c v_{escape,d} \sin \beta \quad (5.70)$$

代入并整理得:

$$v_{escape,d} = \sqrt{\frac{\frac{2k_A}{m_k} \left[\frac{1}{r_c} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_c^2} \right) - \frac{1}{r_b} \left(1 + \alpha \frac{a_0^2}{r_b^2} \right) \right] + \frac{2\Delta E_{d,k}}{m_k}}{1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^2 \sin^2 \beta e^{-2\gamma_{d,k}(t_b - t_c)}}} \quad (5.71)$$

其中:

$$\Delta E_{d,k} = \int_{t_c}^{t_b} m_k \gamma_{d,k} v_k^2(t) dt \quad (5.72)$$

若在无微扰情形下, 即 $\alpha = 0$:

无阻力的逃逸速度:

$$v_{escape,0} = \sqrt{\frac{\frac{2k_A}{m_k} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} \right)}{1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^2 \sin^2 \beta}} \quad (5.73)$$

线性阻力情形下的逃逸速度：

$$v_{escape,d} = \sqrt{\frac{\frac{2k_A}{m_k} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} \right) + \frac{2\Delta E_{d,k}}{m_k}}{1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^2 \sin^2 \beta e^{-2\gamma_{d,k}(t_b-t_c)}}} \quad (5.74)$$

其中：

$$\Delta E_{d,k} = \int_{t_c}^{t_b} m_k \gamma_{d,k} v_k^2(t) dt \quad (5.75)$$

5.5 实验探究和数据处理

5.5.1 实验方案

将不锈钢引力势阱置于金属支架上，点燃本生灯，将势阱加热至约 220℃。用手机支架将智能手机架于势阱正上方，打开手机相机慢动作功能，调整为 1080P 240fps，正对势阱进行拍摄。我们使用两个注射器（不带针头），用来注入体积稍大的水滴。两注射器分别吸取适量纯水，分开置于势阱边缘上方 2-3cm 处，挤压两个注射器的活塞，在水滴脱离注射器时迅速甩动注射器，使两个水滴获得水平初速度，从而两水滴将分别以椭圆轨道进入势阱。

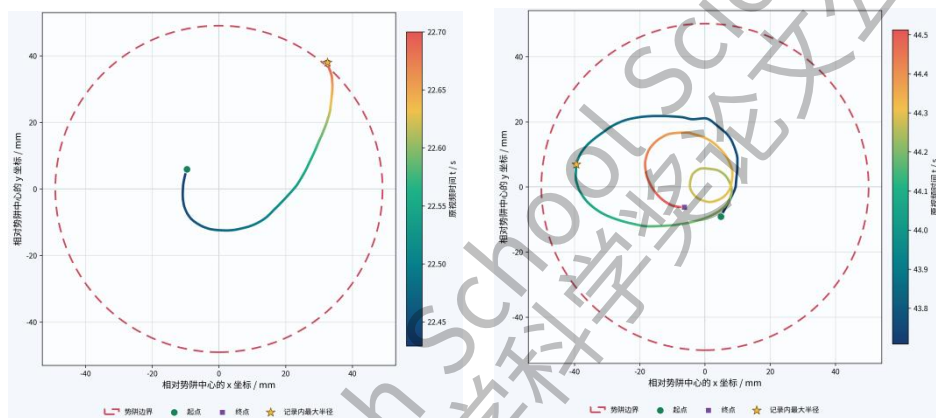
5.5.2 数据处理

由于在实验过程中很难获得水滴逃逸势阱的临界数据，故在此处通过理论计算水滴的逃逸速度，并与实验数据和实验现象进行比对，验证了理论的合理性。

我们通过 Tracker 取点，获得了两水滴合并前的坐标、合并后主液滴的坐标以及主液滴分裂形成两个小水滴的坐标，再结合理论分析算出水滴逃离势阱所需的最小速度，并与实验测量结果作比较，其中 $g = 9.81 \text{m/s}^2$ ， $A = 2.05 \times 10^{-4} \text{m}^2$ ， $\gamma_d = 0.179227 \text{s}^{-1}$ 。如图 16，我们的理论计算结果和实验得出的结论基本一致。

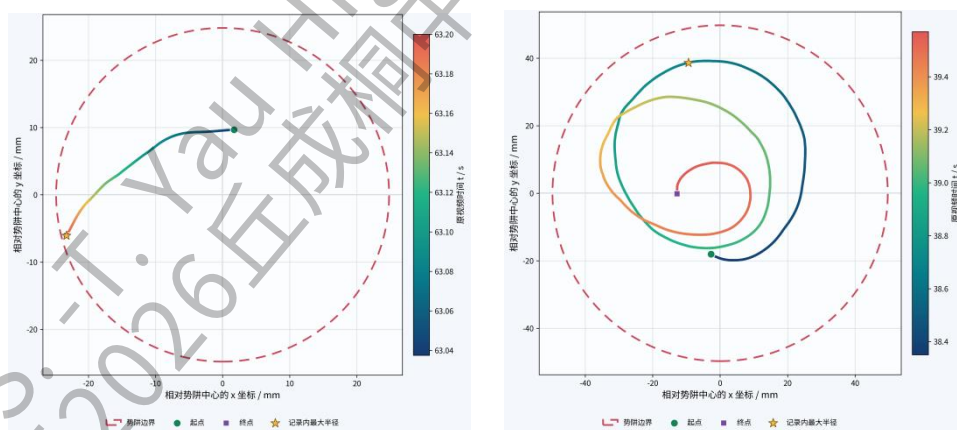
组别	质量/g	r_c/mm	r_b/mm	$\beta/\text{度}$	$\Delta t/\text{s}$	真实速度 /(m/s)	理论临界速度 /(m/s)	理论判断	实验情况
1	0.02356	11.263	49.051	115.971	0.3535	0.6362	0.545	已逃逸	已逃逸
2	0.03667	10.35	50.166	127.798	0.3409	0.5401	0.5723	未逃逸	未逃逸
3	0.13750	9.619	24.813	95.967	0.159	0.2223	0.2212	已逃逸	已逃逸
4	0.07141	18.246	49.713	79.297	0.3858	0.3501	0.4071	未逃逸	未逃逸
5	0.16228	16.689	49.8	92.369	0.4089	0.4493	0.4537	未逃逸	未逃逸

表 1



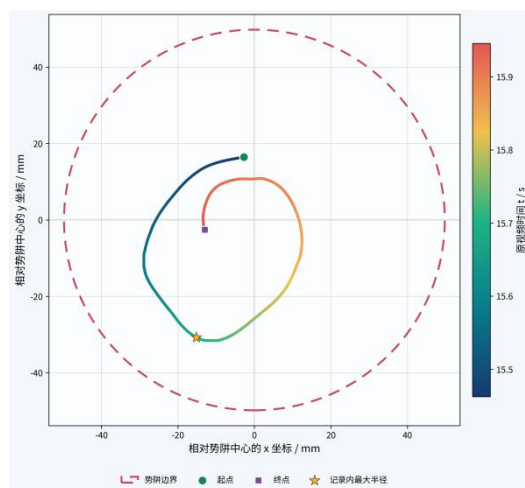
组别 1

组别 2



组别 3

组别 4



组别 5

图：16

六、水滴潮汐形变和洛希极限的类比探究

6.1 背景

洛希极限是天体物理学中描述天体在强引力场中发生潮汐破裂的临界距离。当一颗由自身引力维持结构的卫星或小天体逐渐靠近质量更大的中心天体时，其近端与远端所受到的引力大小存在差异，由此产生潮汐力。随着距离减小，潮汐作用迅速增强。当潮汐力超过小天体自身引力或内部材料强度时，小天体将无法继续维持完整结构，进而发生明显形变、物质剥离甚至整体破裂。发生这一转变所对应的临界距离称为洛希极限。

本实验中，我们使用了莱顿弗罗斯特效应在势阱中水滴进行类比，液滴的表面张力承担着维持液滴完整性的主要作用。表面张力抵抗外界作用引起的拉伸与变形，其作用可以类比于天体系统中维持小天体结构的自身引力或内部结合力。与此同时，势阱中空间位置不同处的受力差异，会使液滴不同部分产生不同的加速度，这种非均匀作用可在一定程度上类比中心天体引力所产生的潮汐效应。当势阱造成的差异作用较弱时，液滴发生有限的形变，在表面张力作用下可以恢复；当这种作用增强到超过表面张力所能提供的恢复能力时，液滴可能出现持续拉伸乃至分裂。因此，我们将液滴由稳定到破裂的临界条件，作为研究洛希极限的实验类比。

6.2 洛希极限理论模型

星体达到洛希极限时，行星潮汐引力作用与自身重力达到平衡。若卫星依靠自身重力维持完整形态，外部潮汐引力加速度为：

$$a \sim \frac{2GMR_s}{d^3} \quad (6.1)$$

式中 M 为行星质量， R_s 为卫星半径， M_s 为卫星的质量， d_R 为两者中心距离。卫星自身重力加速度为：

$$g_s = \frac{GM_s}{R_s^2} \quad (6.2)$$

若二者同量级：

$$\frac{2GMR_s}{d_R^3} \sim \frac{GM_s}{R_s^2} \quad (6.3)$$

从而得到二力平衡的洛希距离[13]：

$$d_R \sim R_s \left(\frac{2M}{M_s} \right)^{1/3} \quad (6.4)$$

把卫星看作理想的流体，求解完整洛希等势面，可得到经典流体公式[13][14]

$$d_{R,\text{fluid}} \simeq 2.44R_M \left(\frac{\rho_M}{\rho_s} \right)^{1/3} \quad (6.5)$$

其中 R_M, ρ_M 为行星半径和平均密度。

类比我们研究的莱顿弗罗斯特水滴类洛希极限现象，本实验中水滴不依靠自身重力，而依赖表面张力维持完整，因此即使临界系数不同，但外部潮汐引力的距离指数与星体系统的相同，均正比于距离 1/3 次方。

6.3 引力势阱中水滴潮汐指数的理论模型

6.3.1 潮汐张量与理论指数

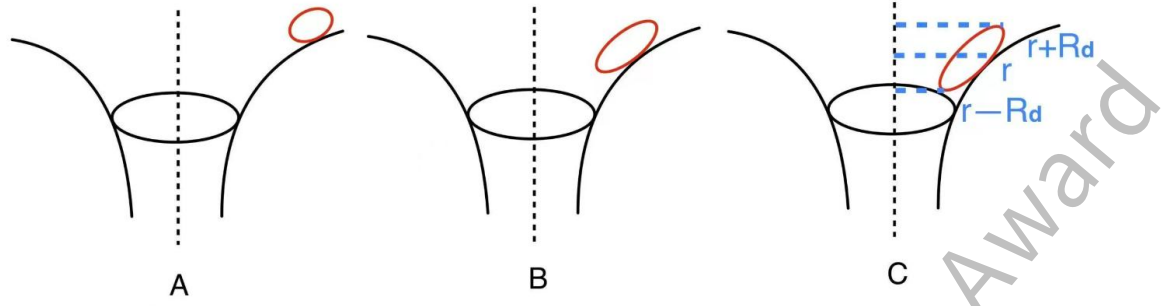


图 17

我们这里引入张量来描述水滴加速度随其位置的改变, 中心加速度径向分量为:

$$g_i(\mathbf{r}) = -\mu \frac{x_i}{r^3} \quad (6.7)$$

水滴质心到势阱中心的距离为 r , x_i 为水滴位置矢量, 大小为 r , 方向为指向势阱中心, 其中 $\mu = A/m$ 。

对空间坐标求导: $T_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, 利用 $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r^3} \right) = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5}$, 得到:

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r^3} (3n_i n_j - \delta_{ij}) \quad (6.8)$$

式中 $n_i = x_i/r$ 。取第一主轴沿径向, 则三个方向特征值为: $\lambda_r = \frac{2\mu}{r^3} \lambda_{\perp,1} = \lambda_{\perp,2} = -\frac{\mu}{r^3}$ 。因此, 引力势阱的潮汐张量满足:

$$|T_{ij}| \propto r^{-3} \quad (6.9)$$

给出理论指数:

$$n = 3$$

6.3.2 水滴的潮汐梯度

设水滴半径为 R_d , 质心到势阱中心的距离为 r 。径向近端与远端分别位于 $r - R_d$ 和 $r + R_d$ 。两端中心加速度大小之差为:

$$\Delta a_T = \frac{\mu}{(r - R_d)^2} - \frac{\mu}{(r + R_d)^2} \quad (6.10)$$

化简得:

$$\Delta a_T = \frac{4\mu r R_d}{(r^2 - R_d^2)^2} \quad (6.11)$$

除以水滴直径 $2R_d$ ，定义平均潮汐梯度：

$$G_T(r, R_d) = \frac{2\mu r}{(r^2 - R_d^2)^2} \quad (6.12)$$

当 $R_d \ll r$ 时，

$$G_T = \frac{2\mu}{r^3} \left(1 - \frac{R_d^2}{r^2}\right)^{-2} \approx \frac{2\mu}{r^3} \quad (6.13)$$

水滴毛细张力尺度为[15]

$$p_\sigma \sim \frac{\sigma}{R_d} \quad (6.14)$$

潮汐梯度力尺度为

$$p_T \sim \rho R_d^2 G_T \quad (6.15)$$

两者之比定义为潮汐—毛细参数

$$\Lambda_T = \frac{\rho R_d^3 G_T}{\sigma} \quad (6.16)$$

在远场近似下：

$$\Lambda_T \approx \frac{2\rho\mu R_d^3}{\sigma r^3} \quad (6.17)$$

若水滴处于小形变，对原式 r 采取泰勒一阶展开并取一阶项，则[16]

$$D - D_0 = C_D \Lambda_T \quad (6.18)$$

D_0 是水滴形变修正项，水滴因自身重力和运动惯性等产生了形变误差。 C_D 为取泰勒一阶项前系数。

从而得到

$$D - D_0 \propto r^{-3} \quad (6.19)$$

顶视中定义径向直径 L_r 与切向直径 $L_\perp$ ，则有

$$D_r = \frac{L_r - L_\perp}{L_r + L_\perp} \quad (6.20)$$

当 $D_r > 0$ 时水滴径向拉长幅度大；当 $D_r < 0$ 时水滴切向拉长幅度大。形变幅值定义为

$$D_{\text{abs}} = |D_r| \quad (6.21)$$

6.4 实验探究与数据处理

6.4.1 实验流程

实验在固定引力势阱高温表面上形成莱顿弗罗斯特水滴。甩动水滴使水滴获得初始平动速度后沿势阱轨道运动。手机从顶视以慢动作 1080p, 240fps 拍摄, 如图 18, 可以看到水滴逐渐被拉伸, 直到被撕裂。



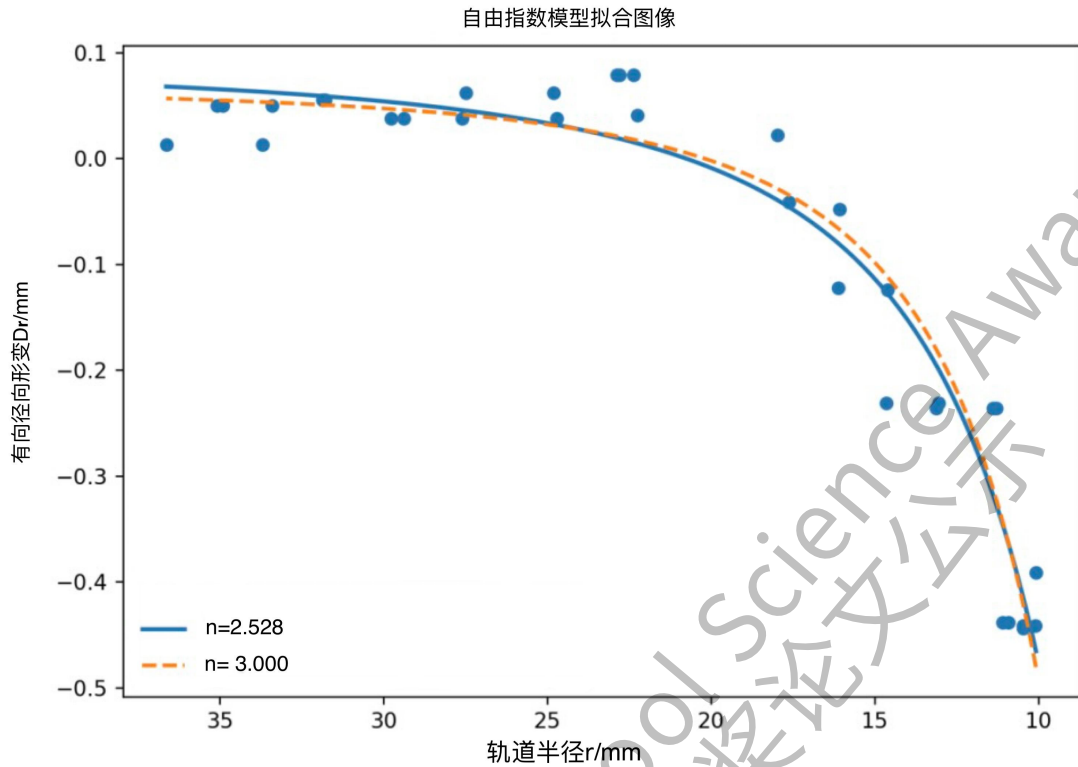
图 18

6.4.2 采集数据

用同平面已知长度标尺校准比例。顶视中首先取固定势阱中心 O , 再在每帧标记水滴径向端点 R_1, R_2 和切向端点 T_1, T_2 。两条直径中点共同确定水滴质心 C , 并计算 $r = |OC|L_r = |R_1R_2|L_\perp = |T_1T_2|$ 。

$$D_r = D_0 + Kr^{-3}$$

拟合实验数据得到 $D_0 = 0.08902$, $K = -190.59 \text{ mm}$, 如图 19, 虚线为理论值, 我们发现理论与实验基本一致。



七. 研究结论

本研究首先由 APhO 试题引出了莱顿弗罗斯特效应，并结合 3D 打印的金属引力势阱，以莱顿弗罗斯特效应为背景，探讨了水滴在势阱中的动力学，主要研究了在线性阻力作用下的运动、水滴的合并、潮汐和洛希极限现象。

我们首先对引力势阱进行标定，通过能量关系证明了液滴所受的径向力可类比为万有引力。

然后，我们以水平炽热表面为例，由 APhO 试题引伸出对液滴阻力的讨论，通过对比液滴的寿命，初步论证了水平阻力不可忽略，为后续液滴动力学的研究奠定了基础。

此后我们将水滴在势阱中的运动类比为天体在引力场中的运动，并创新性地将钱德拉塞卡动力摩擦和水滴在势阱中所受的线性阻力进行类比，考虑线性阻力和进动，分别构建了单个水滴在势阱中的动力学模型和双水滴在势阱中碰撞并逃逸的模型，以此来类比解释了一种可能的妊神星碰撞族的形成条件，并计算了不

同条件下水滴的逃逸速度，并与实验中测得的速度进行比较，证明了理论的合理性。

最后，我们为了研究星体洛希极限，使用水滴类洛希极限进行定性分析。在远场和小形变的近似下，我们发现：水滴的形变与其质心到势阱中心的距离满足三次反比关系。在得到理论模型后，我们设计实验方案，利用手机慢动作拍摄视频，并设计程序，对水滴进行取点，分析计算形变。在得到充足实验数据后，对数据进行处理以及画图分析，在误差允许范围内验证了我们模型的正确性，说明星体与水滴的洛希极限现象有一定相似性。

参考文献

- [1] CUZZI J N, BURNS J A, CHARNOZ S, et al. An evolving view of Saturn's dynamic rings[J]. *Science*, 2010, 327(5972): 1470-1475. DOI: 10.1126/science.1179118.
- [2] BROWN M E, BARKUME K M, RAGOZZINE D, et al. A collisional family of icy objects in the Kuiper belt[J]. *Nature*, 2007, 446(7133): 294-296. DOI: 10.1038/nature05619.
- [3] LEINHARDT Z M, MARCUS R A, STEWART S T. The formation of the collisional family around the dwarf planet Haumea[J]. *The Astrophysical Journal*, 2010, 714(2): 1789-1799. DOI: 10.1088/0004-637X/714/2/1789.
- [4] ORTIZ J L, SANTOS-SANZ P, SICARDY B, et al. The size, shape, density and ring of the dwarf planet Haumea from a stellar occultation[J]. *Nature*, 2017, 550(7675): 219-223. DOI: 10.1038/nature24051.
- [5] NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. Haumea facts[EB/OL].(2025-04-29)[2026-08-30].
<https://science.nasa.gov/dwarf-planets/haumea/>.
- [6] NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. Cassini: FAQ[EB/OL]. [2026-08-30]. <https://science.nasa.gov/mission/cassini/faq/>.
- [7] NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. Speck between rings:PIA12645[EB/OL].(2010-06-01)[2026-08-30].
<https://science.nasa.gov/photojournal/speck-between-rings/>.
- [8] ASIAN PHYSICS OLYMPIAD. The Leidenfrost phenomenon: theoretical competition,question3[EB/OL].(2009-04-26)[2026-08-30].
https://apho.olimpicos.net/pdf/APhO_2009_Q3.pdf.
- [9] Wolfram Mathematica 是一款可用于 3D 绘图的数学处理软件.
- [10] BIANCE A L, CLANET C, QUÉRÉ D. Leidenfrost drops[J]. *Physics of Fluids*, 2003, 15(6): 1632-1637. DOI: 10.1063/1.1572161.
- [11] QUÉRÉ D. Leidenfrost dynamics[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2013, 45: 197-215. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140709.

- [12] CHANDRASEKHAR S. Dynamical friction. I. General considerations: the coefficient of dynamical friction[J]. The Astrophysical Journal, 1943, 97: 255-262. DOI: 10.1086/144517.
- [13] MURRAY C D, DERMOTT S F. Solar system dynamics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. DOI:10.1017/CBO9781139174817.
- [14] RAPPAPORT S, SANCHIS-OJEDA R, ROGERS L A, et al. The Roche limit for close-orbiting planets: minimum density, composition constraints, and application to the 4.2 hr planet KOI 1843.03[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2013, 773(1):L15. DOI:10.1088/2041-8205/773/1/L15.
- [15] BATCHELOR G K. An introduction to fluid dynamics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. DOI:10.1017/CBO9780511800955.
- [16] TAYLOR G I. The formation of emulsions in definable fields of flow[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1934, 146(858):501-523. DOI:10.1098/rspa.1934.0169.

致谢

本选题来源于我们在学校的物理奥赛课上，教练苏俊老师讲解 APhO 试题所获得灵感。感谢苏俊老师的指导，同样感谢江苏省海安高级中学为我们实验提供微科研实验室和器材，对我们有极大帮助。感谢林旺老师对我们论文写作和数据分析时的陪伴与帮助。

选题分多个部分，分别由我们小组三人在指导老师的辅助下分工完成。其中，陈世奇同学完成了预实验部分和对 APhO 试题的延伸及实验总结，林徐博同学负责水滴动力学和水滴逃逸的理论部分及引言和摘要的撰写，水滴动力学和水滴逃逸的数据处理部分由林徐博和陈世奇共同完成，陆家旭同学完成了洛希极限部分的推导和实验数据处理及致谢部分，三位同学在林旺、杨志旻老师的协助下共同完成了所有实验。我们依靠手机拍摄视频，并逐帧对视频进行理论建模和分析，从中获取数据，在 AI 对数据辅助处理下，不断突破取得成就。实验设计上我们共同探讨，实施时互帮互助，配合默契。撰写论文时在指导老师分享的经验下，不断完善，精益求精。

实验中也遇到多种困难。由于实验条件的限制和人工操作的不稳定性，实验过程中有时难以观察到实验现象。经过我们小组成员和指导老师的讨论下，我们不断改进试验方案，例如：

1. 在莱顿弗罗斯特水滴洛希极限实验中，由于势阱为金属制品，会产生严重的反光，导致去点分析时会产生较大误差，我们先关灯处理，却发现手机难以对焦，后来，我们采取部分遮光处理等方法，成功排除误差。

2. 在加热势阱时我们一开始使用酒精灯，导致温度不够，多次失败后，我们改进加热装置，使用本生灯，达到理想温度。

3. 注射器方面，我们一开始使用不带针头大口径注射器做实验，成功观察到现象，但在分析时由于水滴太多导致难以分析，尤其在研究单个水滴的进动时极其困难；在洛希极限实验中使用不带针头的注射器导致影响水滴运动的不确定性太多（主要原因是水滴太大引起的）难以研究，便使用带针头的减少了误差，使理论得到简化。我们坚持尝试，不惧失败，以积极的心态最终取得成功。

数据分析上，实验的多种不确定因素也给理论建模带来许多麻烦，我们查阅权威机构和权威人士的论文，从中吸取经验和给我们提供帮助的地方，寻找可简

化之处，不断排除不可控或难处理因素，完成建模。

我们主要借助 ChatGPT 5.6 为辅助工具，在实验数据的处理上借助 AI 帮我
对实验数据与我们理论进行拟合，并辅助计算。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示