

参赛学生姓名：况宇晨

中学：北京师范大学附属实验中学

省份：北京市

国家/地区：中国

指导老师姓名：何道，马宇翰

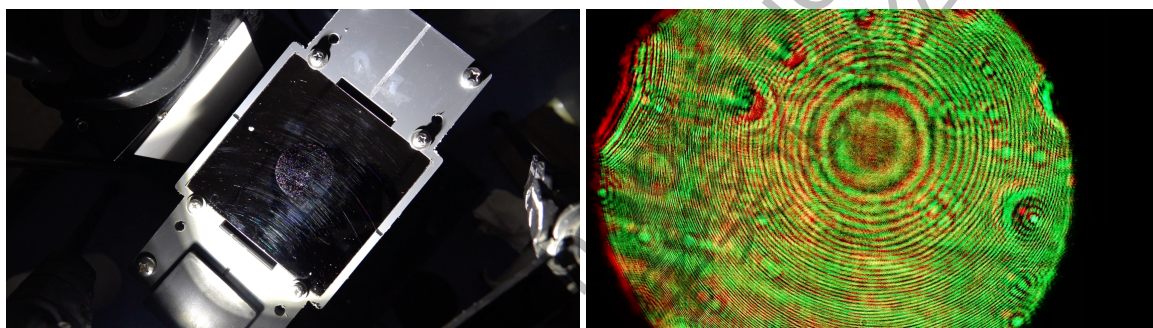
指导老师单位：北京师范大学附属实验中学，
北京师范大学

论文题目：热表面扩散液膜厚度的空间分布
及时间演化的光学测量

热表面扩散液膜厚度的空间分布及时间演化的光学测量

况宇晨

北京师范大学附属实验中学



摘要附图：受热金属表面上的油膜向外流动。左：加热后油自中心向四周铺展，摊成一层薄膜；右：同一过程在反射式干涉光路下呈现的同心干涉环。

摘要

受热金属表面上聚集的油液会自加热中心向外铺展，并逐渐形成薄液膜，这一流动主要由温度梯度引起的表面张力梯度驱动。尽管这一现象的基本机制及润滑近似下的薄膜演化方程已有较成熟的理论描述，实验方面的精确测量仍存在瓶颈：液膜厚度仅为亚微米至微米量级且持续变化，以往实验多侧重于铺展前沿或基底温度场的测量，难以直接获得膜厚的时空分布。本文针对不透明金属基底建立了反射式双波长激光干涉测厚方法，并发展了两种不同的膜厚反演路径。第一种以连续小波变换追踪干涉条纹的局部尺度与相位，经空间与时间解缠恢复膜厚变化。第二种以仅由合成干涉图训练的卷积神经网络，从单帧条纹图中回归局部膜厚梯度，再经径向积分重建膜厚剖面。两种独立路径未以彼此结果相互标定，在同一组实测数据上给出了相近的膜厚剖面形状与时间演化趋势；双波长通道用于交叉检验与测量噪声估计。利用上述方法，本文在干涉条纹可稳定解析的环带区域内重建了热毛细铺展后期油膜厚度的时空演化。该阶段膜厚沿径向总体单调增加，剖面随时间近似整体减薄，局部减薄速率逐渐降低。我们将重建所得膜厚场与热毛细主导的约化薄膜输运模型比较：以前半段实验数据确定模型参数后，模型无需重新标定即可外推其后数十秒的膜厚演化，预测残差低于测量总不确定度。这表明所测膜厚场的时

间演化与该模型自洽。本文表明，文明发展的反射式干涉方法，可在不透明受热基底的可分析区域内实现非接触的动态膜厚场测量，其中神经网络解算路径可由单帧完成反演。我们的工作为研究受热液膜的空间演化、输运与失稳过程提供了实验基础，未来可以向干斑形成、三相接触线及显著非轴对称演化阶段进行拓展推广。

关键词：热毛细效应；马兰戈尼流；薄膜干涉；膜厚重建；小波变换；神经网络

目录

1	引言	3
2	油膜流动理论分析	4
2.1	薄膜厚度演化方程	4
2.2	膜厚演化方程的求解	6
3	等厚干涉动态测厚方法	8
3.1	测量原理	8
3.2	实验装置与过程	9
3.3	干涉条纹的膜厚反演	11
3.4	理论适用性检验	13
4	实验结果分析	15
4.1	数据记录与实验观测	15
4.2	静态：单帧膜厚场的重建	15
4.3	动态：膜厚分布的演化	17
4.4	与薄膜演化方程的对照	18
5	总结与展望	22
	致 谢	23
	附 录	25
A	薄膜厚度演化方程的推导	25
B	基底温度场的求解	26
C	可分析域的界定	27
D	神经网络路径的实现	28
E	各段视频的实测数据	29

1 引言

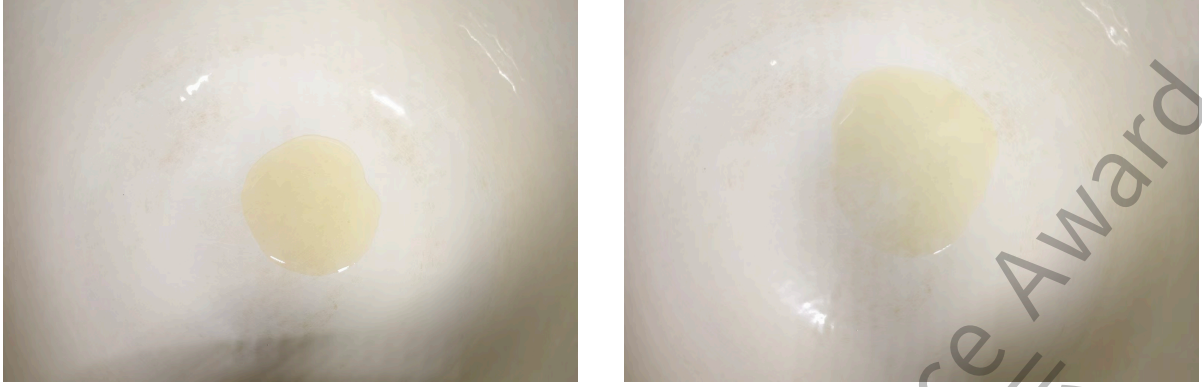


图 1 受热金属表面上食用油的向外流动。(a) 加热前，油滴聚成一团静止于金属板上；(b) 加热后，油膜向四周铺展，中心区域明显形成浅凹状区域。

在日常生活中，我们常常能偶然观察到一些精妙而有趣的流体力学现象。例如在厨房里，当你往一口底部受热的平底锅中倒入少许食用油时，原本聚成一团的静态油滴仿佛被某种无形的力瞬间拉扯，从受热最强的中心迅速向四周退散铺开，在短短几秒内摊成一层极薄的油膜（图1）。这种受热表面液膜的动态行为在工程实践与应用中也很常见：在喷雾冷却与高功率电子器件的相变散热技术中，壁面液膜的微观厚度分布直接决定了局部换热系数的上限；在精密润滑与涂布工艺中，由热致效应引发的液膜重新分布，往往是造成膜厚均匀性失控的常见来源 [1]。

驱动这一液体受热流动行为的核心机制是热毛细效应，也称马兰戈尼 (Marangoni) 效应。非均匀加热在液膜中建立起温度场 $T(r)$ ，由于绝大多数液体的表面张力随温度升高而下降 ($\sigma_T \equiv d\sigma/dT < 0$)，液-气界面上随之出现表面张力梯度 $\nabla_s \sigma = \sigma_T \nabla_s T$ 。这一梯度以切向应力的形式直接作用在自由表面上，将流体从高温中心拖向低温边缘，宏观上表现为油膜的向外铺展。在薄膜极限下（膜厚 h_0 远小于横向特征尺度 L ，即 $\epsilon \equiv h_0/L \ll 1$ ，且 $\epsilon Re \ll 1$ ），Navier-Stokes 方程可通过润滑近似降阶为关于膜厚 $h(r, t)$ 的单一非线性演化方程，Oron、Davis 与 Bankoff 的综述文章 [2] 详细给出了这类长尺度演化方程的统一框架，其中重力、毛细力与热毛细驱动以不同的非线性通量项并列出现。近年来，不同学者围绕温度梯度驱动的液体流动与马兰戈尼对流开展了丰富的研究。理论与数值计算逐渐揭示了该对流在外场（如重力）环境下的动力学失稳机制 [3]，以及在复杂非牛顿流体或含纳米颗粒体系中相变与传热的耦合特征；实验研究则借助红外热像仪等手段细致刻画了受热表面温度场，并观测了宏观铺展前沿的标度律与有限时间弛豫动力学 [4]。

然而，目前针对受热液膜向外流动的实验研究，测量对象仍主要集中于宏观铺展边界 $R(t)$ 与基底温度场，缺少对膜厚分布的测量。膜厚场 $h(r, t)$ 既是检验非线性流体输运方程与非平衡热力学理论的直接观测量，也是表征工程应用中热传导极限与流体力学失稳过程的核心物理量，例如干斑的成核位置及其演化速率。因此获取液膜厚度场 $h(r, t)$ 的时空演化对于理解液膜的非平衡动力学至关重要。尽管液膜铺展规律的理论框架已初步建立，液膜在实际非平衡演化中的微观三维形貌仍缺乏直接的实验表征，如何准确获取 $h(r, t)$ 的时空分布仍面临一系列实验挑战。对于受热油膜而言，其初期的快速铺展在数秒内完成，随后进入持续数分钟的缓慢减薄过程，在此过程中膜厚逐渐减薄至微米量级，目前的测量手段仍面临很多问题，比如接触式手

段（探针、电容法）会直接扰动液膜的自由表面，影响其物理过程 [5]，而逐点扫描式的光学方法（共聚焦、色散共焦、椭偏等）虽能达到所需的纵向精度，却依赖机械扫描逐点取数，完成一次全场扫描通常需要秒至分钟量级的时间 [6]，因而难以记录某一时刻的三维形貌。

针对上述测量问题，薄膜干涉提供了一种即时的非接触的光学测量方法。近年来，薄膜干涉观测已成功应用于等温及稳态的液膜研究。Muller 等用透射式单色干涉实时追踪了溶质马兰戈尼流引起的液膜形变，证明干涉条纹可以作为膜厚变化的定量测量手段 [7]；Richter 等则用三波长反射式干涉重建了铺展硅油滴的三维形貌，并借助多波长消除了单波长干涉固有的 2π 相位模糊，无需参考点即可确定绝对膜厚 [8]。因此，本文旨在建立适用于受热金属表面的反射式干涉测厚方案，直接获得油膜向外流动过程中膜厚的时空演化 $h(r, t)$ 。该方案的核心思路是利用薄膜表面与底面反射光相干叠加产生的光程差，将膜厚的空间变化精密映射为干涉条纹的变化。针对大范围膜厚梯度和快速演化的特性，采用双波长反射光路分离彩色通道，并分别通过连续小波变换的小波脊法提取相位，以及利用纯合成数据训练的神经网络直接回归局部厚度梯度，实现膜厚的两种独立解算。通过分析薄膜干涉条纹的演化过程，即可实现高时空分辨的二维瞬态膜厚场重建。

本文的结构安排如下：第 2 节从连续性方程与 Navier-Stokes 方程出发，基于薄膜润滑近似推导受热油膜的理论演化方程，确立热毛细通量与膜厚的动力学过程。第 3 节详述双光束反射干涉的光学原理及实验装置构型，并建立基于连续小波变换提取相位及神经网络辅助解算的自动化动态条纹分析算法。第 4 节针对单帧的膜厚场作数值重建，并以两条独立解算路径的结果一致性说明重建的可靠，然后分析给出膜厚场的时空演化，并与第 2 节的理论过程进行比较。最后，第 5 节总结本文的主要研究结果，并对更深入的热力学及流体物理延伸方向作出展望。

2 油膜流动理论分析

在本文研究的模型中，水平金属基板上铺展一层薄油膜，并从基板下方对油膜中心区域进行局部加热（图 2）。基板加热在油膜内部建立起非均匀的温度场，中心温度最高并沿径向单调下降。液体的表面张力随温度升高而下降，自由表面上的温度梯度随之转化为表面张力梯度。液体表面的表面张力梯度产生沿自由表面的切向驱动力，并通过界面处的应力平衡传递至液体内部，表现为液体内部的粘性剪切应力。该切向应力指向低温方向（即径向向外），并通过粘性作用向膜内传递，在油膜内部驱动剪切流，由此产生热毛细对流，即马兰戈尼对流。这一剪切流在膜厚方向上给出净的径向体积通量，使流体自加热中心向外输运，宏观上即表现为油膜的向外铺展。而流体的重新分布改变了膜厚分布 $h(r, t)$ ，即中心区域因失去流体而减薄，外缘因流体堆积而增厚。膜厚的空间变化使静水压 ρgh 与自由表面的 Laplace 压强 $-\sigma\kappa$ 在径向上产生梯度，从而驱动出与热毛细流方向相反的回流。因此，油膜的实际演化由热毛细驱动与重力、毛细回流之间的竞争决定。

2.1 薄膜厚度演化方程

本节参考 Oron 等 [2] 的理论框架，基于不可压缩流体的连续性方程与 Navier-Stokes 方程，利用润滑近似在柱坐标系下推导受热油膜的厚度演化方程，并保留与本文实验条件相关的各项。

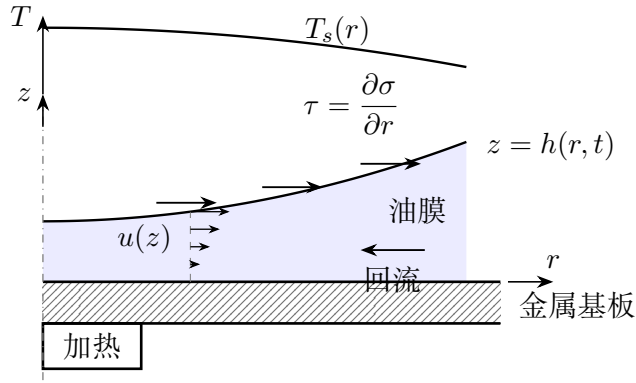


图 2 受热油膜的物理构型。基板中心受热，自由表面上的温度梯度转化为指向外侧的切应力，在膜内驱动出剪切流，使流体自中心向外输运。

取金属基板上表面为 $z = 0$, z 轴垂直水平面向上, 建立柱坐标系 (r, θ, z) , 油膜自由表面记为 $z = h(r, t)$ 。记基板上表面的温度分布为 $T_s(r)$, 自由表面温度为 $T_i(r, t) \equiv T(r, z = h, t)$, 环境温度为 T_{env} , 膜的横向特征尺度为 L , 膜厚度量为 h_0 , 并记膜厚与横向尺度之比 $\varepsilon \equiv h_0/L$ 。为描述油膜的演化过程, 作如下假设: (1) 温度场与厚度场均绕加热中心轴对称, 即 $\partial/\partial\theta = 0$, 且角向速度为零; (2) $\varepsilon \text{Re} \ll 1$, 惯性项相对粘性项可忽略, 流体处于粘性主导的准稳态; (3) 薄膜近似 $h \ll L$, 因而 $\partial/\partial z \gg \partial/\partial r$; (4) $|\partial h/\partial r| \ll 1$, 自由表面曲率可线性化; (5) 流体不发生蒸发, 液膜总体积守恒; (6) 黏度只随径向温度分布变化, 可写为 $\mu = \mu(T_s(r))$; (7) 界面洁净, 不存在表面活性剂引起的溶质马兰戈尼效应。

基于上述条件与假设, 系统连续性方程在柱坐标下取轴对称形式,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

在 r 方向上的动量方程忽略惯性项与大部分粘性项, 仅保留主要的压力梯度与 z 方向粘性项,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (2)$$

在 z 方向上的动量方程在进行同样约化后仅剩静水压平衡

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (3)$$

相应的边界条件汇总于表 1。

在本文讨论范围内, 表面张力随温度线性变化:

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0), \quad \gamma \equiv -\frac{d\sigma}{dT} > 0 \quad (4)$$

在薄膜近似下膜内的横向导热相对纵向导热可忽略, 温度沿 z 方向线性分布。联立表 1 中的基板温度条件与牛顿冷却条件, 得到自由表面温度演化,

$$T_i(r, t) = T_{\text{env}} + \frac{T_s(r) - T_{\text{env}}}{1 + \text{Bi}}, \quad \text{Bi} \equiv \frac{\alpha h}{k_L}, \quad (5)$$

表 1 控制方程的边界条件。 p_a 为环境压强， k_L 为液体导热系数， α 为油-气界面的对流换热系数。

位置	条件	表达式
$z = 0$	无滑移与不可穿透	$u = w = 0$
$z = 0$	基板温度	$T = T_s(r)$
$z = h$	运动学条件	$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} = w$
$z = h$	法向应力	$p = p_a - \sigma \kappa, \quad \kappa = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right)$
$z = h$	切向应力	$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}$
$z = h$	牛顿冷却	$-k_L \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha (T_i - T_{\text{env}})$

其中 Bi 为以局部膜厚为特征长度的毕奥数。在本文所研究的参数范围内 $\text{Bi} \ll 1$ ，因此可近似取 $T_i \approx T_s$ 。由于 T_i 依赖于局部膜厚，膜厚扰动会通过温度场反馈到热毛细应力，从而导致长波失稳。但在 $\text{Bi} \ll 1$ 的条件下，该反馈效应较弱，对铺展过程的影响可以忽略，故下文不予保留。

对控制方程作代数化简并代入表 1 的边界条件（推导细节见附录 A），可得膜内的径向体积通量

$$Q(r, t) = -\frac{h^3}{3\mu} \left(\rho g \frac{\partial h}{\partial r} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right) - \frac{h^2}{2\mu} \gamma \frac{\partial T_i}{\partial r}, \quad (6)$$

式(6)中的 μ 为局部黏度 $\mu(r, t)$ ，其径向变化将在后文的约化中显式保留。第一项为重力与毛细力驱动的通量，第二项为热毛细驱动的通量。注意到 $\gamma > 0$ 而加热中心处 $\partial T_i / \partial r < 0$ ，热毛细项为正，对应向外的输运，与实验观测一致。代入轴对称的质量守恒关系 $\partial h / \partial t = -r^{-1} \partial(rQ) / \partial r$ 即得膜厚演化方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[-\frac{h^3}{3\mu} \left(\rho g \frac{\partial h}{\partial r} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial r} \right) - \frac{h^2}{2\mu} \gamma \frac{\partial T_i}{\partial r} \right] \right\}. \quad (7)$$

2.2 膜厚演化方程的求解

热毛细驱动由基底建立的径向温度梯度决定。设基板厚度 d 远小于横向尺度，沿厚度方向温度可视为均匀，中心半径 a 的加热面的有效功率为 P_{eff} ，且上下表面向环境散热，深度平均后温升 $\Delta T \equiv T - T_{\text{env}}$ 满足

$$\rho c_p d \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = k_s d \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right) - 2\alpha_s \Delta T. \quad (8)$$

该方程的稳态解由修正 Bessel 函数 $K_0(r/\ell_T)$ 给出， $\ell_T = \sqrt{k_s d / 2\alpha_s}$ 为散热长度， α_s 为基板对环境的散热系数；忽略散热项时的瞬态解由指数积分 $E_1(r^2/4D_s t)$ 给出， D_s 为基板热扩散系数（见附录 B）。两解所含的散热系数 α_s 与加热时间 t 均为难以独立确定的量，但它们并不

进入热毛细驱动，对两解分别求导并在 $a < r < \min(2\sqrt{D_s t}, \ell_T)$ 内展开，可得到同一结果

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{C}{r}, \quad C \equiv \frac{P_{\text{eff}}}{2\pi k_s d}, \quad (9)$$

即温度梯度既与散热强度无关，也与温度场是否已达稳态无关。由于热毛细应力只依赖 $\partial_r T$ 而不依赖温度的绝对值，温度场中未经确定的部分不再进入膜厚演化方程。以视场内任一参考半径 r_0 为基准并令 $T_{\text{ref}} \equiv T(r_0)$,

$$T(r) - T_{\text{ref}} = C \ln \frac{r_0}{r}. \quad (10)$$

方程 (7) 的三项在本文的参数范围内并不同量级。以 $\bar{h}$ 记膜厚量级、 Δh 记剖面在分析域内的落差、 L 记横向特征尺度，三项通量之比为

$$\frac{Q_{\text{grav}}}{Q_{\text{therm}}} \sim \frac{2\rho g \bar{h} \Delta h}{3\gamma C}, \quad \frac{Q_{\text{cap}}}{Q_{\text{therm}}} \sim \frac{2\sigma \bar{h} \Delta h}{3\gamma C L^2}. \quad (11)$$

因此，在本文所研究的热毛细脊以内、膜面缓慢变化的观测区域中，膜厚演化主要由马兰戈尼输运控制，重力和曲率压力均为高阶修正。同时由于二甲基硅油黏度会随温度变化而变化，故在本文中，

$$\mu(T) = \mu_0 \exp[-\beta(T - T_{\text{ref}})], \quad (12)$$

我们将黏温因子保留以便判明其影响，其量级在 §4.4 讨论。主阶控制方程因而约化为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\gamma}{2\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r h^2 e^{\beta(T - T_{\text{ref}})} \frac{\partial T}{\partial r} \right]. \quad (13)$$

上述近似仅适用于热毛细脊内部的平缓区域。当接近脊峰及其前缘时，膜厚的局部变化尺度显著缩小，曲率梯度随之增强，毛细压力可能重新进入主导平衡，因此本文的约化模型不用于描述热毛细脊的局部精细结构。将式 (10) 代入 (13)，黏温因子化为幂律 $e^{\beta(T - T_{\text{ref}})} = (r_0/r)^\nu$ ， $\nu \equiv \beta C$ ，方程闭合为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\gamma C}{2\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[h^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\nu \right]. \quad (14)$$

对化简后的方程进行数值求解，取初始剖面为半径 R_i 、厚 h_0 的液膜。该形状为数值上的便利

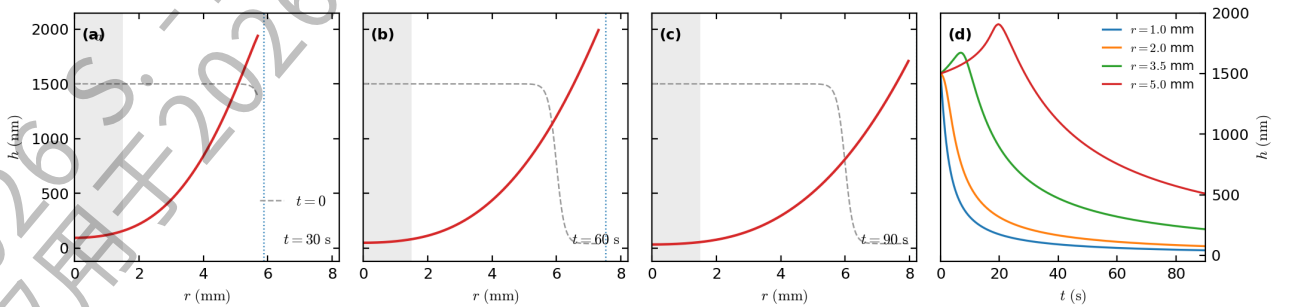


图3 约化方程 (14) 的数值解。(a)–(c) 为 $t = 30, 60, 90$ s 时的膜厚剖面，虚线为初始剖面，灰底标出加热斑半径 $a = 1.5$ mm，右端点线为热毛细脊峰位置。(d) 为四个固定半径处膜厚随时间的变化。

选择，不代表实验的初始状态。以平缓的帽状剖面替代后重新求解，中心减薄历程与脊峰位置的差别在 2% 以内，说明在热毛细输运主导的区域，膜厚演化很快抹去初始形状的细节。结果表明油膜中心快速减薄，内侧半径单调减薄、外侧先增后减，与图1 观测到的中心减薄、外缘堆积在定性上一致。

3 等厚干涉动态测厚方法

3.1 测量原理

本文主要研究不透明金属作为基底的油膜受热流动，因此采用反射式干涉。单色光近垂直入射至油膜，分别在油-空气界面与油-金属界面反射，两束反射光在像面叠加发生干涉（图 4）。两束光的合成光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\Phi). \quad (15)$$

式 (15) 中两束光的强度比决定条纹的可见度

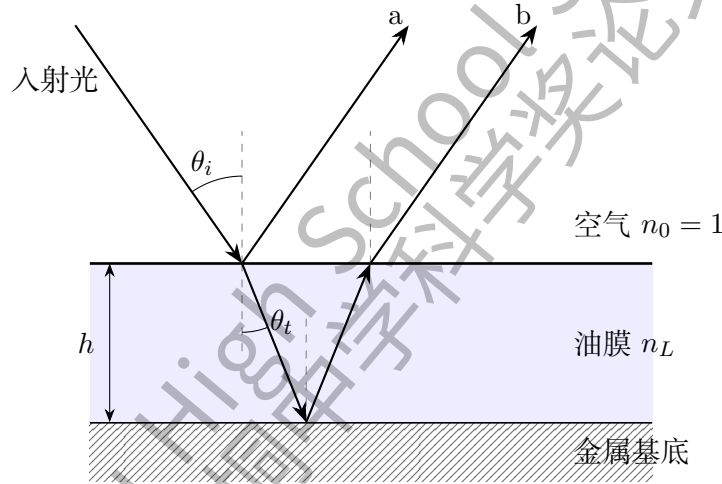


图 4 反射式双光束干涉的光路。入射光在油-空气界面反射得光束 a，折射进入膜内、经油-金属界面反射后穿出得光束 b；两束光的光程差由膜厚 h 决定。

$$V \equiv \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (16)$$

V 只改变条纹的对比度，不影响 $\Delta\Phi$ 与位置的对应关系，因而不进入下文由相位反解膜厚的过程，但它决定相位提取的信噪比。

其中垂直入射时两束光在膜内往返一次的光程差为 $2n_L h$ (n_L 为油的折射率)，计入两次反射本身引入的相位突变之差 $\delta(\lambda)$ 后，总相位差为

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi n_L h}{\lambda} + \delta(\lambda). \quad (17)$$

对透明基底 $\delta(\lambda)$ 为 0 或 π ；金属具有复折射率，其界面反射相移既非 0 亦非 π 且随波长变化，故在此处， $\delta(\lambda)$ 为一个依赖波长的待定常数。

式 (17) 说明相位差只通过膜厚依赖于位置, 因此膜面上任一点的明暗完全由该处的局部膜厚决定: 每一条干涉条纹都是膜面上的一条等厚线, 条纹图样即膜厚场的等高线图。相邻两条亮纹之间的膜厚差为 $\lambda/2n_L$, 相邻明暗条纹之间则为

$$h_\lambda = \frac{\lambda}{4n_L}. \quad (18)$$

条纹的疏密则反映膜厚的空间变化率, 梯度陡处条纹密集、平缓处稀疏, 相邻两条亮纹之间的径向间距为

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2n_L |\nabla h|}. \quad (19)$$

由图像得到的相位包裹在 2π 之内, 解缠后得到连续相位场 $\Phi_u(r, t)$, 但整场仍共同相差一个未知的 2π 整数倍 M 。代入式 (17) 反解, 膜厚可分解为

$$h(r, t) = \underbrace{\frac{\lambda}{4\pi n_L} \Phi_u(r, t)}_{h_{\text{rel}}(r, t)} + \underbrace{\frac{\lambda M}{2n_L} - \frac{\lambda \delta(\lambda)}{4\pi n_L}}_{b_0}. \quad (20)$$

第一项 h_{rel} 称为相对膜厚, 完全由实测相位决定, 不需任何标定; 第二项 b_0 含绝对级次 M 与反射相移 $\delta(\lambda)$ 两个未知量, 但与位置和时间均无关, 因此

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial h_{\text{rel}}}{\partial r}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_{\text{rel}}}{\partial t}, \quad h(r_2, t_2) - h(r_1, t_1) = h_{\text{rel}}(r_2, t_2) - h_{\text{rel}}(r_1, t_1). \quad (21)$$

即膜厚剖面的形状、梯度及其随时间的演化均无需标定即可测得, 满足刻画热毛细排液所需要的全部信息。

为直观说明条纹图样与膜厚分布的对应关系, 我们构造了三类具有代表性的虚拟膜厚场, 基于式 (15) 与 (17) 计算理论条纹, 如图 5 所示。楔形膜给出平行直条纹; 抛物形凹陷给出同心圆环, 且圆环自中心向外逐渐加密; 当剖面单调而梯度非单调时, 条纹在梯度极小处明显变疏。当膜厚随时间减薄时, 条纹整体向外扩张扫过, 如图 6 所示, 固定半径处的光强随之周期性起伏, 每一个周期对应膜厚改变 $\lambda/2n_L$ 。因此膜厚的空间分布及其时间演化均可由条纹图样中的相位变化获得, 而相位的正确提取与解缠则对空间分辨率与采样帧率提出了明确的定量要求, 其推导与本文实验的取值列于附录 C。

3.2 实验装置与过程

实验装置如图 7 所示。基底为抛光的正方形 304 不锈钢板, 厚度 1 mm, 边长 10 cm, 其下方中心位置放置一枚铁钉, 铁钉的上端与不锈钢板接触, 下端置于电加热片上, 通过铁钉将热量传递至基底中心区域。铁钉端面与钢板的接触斑半径约 1.5 mm, 即式 (9) 中温度梯度形式所适用区域的内边界 a 。电加热片的功率由电源箱调节, 实验中取 6-8 W。

波长为 $\lambda_R = 650 \text{ nm}$ 与 $\lambda_G = 532 \text{ nm}$ 的两束激光经扩束准直后合束, 光斑直径 2.5 cm, 通过分束镜垂直入射照射基底, 反射光由顺华利 SHL-500W 彩色相机记录, 分辨率 1920×1080 , 帧率 30 fps。相机的 Bayer 阵列使两个波长分别落入红、绿通道, 故两波长的条纹由同一段视频分离得到。相机帧率经逐帧时间戳标定为 $f_{\text{cam}} = 30.06 \text{ fps}$; 成像标定为 10 mm 对应 886 px, 即

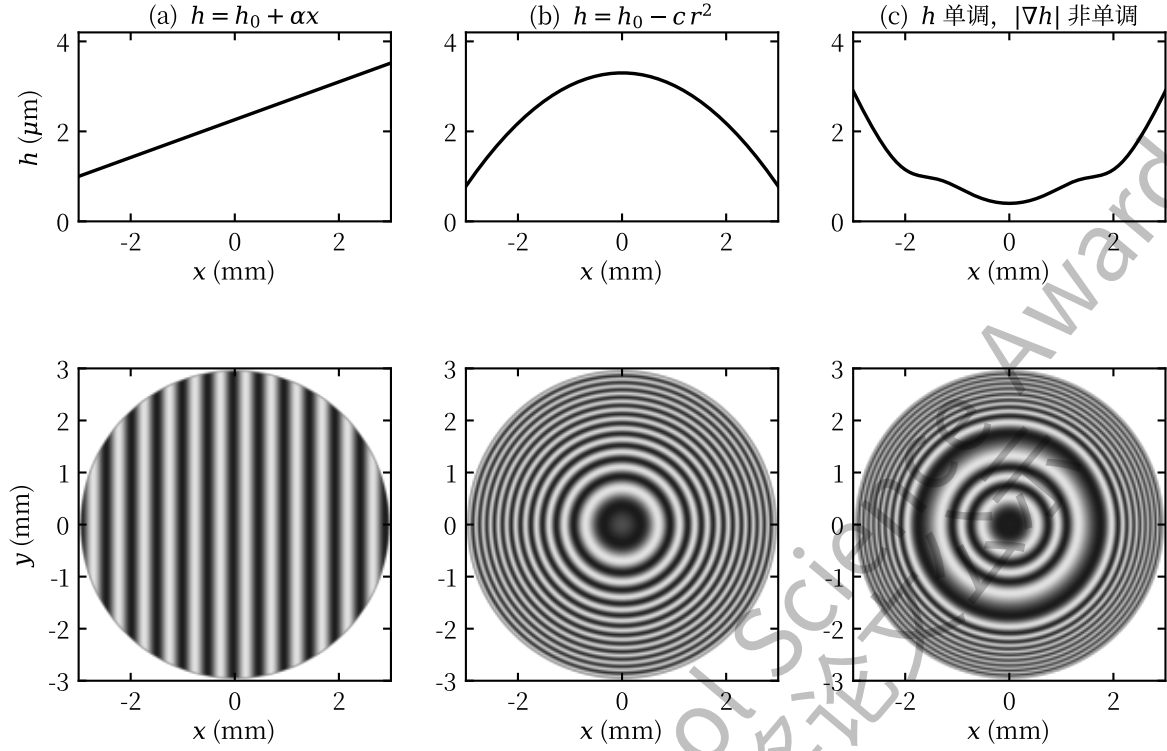


图 5 三类膜厚场的正演条纹。上排为膜厚沿 $y = 0$ 的剖面，下排为按式 (15)、(17) 算得的理论条纹图。(a) 楔形膜给出平行直条纹；(b) 抛物形凹陷给出同心圆环；(c) 剖面单调而梯度非单调时，条纹在梯度极小处变疏。三例取相同的波长与折射率。

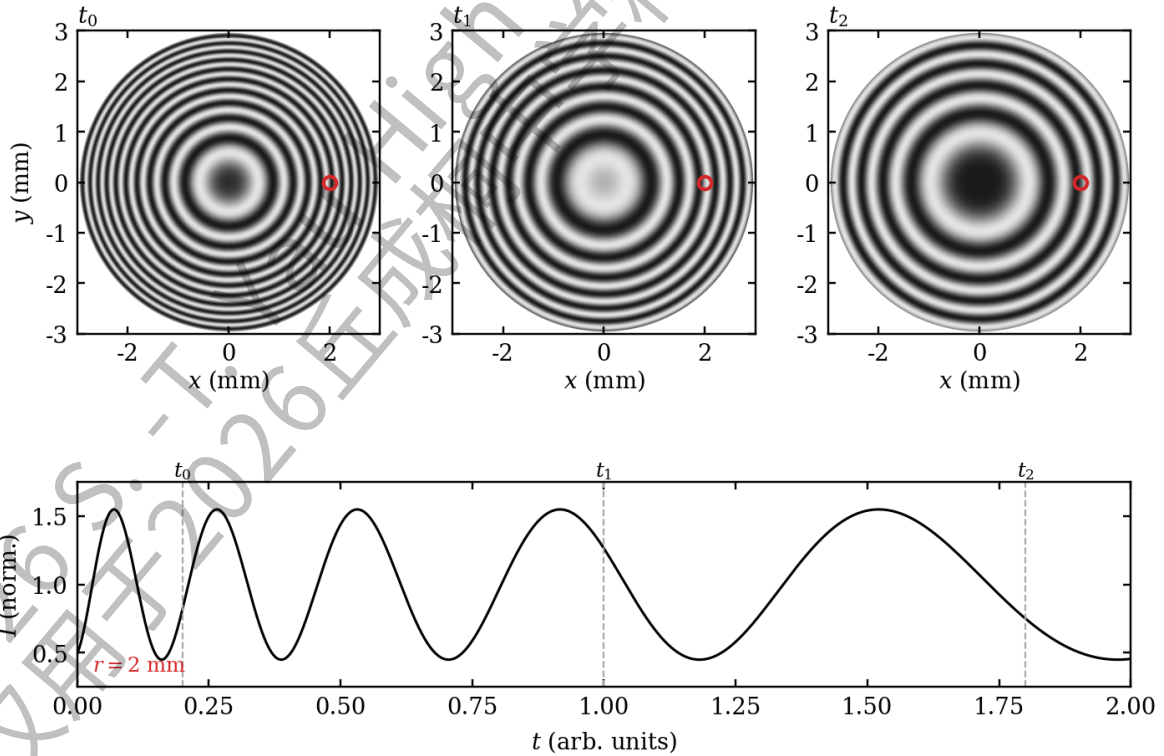


图 6 膜厚随时间减薄时的条纹演化。上排为三个时刻的理论条纹图，条纹整体向外扩张，并逐条自外边界扫出，总数随之减少；下排为固定半径（图中红圈处）的光强随时间变化，每经过一个周期对应膜厚改变 $\lambda/2n_L$ 。

像元标度 $p_s = 11.3 \mu\text{m}/\text{px}$ ($\pm 2\%$), 下文凡涉及长度之处均按此换算给出实际尺寸。

实验中受热液体为二甲基硅油, 牌号 PMX-200, 室温黏度 40 cSt。每次实验先清洁并干燥基底, 在中心滴加油液, 静置至形状稳定后开启加热并同步录像。

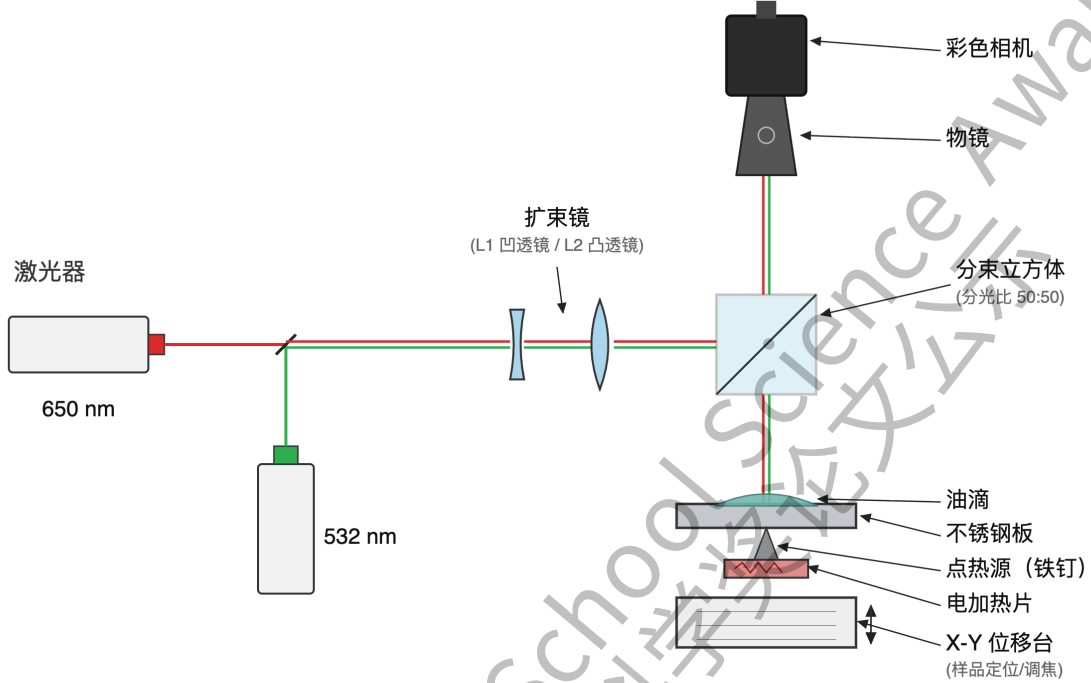


图 7 实验装置。两束激光合束后经扩束镜准直, 由 50:50 分束立方体折向下方, 垂直入射至不锈钢基底上的油膜; 反射光经原路返回并透过分束镜, 由物镜成像于彩色相机。基底下方的铁钉作为点热源将电加热片的热量导入基底中心, 基底置于 X-Y 位移台上用于样品定位。

3.3 干涉条纹的膜厚反演

在实验过程中干涉产生的条纹为等厚线, 膜厚轴对称时等厚线为同心圆, 故先拟合圆心并沿方位角平均, 把每帧降为一维剖面 $I(r) = I_b(r) + I_m(r) \cos \Phi(r)$, 其中 I_b 为背景光强, I_m 为条纹振幅, Φ 为待求相位。本节给出两条由 I 反解 Φ 的途径, 并按 §3.1 的式 (21) 换算为膜厚。

由式 (17), 相位的空间变化率 $\Phi'(r) = (4\pi n_L/\lambda) \partial h/\partial r$, 正比于膜厚梯度。由式 (19), 条纹周期在本文的分析域内自中心向外跨越约一个量级, 单一带通窗无法同时覆盖整段剖面, 以固定窗口处理全剖面的傅里叶变换法因此不适用。本文改用在每一位置自适应调整分析尺度的连续小波变换。取 Morlet 小波 $\psi(\xi) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0 \xi} e^{-\xi^2/2}$, 其中 $\omega_0 = 6$ [9], 有

$$W(r, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int I(r') \psi^* \left(\frac{r' - r}{s} \right) dr'. \quad (22)$$

将 Φ 在 r 处线性展开, 被积函数的振荡因子 $\exp\{i[\Phi'(r) - \omega_0/s]\xi\}$ 使积分相消, 除非 $s = s^*(r) = \omega_0/\Phi'(r)$ 。 $s^*(r)$ 即与局部条纹频率匹配的尺度, 数值上为 $|W|$ 沿尺度方向的极大值位

置, 称为小波脊; 其辐角给出包裹相位 [10]

$$\Phi(r) = \arg W(r, s^*(r)). \quad (23)$$

Morlet 小波零均值, 背景项 $I_b(r)$ 在变换中自动被抑制 [9]。包裹相位沿空间逐帧解缠后仍差一个 2π 整数倍; 帧率满足附录 C 的采样判据时相邻帧真实相位差远小于 π , 取使帧间相位差最小的整数倍即定出级次, 将全段视频串为连续序列 $\Delta\Phi_u$, 代入式 (21) 得

$$\Delta h(r, t) = \frac{\lambda}{4\pi n_L} \Delta\Phi_u(r, t), \quad (24)$$

整个流程无需逐帧人工干预。

上述小波脊流程沿径向对相位作空间解缠, 本质上是一次路径积分。解缠路径一旦在某个相位奇点处跳错, 其下游整片区域即整体偏移一个条纹, 而在局部无从察觉; 若实验中存在气泡、灰尘等独立的闭合条纹系统, 该方法会在一定范围内原理性失效。因此我们发展了第二条不含全局路径积分的解算路径, 通过卷积网络反演局部的膜厚梯度大小 $|\nabla h|$, 该量由每个像素邻域内的信息独立决定。测量局部条纹频率已有成熟的经典方法, 但它们都假定图像为理想的单分量条纹, 而照明不均、机械抖动、离焦与探测器噪声等都会使经典估计产生偏差, 且偏差的形态依赖于伪影的种类, 难以用一个统一的解析修正处理, 因此这一步改由卷积网络完成: 网络在一个同时包含全部伪影且带有真值的数据集上学习从局部条纹图样到 $|\nabla h|$ 的映射, 不依赖解析模型。网络所求解的是式 (19) 的逆问题: 只要能在图像上逐点测出局部条纹周期, 就能

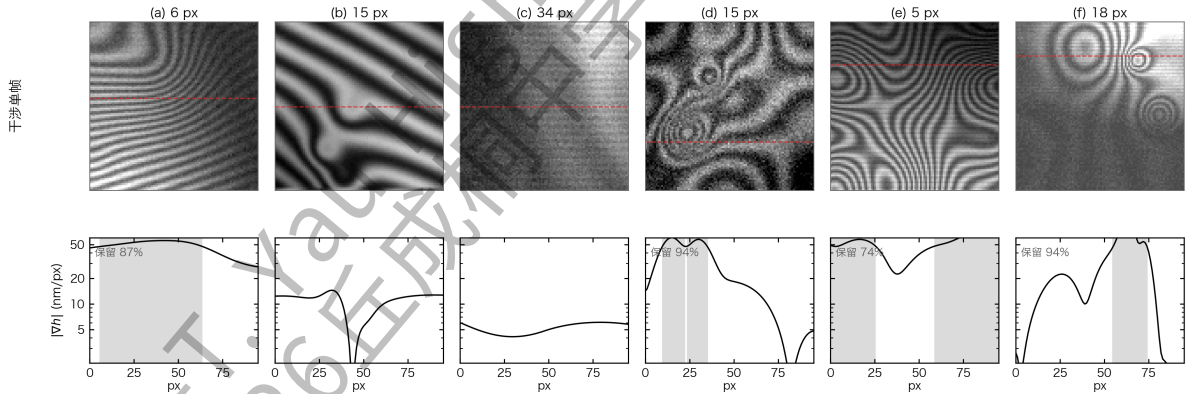


图 8 数据集中典型案例及对应反演。上排是网络的输入 (单帧干涉图), 下排是网络的回归目标 (真值 = $|\nabla h|$)。横轴与梯度的长度单位均为降采样像元。

得到逐点的 $|\nabla h|$, 无需任何时间信息, 也无需跨越像素的相位累加。图 8 上排与下排的对应关系满足该式, 条纹最密的一幅 (周期 6 px) 对应约 32 nm/px 的梯度, 条纹最疏的一幅 (34 px) 对应约 6 nm/px, 此处及本段以下的像元均指降采样像元。

网络的输入是单帧经背景标定与 $N_d = 4$ 空间降采样后提取的 7 个空间通道, 包括局部归一化后的条纹、局部条纹幅度、经典解析信号给出的频率估计、条纹方向的两个分量、结构张量的各向异性度, 以及一个可靠性权重; 输出为逐像素的 $|\nabla h|$ 。

由于薄膜干涉的正演是完备的, 给定厚度场后式 (15) 与 (17) 即唯一确定条纹图样, 我们

因而能够生成任意多的、带有精确真值的训练样本。图 8 给出按条件挑选的典型样本，覆盖了训练集在条纹密度、对比度、气泡与条带上的实际跨度。网络权重完全在合成数据上训练，从未接触实测数据，也未作任何微调。

由 $|\nabla h|$ 与上述符号得到梯度场后，再由积分还原厚度。合成数据上进行二维最小二乘积分，所用变换为离散余弦变换（对应 Neumann 边界）；实测数据因近似轴对称，直接沿半径一维积分。网络的输入特征定义、训练数据的生成、网络结构与训练流程，以及积分方案的数值验证，均列于附录 D。

3.4 理论适用性检验

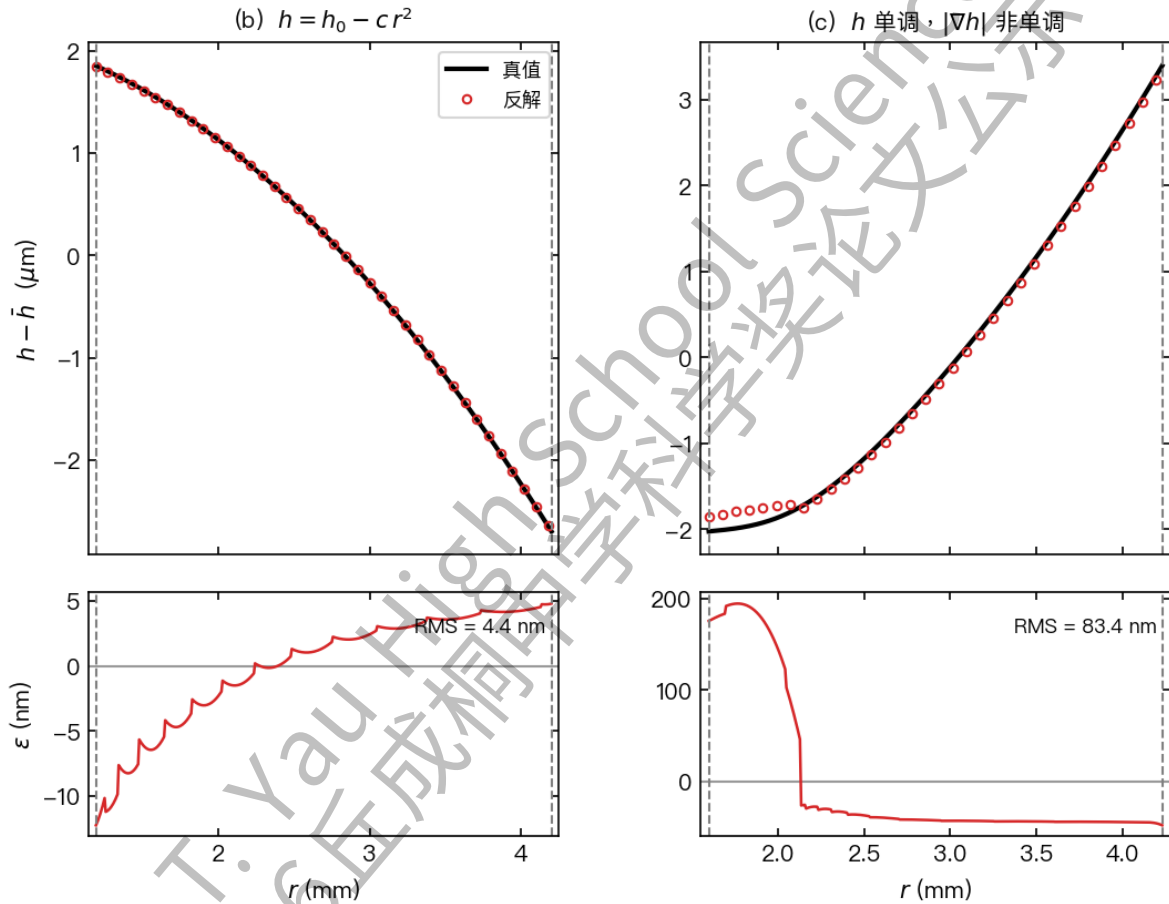


图 9 两类理论膜厚场的反演适用性检验。上排为真实膜厚剖面（黑实线）与由正演条纹经小波脊法反演得到的膜厚（红色空心圆）；下排为两者之差（ $e = h_{\text{inv}} - h_{\text{true}}$ ）。

为检验上述两条反演路径的可靠性及其适用范围，我们将第 3.1 节中三类已知膜厚场正演生成的理论条纹重新输入算法，与真值逐点比较。小波脊流程先利用轴对称性作方位角平均、化为一维径向信号后再提取脊线，线性楔形膜不具备轴对称性，因而只有其余两类膜厚场可作为该流程的输入。

对梯度单调的抛物形膜，反演与真值几乎重合，残差为数纳米量级的平滑周期起伏，来源是小波尺度的离散化。对 $h(r)$ 单调但 $|\nabla h|$ 非单调的膜厚场，算法失效：由式 (19)，在梯度极小、条纹最疏处小波脊需经历尺度先增后减的折返，脊线因此跳至相邻分支，残差呈现一次接

近 $\lambda/(2n_L)$ 的整体阶跃，跳变两侧的重建形状仍基本正确，仅相差一个整数级次。

因此，该流程存在两项适用条件，条纹近似轴对称且局部条纹频率在分析区间内可连续追踪，即 $|\nabla h|$ 不得在区间内部出现使脊线折返的极值。本文实测膜厚梯度在可分析域内近似随半径单调增加，不触及该机制。

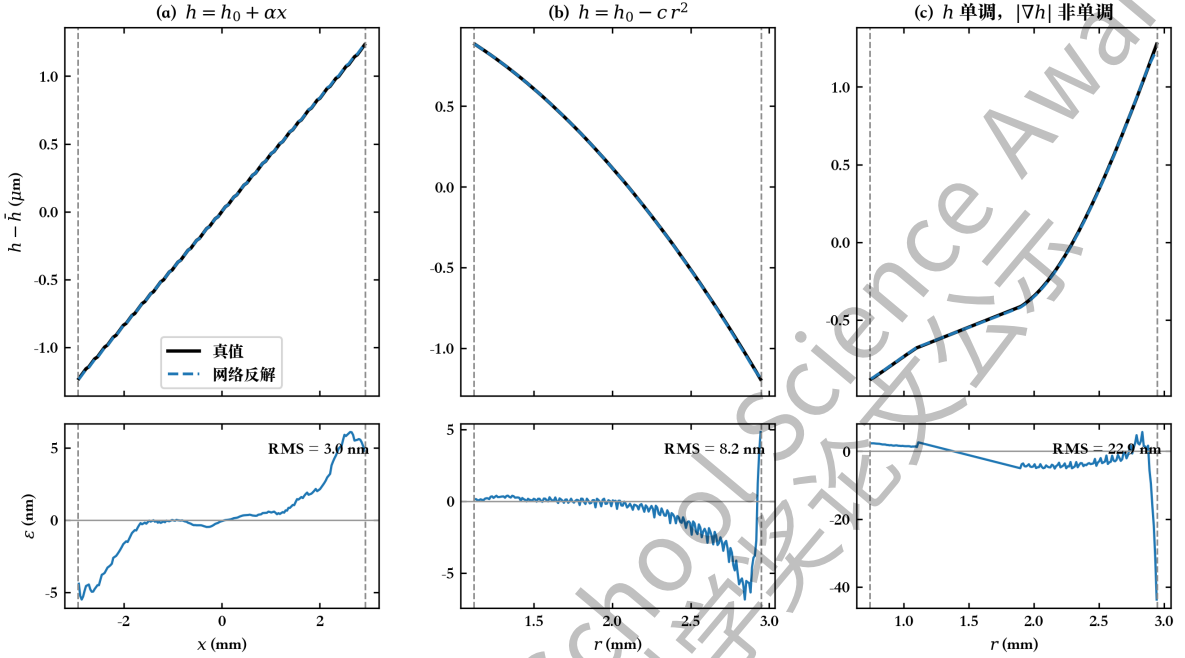


图 10 三类理论膜厚场的网络反演检验，膜厚场与图 9 相同。上排为真实膜厚剖面（黑实线）与由网络输出的 $|\nabla h|$ 积分还原得到的膜厚（蓝色虚线）；下排为两者之差 ($e = h_{\text{inv}} - h_{\text{true}}$)，纵轴刻度与图 9 一致以便直接比较。输入条纹按式 (15)、(17) 正演生成，不含实验伪影。

将同一组正演条纹输入静态网络流程，作为独立的第二条反演路径。网络逐像素回归梯度模 $|\nabla h|$ ，其符号不由解算本身给出，而由第 2 节的物理图像（中心减薄、外缘增厚）独立指定；梯度场再经 DCT Poisson 积分还原 h ，积分只确定到一个相加常数，故比较的是去均值后的 $h - \bar{h}$ 。网络直接作用于二维强度场，不依赖轴对称假设，三类膜厚场均可作为输入，反演结果全程与真值一致，三例的残差 RMS 分别为 3.0 nm、8.2 nm 与 22.9 nm，均在一个条纹台阶 h_λ 以内。

对 $h(r)$ 单调但 $|\nabla h|$ 非单调的膜厚场，网络回归的是纯局部的梯度模，不涉及跨条纹的相位连续性，因此全程连续，未出现小波脊法的整数级次阶跃。网络流程的限制体现在另一处：在条纹最密、 $|\nabla h|$ 最大的边缘附近，网络系统性低估梯度，积分后表现为膜厚下垂，构成 (b)(c) 两例残差的主要来源；两端的残差还因 Poisson 积分的边界效应略有上升。

两种方法的失效模式因而互补：小波脊法要求轴对称且梯度可连续追踪，网络法不受这两条约束但受条纹密度限制，这是后文以二者交叉验证实验数据的前提。

4 实验结果分析

4.1 数据记录与实验观测

本节的全部结果来自三段独立记录的实验视频。三段在同一光路与同一批油品下拍摄，加热功率与初始注油量略有不同，构成同一装置下的三次独立实验。帧率与像元标度按 §3.2 的标定值换算，下文凡涉及长度之处均给出实际尺寸。各段的记录时长、分析时间窗口、径向分析范围与帧数列于表 2。

表 2 各段实验视频的记录参数与分析窗口。时间零点取为加热开始时刻。

视频	记录时长 (s)	分析时间窗口 (s)	径向范围 (px)	径向范围 (mm)	分析帧数
v3	175	102.1–174.0	235–541	2.66–6.11	721
v7	161	53.4–159.9	254–504	2.87–5.70	1069
v8	133	65.8–132.7	244–533	2.76–6.02	671

由式 (21)，取同一帧内两点之差，未知的界面反射相移与解缠引入的整体常数一并消去，相对膜厚即由式 (24) 给出。取油的折射率 $n_L = 1.405$ ，两通道的换算系数分别为 36.815 nm/rad ($\lambda_R = 650 \text{ nm}$) 与 30.132 nm/rad ($\lambda_G = 532 \text{ nm}$)，对应的条纹台阶 h_λ 分别为 115.7 nm 与 94.7 nm 。式 (24) 只在相位可被正确提取与解缠的时空区域内成立，可分析域的时间下界与内、外边界及其判据列于附录 C。

在铺展初期，我们观察到明显的界面演化，但该阶段并不在本文方法的可分析范围内。此时油膜厚度为数十微米量级、表面曲率较大，反射光在成像面上形成明显的焦散与局部聚焦；同时，大梯度区域的条纹密度远超成像系统的分辨极限，使图像中的亮暗结构不再能够由单一的等厚干涉条纹解释，式 (24) 的前提因而不成立。这一限制不能仅通过提高帧率或放大率消除，相关讨论置于第 5 节。在可分析区域内，实验结果显示油膜的形变具有明显的全局性而非局域性，膜厚剖面在演化过程中保持近似一致的形状，减薄速率随时间逐渐衰减，与膜厚减小后热毛细通量随之减小的图像一致。

图 11 给出一帧实测的原始干涉图样。两组同心圆环分别来自红、绿两个波长，其形态与图 5(b) 中抛物形凹陷的正演条纹一致。由式 (19)，同一位置处两通道的条纹间距之比仅由波长之比决定，在可分析域内实测得该比值为 1.196 ± 0.015 ，与 $\lambda_R/\lambda_G = 1.2011$ 一致。这一符合说明两个通道分离自同一段视频而彼此无显著串扰，且所记录的是同一个膜厚场，是后文以双通道相互校核的前提。

4.2 静态：单帧膜厚场的重建

图 12 给出小波脊法的单帧解算过程。方位平均后的强度剖面与小波脊重建的条纹波峰逐一对齐，说明脊线跟踪给出的局部频率与实际条纹一致。两个波长的解算链条在圆心拟合、方位平均、相位解缠与波长换算四个环节上彼此独立，仅共用同一段原始视频，所得两条剖面在可分析域内的形状一致。

小波脊法沿径向跟踪相位，需要在方位平均剖面上具有足够多的条纹周期，以保证局部频率能够被可靠确定。基于神经网络的方法不依赖这一条件，而是以单帧扣除背景后的强度图为

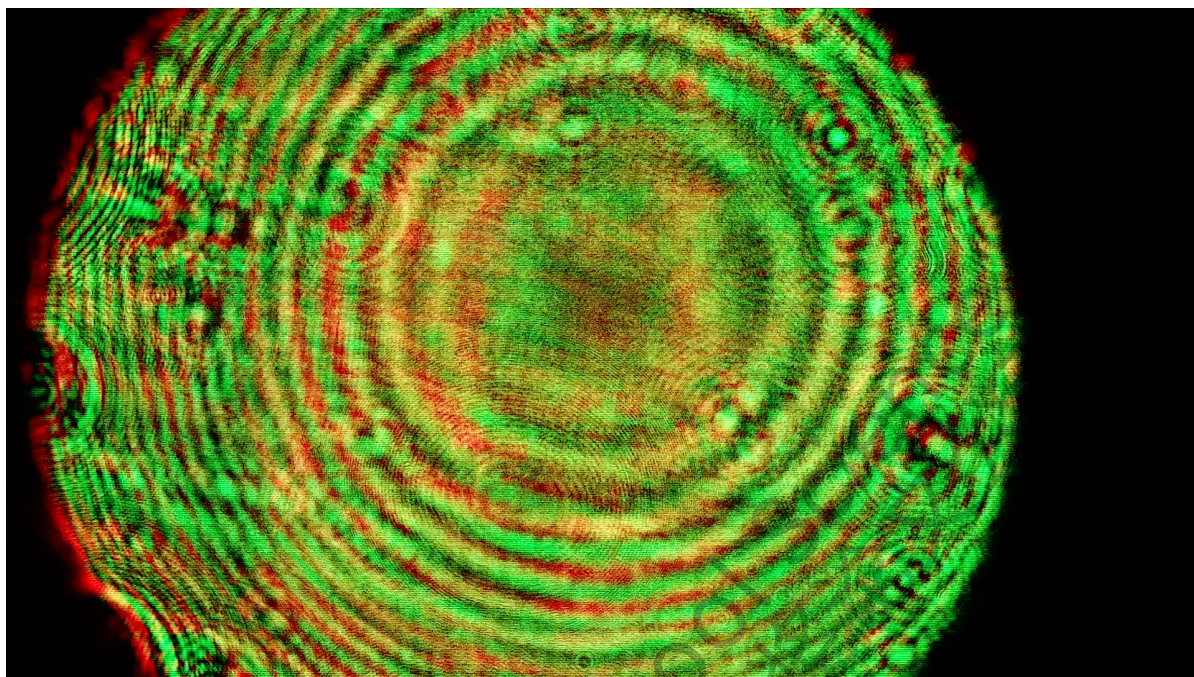


图 11 受热油膜表面的实测反射式双波长干涉条纹。

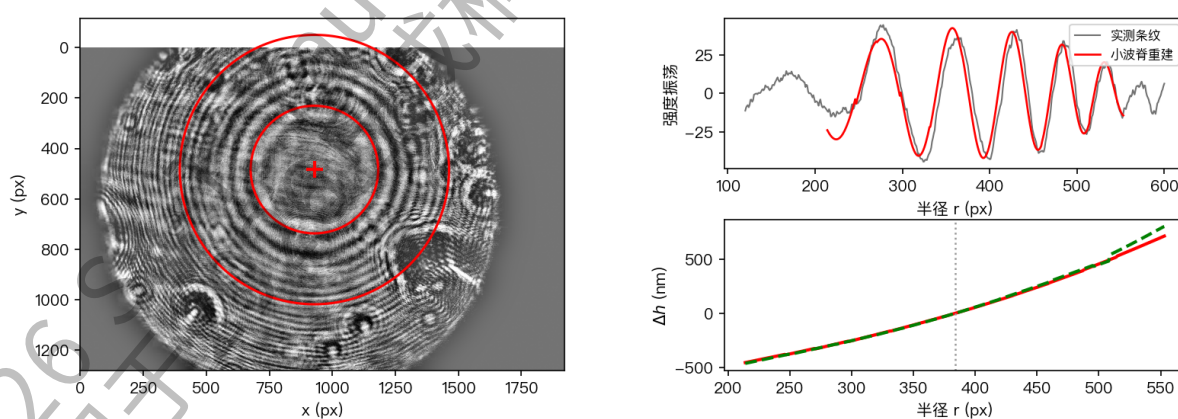


图 12 小波脊法的单帧解算过程。(a) 原始干涉图样，图中标出拟合得到的圆心与可分析域对应的有效环带；(b) 方位平均后的径向强度剖面（黑）与小波脊重建的条纹（红），二者波峰逐一对齐；(c) 红、绿两通道各自独立反演得到的膜厚剖面 $\Delta h(r)$ ，竖虚线为可分析域内边界。

输入,由卷积网络逐点回归局部膜厚梯度幅值 $|\partial h/\partial r|$,再沿径向积分得到 $\Delta h(r)$;该过程逐帧独立进行,单帧即可给出完整的膜厚剖面(图 13)。三段视频共用同一组网络权重。两条路径给出的都是厚度的变化率而非其符号,符号按第 2 节的物理图像(中心减薄、外缘增厚)统一指定,不由任何一条解算路径本身给出。

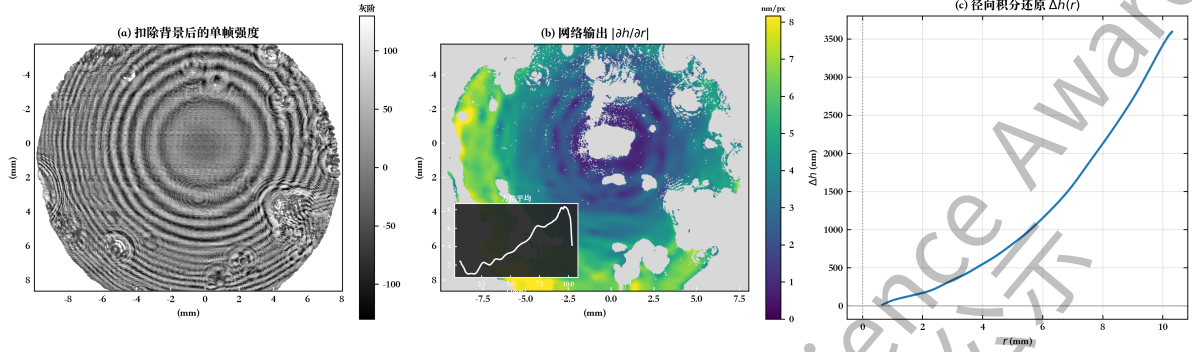


图 13 神经网络方法的单帧解算过程,取 v8 视频 $t = 106.0\text{ s}$ 一帧。(a) 扣除背景后的强度图,同心条纹在整个照明区内清晰可辨,图中亦可见若干气泡与边缘缺陷;(b) 网络逐点回归的梯度模 $|\partial h/\partial r|$,插图为其方位平均曲线,灰色为未通过可靠性判据的区域——照明区内经背景标定保留 94.1%,经 $N_d = 4$ 降采样的保守取交后为 85.9%,再剔除不确定度最高的 20% 后为 68.7%;(c) 沿径向积分还原的 $\Delta h(r)$,以 $r = 2$ 原始像元为零点,阴影为累积不确定度。

图 14 将两条路径在同一段视频、同一通道上的结果直接叠合。两者在形状上一致:各时刻剖面均沿径向单调递增、曲率相近,且随时间近似平行地向下平移。定量上则存在系统偏差,差值在五个时刻均为负,即网络路径给出的 Δh 系统性偏大;该偏差在梯度标度上为 0.2–0.3 nm/原始像元,并随时间缓慢增大。

膜厚随时间减薄使条纹变疏、 $|\nabla h|$ 随之减小,而附录 D 所给的感受野判据表明网络在低梯度端受信息上限约束。两条路径共享折射率取值、圆心定位与梯度符号约定,其一致性所检验的是相位提取与梯度回归两步本身:二者在剖面形状与演化趋势上相互印证,在梯度的绝对标度上并不重合。本文的物理结论依赖剖面形状与其时间趋势,而非膜厚的绝对标度,因此这一偏差不影响后续分析。

4.3 动态:膜厚分布的演化

前一节的结果是单帧的膜厚剖面。本节给出整个分析窗口内的 $\Delta h(r, t)$,其可观测量不再是铺展边界 $R(t)$ 这样的单一标量,而是同一时刻域内每个半径上都有取值的二维场,膜厚剖面的形状、径向梯度与局部减薄速率因而可以逐点读出。

小波脊法给出的场如图 15。该场的主要特征有三:径向剖面沿半径单调递增而无极值或拐折,形状在整个窗口内变化缓慢、整体近似平行地向下平移;局部减薄速率随半径增大而增大;梯度沿径向近似线性递增,对应二次型的膜厚剖面,该抛物性此前已由各级条纹半径近似共心这一独立事实推出。剖面整体平移而非仅在中心形成局域凹陷,说明该阶段的主导过程是全局排液而非局部失稳。

对同一段视频逐帧独立作网络反演,在与小波脊法共同覆盖的窗口内得到同一组特征(图 16)。这一致性并非第 4.2 节单帧结果的重复:网络路径不使用任何时间方向的信息,逐帧解算的结果却自行拼成随时间连续变化的场,其等值线走向、剖面平移方式与减薄速率的径向依赖均与

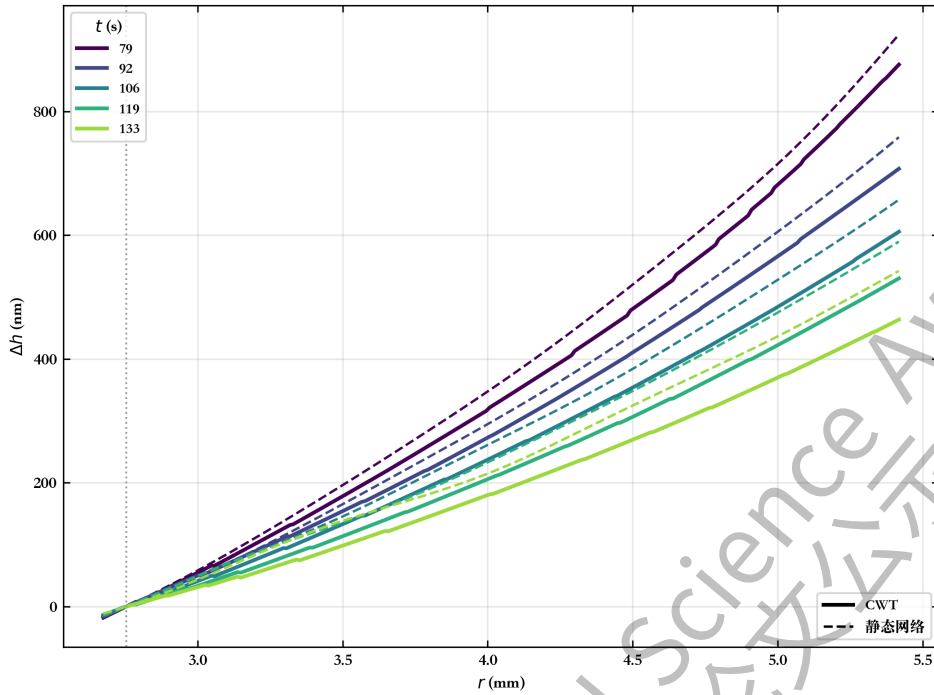


图 14 两条解算路径在同一段视频、同一通道 ($\lambda_G = 532 \text{ nm}$) 上的单帧膜厚剖面, 取五个时刻。实线为小波脊法, 虚线为静态网络法, 各曲线以 $r_{\text{ref}} = 244$ 原始像元处为共同零点。两者形状一致而存在系统偏差: 差值 $\Delta h_{\text{CWT}} - \Delta h_{\text{net}}$ 五个时刻均为负, 在窗口内随半径单调增长, 至外端 ($r = 5.29\text{--}5.42 \text{ mm}$) 由 -44.5 nm 增至 -76.9 nm , 相当于 $0.47\text{--}0.81$ 个条纹台阶 $h_\lambda = 94.7 \text{ nm}$; 折合为梯度差为 -0.187 至 -0.283 nm/原始像元 。

小波脊法相符。若任一环节存在随时间累积的漂移或成帧的级次跳错, 两条路径不会在整个窗口内保持这种符合。两条路径因而不仅在单帧上互为印证, 在动态演化的重建上同样如此。

网络路径不要求轴对称, 也不要求条纹频率沿径向可连续追踪, 可分析域因而同时向内推进到条纹中心附近、向外推进到照明边缘, 时间跨度亦扩展约一倍。在小波脊法窗口之外, 梯度场中出现一条自内向外移动并逐渐减速的高梯度带 (图 17a), 其传播方向与位置量级与第 2 节约化方程特征结构所对应的热毛细脊一致。

覆盖扩展同时暴露出一处新的不确定区。在 $r \lesssim 200 \text{ px}$ 处梯度不再沿径向单调, 先降至约 0.9 nm/原始像元 的极小再回升, 意味着抛物近似只在可分析域内成立, 膜厚剖面在更靠近中心处偏离二次型。由于该区域同时是背景标定残差偏高的区域 (图 13b 中心的灰斑), 也是梯度最小、网络系统偏差最大的区域 (见第 4.4 节), 三种来源在现有数据下无法区分, 因此我们不将这一偏离作为物理结论。

4.4 与薄膜演化方程的对照

前两节由干涉条纹逐级反演得到 $\Delta h(r, t)$ 。为检验上述方法的可靠性, 我们需要一个不依赖光学链条本身的判据。若该场能被一个独立成立的输运方程描述, 且方程仅凭某一时刻的剖面即可预测其后数十秒的演化, 则重建结果在时间方向上是自洽的。参照模型取式 (14), 其中两个量未由光学测量确定: 整体速率 $K = \gamma C / 2\mu_0$, 以及绝对膜厚偏置 b , 即 $h = \Delta h + b$, 来自 §3.1 中未定的干涉级次与界面反射相移。 b 是逐段量, 反映各段视频各自的绝对级次, 段与

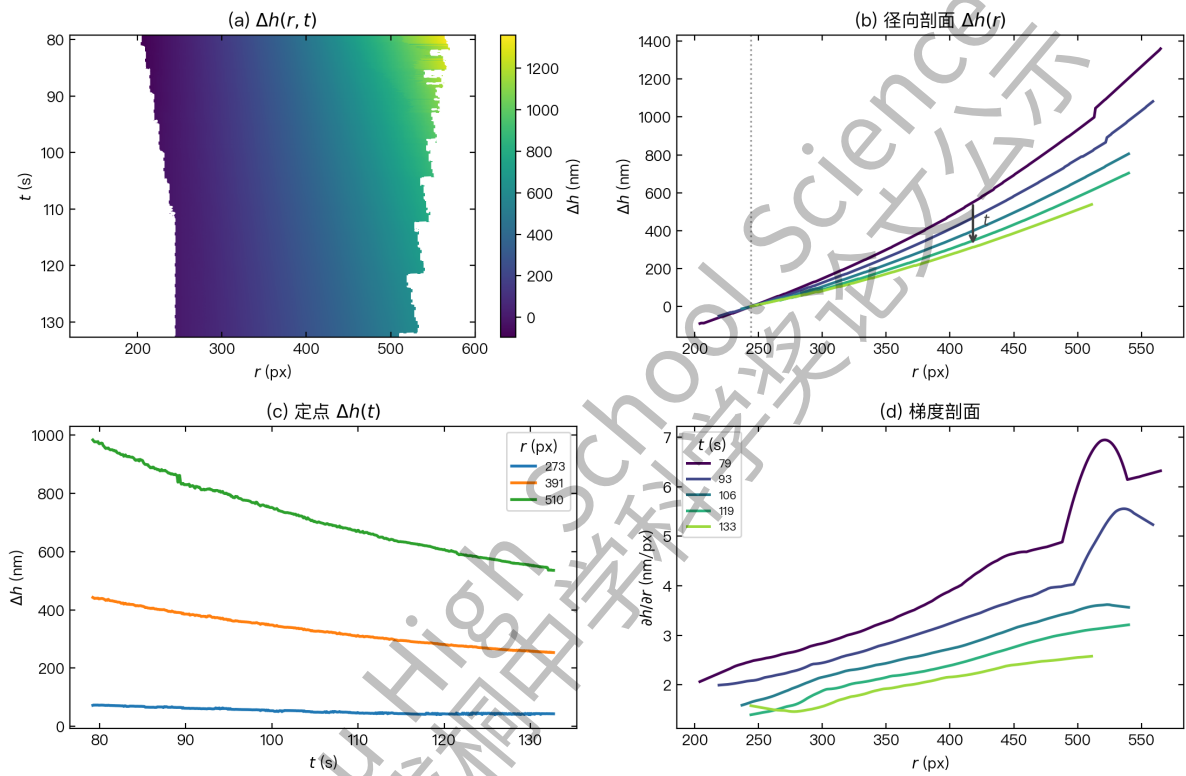


图 15 小波脊法重建的膜厚场，数据取自视频 v8，覆盖 $r = 120\text{--}600$ px、 $t = 79.2\text{--}132.7$ s。(a) $\Delta h(r, t)$ 伪彩时空图，白色虚线为可分析域边界，等值线沿时间方向单调向外倾斜；(b) 若干时刻的径向剖面 $\Delta h(r)$ ，箭头为时间增加方向，各剖面沿径向单调递增、无极值或拐折；(c) 三个固定半径处的 $\Delta h(t)$ ，三条曲线均单调下降，内、外侧曲线随时间缓慢靠拢；(d) 梯度剖面族 $\partial h / \partial r$ ，沿径向近似线性递增，并随时间整体下降。各曲线以 r_{ref} 处为零点，横轴为原始像元数。

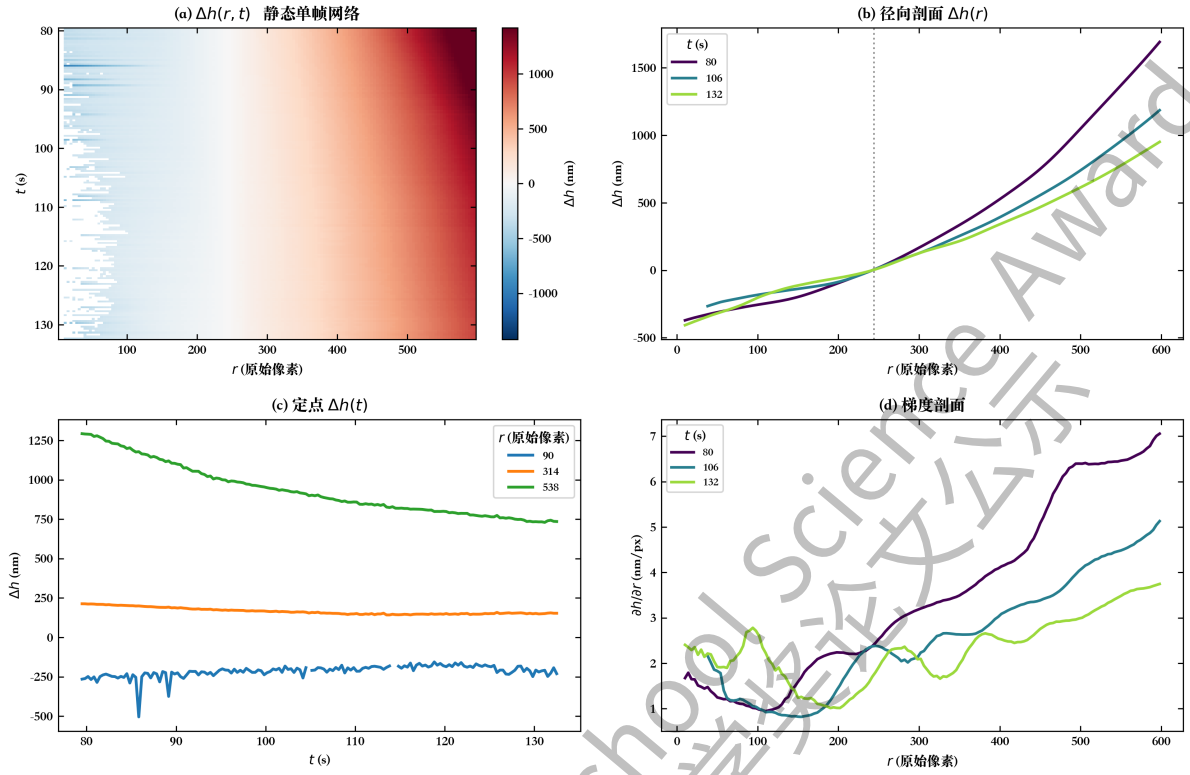


图 16 神经网络方法重建的膜厚场，截断到 $r \leq 600$ px（小波脊法覆盖上限）以便与图 15 逐格对照，四格内容与该图相同。 $r = 462$ px 处在 53 s 内减薄约 300 nm，而 $r = 266$ px 处几乎不变。各曲线以 $r_{\text{ref}} = 244$ 原始像元为零点。

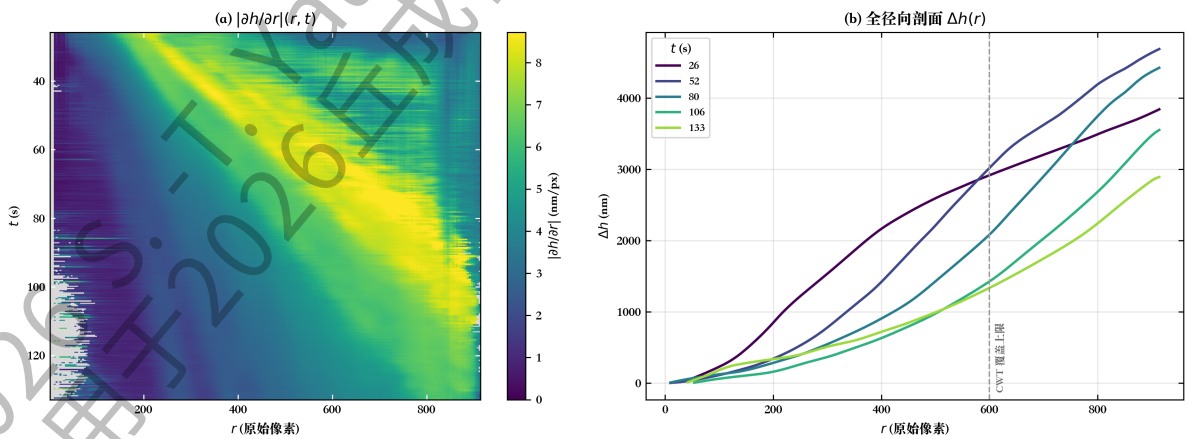


图 17 神经网络方法在全径向范围上的输出，数据取自视频 v8，覆盖 $t = 25.8\text{--}132.8$ s、 $r = 2\text{--}914$ 原始像元。(a) $|\partial h / \partial r|(r, t)$ 伪彩时空图，可见一条自内向外移动的高梯度带， $t \approx 35$ s 时位于 $r \approx 200$ px， $t \approx 90$ s 时移至 $r \approx 800$ px；(b) $\Delta h(r, t)$ 伪彩时空图。横轴为原始像元数。

段之间没有可比性。黏温指数 $\nu = \beta C$ 不作为独立参数： γ 、 μ_0 、 β 为油品物性， C 由 K 反推，因此待定参数只有 (K, b) 两个。

两个参数拟合一整段数据，吻合本身不说明问题。为此我们把分析窗口一分为二。 (K, b) 只由前半段确定，随后以窗口起点处的实测剖面作为唯一初值，将式 (14) 前向积分至窗口终点。后半段的曲线因而是预测——它既没有用到该时段的任何数据，也没有随时间重新校准。三段视频各自独立完成这一流程，不共用参数。

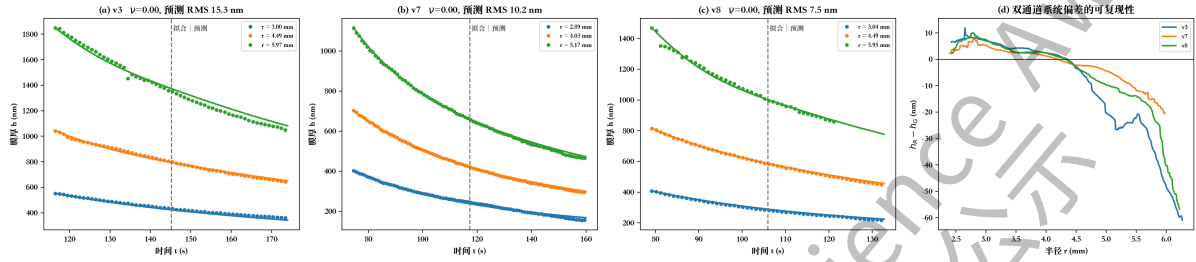


图 18 实测膜厚与前向积分结果的对照。(a)–(c) 每格对应一段视频，点为三个固定半径处的实测膜厚，实线为积分曲线，竖直虚线为拟合段与预测段的分界，其右侧为预测。(d) 三段视频的双通道系统偏差 $h_R - h_G$ 随半径的变化，各曲线已扣除自身中位数。

表 3 各段视频的待定参数与偏差。RMS 为对应时段内全部残差的合并值， σ_{total} 的构成见附录 E。

视频	K (m s^{-1})	b (nm)	拟合段 RMS (nm)	预测段 RMS (nm)	预测 RMS/ σ_{total}
v3	5.93×10^{-2}	−155	13.8	15.3	0.45
v7	1.03×10^{-1}	150	31.3	10.2	0.39
v8	9.76×10^{-2}	16	9.4	7.5	0.36

结果列于图 18 与表 3。三段的预测偏差均不足各自测量不确定度的一半，且与拟合段同量级。在利用前半段时序数据确定 K 与 b 后，仅需给定预测起点处的膜厚剖面作为初值，模型即可在不再使用后半段实验数据的情况下外推随后数十秒的演化。v7 的拟合段偏差反而大于预测段，来源是该段拟合窗口前部的一小段数据质量较差；参数在包含这段数据的窗口上定出后仍能预测其后的演化，说明结果并非依赖对拟合段的贴合。

黏温指数在本文的数据上不可分辨： ν 增大使内侧流动性被放大，拟合以减小 b 相抵，二者沿一条近乎直线的方向简并。在物性所允许的整个 ν 范围内扫描，三段的预测偏差始终低于各自的 σ_{total} 。正文各图取常黏度形式，这一选择不改变上述结论。由 K 反推的温度梯度常数 C 为数十开尔文量级，与按基板参数的独立估计同量级，但该比较受限于 γ 、 μ_0 、 β 的取值精度。

上述一致性表明，光学链条给出的 $h(r, t)$ 可被热毛细输运方程描述。本节 K 未由独立测量的加热功率与基板参数定出， b 未由独立测厚确定，温度场取 $-C/r$ 是对基板热传导的简化。它们决定方程解的具体形态，但不决定实测数据能否落入该方程的解族。

5 总结与展望

针对受热金属基底上油膜厚度场难以直接测量这一问题, 本文建立了一套反射式双波长激光干涉方法, 将实验可观测量由单一的铺展边界 $R(t)$ 扩展为随空间和时间连续变化的厚度场 $h(r, t)$, 可进一步得到膜厚剖面、径向梯度与局部减薄速率。且膜厚剖面的形状、梯度及其时间演化完全由实测相位决定, 不需任何标定; 未定的绝对级次与界面反射相移只贡献一个与位置和时间无关的常数偏置。且本文发展了两条互不依赖的分析还原油膜厚度场的方法: (1) 以圆心拟合、方位平均、小波脊相位提取、相位解缠与双波长级次匹配为核心, 沿径向跟踪相位; (2) 以单帧强度图为输入, 由卷积网络逐点回归局部膜厚梯度, 再沿径向积分还原厚度, 不含跨像素的相位累加, 也不使用任何时间方向的信息。网络权重完全在合成条纹上训练, 未在任何实测数据上微调。且两条路径的失效模式互补: 前者要求轴对称且局部条纹频率可连续追踪, 后者不受这两条约束但在条纹最密处系统低估梯度。二者在实测数据上给出一致的膜厚剖面, 为相位提取与梯度回归分别重建结果的可靠性提供了交叉验证。

该方法 $h(r, t)$ 给出了除铺展半径之外的膜内演化信息。在可分析域内, 膜厚随半径单调增加, 径向剖面在演化中近似平行地整体下移, 而非仅在中心形成局域凹陷, 说明该阶段的主导过程是热毛细应力驱动的全局排液。且局部减薄速率随半径增大而增大、随时间衰减, 与膜厚减小后热毛细通量随之减小的图像一致。这些结果共同说明, 光学链条给出的膜厚场在时间方向上与热毛细输运是自洽的; 本文不据此声称对演化方程本身作出了检验。神经网络方法把覆盖扩展到全径向后, 还记录到一条自内向外推进并逐渐减速的高梯度带, 与第 2 节由方程的特征结构预言的热毛细脊在传播方向与位置量级上一致。

本文方法适用范围限于油膜连续、界面平缓且干涉相位可稳定解调的阶段。在铺展初期, 膜厚为数十微米量级, 界面曲率较大, 成像面上容易出现焦散与局部聚焦, 使亮暗结构偏离单一的等厚干涉条纹, 因而难以直接进行相位反演, 该方法并不适用。干斑破裂阶段同样超出本文方法的适用范围。在干斑边缘附近, 膜厚可在很短的径向距离内迅速降至接近零, 导致干涉相位梯度急剧增大。干斑的形成与热毛细驱动密切相关, 而破裂后的扩张则受到毛细力、润湿性质与接触角等因素的影响 [11]。因此, 对于干斑破裂过程的描述需要进一步提高相位提取与解缠的空间适应能力, 并由当前的一维径向分析推广至二维相位场。本文的神经网络方法直接以二维强度场为输入, 不依赖轴对称假设, 因此有望以此为基础进一步推广至二维膜厚场重建。

对于不同基底条件下的膜厚测量, 本文建立的反射式干涉测量方法为其提供了拓展空间。对于形貌已知的曲面基底, 可在局部坡度允许反射光有效进入成像系统的条件下, 将基底自身的几何光程纳入相位解算; 对于具有微细结构的基底, 则可进一步结合其表面形貌与光学特性, 对基底反射及散射所引入的相位贡献进行修正。与此同时, 针对本文实验中金属基底较高反射率导致的两束反射光强度不匹配问题, 还可通过优化光路与主动调节光强比提高干涉条纹的可见度, 从而拓展方法在不同基底条件下的测量能力, 并进一步提高动态测量性能。

本文获得的时空膜厚场为研究液膜后续的失稳与破裂过程提供了实验基础。随着研究从连续排液阶段进一步延伸至干斑形成与扩张, 二维膜厚场可用于刻画局部膜厚、曲率及厚度梯度的时空演化, 并由此研究失稳模式及其空间结构的形成过程。另一方面, 将本文的恒定加热条件推广至时间变化的热源、明显蒸发以及复杂流变体系, 可进一步研究温度场、黏度、表面张力与膜厚之间更为复杂的耦合动力学。对于非牛顿流体、颗粒悬浮液等体系, 膜厚场的时空演

化也可为不同输运机制的辨识提供实验依据。

致 谢

本文的研究灵感源于 IYPT 第四题“油膜流动”。在初步研究过程中，我们发现油膜厚度的定量测量存在较大困难，因此进一步围绕油膜厚度的空间分布及其时间演化开展了光学测量与分析研究。本文的理论推导、数值模拟、实验设计与实施以及数据处理与分析等核心研究工作均由作者本人完成。在研究过程中，仅在文献调研以及部分文字表述的修改与润色中使用了 Claude Opus 5 作为辅助工具。作者对本文研究数据的真实性、研究过程的完整性以及全文的学术规范性负责。

值此论文完成之际，我谨向所有在研究过程中给予我指导、帮助与支持的老师、同学和家人致以诚挚的谢意。

首先，我要衷心感谢两位指导老师的无偿帮助。感谢何道老师在近一年的研究过程中给予我的悉心指导。从前期文献调研、理论模型的建立，到实验方案的设计与完善，何老师都给予了细致的建议和启发，使我能够不断明确研究方向，并逐步建立起较为完整的研究思路。

感谢马宇翰老师在理论分析和实验研究方面给予我的指导。马老师帮助我将最初的研究设想逐步转化为可以实施和验证的研究方案，并在论文写作过程中给予了许多宝贵建议，使我能够更加准确、清晰而严谨地呈现研究过程与研究结果。

同时，我要感谢北京师范大学附属实验中学物理实验室为本研究提供实验条件与设备支持。特别感谢王成老师在实验器材使用、实验平台搭建以及数据采集等方面给予的帮助，为本研究的顺利开展提供了重要保障。

最后，我要感谢我的父母、学校老师以及同学们在整个研究过程中给予我的理解、鼓励与支持。在此特别感谢陈婉妍学姐在数据处理分析、论文撰写呈现等方面提供的帮助。正是来自老师、家人和同伴的支持，使我能够始终保持对问题的兴趣，并坚持将最初的疑问一步步转化为可以分析、测量和验证的研究问题，并完成此次研究。

参考文献

- [1] P. G. Grützmacher, S. V. Jalikop, C. Gachot, and A. Rosenkranz. Thermocapillary lubricant migration on textured surfaces — a review of theoretical and experimental insights. *Surface Topography: Metrology and Properties*, 9:013001, 2021.
- [2] A. Oron, S. H. Davis, and S. G. Bankoff. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 69:931–980, 1997.
- [3] Marc K. Smith and Stephen H. Davis. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. part 1. convective instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 132:119–144, 1983.
- [4] Peter Ehrhard. Experiments on isothermal and non-isothermal spreading. *Journal of Fluid Mechanics*, 257:463–483, 1993.
- [5] J. P. Burelbach, S. G. Bankoff, and S. H. Davis. Steady thermocapillary flows of thin liquid layers. II. experiment. *Phys. Fluids A*, 2, 1990.
- [6] D.W. Zhou, T. Gambaryan-Roisman, and P. Stephan. Measurement of water falling film thickness to flat plate using confocal chromatic sensing technique. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 33:273–283, 2009.
- [7] J. Muller, H. M. J. M. Wedershoven, and A. A. Darhuber. Monitoring photochemical reactions using marangoni flows. *Langmuir*, 33(15):3647–3658, 2017.
- [8] Timo Richter, Mathis Fricke, Peter Stephan, Cameron Tropea, and Jeanette Hussong. Studying macro- and mesoscopic wetting dynamics of a spreading oil droplet using multiple wavelength interferometry. *Experiments in Fluids*, 64(186), 2023.
- [9] Christopher Torrence and Gilbert P. Compo. A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1):61–78, 1998.
- [10] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, and B. Torrèsani. Asymptotic wavelet and gabor analysis: Extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):644–664, 1992.
- [11] A. I. Fedorchenko and J. Hruby. On formation of dry spots in heated liquid films. *Physics of Fluids*, 33(2), 2021.

A 薄膜厚度演化方程的推导

本附录补足正式文 (6) 与 (7) 之间的代数步骤。控制方程、边界条件与全部近似假设见第 2 节，下文直接引用，并已取 $T_i \approx T_s$ 。

采用柱坐标 (r, θ, z) ，基板位于 $z = 0$ ，自由面位于 $z = h(r, t)$ ，流动轴对称。取标度

$$r = L\tilde{r}, \quad z = h_0\tilde{z}, \quad u = U\tilde{u}, \quad w = \varepsilon U\tilde{w}, \quad t = \frac{L}{U}\tilde{t}, \quad p = \frac{\mu UL}{h_0^2}\tilde{p}, \quad (25)$$

代入 Navier–Stokes 方程，径向惯性项为 $O(\varepsilon \text{Re})$ ，其中 $\varepsilon \text{Re} = \rho U h_0^2 / \mu L$ ；径向与轴向粘性项之比 $(\partial^2 u / \partial r^2) / (\partial^2 u / \partial z^2) = O(\varepsilon^2)$ ；轴向动量方程中除 $\partial p / \partial z$ 与 ρg 外各项均为 $O(\varepsilon^2)$ 。保留 $O(1)$ 项即得正文的润滑方程组。

对静水压平衡沿 z 积分并代入表 1 的法向应力条件，

$$p(r, z, t) = p_a + \rho g (h - z) - \sigma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right). \quad (26)$$

z 仅出现于 $-\rho g z$ 一项，故径向压强梯度与 z 无关：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \underbrace{\rho g \frac{\partial h}{\partial r}}_{\text{静水压}} - \underbrace{\sigma \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right)}_{\text{毛细压}}. \quad (27)$$

膜内的毕奥数 $\text{Bi} = \alpha h_0 / k_L \sim 7 \times 10^{-3}$ ，相应地膜内上下温差与总温升之比 $\lesssim 0.7\%$ ，故黏度沿 z 可取为常数，而沿 r 必须保留 $\mu = \mu(T_s(r))$ ；这是正文假设 (6) 的依据，也使 μ 可移出下面的 z 向积分。

由式 (27)， $\partial p / \partial r$ 在径向动量方程中可视作对 z 的常数，两次积分得

$$u = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 + C_1 z + C_2 \right]. \quad (28)$$

由基板处的无滑移条件得 $C_2 = 0$ ；由自由面的切向应力条件得 $C_1 = \tau - h \partial p / \partial r$ ，其中 $\tau = \partial \sigma / \partial r = -\gamma \partial T_i / \partial r$ 。于是

$$u(r, z, t) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} - h z \right) + \frac{\tau}{\mu} z, \quad (29)$$

即压力驱动的一半抛物剖面与热毛细剪切驱动的线性剖面之叠加。

对式 (29) 沿膜厚积分，

$$Q(r, t) = \int_0^h u \, dz = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2} \right) + \frac{\tau h^2}{2\mu} = -\frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{h^2}{2\mu} \gamma \frac{\partial T_i}{\partial r}, \quad (30)$$

代入式 (27) 即得正式文 (6)。

将连续性方程沿 z 从 0 到 h 积分。由 Leibniz 法则,

$$\int_0^h \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} dz = \frac{1}{r} \frac{\partial(rQ)}{\partial r} - u|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (31)$$

而

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = w|_{z=h} - w|_{z=0} = w|_{z=h}. \quad (32)$$

二者之和为零, 代入运动学条件后 $u|_{z=h} \partial h / \partial r$ 一项精确相消, 得轴对称的质量守恒关系

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rQ)}{\partial r} = 0. \quad (33)$$

将式 (30) 代入即为正文式 (7), 该式为四阶非线性退化抛物型方程, 在 $h \rightarrow 0$ 处退化。

B 基底温度场的求解

本附录给出正文式 (8) 两个极限解的具体形式, 并说明二者在分析域内给出同一温度梯度。

式 (8) 的稳态形式为修正 Bessel 方程 $\Delta T'' + \Delta T'/r - \Delta T/\ell_T^2 = 0$, $\ell_T = \sqrt{k_s d / 2\alpha_s}$ 。取 $r \rightarrow \infty$ 处有界的 K_0 分支, 并由通过半径 a 的圆柱面的热流条件 $-2\pi a k_s d \Delta T'(a) = P_{\text{eff}}$ 定出常数, 得

$$\Delta T(r) = \frac{P_{\text{eff}}}{2\pi k_s d} \frac{K_0(r/\ell_T)}{(a/\ell_T) K_1(a/\ell_T)}, \quad (34)$$

对 $a/\ell_T \ll 1$ 有 $(a/\ell_T) K_1(a/\ell_T) \rightarrow 1$ 。忽略散热项时, 式 (8) 化为二维热传导方程, $t = 0$ 起以恒定功率作用的点源解为

$$\Delta T(r, t) = \frac{P_{\text{eff}}}{4\pi k_s d} E_1(x), \quad x \equiv \frac{r^2}{4D_s t}, \quad E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi. \quad (35)$$

由 $K'_0 = -K_1$ 得稳态解的梯度; 对瞬态解用 $dE_1/dx = -e^{-x}/x$ 与 $\partial x / \partial r = 2x/r$, 得

$$\left. \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right|_{\text{steady}} = -\frac{P_{\text{eff}}}{2\pi k_s d \ell_T} K_1\left(\frac{r}{\ell_T}\right), \quad \left. \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right|_{\text{trans}} = -\frac{P_{\text{eff}}}{2\pi k_s d r} e^{-x}, \quad (36)$$

后者为精确结果, 无需展开。利用 $\zeta K_1(\zeta) \rightarrow 1$ ($\zeta \ll 1$) 与 $e^{-x} \rightarrow 1$ ($x \ll 1$), 两式在 $r \ll \ell_T$ 且 $r \ll 2\sqrt{D_s t}$ 时同时退化为式 (9), 相对偏差分别为 $1 - \zeta K_1(\zeta)$ 与 $1 - e^{-x}$, $\zeta = r/\ell_T$ 。

这两个小量在本文的分析域内均远小于 1, 且该判断不依赖对散热系数的具体取值: $\ell_T \propto \alpha_s^{-1/2}$, α_s 在自然对流的合理范围内变化一个量级也只使 ℓ_T 变化约三倍, 而分析域的外边界比 ℓ_T 的任一取值都小得多, ζ 始终为零点几量级, 相对偏差不超过百分之几。瞬态一侧同理: 分析时间窗口内 $2\sqrt{D_s t}$ 已达厘米量级, x 为百分之几量级。因此式 (9) 在分析域内成立, 与散热强度和温度场是否已达稳态均无关。

利用 $K_0(\zeta) \simeq \ln(2/\zeta) - \gamma_E$ 与 $E_1(x) \simeq -\ln x - \gamma_E$, 两解在同一区间内均可写为 $\Delta T \simeq \frac{P_{\text{eff}}}{2\pi k_s d} \ln(r_c/r)$, 差别仅在截断长度: 稳态为 $r_c = 2\ell_T e^{-\gamma_E}$, 瞬态为 $r_c = 2\sqrt{D_s t} e^{-\gamma_E/2}$ 。 r_c 仅决定温度的绝对标度, 不进入 $\partial T / \partial r$, 故式 (10) 与截断长度无关。

油膜对基底温度场的反作用可忽略: 油膜的纵向热阻远小于基板的横向热阻 ($\text{Bi} \ll 1$, 见

附录 A), 纵向 Péclet 数 $Pe_z = Uh/D_L \ll 1$, 故油膜内温度沿厚度均匀, 其对流亦不改变基底温度分布, 自由表面温度可取为基底温度。

C 可分析域的界定

实测单帧中存在不随时间变化的寄生成分, 来自观察窗与分束片的等厚条纹、编码块效应与基底纹路, 其幅度在油膜条纹所在的空间频段内与单帧条纹幅度可比。逐帧独立的解算路径对此完全暴露, 因而在解算之前先作一步仪器背景标定。

记单帧强度为 $I(t) = A(t)[1 + V \cos \Phi(t)] + A(t)p$, A 为照明强度、 p 为静止寄生项。整段视频内每像素的相位扫过数十个条纹, 故 $\langle \cos \Phi \rangle_t \rightarrow 0$, 时间平均帧 $\langle I \rangle_t = \langle A \rangle(1 + p)$ 即为背景, 扣除后

$$I(t) - a(t) \langle I \rangle_t \approx A(t) V \cos \Phi(t), \quad (37)$$

$a(t)$ 为逐帧增益, 由最小二乘给出以消除亮度漂移, 须在时间累加之前施加; 各段视频起始的照明瞬态帧不参与标定与分析。

上式所依赖的 $\langle \cos \Phi \rangle_t \rightarrow 0$ 要求该像素在整段视频内扫过足够多的条纹。热毛细驱动的径向权重在中心为零, 中心区相位几乎不动, 背景帧会把部分真实信号一并吸收, 该区域恰是最受关注的区域, 须逐点量化。将全部帧按时间前后对半分、各算一个背景帧, 两者之差 δ_{sys} 反映平均的系统性不完备, 由此给出厚度误差预算

$$\delta h \approx \frac{\delta_{\text{sys}}}{2I_m} \cdot \frac{\lambda}{4\pi n_L}, \quad (38)$$

I_m 为局部条纹幅度。该式在相位完全不动处失效——前后两半收敛到同一个错误值, δ_{sys} 反而很小——此种情形由条纹幅度判据挡住。两条判据互补, 须同时使用; 逐像素判定的结果即正文各图中标出的有效域。

可分析域在 (r, t) 平面内由三条边界围出, 各自对应一个明确的机制。

内边界随时间外移: 中心区域被热毛细流排空后趋于平坦, $\partial h / \partial r \rightarrow 0$ 使条纹周期发散而超出可追踪的上限。不产生条纹的区域, 其膜厚信息本就不包含在空间条纹图样中, 这是等厚干涉法的固有盲区, 不能通过改进解算消除。

外边界位于铺展前沿一侧: 该处膜厚梯度最大、条纹最密, 最先触及周期下限。原理上的下限由 Nyquist 条件给出, 即每周期两个像元, 对应的梯度上限恰为式 (18) 的条纹台阶 h_λ ; 实测梯度比它小一个量级以上, 故实际的外边界由各条路径自身的工作阈值决定, 小波脊法取每周期 12 个原始像元。

时间下界有两个来源, 均不涉及相位解算本身: 其一为照明稳定区间; 其二为条纹的成形程度——铺展初期条纹尚未在方位角平均后形成可追踪的径向序列, 小波脊法的有效半径数不足以支撑完整剖面, 故其时间下界晚于网络路径。小波脊法沿时间串接级次还要求相邻帧真实相位差小于 π , 等价于 $|\partial h / \partial t| < h_\lambda f_{\text{cam}}$, 实测减薄速率比该限低两个量级以上, 故限制可分析域的是空间判据而非帧率。正文表 2 各段的分析窗口即由上述三条边界定出。

铺展初期整段不可分析: 设初期膜厚 $h_0 \sim 0.1 \text{ mm}$ 、横向尺度 $L \sim 5 \text{ mm}$, 剖面近似抛物线型时边缘梯度量级为 $2h_0/L$, 以原始像元计对应的条纹周期不足一个像元, 远在 Nyquist 极限

以下, 此时图像中的亮暗结构不再由等厚干涉给出。该限制来自成像的空间采样, 与探测器噪声无关, 也不能通过提高帧率消除; 放大率与波长的权衡见第 5 节。

D 神经网络路径的实现

网络的输入为单帧经背景标定与 $N_d = 4$ 空间降采样后提取的七个空间通道: 局部归一化后的条纹 g/I_m 、局部条纹幅度 $\log(I_m/I_{m,\text{ref}})$ 、经典解析信号给出的频率估计、条纹方向的两个分量 $\cos 2\chi$ 与 $\sin 2\chi$ 、结构张量的各向异性度, 以及一个可靠性权重。七个通道全部对图像整体灰度缩放不变, 因而合成数据与实测数据之间不需要增益匹配。其中频率估计采用不含条纹方向 χ 的等价式: 对单分量条纹 $g = I_m \cos \Phi$, 令 $G = g/I_m$, 则 $|\nabla \Phi| = \sqrt{(|\nabla G|^2)/(\sin^2 \Phi)}$, 分子分母各自平滑后取比, 既在 $\sin \Phi \rightarrow 0$ 处不病态, 也避免了方向角在值域边界处的分支切割污染估计。输入中不含绝对径向坐标: 合成数据中 $h(r)$ 的形状与 r 强相关, 输入 r 会使网络记住“半径对应梯度”的映射而非读取条纹, 在实测上直接失效。

训练数据由二维干涉视频仿真器生成, 取单帧模式, 统计量按实测标定。厚度场由基底形貌与楔形、热毛细凹陷、排液减薄、低阶时空扰动和气泡叠加而成; 渲染端包含照明不均与渐晕、有限相干长度导致的可见度衰减、交流频闪与卷帘快门造成的水平条带、亮度慢漂移与逐帧闪烁、机械抖动、离焦、探测器噪声与量化, 合成帧的像素级相位噪声与实测值一致。回归目标为真值厚度场的 $|\nabla h|$, 逐像素损失掩码取真值条纹周期不小于 4 个降采样像元, 周期更小处图像信息已被带通滤除。网络权重完全在该合成数据上训练, 从未接触实测数据, 也未作任何微调; 三段视频共用同一组权重。这是两条路径的一致性不来自互相校准的前提, 也是合成集上的精度数字对实测有约束力的前提。

网络采用残差卷积块加 U-Net 骨架, 输出二通道: 其一为 $|\nabla h|$, 其二为逐像素的不确定度, 使网络能对气泡、低对比度区与伪影区给出可信度。训练前半程用 Huber 损失预热后切换为含不确定度的似然损失, 以避免后者在训练早期塌缩为“预测均值加放大方差”的平凡解; 数据增强采用八重对称, 方向通道按 χ 的变换规则同步修正。主要参数与合成集上的精度列于表 4。

表 4 神经网络路径的主要参数与合成集精度。梯度的单位为 nm 每降采样像元; 经典基线指仅由输入的频率估计通道单独反解。

项	值
波长 / 折射率	532 nm / 1.405
一个条纹的厚度差 $\lambda/2n_L$	189.3 nm
空间降采样 N_d	4
训练样本	2400, 96×96
目标中位 / 5–95 分位	12.5 / 3.6–36.3
网络深度 / 基础通道	4 / 32
训练轮数 / 划分	40 / 70:30
合成集 RMSE (网络 / 经典基线)	1.539 / 5.642
合成集相对误差 (网络 / 经典基线)	2.2% / 10.7%
合成集相关系数 (网络 / 经典基线)	0.986 / 0.817
不确定度标定因子	0.92–1.01 (理想值 1.0)

网络测的是局部空间频率, 需在感受野内看到数个条纹周期。条纹周期超过约 30 个降采

样像元时，一个 96×96 的块内只能容纳约 3 个周期，频率在原理上即测不准，对应的梯度下限为 $(\lambda/2n_L)/(N_d \times 30) = 1.58 \text{ nm}$ 每原始像元。这是信息上限而非训练分布的问题，放宽训练集的周期范围也无法改变；小波脊法积分的是相位本身，不受此限，两条路径的适用边界因而互补。

网络输出梯度的模，其符号由第 2 节的物理图像外部给定，不由网络学习；符号翻转只可能发生在 $|\nabla h| \rightarrow 0$ 处，即条纹间距发散的局部极值处。合成数据上的验证走二维最小二乘积分，所用变换为离散余弦变换（对应 Neumann 边界）而非快速傅里叶变换：后者隐含场沿两个方向周期，对楔形这类线性斜坡会把首尾强行接上，即便喂入完全精确的真值梯度也会引入数百纳米的自身误差；改用余弦变换并对梯度做半格错位后，三个标准剖面的自身误差均在 0.05 nm 以下，积分器不再构成误差来源。实测数据因近似轴对称，方位平均后直接沿径向积分，

$$\Delta h(r) = \int_{r_{\text{ref}}}^r \text{sgn}(r') |\partial h / \partial r'| dr'. \quad (39)$$

该路线对非轴对称场不适用：对恒定梯度的楔形剖面，径向积分给出约 300 nm 的重建误差，源于方法假设与场的对称性不符；网络给出的是二维梯度场，必要时可改走二维积分，不受该限制。

积分把逐点误差沿路径累加，累积不确定度因而随 r 单调增长（图 19）。积分链条若存在系统漂移，两条路径的残差应随 r 单调增长并远超噪声底，第 4.2 节的交叉对照未见此情形。积分的输出为 $\Delta h(r) = h(r) - h(r_{\text{ref}})$ ，绝对膜厚需外部锚点，这是干涉测量的固有限制，与该方法无关。

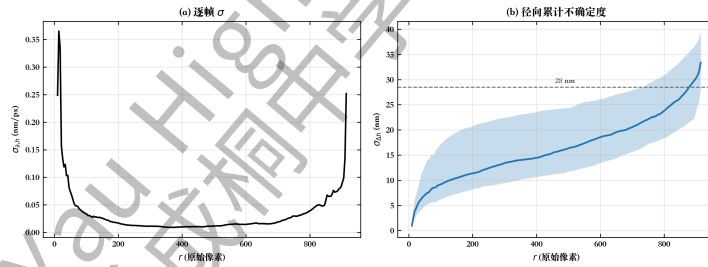


图 19 逐点不确定度与累积不确定度随半径的变化，数据取自视频 v8。

E 各段视频的实测数据

本附录列出正文各图所依据的实测数值，以便逐点核对。表 5 给出三段视频与薄膜演化方程对照时定出的参数与偏差，即正文第 4.4 节图 18 的数值来源。表 6 给出各段在若干固定半径、若干时刻的相对膜厚实测值，零点取 r_{ref} 。

表 5 各段视频的解算诊断量。 σ_{single} 为单帧噪声，由双通道之差给出； σ_{cm} 为两通道的共模项； $\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\sigma_{\text{single}}^2 + \sigma_{\text{cm}}^2}$ 。条纹间距比为同一帧内红、绿两通道的径向条纹间距之比，理论值 $\lambda_R/\lambda_G = 1.2011$ 。

视频	可分析时间窗 (s)	可分析半径 (px)	σ_{single} (nm)	σ_{cm} (nm)	σ_{total} (nm)	条纹间距比
v3	102.1–174.0	235–541	34.05	2.86	34.17	1.203
v7	53.4–159.9	254–504	26.25	1.54	26.29	1.175
v8	65.8–132.7	244–533	21.17	0.72	21.18	1.210
均值			27.2 ± 5.3			1.196 ± 0.015

表 6 各段视频在三个固定半径、四个时刻处的相对膜厚 Δh (nm, 绿通道)，零点取各段可分析域的内边界 r_{ref} 。括号内为同一点上红通道与绿通道之差。

v3 ($r_{\text{ref}} = 2.65$ mm)		t (s)			
r (px)	r (mm)	102.1	126.0	150.0	174.0
311	3.51	271 (−10)	213 (−6)	170 (−10)	136 (−9)
388	4.38	519 (+37)	478 (−8)	388 (−15)	316 (−17)
464	5.24	1023 (−101)	879 (−86)	658 (−29)	533 (−26)
v7 ($r_{\text{ref}} = 2.87$ mm)		t (s)			
r (px)	r (mm)	53.4	88.9	124.4	159.9
316	3.57	229 (+9)	144 (−2)	94 (−13)	74 (+18)
379	4.28	637 (−25)	320 (−6)	217 (−9)	167 (+19)
441	4.98	829 (+181)	525 (−17)	356 (−13)	274 (+13)
v8 ($r_{\text{ref}} = 2.75$ mm)		t (s)			
r (px)	r (mm)	65.8	88.1	110.4	132.7
316	3.57	239 (−9)	174 (−3)	138 (−10)	109 (−1)
388	4.38	572 (−68)	390 (−9)	309 (−16)	247 (+1)
461	5.20	991 (−37)	662 (−23)	517 (−25)	415 (−4)