

参赛学生姓名：Kevin Yifan Jiang

中学：清华附中国际部

省份：北京

国家/地区：中华人民共和国

指导老师姓名：缪海兴

指导老师单位：清华大学

论文题目：Theoretical Analysis and Design of
a Magnetically Levitated Vertical Seismometer

摘要

如何准确地测量和预测地震具有重要的研究意义。传统垂直向地震仪受机械弹簧蠕变、温度漂移及低刚度与静态承载之间矛盾的限制，难以兼顾超低频响应与结构紧凑性。本文提出一种以同轴双永磁体非线性排斥力构成轴向负刚度基底、以线圈闭环反馈实现力平衡的垂直向磁悬浮地震仪方案。理论部分采用毕奥-萨伐尔定律和互感能量法推导同轴电流环轴向力，并建立有限厚度永磁体的轴向分层模型；数值计算用于分析磁力、刚度、径向稳定性及温度敏感性。实验测得的磁力曲线与分层模型在趋势上相符。工程部分完成差分电容位移读出、数字 PID、功率驱动、线圈执行器及整机结构的方案设计，并完成电路仿真、PCB 版图和实物样板。现阶段的实验验证限于永磁体的静态磁力，整机闭环噪声、带宽和长期稳定性仍需后续标定。该方案为紧凑型低频惯性传感与主动隔振提供了可进一步验证的技术路线。

Keywords: magnetically levitated seismometer; magnetic force; force-balance feedback; PID control; capacitive readout; low-noise power amplifier.

目录

摘要	2
第一章 引言	4
第二章 现有 Z 向地震仪技术路线对比与问题	7
2.1 Z 向（垂直向）地震仪的特殊物理约束	7
2.2 传统机械低频 Z 向地震仪：LaCoste 零长弹簧地震仪	8
2.3 现有磁悬浮 Z 向地震仪主流实现方案	9
2.4 当前磁悬浮 Z 向地震仪的固有缺陷	10
2.5 本文磁悬浮地震仪的设计思路与核心机理	11
2.6 本章小结	12
第三章 磁悬浮地震仪理论基础	13
3.1 永磁体的等效电流环物理模型	13
3.2 等效电流环模型理论计算	13
3.3 考虑实际厚度的轴向分层离散模型	20
3.4 刚度、多自由度稳定性与系统固有频率	22
3.5 理论计算的数值仿真与特性分析	24
3.6 磁力特性实验验证与数据对比	27
3.7 永磁体尺寸参数优化筛选	29
3.8 温度特性与误差分析	31
第四章 系统设计与工程实现	33
4.1 PID 闭环控制器与系统动力学	33
4.2 低噪声嵌套功率放大电路	35
4.3 电磁驱动线圈与特性分析	39
4.4 差分电容式位移传感单元	40
4.5 电路仿真与 PCB 版图实现	42
4.6 整体仪器 3D 设计图	44
第五章 总结与展望	45
参考文献	46
致 谢	47
作者介绍	47

第一章 引言

地震是一种破坏性的自然现象，会对人类社会造成重大损失。如何准确地测量和预测地震具有重要的研究意义，也是我开展这项研究的动机。而地震的测量依赖于微振动测量与主动隔振，它们是精密科学装置的核心支撑技术。引力波探测台站、粒子加速器、高精度显微测量设备等大科学装置，对纳米至微米量级的超低频地表微振动极为敏感，环境振动会直接降低实验精度甚至干扰测量信号，因此亟需具备超低频响应能力的振动感知与主动隔振系统。这类系统通过精准感知地表微小振动，再通过主动反馈作用力抵消振动影响，为精密实验仪器提供稳定的工作平台[3,4]。

传统的被动式振动测量与隔振装置多依托机械弹簧结构，一般由弹簧支撑的检验质量块与位移传感单元组成，依托惯性效应完成振动感知。当地面发生微小振动时，质量块凭借惯性与仪器壳体产生相对位移，位移传感器采集该相对位移，结合力学关系反推地面振动的幅值与频率，或进一步驱动执行机构实现隔振补偿。

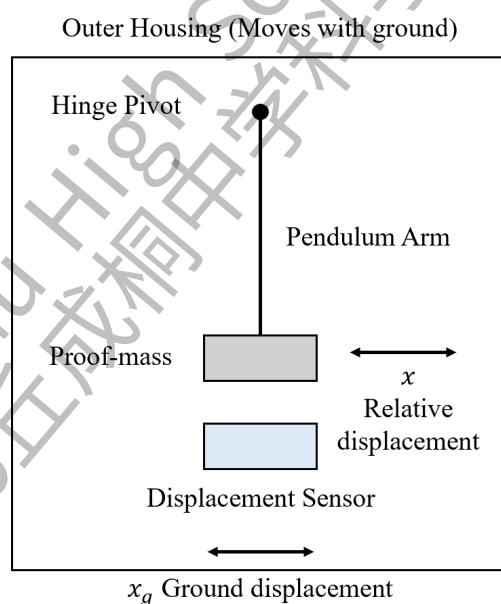


图 1-1 传统惯性摆式地震仪结构原理示意图

水平向的隔振与测量依靠摆结构即可较容易地获得长周期响应；与之相比，垂直向（Z 向）的支撑元件需要完全承担质量块的重力，实现超低频探测与隔振面临更大物理约束。为拓展垂直方向工作周期，学界发展出两类经典被动悬挂方

案：一类采用极低刚度金属弹簧，依靠较大静态伸长实现低等效刚度；另一类为 LaCoste 零长弹簧构型，借助力矩几何抵消，在不需极大弹簧形变的条件下获得接近零的等效回复刚度。即便如此，基于机械弹簧的被动方案仍存在材料本征缺陷：弹簧的弹性滞后、蠕变效应会引入信号漂移，弹性模量的温度敏感性会造成零点偏移；即便经过精密机械补偿，依然难以真正实现超低频稳定测量。普通工业隔振场景对振动抑制要求有限，但引力波观测、粒子加速器这类大科学装置，对纳米至微米量级超低频微弱地面扰动的感知与主动隔振有着极为严苛的指标要求，现有被动机械方案很难满足该类场景的需求[5,6]。

磁悬浮隔振与测量系统采用磁悬浮支撑替代传统机械弹簧，依靠永磁体之间的磁相互作用为悬浮质量块提供等效回复刚度；同时搭建由位移传感器、数字 PID 控制器、功率放大电路与驱动线圈构成的闭环反馈系统，通过实时调节线圈电流动态修正磁作用力，维持质量块稳定悬浮。该系统不依赖直接读取质量块绝对位移，而是通过解析反馈回路的控制电流反演地面微振动的加速度信息，也可进一步输出反向作用力实现主动隔振[2]。

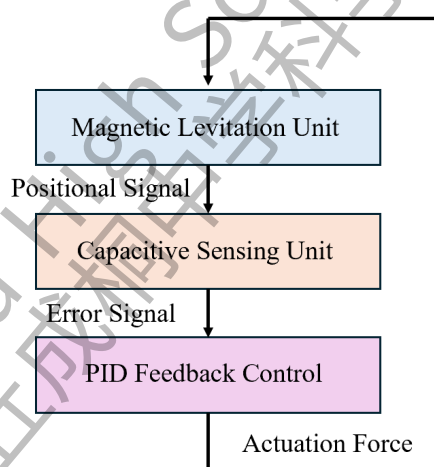


图 1-2 磁悬浮闭环反馈系统整体架构示意图

本研究面向低频微振动测量与主动隔振，提出以一对同轴永磁体的非线性排斥力构成负刚度工作点，并由数字 PID、功率放大器和驱动线圈完成轴向稳定。永磁体承担主要静态载荷，线圈负责小范围动态校正，可降低持续直流驱动带来的功耗与热扰动。与 LaCoste 零长弹簧及弹簧-永磁复合方案相比，该结构不含承载机械弹簧，具有紧凑化潜力；其低频性能仍取决于闭环增益、传感噪声、执行器噪声和温度稳定性，需通过整机实验量化。

相较被动弹簧式仪器，本方案的主要预期优势是：可通过反馈参数调节轴向等效刚度与阻尼；永磁结构在理想轴对称条件下可提供径向恢复刚度；力平衡读出可减小质量块运动幅度。上述优势属于理论与设计层面的判断，不能替代闭环噪声谱、频率响应和长期漂移测试。

本文围绕单自由度原理样机开展理论分析、数值计算、磁力实验及工程设计。核心工作包括：推导并交叉验证同轴电流环轴向力；建立有限厚度分层模型并完成参数扫描；测量永磁体排斥力；设计差分电容读出、PID 控制、功率驱动、线圈与整机结构。本文的创新点在于将永磁负刚度工作点与主动力平衡相结合；截至定稿，闭环整机尚未完成性能标定，因此相关性能表述均限定为理论预期或设计目标。

全文结构如下：第 2 章比较垂直向地震仪的主要技术路线，并说明低频响应、结构尺寸和温度漂移之间的权衡；第 3 章推导同轴永磁体作用力，建立有限厚度分层模型，分析刚度、稳定性、温漂与实验数据；第 4 章给出差分电容读出、数字 PID、功率放大器、驱动线圈、PCB 和整机结构设计；第 5 章总结已完成的验证工作、研究局限和后续计划。

第二章 现有 Z 向地震仪技术路线对比与问题

第一章明确了磁悬浮地震仪的研究背景与整体架构，指出了传统 Z 向地震仪与现有磁悬浮方案的性能局限。为系统梳理不同技术路线的内在机理与核心痛点，阐明本文方案的设计逻辑，本章将依次展开 Z 向地震仪的特殊物理约束分析、传统 LaCoste 零长弹簧方案介绍、现有磁悬浮地震仪主流实现方案对比，归纳当前磁悬浮 Z 向地震仪的三类固有缺陷，并针对性阐述本文方案的核心设计思路与解决机理，为后续章节的理论建模与工程实现提供背景支撑。

2.1 Z 向（垂直向）地震仪的特殊物理约束

水平向惯性地震仪依靠摆式构型即可较为容易地实现长周期探测。对于水平摆，重力仅提供回复力矩，悬挂元仅需平衡力矩，因此实现极低等效刚度、获得大固有周期的工程难度相对较低。与之形成鲜明对比，Z 向（垂直向）地震仪的悬挂结构必须持续承担检验质量块的竖直重力 mg ，这是垂直轴探测与生俱来的核心物理约束，也是 Z 向仪器实现超低频测量的主要障碍。

对于被动悬挂的惯性地震仪，系统固有角频率满足：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1)$$

式中， k 为悬挂系统等效刚度， m 为检验质量块质量；对应的固有振动周期：

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.2)$$

若要拓展仪器的低频探测能力、实现超低频观测，就要求系统等效刚度 k 尽可能趋近于零，以此得到更大的固有周期 T_0 。对于普通实体机械弹簧构成的 Z 向悬挂系统，弹簧弹力服从胡克定律 $F = k\Delta L$ ；静态平衡条件要求弹簧弹力平衡检验质量块重力：

$$mg = k\Delta L \quad (2.3)$$

ΔL 代表弹簧承受质量块重力之后产生的静态伸长量。将平衡条件代入周期公式，可以得到普通弹簧 Z 向地震仪固有周期与弹簧静态伸长量的直接关系：

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta L}{g}} \quad (2.4)$$

式中 g 为重力加速度。从式 (2.4) 可知, 若仅靠普通机械弹簧获得长周期, 静态伸长量 ΔL 将随周期平方增大。例如 $T_0 = 10 \text{ s}$ 时, $\Delta L \approx 24.8 \text{ m}$, 工程上难以实现。

由此可以概括普通机械弹簧 Z 向地震仪的内在物理矛盾: 弹簧一方面需要输出足够弹力平衡检验质量块的全部重力; 另一方面又要求自身等效刚度尽可能趋近于零以获得长周期响应。实体金属弹簧的材料力学特性无法同时满足上述两项条件。单纯依靠普通拉伸弹簧, Z 向地震仪的固有周期存在明确的物理上限, 难以进入真正的超低频频段。

2.2 传统机械低频 Z 向地震仪: LaCoste 零长弹簧地震仪

LaCoste 零长弹簧地震仪是应用最广泛的传统 Z 向超低频地震仪。其核心元件为零长弹簧, 该弹簧的弹力与弹簧的总长度成正比, 区别于普通弹簧[5,6]。

标准弹簧弹力:

$$F_s = k_s(L - L_0) \quad (2.5)$$

零长弹簧弹力:

$$F_z = k_z L \quad (2.6)$$

弹簧以倾斜角度连接机架与检验质量块, 通过精密调节弹簧安装角度, 弹簧弹力的竖直分量可以几乎完全抵消检验质量块的重力。在理想几何条件下, 竖直方向等效刚度可以被补偿至接近零, 从而获得极大固有周期, 实现低频地震波的测量。

尽管 LaCoste 零长弹簧构型极大拓展了 Z 向地震仪的工作周期, 但该机械方案依然存在无法根除的缺陷。弹簧长期工作会造成仪器零点随时间缓慢漂移, 需要定期人工校准; 弹簧弹性模量对环境温度敏感, 引入显著的测量偏移。同时, 为满足几何约束, 体积难以小型化, 且仅支持单自由度 Z 向测量, 向多自由度拓展的难度很高。上述问题推动研究人员探索以磁场力替代机械弹簧的磁悬浮地震仪。

2.3 现有磁悬浮 Z 向地震仪主流实现方案

磁悬浮地震仪以磁场力替代机械弹簧弹力，依靠永磁体或电磁线圈的相互作用完成重力补偿与回复刚度的构建。公开方案主要包括永磁负刚度与辅助弹簧组合的半被动路线，以及全电磁驱动的主动悬浮路线[2]。

第一类为半被动磁悬浮构型，也是目前工程化程度较高的路线。其核心思路是通过特殊排布的永磁阵列引入负刚度力学特性，搭配一根提供正刚度的辅助机械弹簧，由弹簧承担检验质量块的主要重力。系统总等效刚度为弹簧正刚度与永磁负刚度的叠加：

$$k_{total} = k_{spring} + k_{mag} \quad (2.7)$$

其中 $k_{spring} > 0$ 为辅助机械弹簧的正刚度， $k_{mag} < 0$ 为永磁阵列引入的负刚度。通过参数匹配令总等效刚度 k_{total} 尽可能趋近于零，以此获得长周期响应。该方案不需要持续通入大电流驱动，静态功耗低，结构相对稳定。但架构依然保留了机械弹簧，弹簧弹性滞后、温度漂移等材料本征缺陷并未根除；同时为获得足够的负刚度，往往需要多块大尺寸永磁体组成复杂阵列，整机体积难以压缩。

另一类为传统全主动电磁悬浮方案，该方案完全移除机械支撑弹簧，也不依靠永磁体提供主悬浮力，检验质量块的全部重力 mg 完全由驱动线圈通电产生的电磁力实时抵消。系统依靠位移传感器实时采集质量块位置信号，送入闭环控制器调节线圈电流，动态维持质量块的悬浮平衡。线圈总电流可分解为静态直流分量与动态交流校正分量：

$$I_{coil,B} = I_{DC,B} + i_{ac,B}$$

其中大幅值直流分量 $I_{DC,B}$ 用于产生恒定电磁力平衡重力，小幅值交流分量 $i_{ac,B}$ 用于完成动态稳定与阻尼调节。该方案完全摆脱机械弹簧，理论上可拓展至多自由度测量。但缺点同样显著：线圈需要持续输出大直流电流，静态功耗高，焦耳发热严重；线圈发热会传导至周边结构，引入额外温度扰动；同时控制器需从零构建系统全部刚度与阻尼，对 DAC、功率放大器的噪声指标要求极高，电流噪声会直接转化为悬浮力噪声，抬高系统噪声基底。

上述两类方案各有适用场景，但在垂直向磁悬浮仪器中仍面临若干共同限制，具体如下。

2.4 当前磁悬浮 Z 向地震仪的固有缺陷

结合 2.3 节两类主流方案的分析, 现有磁悬浮 Z 向地震仪普遍存在三项核心短板, 也是制约其在超低频微振动隔振场景大规模应用的主要障碍。

首先是超低频探测能力的局限。对于永磁-弹簧复合的半被动方案, 总等效刚度受弹簧材料特性、磁铁装配公差的双重约束, 无法无限趋近于零; 机械弹簧的蠕变效应还会引入长期零点漂移, 进一步限制仪器的低频下限。对于全主动电磁悬浮方案, 系统全部刚度由控制器生成, 位移传感器、DAC、功率放大器的噪声会在低刚度工况下被系统放大, 噪声基底显著抬高, 导致无法稳定工作在超低频段。两类方案均难以实现真正意义上的超低频稳定探测。

其次是整机结构难以兼顾紧凑化。为获得足够的磁力与负刚度, 半被动方案往往需要多块大尺寸永磁体组成特殊阵列, 同时需要预留辅助机械弹簧的安装空间, 磁间隙与排布几何约束导致整机体积偏大。全主动方案需要大尺寸驱动线圈输出足够的直流悬浮力, 功率放大模块也需要更大的散热设计, 进一步增大整机体积。现有原型普遍难以同时兼顾超低频性能与整机小型化。

第三是永磁磁特性的温度敏感性问题。无论是半被动方案还是主动方案, 只要用到永磁体, 就无法规避永磁材料剩磁的温度敏感性。以常用的钕铁硼永磁为例, 剩磁 B_r 随温度升高近似线性下降, 而永磁相互作用力与磁感应强度的平方成正比 $F_{mag} \propto B_r^2$, 环境温度变化会直接改变静态悬浮磁力的大小, 破坏重力平衡条件, 导致工作点偏移、等效刚度改变, 引入零点漂移, 劣化仪器长期测量性能。对于全主动电磁悬浮方案, 线圈大电流产生的焦耳热还会进一步加剧永磁体的温度波动, 形成正反馈式的扰动。

综上, 现有的 Z 向地震仪方案各有取舍: LaCoste 机械方案受限于弹簧材料性质、温度漂移, 体积大; 现有磁悬浮原型难以同时达成超低频性能、整体紧凑、温度扰动小这三个目标。针对上述矛盾, 本文提出一套永磁负刚度配合 PID 主动闭环反馈的单自由度磁悬浮地震仪架构, 利用永磁体提供静态磁力偏置, 线圈仅承担小范围动态调节, 在实现极低等效刚度的同时保证整体设计紧凑。后续章节将开展理论推导、仿真与工程方案设计。

2.5 本文磁悬浮地震仪的设计思路与核心机理

针对 2.4 节归纳的三大核心缺陷，本文提出的永磁固有负刚度结合 PID 主动闭环的架构，从力学基底、力分配模式、热扰动抑制三个维度给出了对应的解决路径。本节仅做机理层面的定性阐述，详细的理论推导与数值验证放在第 3 章展开。

针对超低频探测受限的问题，本方案以永磁天然负刚度作为系统力学基底。现有方案要么依靠弹簧-磁铁抵消得到低刚度，要么依靠控制器从零生成全部刚度，本质上都没有主动利用永磁相互作用本身的力学特性。本文方案的核心创新在于直接利用双永磁体相互作用本身固有的磁力非线性，获得天然负刚度工作点，将永磁固有的负刚度 $k_{mag} < 0$ 作为整个系统的力学基底。系统总等效刚度满足：

$$k_{total} = k_{ctrl} + k_{mag} \quad (2.8)$$

其中 $k_{ctrl} > 0$ 为 PID 闭环反馈生成的等效控制正刚度。控制器不再需要从零构建全部刚度，仅需输出适量正刚度抵消永磁的固有负刚度，即可将总等效刚度调节至接近零，实现超低频响应。该设计一方面摆脱了对辅助机械弹簧的依赖，从根源上消除了弹簧蠕变、弹性滞后带来的低频限制；另一方面降低了控制器的带宽与动态范围压力，间接减小了控制噪声对超低频段的影响，理论上突破了现有方案的低频性能天花板。

针对整机难以紧凑化的痛点，我们采用力分配模式压缩体积方案。现有方案要么需要复杂永磁阵列，要么需要大尺寸线圈输出全部悬浮力，体积难以压缩。本方案采用永磁承担静态重力、线圈仅做动态校正的力分配模式：永磁体之间的静磁力承担检验质量块的绝大部分重力，驱动线圈仅输出小幅度的动态校正力，用于补偿负刚度、提供阻尼、校正微小位置偏移。线圈的静态直流分量近似为零，不需要设计大尺寸功率线圈与大散热结构。同时，仅依靠一对普通同轴永磁体即可获得可用的天然负刚度工作点，不需要多块磁铁组成的复杂阵列。该力分配模式可以同时压缩永磁体与线圈的体积需求，使系统在实现极低等效刚度的同时，具备整机紧凑化的潜力，解决了现有方案低频性能与小型化难以兼顾的矛盾。

针对永磁温度扰动的问题，本方案从抑制二次热扰动和闭环动态校正两个层面缓解影响。需要客观说明：永磁材料剩磁随温度变化是材料本征物理属性，本方案无法从根本上消除该效应。但相比现有方案，本架构可以从两个层面缓解温

度扰动的影响。第一，抑制线圈发热带来的二次热扰动。传统全主动电磁悬浮线圈持续通大直流，焦耳发热显著，热量传导至永磁体进一步加剧磁场漂移，形成正反馈。本方案线圈几乎无静态直流电流，焦耳发热被显著抑制，大幅降低了线圈发热引入的二次温度扰动。第二，闭环反馈实现小范围动态校正。PID 闭环可以对温度变化带来的工作点微小偏移进行实时动态补偿，在一定范围内抑制零点漂移的输出。对于永磁本体温度大幅变化造成的强磁力漂移，后续可结合温度传感与前馈补偿算法进一步优化。

综上，本文架构分别从力学基底、力分配模式、热扰动抑制三个维度，针对性回应了现有磁悬浮 Z 向地震仪的三大核心痛点。上述性能均为理论分析得到的预期效果，具体动力学特性、刚度调节范围、温度耐受性将在第 3 章通过理论建模、数值仿真进一步验证。

2.6 本章小结

本章首先阐述了 Z 向地震仪区别于水平向仪器的特殊物理约束，解释了普通机械弹簧难以实现超低频探测的内在矛盾。随后介绍了 LaCoste 零长弹簧 Z 向地震仪的工作原理，并分析了机械弹簧方案在温度漂移等因素下的固有短板。

在此基础上，本章梳理了现有两类主流磁悬浮 Z 向地震仪的技术路线：永磁负刚度搭配辅助弹簧的半被动方案、全电磁驱动的主动悬浮方案，并分别分析了二者的技术特点与局限。进一步归纳出磁悬浮 Z 向地震仪普遍存在的三项核心缺陷：超低频探测能力受限、整机难以紧凑化、永磁磁力对温度扰动敏感。

针对上述痛点，本章概括了本文提出方案的核心解决机理：直接利用永磁相互作用本身的非线性获得天然负刚度作为力学基底；采用永磁承担静态重力、线圈仅做动态校正的力分配模式，兼顾低频性能与整机紧凑性；通过降低线圈焦耳热抑制二次温度扰动，结合闭环反馈实现小范围偏移校正。本章完成了背景综述与研究动机的铺垫，下一章将对本系统开展完整的理论建模，推导永磁相互作用力、负刚度特性以及闭环反馈系统的动力学方程。

第三章 磁悬浮地震仪理论基础

本章从永磁体的等效电流环模型出发，分别采用毕奥-萨伐尔积分与互感能量法推导同轴永磁体轴向作用力；随后建立考虑实际厚度的轴向分层离散模型，并分析刚度、稳定性、固有频率和温度误差，为数值计算与系统设计提供依据。

3.1 永磁体的等效电流环物理模型

在静磁学理论中，均匀磁化的永磁体在外部空间产生的磁场，可严格等效为分布在其表面的束缚面电流，这是磁介质与磁场相互作用的基本结论。对于轴向均匀磁化的圆柱形永磁体，磁化强度矢量 $\vec{M} = M\vec{e}_z$ 沿轴线方向[7]。

$$\vec{\mu} = I\vec{S} = \vec{M} \cdot \Delta V$$

$$I = M \cdot h$$

其中 I 为等效电流环电流， h 为磁铁厚度， ΔV 为磁铁体积，电流环的等效半径和磁铁半径相等。

3.2 等效电流环模型理论计算

本节基于毕奥-萨伐尔定律与洛伦兹力公式，严格推导两个同轴圆电流环的轴向相互作用力；通过构造辅助积分实现降阶，将积分转化为标准第一类、第二类完全椭圆积分的解析形式；并进一步通过磁场能量与虚位移原理进行独立推导，验证结果的自洽性[8]。

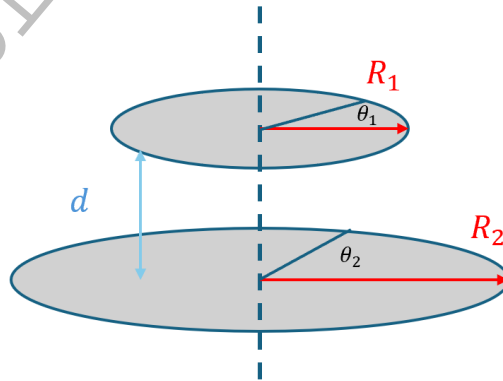


图 3-1 等效电流环模型示意图

根据毕奥-萨伐尔定律，载流回路在空间中产生的磁感应强度 $\vec{B}$ ，可由电流元沿闭合回路积分得到。对于半径为 R_1 、电流为 I_1 的上环，任意电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 在场点产生的磁感应强度为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3}$$

其中， $\vec{r}$ 为从电流元指向场点的相对位置矢量， r 为其模长， μ_0 为真空磁导率；积分沿电流环一周进行。

建立直角坐标系，使两环轴线与 z 轴重合：下环位于 $z=0$ 平面，上环位于 $z=d$ 平面。上环方位角为 θ_1 的电流元可写为：

$$d\vec{l}_1 = \langle -R_1 d\theta_1 \sin\theta_1, R_1 d\theta_1 \cos\theta_1, 0 \rangle \quad (3.1)$$

该式给出电流元在 x 、 y 、 z 三个方向的分量，其中 z 分量为零。

上环电流元源点 P_1 与下环选定场点 P_2 的坐标分别为：

$$P_1 = (R_1 \cos\theta_1, R_1 \sin\theta_1, d), P_2 = (R_2, 0, 0) \quad (3.2)$$

其中 R_2 为下环半径，等效电流为 I_2 。

从源点指向场点的相对位置矢量为：

$$\vec{r} = \langle R_2 - R_1 \cos\theta_1, -R_1 \sin\theta_1, -d \rangle \quad (3.3)$$

其模长满足余弦定理 $r^2 = R_1^2 + R_2^2 + d^2 - 2R_1 R_2 \cos\theta_1$

计算电流元与位置矢量的叉乘，通过行列式展开可得：

$$d\vec{l}_1 \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R_1 d\theta_1 \sin\theta_1 & R_1 d\theta_1 \cos\theta_1 & 0 \\ R_2 - R_1 \cos\theta_1 & -R_1 \sin\theta_1 & -d \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

展开行列式后，得到磁感应强度三个分量的微元形式：

$$= -dR_1 d\theta_1 \cos\theta_1 \hat{i} - dR_1 d\theta_1 \sin\theta_1 \hat{j} + (R_1^2 d\theta_1 - R_1 R_2 d\theta_1 \cos\theta_1) \hat{k}$$

对上环积分后，场点 P_2 处的方位分量因轴对称性抵消，保留径向分量 B_x 与轴向分量 B_z ；计算下环所受轴向洛伦兹力时使用 B_x ，而对下环一周积分后净径向力为零。

下环的电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 在该磁场中受到洛伦兹力:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}, \quad d\vec{l}_2 \parallel \hat{j}$$

利用轴对称性, 对下环一周积分后仅保留轴向合力, 其大小可写为:

$$F = \int dF_z = \int I_2 B_x dl_2 = 2\pi R_2 I_2 B_x \quad (3.5)$$

其中 B_x 为上环电流在下环选定位置产生的径向磁感应强度。

代入毕奥-萨伐尔定律的径向分量, 并取轴向作用力的幅值(方向由两环电流方向决定), 得到:

$$F = F_z = \int dF_z = I_2 \cdot 2\pi R_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 \oint \frac{dR_1 \cos\theta_1 d\theta_1}{r^3} \quad (3.6)$$

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0 d R_1 R_2}{2} \oint \frac{\cos\theta_1 d\theta_1}{r^3} = \frac{I_1 I_2 \mu_0 d R_1 R_2}{2} \oint \frac{\cos\theta_1 d\theta_1}{(R_1^2 + R_2^2 + d^2 - 2R_1 R_2 \cos\theta_1)^{\frac{3}{2}}}$$

该积分属于椭圆积分范畴, 无法用初等函数直接求解, 需要通过参数简化与椭圆积分变换得到闭式解。

为将积分写为标准形式, 引入仅与几何尺寸相关的参数, b 和 c , 其定义如下:

$$b = R_1^2 + R_2^2 + d^2, c = 2R_1 R_2 \quad (3.7)$$

其中 b 为两环半径平方与间距平方之和, 随轴向间距 d 变化; c 为两环半径的耦合项, 仅由半径尺寸决定, 与间距无关。

代入后 $r^2 = b - c \cdot \cos\theta_1$, 轴向力积分可改写为标准化形式:

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0 d c}{4} \oint \frac{\cos\theta_1 d\theta_1}{(b - c \cdot \cos\theta_1)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.8)$$

定义待求的原积分为 Q :

$$Q = \oint \frac{\cos\theta_1 d\theta_1}{(b - c \cdot \cos\theta_1)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.9)$$

直接求解分母为3/2次幂的三角积分较为复杂, 构造一个分母为1/2次幂的辅助积分 J , 通过对参数 c 求偏导建立与原积分的联系:

$$J = \oint \frac{d\theta_1}{(b - c \cdot \cos\theta_1)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{(b - c \cdot \cos\theta_1)^{\frac{1}{2}}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta_1}{(b - c \cdot \cos\theta_1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.10)$$

将辅助积分 J 对参数 c 求偏导数，由复合函数求导法则可得：

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{1}{2} \oint \frac{\cos\theta_1 d\theta_1}{(b - c \cdot \cos\theta_1)^{\frac{3}{2}}}$$

对比原积分 Q 的形式，显然二者满足关系：

$$2 \frac{\partial J}{\partial c} = Q \quad (3.11)$$

因此只需先求解辅助积分 J ，再通过对 c 求导即可得到原积分，这是椭圆积分计算中经典的降阶方法。

为将 J 化为标准椭圆积分形式，利用三角半角公式对被积函数进行变形：

$$\cos\theta_1 = 2\cos^2\frac{\theta_1}{2} - 1$$

做变量代换 $t = \frac{\theta_1}{2}$ ，则 $d\theta_1 = 2dt$ ，结合被积函数的偶对称性，积分范围可压缩为 $0 \sim \pi/2$ 的 4 倍。代入整理后，辅助积分可化为：

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_0^\pi \frac{d\theta_1}{(b - 2c \cdot \cos^2\frac{\theta_1}{2} + c)^{\frac{1}{2}}} = 2 \frac{1}{\sqrt{b+c}} \int_0^\pi \frac{d\theta_1}{(1 - \frac{2c}{b+c} \cos^2\frac{\theta_1}{2})^{\frac{1}{2}}} \\ J &= 4 \frac{1}{\sqrt{b+c}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\left(1 - \frac{2c}{b+c} \cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\left(1 - \frac{2c}{b+c} \sin^2 t\right)^{\frac{1}{2}}} = 4 \frac{1}{\sqrt{b+c}} K(k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 k 为第一类完全椭圆积分的模数，定义为：

$$k = \sqrt{\frac{2c}{b+c}} \quad (3.13)$$

且满足 $0 < k < 1$ ，符合完全椭圆积分的参数取值要求。 $K(k)$ 为第一类完全椭圆积分，其标准定义为：

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}}}$$

根据原积分与辅助积分的关系，轴向力可表示为：

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0 d c}{4} \cdot 2 \frac{\partial J}{\partial c} = \frac{1}{2} I_1 I_2 \mu_0 d c \frac{\partial \frac{4K(k)}{\sqrt{b+c}}}{\partial c} \quad (3.14)$$

利用链式求导法则，将对 c 的偏导分解为对 k 的导数与 k 对 c 的导数的乘积：

$$F = 2I_1 I_2 \mu_0 d c \cdot \frac{\left[\frac{dK(k)}{dk} \cdot \frac{dk}{dc} \cdot \sqrt{b+c} \right] - \left[K(k) \frac{1}{2\sqrt{b+c}} \right]}{b+c} \quad (3.15)$$

代入第一类完全椭圆积分的标准导数公式：

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)} = \left[\frac{E(k) - \frac{b-c}{b+c} \cdot K(k)}{\sqrt{\frac{2c}{b+c} \cdot \frac{b-c}{b+c}}} \right]$$

其中 $E(k)$ 为第二类完全椭圆积分，定义为 $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt$

同时计算模数 k 对参数 c 的导数：

$$\frac{dk}{dc} = \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2c}} \cdot \sqrt{b+c} - \sqrt{2c} \frac{1}{2\sqrt{b+c}}}{b+c} \right] = \frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}\sqrt{b+c}} \quad (3.16)$$

将 $\frac{dK}{dk}$ 与 $\frac{dk}{dc}$ 代入力的表达式，逐项代入并代数化简，经过通分、合并同类项与约去公因子：

$$\begin{aligned} F &= 2I_1 I_2 \mu_0 d c \cdot \frac{\left[\frac{E(k) - \frac{b-c}{b+c} \cdot K(k)}{\sqrt{\frac{2c}{b+c} \cdot \frac{b-c}{b+c}}} \right] \cdot \left[\frac{b\sqrt{b+c}}{\sqrt{2c(b+c)}\sqrt{b+c}} \right] - \left[\frac{K(k)}{2\sqrt{b+c}} \right]}{(b+c)} \\ &= I_1 I_2 \mu_0 d c \cdot \frac{\left[\frac{[(b+c) \cdot E(k)] - [(b-c) \cdot K(k)]}{c(b-c)} \cdot b - K(k) \right]}{(b+c)\sqrt{b+c}} \\ &= \frac{I_1 I_2 \mu_0 d}{(b^2 - c^2)} \cdot \frac{[(b+c) \cdot E(k) \cdot b] - [(b-c) \cdot K(k) \cdot b] - [c(b-c) \cdot K(k)]}{\sqrt{b+c}} \\ &= \frac{I_1 I_2 \mu_0 d \sqrt{b+c}}{(b^2 - c^2)} \cdot \frac{[(b+c) \cdot E(k)] - [(b-c) \cdot K(k) \cdot b] - [c(b-c) \cdot K(k)]}{b+c} \end{aligned}$$

最终得到同轴圆电流环轴向作用力的解析闭式：

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0 d \sqrt{b+c}}{(b^2 - c^2)} \cdot [bE(k) - (b-c)K(k)] \quad (3.17)$$

该式将两个同轴电流环的轴向作用力表示为第一类、第二类完全椭圆积分的组合，仅由几何参数 b 、 c 与电流大小决定，是后续所有计算的核心公式[8]。

为验证上述结果的正确性，采用磁场能量与虚位移原理进行独立推导。两个载流回路的相互作用能量为 $W = I_1 I_2 M_{12}$ ，其中 M_{12} 为两回路的互感系数，定义为：

$$M_{12} = \frac{\Psi_2}{I_1}$$

其中 Ψ_2 为回路 1 的电流产生的磁场穿过回路 2 的磁通量。

两个同轴电流环的互感为：

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2, \quad d\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1 d\vec{l}_1}{4\pi r} \\ M_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \end{aligned} \quad (3.18)$$

上下电流环任意点坐标：

$$P_1 = (R_1 \cos \theta_1, R_1 \sin \theta_1, z), P_2 = (R_2 \cos \theta_2, R_2 \sin \theta_2, 0) \quad (3.19)$$

的矢量分别为：

$$d\vec{l}_1 = \langle -R_1 \sin \theta_1 d\theta_1, R_1 \cos \theta_1 d\theta_1, 0 \rangle, \quad d\vec{l}_2 = \langle -R_2 \sin \theta_2 d\theta_2, R_2 \cos \theta_2 d\theta_2, 0 \rangle \quad (3.20)$$

两个电流元的点积为：

$$d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.21)$$

代入，得到电流环间互感表达式：

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) d\theta_2 d\theta_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + z^2 - 2R_1 R_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}} \quad (3.22)$$

做积分变量替换 $d(\theta_2 - \theta_1) = d\theta_2 = d\varphi$ 。

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\theta_1}^{2\pi-\theta_1} \frac{R_1 R_2 \cos \varphi d\varphi d\theta_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + z^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi}} \quad (3.23)$$

对 θ_1 积分一周后，互感可化简如下：

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + z^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi}} \quad (3.24)$$

令：

$$b' = R_1^2 + R_2^2 + z^2 \quad c = 2R_1 R_2$$

最终互感 M_{12} 可表示为含椭圆积分的形式：

$$M_{12} = \frac{\mu_0 c}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{b' - c \cos \varphi}} \quad (3.25)$$

采用虚位移原理时，若只讨论轴向作用力的大小，可写为 $|F| = I_1 I_2 |\partial M_{12} / \partial z|$ ；力的正负由电流方向和 z 轴正方向约定决定。

$$\begin{aligned} F &= I_1 I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial z} = I_1 I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial z} \\ &= I_1 I_2 \cdot 2z \frac{\partial M_{12}}{\partial b'} = I_1 I_2 \mu_0 c z \frac{\partial \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{b' - c \cos \varphi}}}{\partial b'} \end{aligned} \quad (3.26)$$

计算得到：

$$\frac{\partial \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{b' - c \cos \varphi}}}{\partial b'} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(b' - c \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

代入磁力表达式，得到：

$$|F| = \frac{I_1 I_2 \mu_0 c z}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(b' - c \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.27)$$

令 $z = d$ ，即 $b' = b$ ，因此两种方法得到的磁力计算公式等价。

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0 d \sqrt{b+c}}{(b^2 - c^2)} \cdot [bE(k) - (b-c)K(k)]$$

其中 $E(k)$, $K(k)$ 分别为第二类和第一类椭圆积分，表达式如下。

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

完全椭圆积分的导数满足如下标准关系，是后续刚度计算的数学基础：

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)}, \quad \frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad (3.28)$$

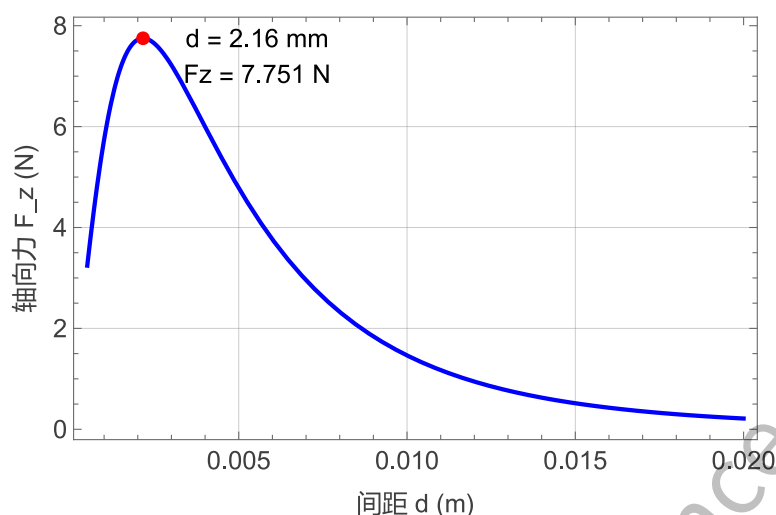


图 3-2 等效电流环模型磁力曲线

3.3 考虑实际厚度的轴向分层离散模型

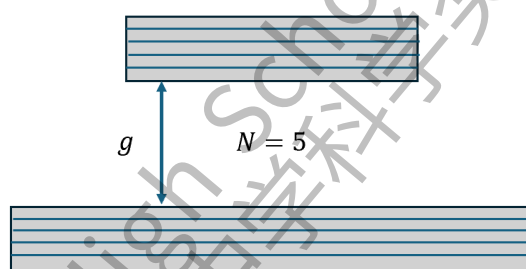


图 3-3 分层磁铁 (N=5) 示意图

上述解析公式针对的是无限薄的理想电流环，而实际永磁体具有一定的轴向厚度，直接用单环等效会引入一定误差。为此我们建立轴向分层离散模型，将有限厚度的永磁体沿轴向均匀切分为 N 个薄层，每个薄层等效为一个薄电流环，通过双重求和计算总作用力，本质是对轴向连续分布电流的数值积分。

设上下永磁体的轴向厚度分别为 h_1 、 h_2 ，磁化强度均为 M ，则每个薄层的等效电流为：

$$I_{1,i} = M \cdot \frac{h_1}{N}, \quad I_{2,j} = M \cdot \frac{h_2}{N} \quad \text{其中 } i = 1, 2, \dots, N \text{ 为下层环的序号, } j = 1, 2, \dots, N$$

为上层环的序号。

采用中点离散方案。令下磁铁上端面为 $z = 0$ 、其本体沿负 z 方向延伸，上磁铁下端为 $z = g$ 。则第 i 个下环和第 j 个上环的中心位置分别为 $z_{1,i} = -\frac{(i-\frac{1}{2})h_1}{N}$ 与 $z_{2,j} = g + \frac{(j-\frac{1}{2})h_2}{N}$ ，其中 g 为端面气隙。

第 i 个下环与第 j 个上环的中心距记为 z_{ij} ，总轴向力为全部环对作用力之和：

$$F = \sum_{n_2=1}^N \sum_{n_1=1}^N \left[\frac{M^2 h_1 h_2 \mu_0 z \sqrt{b+c}}{N^2 (b^2 - c^2)} \right] \cdot [bE(k) - (b-c)K(k)] \quad (3.29)$$

其中 $z_{ij} = g + \frac{(i-\frac{1}{2})h_1}{N} + \frac{(j-\frac{1}{2})h_2}{N}$ ；参数 b 、 c 、 k 均应针对各环对的 z_{ij} 分别计算。

$$z_{ij} = g + \frac{(i-\frac{1}{2})h_1}{N} + \frac{(j-\frac{1}{2})h_2}{N} \quad (3.30)$$

随着分层数 N 增大，中点离散结果收敛于轴向连续分布模型。本文后续采用 $N=20$ ；其精度由第 3.5 节给出的 N 收敛曲线评估，而不是预先假定。

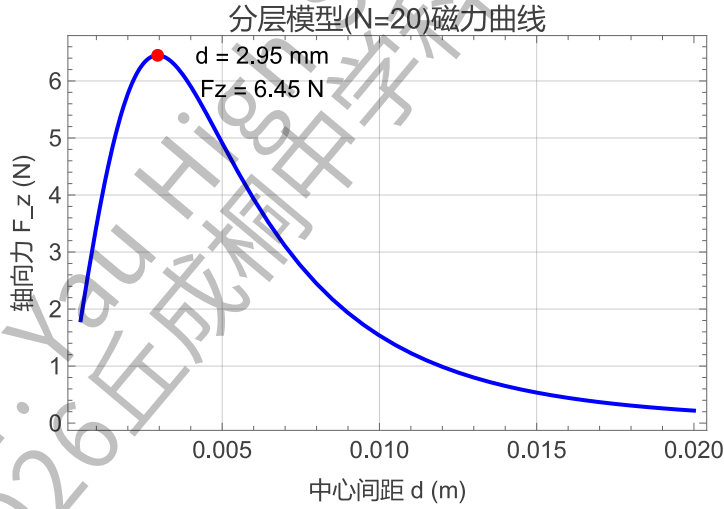


图 3-4 分层模型（ $N=20$ ）的磁力曲线

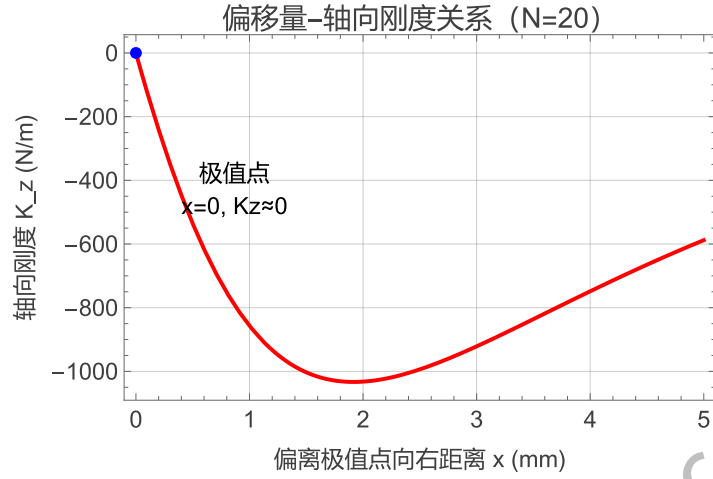


图 3-5 偏移量与轴向刚度的关系

3.4 刚度、多自由度稳定性与系统固有频率

磁悬浮系统的回复刚度和固有频率决定其小信号动力学。以下采用通常的恢复刚度符号约定 $K_\alpha = -\partial F_\alpha / \partial \alpha$ ，并由静磁场方程推导刚度张量的迹零关系。

固定磁矩 $\vec{\mu}$ 在外磁场 $\vec{B}$ 中的磁势能为：

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (3.31)$$

其中 $\vec{\mu}$ 为悬浮磁体的总磁矩， $\vec{B}$ 为外部磁感应强度。

由 $\vec{F} = -\nabla U$ 得到磁体所受力：

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (3.32)$$

在所考察的小位移范围内，若磁矩可视为常量，则力由外磁场的空间梯度决定[7]。

对力矢量取散度，结合麦克斯韦静磁场基本方程：无源区域内磁感应强度散度恒为零 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，且无自由电流区域旋度也为零 $\nabla \times \vec{B} = 0$ 。利用矢量恒等式 $\nabla^2 \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$ ，代入力的散度可得：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \vec{\mu} \cdot \nabla^2 \vec{B} = \vec{\mu} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{B})] = 0 \quad (3.33)$$

该式说明，静磁场中作用在磁体上的力场是无散场，这是推导刚度张量迹零性质的核心物理依据。

定义 α 方向的小信号恢复刚度为作用力梯度的负值：

$$K_\alpha = -\frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \quad (\alpha = x, y, z) \quad (3.34)$$

其中 K_x 、 K_y 为径向恢复刚度， K_z 为轴向恢复刚度。由于 $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ ，上式定义给出 $K_x + K_y + K_z = 0$ ：

$$K_x + K_y + K_z = 0 \quad (3.35)$$

该关系源于上述理想静磁场假设；实际装置中的导磁结构、装配偏心和边缘场会破坏严格轴对称性，因此仍需设置机械限位并进行横向稳定性测试。

对于本研究采用的同轴圆柱永磁体结构，系统具有绕 z 轴的旋转对称性，因此 x 和 y 两个径向方向的刚度完全相等，即 $K_x = K_y$ 。将其代入公式，整理可得：

$$K_x = K_y = \frac{1}{2} |K_z| \quad (3.36)$$

在理想轴对称条件下 $K_x = K_y = -K_z/2$ 。当轴向工作点满足 $K_z < 0$ 时，两个径向恢复刚度均为正，且等于 $|K_z|/2$ ；这说明模型在轴向开环失稳的同时具有径向小信号稳定性，但不意味着实际装置可省略限位与装配误差评估。

悬浮质量块的固有振动频率由等效刚度与质量共同决定。对于径向自由度，等效正刚度为 K_x ，因此径向固有频率满足简谐振动的基本关系：

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{m}}$$

其中 m 为悬浮质量块的质量。由于径向刚度恒为正，径向方向始终是稳定的振动模态。

若某一轴向工作点满足 $K_z > 0$ ，则其轴向固有频率为：

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_z}{m}}$$

在本文采用的磁力峰值右侧， $K_z < 0$ ，开环轴向运动不具有实数固有频率，而以增长率 $\sigma_z = \sqrt{|K_z|/m}$ 偏离平衡点；闭环控制必须提供足够的正恢复刚度。

由 $K_x = |K_z|/2$ ，可将径向固有频率写成轴向负刚度幅值的函数：

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{|K_z|}{2m}} \quad (3.37)$$

因此，在理想轴对称模型中，轴向负刚度幅值越大，径向小信号固有频率越高。

本方案以轴向负刚度工作点为力学基底，再由 PID 闭环提供正恢复刚度与阻尼，使总轴向刚度在保证稳定裕度的前提下降低，从而为拓展低频响应提供条件。

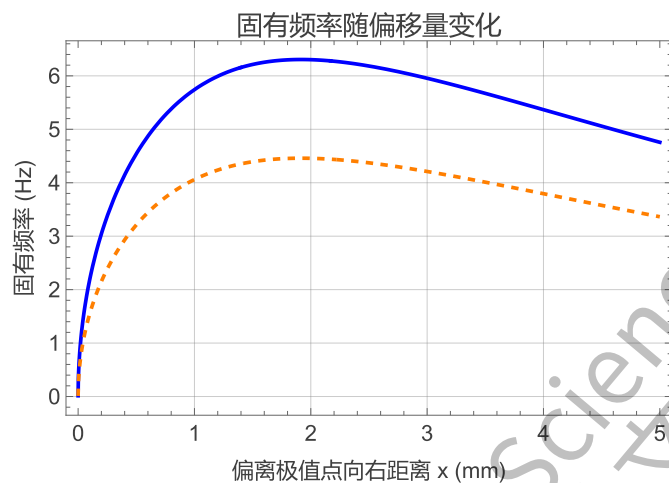


图 3-6 系统轴向固有频率随工作点偏移量的变化

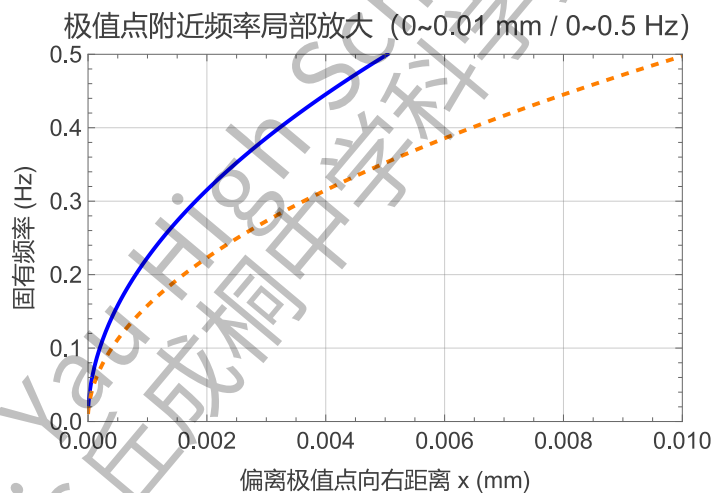


图 3-7 极值点附近固有频率随偏移量的局部放大

3.5 理论计算的数值仿真与特性分析

基于本章 3.2 节推导的同轴电流环轴向力解析公式，采用 Mathematica 软件编程实现轴向分层等效电流环模型，系统开展磁力、刚度与固有频率的数值计算，分析分层模型的收敛特性，对比单环模型与分层模型的差异，明确系统动力学特性的变化规律。

首先对比单环等效模型与 $N = 20$ 分层模型的轴向磁力曲线,如图 3-8 所示。两种模型的曲线整体趋势一致,均呈现先上升后下降的单峰特性:在间距较小时,排斥力随间距增大而升高,达到峰值后随间距增大单调衰减。单环等效模型将有限厚度磁铁等效为单个中心电流环,得到的峰值更高、峰值位置更靠左;分层模型通过轴向离散考虑了磁铁厚度方向的电流分布效应,峰值力被平滑降低,且峰值对应的中心间距更大。对于本研究采用的薄永磁体,单环模型的峰值力相对误差可达 10% 以上,分层模型能够更准确地反映真实磁铁的磁力分布特性。

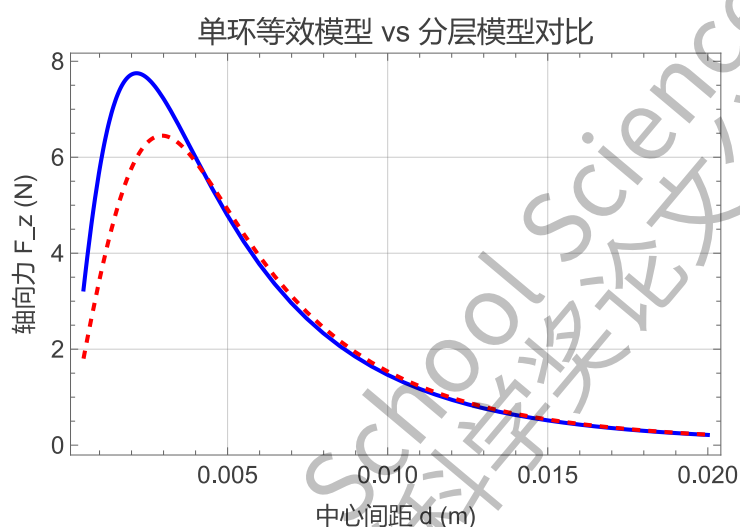


图 3-8 单环模型与分层模型的轴向磁力对比

为检验分层离散方案的数值收敛性,计算磁力极值点位置随分层数 N 的变化,如图 3-9 所示。 $N=5$ 时结果已接近收敛区;当 N 继续增大时,极值位置变化迅速减小。以 $N=20$ 与更高分层数的计算结果比较,极值位置相对变化低于 0.1%。因此后续计算采用 $N=20$,以兼顾精度和计算量。

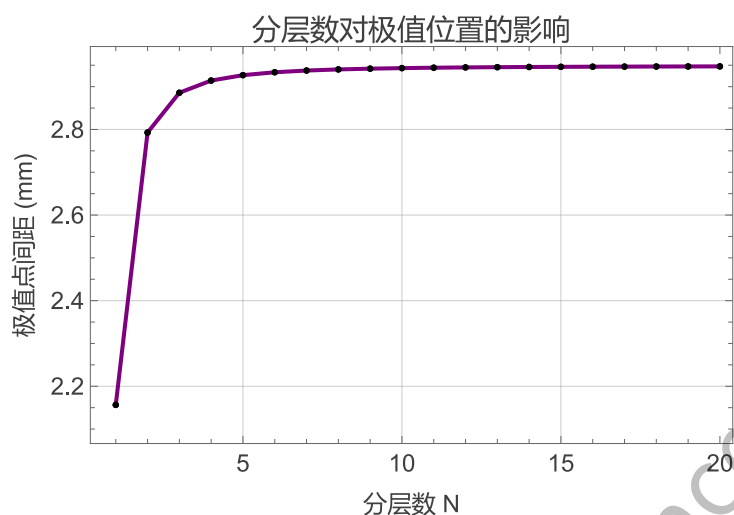


图 3-9 磁力极值点位置随轴向分层数的变化

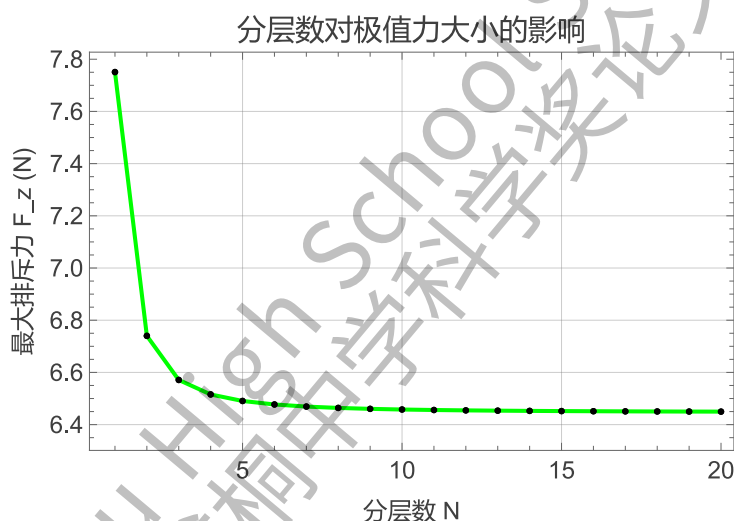


图 3-10 磁力极值随轴向分层数的变化

进一步验证刚度计算的收敛性，选取偏离极值点右侧 1 mm 的典型工作点，计算轴向刚度随分层数的变化，结果如图 3-11 所示。刚度值同样随分层数增加快速收敛， $N = 20$ 时刚度计算的相对误差小于 0.05%，说明分层模型在力与刚度两个物理量上均具有良好的收敛性。

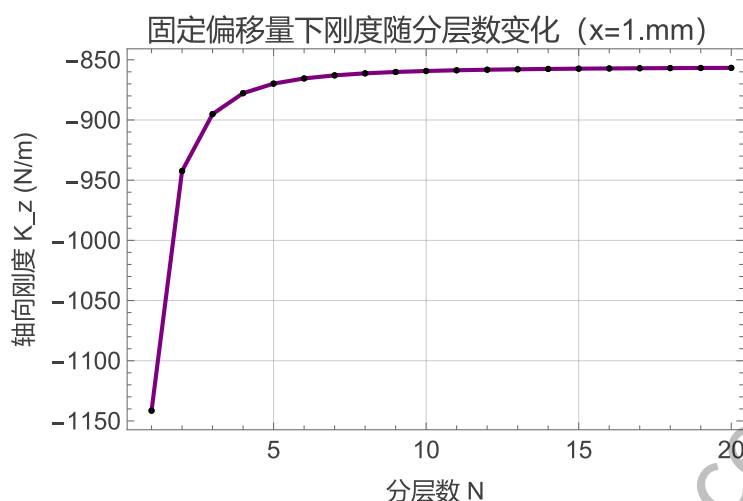


图 3-11 固定偏移量 ($x=1\text{ mm}$) 下轴向刚度随分层数的变化

3.6 磁力特性实验验证与数据对比

为检验理论模型对本组磁体的适用性,搭建实验平台测量同轴永磁体的轴向排斥力,并与分层模型结果比较。

实验采用电子式万能推拉力试验机作为力测量与位移驱动平台,可实现高精度的位移调节与力值采集,实验平台整机如图 3-12 所示。试验机底座与横梁均具备高刚性,避免加载变形引入测量误差;左侧控制面板可设置位移速度、采样频率,显示屏实时显示力值与位移值。



图 3-12 磁力特性测量实验平台

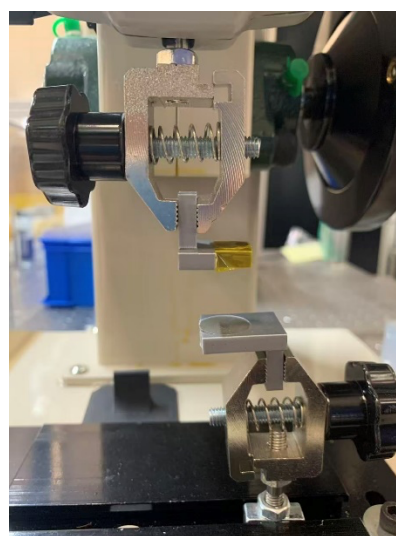


图 3-13 永磁体同轴夹持工装

实验时，从端面接触位置开始，通过试验机的手摇升降机构精确调节两磁铁的轴向间距，以 0.5 mm 为步长逐步增大间距，逐点记录对应的轴向排斥力；每个间距点重复测量 3 次取平均值，降低随机误差。

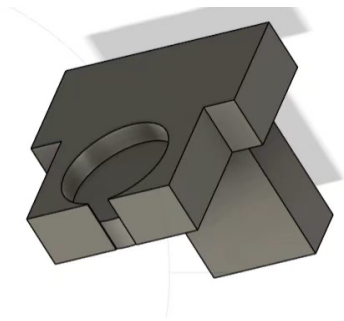


图 3-14 3D 打印磁体固定装置

将实验测量的离散数据点与 $N = 20$ 的分层模型的理论曲线进行对比，结果如图 3-15 所示。

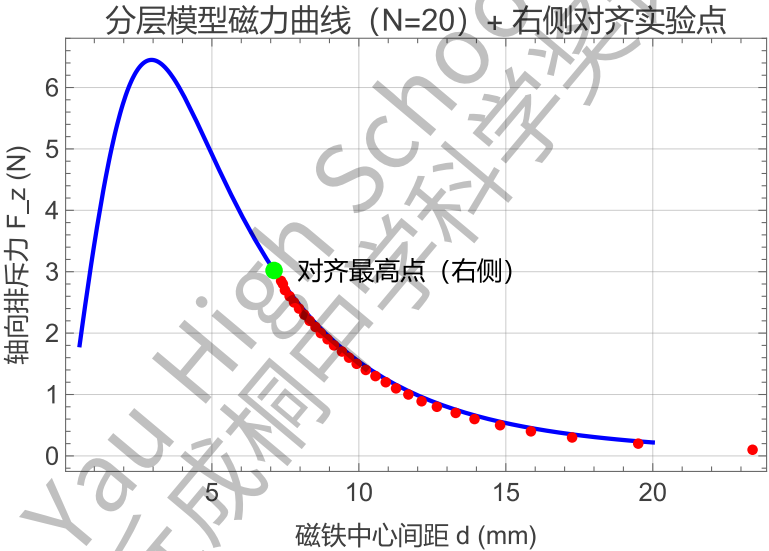


图 3-15 实验数据与理论曲线对比

实验数据与理论曲线的变化趋势及右侧衰减段较为一致。需要说明的是，图中对实验距离轴使用了一个统一的零点偏移量，使峰值位置对齐；其余点的相对间距保持不变。因此，该比较主要验证曲线形状和相对变化趋势，不能独立证明绝对气隙预测精度。剩余偏差可能来自端面接触零点不确定、工装同轴度、磁体参数离散性、测力误差和边缘场。后续应通过独立位移标定和不确定度预算进一步检验模型。

3.7 永磁体尺寸参数优化筛选

为了获得最优的磁铁尺寸组合，以峰值排斥力和峰值气隙为优化目标，开展全参数扫描。固定上磁铁半径 R_2 为 5 mm，改变下磁铁与上磁铁的半径比 R_1/R_2 ，分析极值点位置与最大排斥力的变化规律，结果分别如图 3-16、图 3-17 所示。

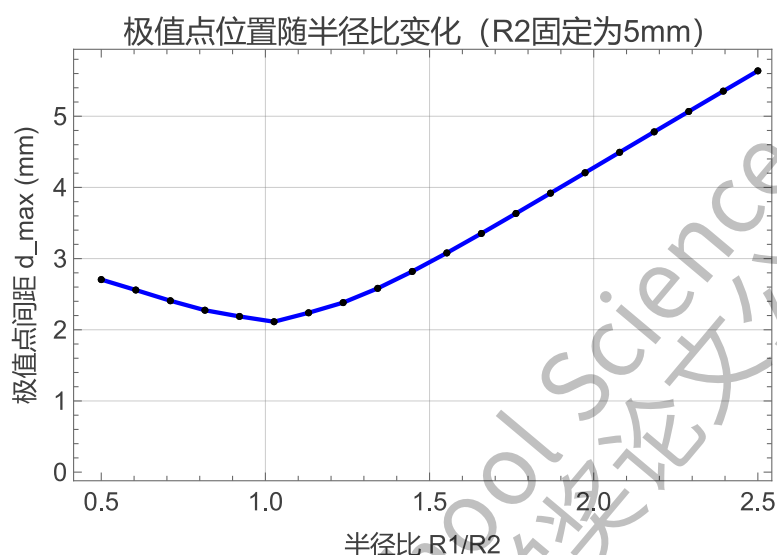


图 3-16 极值点中心距随半径比的变化 ($R_2=5$ mm)

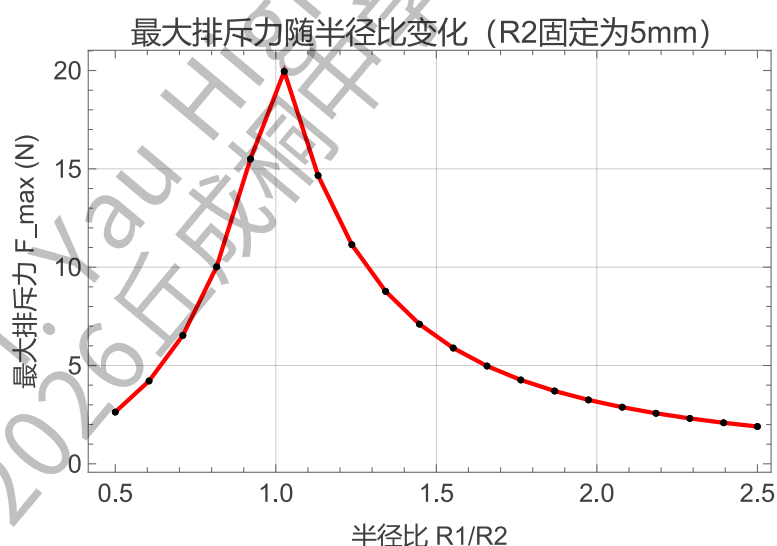


图 3-17 最大轴向排斥力随半径比的变化 ($R_2 = 5$ mm)

从图 3-16 可以看出，随着半径比的增大，极值点对应的中心间距近似线性增大；从图 3-17 可以看出，最大排斥力随半径比的增大而快速上升，随后上升

趋势逐渐放缓。这是因为当下磁铁半径远大于上磁铁时，继续增大下磁铁尺寸对磁场耦合的提升作用减弱，力的增长趋于饱和。

在实际设计中，需要保证峰值位置对应的气隙大于 1 mm（即极值点中心间距大于两磁铁半厚之和加 1 mm），以确保工作点位于磁铁外部、具有足够的调节余量。为此计算满足该气隙要求的最小半径比随厚度比的变化，如图 3-19 所示。随着厚度比的增大，所需的最小半径比近似线性上升，这是因为磁铁越厚，需要更大的半径比才能将峰值推出足够的气隙。

基于上述参数扫描结果，对尺寸进行筛选：在满足最小气隙要求的前提下，兼顾最大排斥力与结构紧凑性，最终选取半径比 1.5、厚度比 2 的尺寸组合，即下磁铁直径 15 mm、厚度 4 mm，上磁铁直径 10 mm、厚度 2 mm。该组合既能够提供足够的排斥力平衡质量块的重力，又能保证充足的气隙调节余量，同时整机尺寸紧凑。

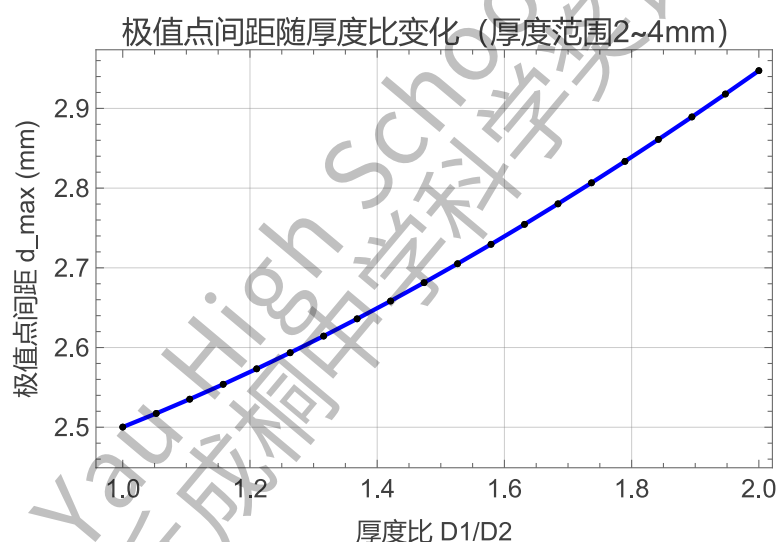


图 3-18 极值点间距随磁铁厚度比的变化

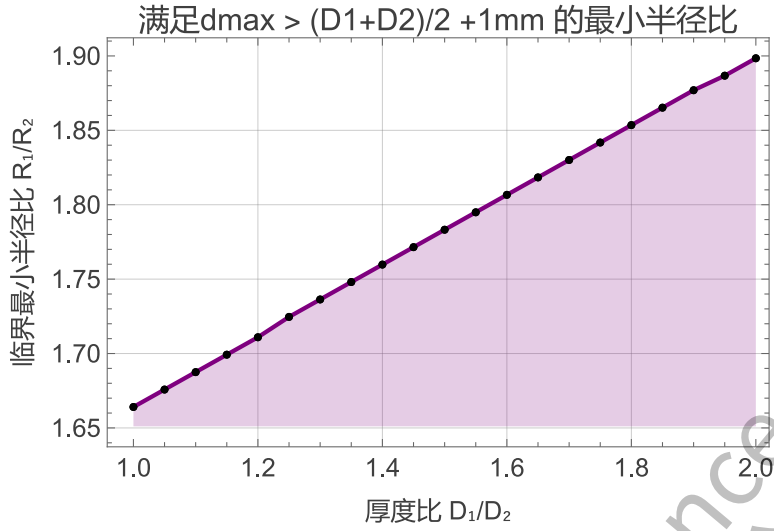


图 3-19 满足气隙要求的最小半径比随厚度比的变化

3.8 温度特性与误差分析

永磁材料的剩磁 B_r 随温度变化, 进而改变磁化强度和悬浮力。对由两块同类永磁体构成的系统, 作用力同时与两块磁体的磁化强度有关, 因此一阶温漂不能按单个 B_r 的线性比例估算。

定义剩磁的相对温度系数 $\alpha_B = \frac{1}{B_r} \frac{\partial B_r}{\partial T}$ 。若两块磁体处于近似相同温度且几何尺寸不变, 则 $F_{DC} \propto B_r^2$ 。静态工作点满足:

$$F_{DC} = A \cdot B_r^2 = mg \quad (3.38)$$

其中 A 为只含几何参数和磁常数的比例系数, 在平衡点 $A = mg/B_r^2$ 。

小温度变化 δT 引起剩磁的一阶变化为:

$$\delta B_r = \alpha_B B_r \delta T \quad (3.39)$$

由 $F_{DC} = A B_r^2$ 线性化可得:

$$\delta F_{DC} = 2AB_r \delta B_r = \frac{2mg}{B_r} \cdot \alpha_B B_r \delta T = 2mg\alpha_B \delta T \quad (3.40)$$

该力变化对应的等效加速度误差为:

$$\delta a = \frac{\delta F_{DC}}{m} \quad (3.41)$$

联立上式, 得到两块同温永磁体的一阶近似:

$$\delta a = 2g \cdot \alpha_B \cdot \delta T \quad (3.42)$$

α_B 必须采用具体牌号在工作温度附近的实测值。公开资料给出的普通 $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ 可逆剩磁温度系数典型值约为 $-3.5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ，而温度补偿牌号可接近 $-1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ 。[9] 按 $\delta a/g \approx 2\alpha_B \delta T$ 估算，即使采用 $|\alpha_B| = 1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ 的补偿牌号，1 mK 波动仍对应约 20 ng；若目标为 0.1 ng，理想模型要求温度波动不超过约 5 μK 。因此后续样机必须明确磁体牌号，实测 α_B ，并结合隔热、主动温控和温度前馈校正。

第四章 系统设计与工程实现

在完成双永磁体作用力分析后，本章给出闭环系统的工程方案，包括 PID 控制器、功率放大电路、驱动线圈、差分电容位移传感与整机结构。除磁力实验和电路样板外，闭环整机尚未完成带宽、噪声和长期稳定性测试，因此本章以理论模型、仿真和设计实现为主。

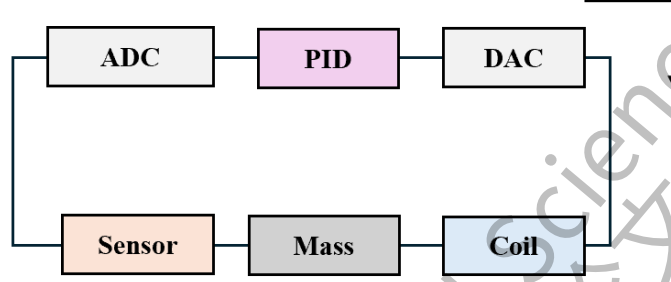


图 4-1 闭环反馈系统的信号流向与模块组成

ADC 与 DAC 分别指模数转换器（analog-to-digital converter）和数模转换器（digital-to-analog converter）。ADC 将传感器模拟信号转换为数字量供控制器运算；DAC 将数字控制量转换为模拟电压，驱动后级功率电路。

4.1 PID 闭环控制器与系统动力学

本系统采用力平衡闭环结构实现微振动加速度测量，其核心原理是反馈电磁力近似抵消地面加速度引起的惯性力，因此可通过反馈电流直接反演地表微振动的加速度。[10]

设悬浮质量块相对于仪器外壳的位移为 x ，地面位移为 x_g ，地面加速度为 $a_g = d^2x_g/dt^2$ 。在地面参考系中，质量块的动力学方程为：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = -ma_g + F_{fb} \quad (4.1)$$

其中 m 为悬浮质量块质量， k 与 b 分别为轴向等效恢复刚度和粘滞阻尼， F_{fb} 为线圈执行器的反馈力。在线性工作区， $F_{fb} = K_I I_{fb}$ ，其中 K_I 为力常数(N/A)，应通过执行器标定获得。

当闭环系统稳定，质量块的相对位移、速度与加速度均被强烈抑制，方程左侧的机械恢复力与残余惯性项均为小量，因此近似满足： $K_I I_{fb} \approx m a_g$ 整理可得高增益条件下的加速度反演关系：

$$a_g(\omega) \approx \frac{K_I}{m} I_{fb}(\omega) \quad (4.2)$$

在高环路增益且质量块相对运动足够小时，地面加速度可由反馈电流近似反演。该方法减小了对大位移量程标定的依赖，但位移传感器噪声、偏置、ADC/DAC 量化误差和执行器力常数误差仍会通过闭环传递到输出，不能认为位移传感误差被完全消除。

PID 控制器对位置误差执行比例、积分和微分运算。采用 $u(t) = P e(t) + I \int e(t) dt + D de(t)/dt$ ，其中 $u(t)$ 为输出信号， $e(t)$ 为输入信号。公式右边第一项为比例项，主要改变等效恢复刚度；第二项为积分项，主要抑制稳态位置偏差；第三项为微分项，提供等效阻尼。实际参数还必须满足采样、延迟、执行器饱和与相位裕度约束[10]。

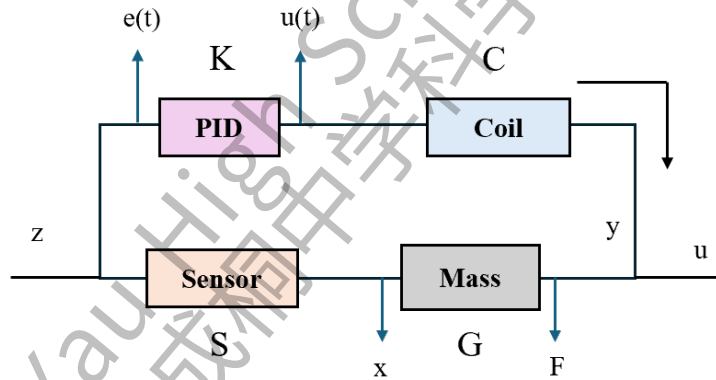


图 4-2 PID 闭环控制系统动力学框图

忽略传感器和执行器的附加动态时，以外力 F 为输入、相对位移 x 为输出，质量块的小信号方程为：

$$F = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

其中 m 为质量， b 为粘滞阻尼系数， k 为小信号恢复刚度。拉普拉斯变换后，机械对象传递函数为：

$$G \equiv \frac{x}{F} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (4.3)$$

同理，将 PID 控制器的时域输出方程 $u(t) = Pe(t) + I \int e(t)dt + D \frac{de(t)}{dt}$ 进行拉普拉斯变换，得到控制器复频域传递函数：

$$C_{PID}(s) = P + \frac{I}{s} + Ds \quad (4.4)$$

在单位负反馈且控制器输出为反馈力的简化模型中，闭环信号满足：

$$X = G(F_{ext} - C_{PID}X) \quad (4.5)$$

整理得到外力到相对位移的闭环传递函数：

$$X = \frac{GF_{ext}}{1 + C_{PID}G}$$

为突出 PID 对机械对象的作用，以下仍忽略位移传感器、功率级和线圈的附加极点与时延；这些因素必须在实际环路设计中重新加入。

$$\frac{X}{F_{ext}} \sim \frac{G}{1 + C_{PID}G}$$

将式（4.3）和式（4.4）代入，可得：

$$\frac{X}{F_{ext}} = \frac{\frac{1}{ms^2 + bs + k}}{1 + (P + \frac{I}{s} + Ds) \frac{1}{ms^2 + bs + k}}$$

进一步化简得到系统闭环传递函数：

$$\frac{X}{F_{ext}} = \frac{s}{ms^3 + (b + D)s^2 + (P + k)s + I} \quad (4.6)$$

式（4.6）表明，在这一理想化模型中，P、I、D 分别进入等效阻尼、等效刚度和低频恢复项。但闭环稳定性与噪声性能不能仅由该三阶表达式判断，仍需结合传感器、DAC、功率放大器、线圈及数字时延建立完整开环模型。

4.2 低噪声嵌套功率放大电路

功率放大器的核心作用是以微弱的输入控制信号去调制大功率供电电源，输出满足驱动要求的电压与电流。在本闭环系统中，功率放大器接收 DAC 输出的低幅值模拟控制信号，对信号进行功率放大，驱动执行线圈产生反馈电磁力。功率放大器基础原理示意图如下。

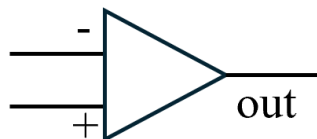


图 4-3 理想运算放大器输入输出关系示意图

理想运算放大器满足输入输出关系：其中 V_+ 和 V_- 分别是两个输入端口的电压， G 为开环增益， V_{out} 为输出电压，典型取值为 $10^5 \sim 10^6$ 。

$$G(V_+ - V_-) = V_{out}$$

理论分析采用低噪声前置运放与功率运放的嵌套反馈思路。AD8671 具有低电压噪声和低失调特性；OPA544 是高压大电流运算放大器[11,12]。器件能否组合使用取决于供电、输出摆幅、稳定性、负载和热设计，不能只依据开环增益判断。

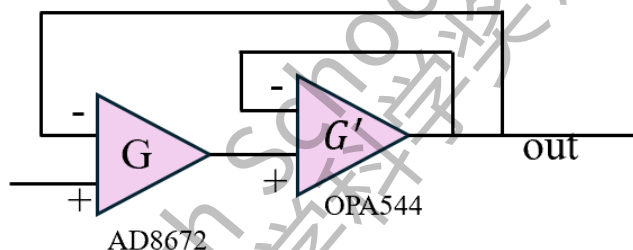


图 4-4 两级嵌套运算放大器功率级拓扑

基于运算放大器的理想特性，列写输入输出电压方程：

$$G'(G(V_+ - V_{out}) - V_{out}) = V_{out} \quad (4.7)$$

对表达式化简求解输出电压：

$$V_{out} = \frac{G'G}{1 + G' + GG'} V_+$$

两级运放开环增益满足 $G, G' \sim 10^5, 10^6$ ，因此输出电压幅值与同相端输入电压处于同一数量级，即 $V_{out} \sim V_+$ 。

由此可知，该嵌套架构并非依靠运放自身增益实现电压放大，大驱动电流由 OPA544 的外部正负供电电源提供。

在解决功率输出的基础上，需要进一步分析电路的噪声抑制机理。由于 OPA544 功率级器件噪声较高，可将其等效为串联在信号通路中的噪声电压源 n ，噪声等效模型如下图。

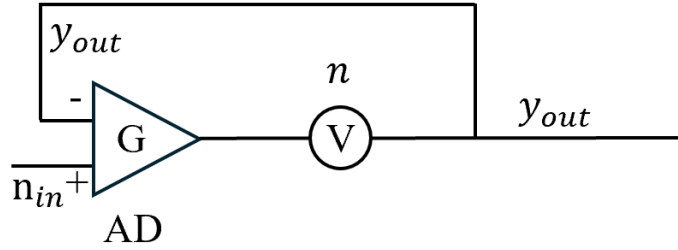


图 4-5 功率放大电路噪声等效模型

列写含噪声源的电路方程：

$$G(n_{in} - y_{out}) + n = y_{out} \quad (4.8)$$

整理得到输出噪声表达式：

$$y_{out} = \frac{G}{1+G} n_{in} + \frac{1}{1+G} n \quad (4.9)$$

式中 n_{in} 为前置级等效输入噪声， n 为功率级附加噪声。在理想、低频且 $G \gg 1$ 的标量模型中，功率级噪声项被环路增益抑制；实际抑制量随频率下降，并受输入噪声、偏置电流、阻抗热噪声和稳定性补偿限制。

因此，该嵌套拓扑只能在具有足够环路增益和相位裕度的频带内降低功率级附加噪声；最终输出噪声应由完整噪声增益模型和实测谱密度确定。

为实现对信号放大倍数的灵活配置，可在反馈通路引入电阻网络 R_1, R_2 ，修改后的电路如下图所示。

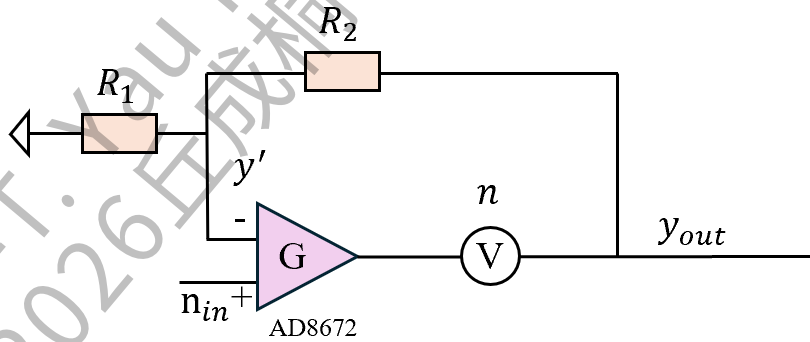


图 4-6 带反馈电阻网络的增益可调功率放大电路

引入电阻网络后，运放反相输入端电位不再直接等于输出电压，二者满足：

$$y_{out} = y' + \frac{y'}{R_1} R_2 \quad (4.10)$$

将式（4.6）中输出变量替换为反馈节点电位 y' ：

$$G(n_{in} - y') + n = y_{out} \quad (4.11)$$

由电阻分压关系，反馈节点满足 $y' = \beta y_{out}$ ，其中反馈因子 β 与非反相噪声增益 A_N 分别为：

$$y_{out} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} y'$$

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, A_N = 1/\beta = 1 + R_2/R_1$$

闭环信号增益和噪声增益由 R_1 、 R_2 决定；提高增益会降低反馈因子和环路增益，并可能缩小稳定带宽。联立上述关系可得：

$$Gn_{in} + n = \left(\frac{GR_1}{R_1 + R_2} + 1 \right) y_{out} \quad (4.12)$$

定义有效环路增益为：

$$G'' = \frac{GR_1}{R_1 + R_2}, G'' < G$$

增加闭环增益后，反馈因子 β 下降，故有效环路增益 $G'' = G\beta$ 低于运放开环增益 G 。稳定性判断应使用完整开环传递函数的增益交越频率和相位裕度，而不是只检查相位等于 -180° 的单一一点。

图 4-7 示意环路增益与相位随频率变化。设计需结合 AD8671、OPA544、线圈负载及补偿网络的频率响应，保证足够的增益裕度和相位裕度；图中曲线仅为概念示意，不能代替仿真或实测数据。

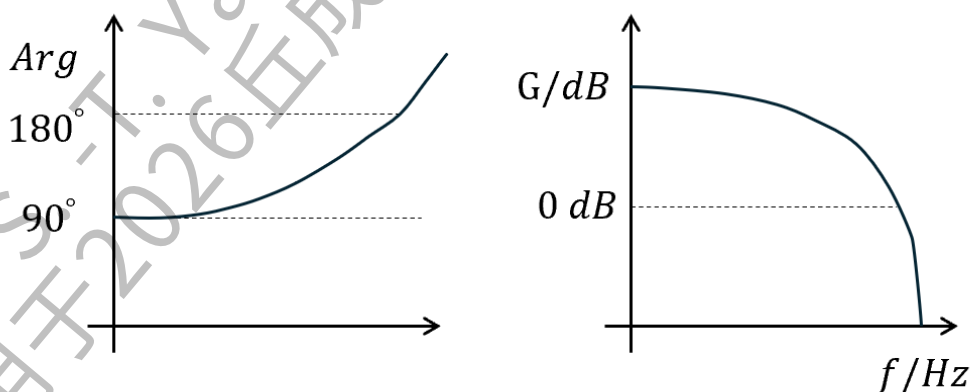


图 4-7 闭环系统环路增益与相位的概念曲线

除此之外，还可以在反馈电阻网络上并联补偿电容，构造相位零点，补偿电路固有的相位滞后，进一步提升环路的相位裕度。

反馈电阻会引入约翰逊-奈奎斯特热噪声。电阻 R 在温度 T 下的电压噪声谱密度为 $e_n = \sqrt{4k_B T R} \text{ V} / \sqrt{\text{Hz}}$ ；若在等效噪声带宽 Δf 内积分，则 $e_{rms} = \sqrt{4k_B T R \Delta f}$ 。因此电阻取值、带宽和后级噪声增益应联合优化[13]。

4.3 电磁驱动线圈与特性分析

电磁驱动线圈是力平衡闭环的执行器。在线性小信号范围内，线圈电流通过力常数转换为反馈力；比例、积分和微分控制作用只有在执行器未饱和、环路稳定且力常数近似不变时才成立。

对于单匝圆形电流环，电流为 I_{coil} ，其空间磁场由毕奥-萨伐尔定律描述：

$$\vec{B}_{coil} = I_{coil} \cdot \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

可以直接看出，电流环产生的磁感应强度与通入电流呈正比。实际线圈可视为大量同心单匝电流环的堆叠，因此线圈整体产生的磁场同样与驱动电流成正比：

$$\vec{B}_{coil} \propto I_{coil} \quad (4.13)$$

也可以写成：

$$\vec{B}_{coil} = I_{coil} \cdot \vec{B}(r)$$

其中 $B(r) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ ，悬浮质量块上永磁体受到的磁场作用力为磁偶极势能的梯度：

$$F = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}_{coil})$$

将式 (4.11) 代入得到：

$$F = I_{coil} \cdot \nabla[\vec{\mu} \cdot \vec{B}(r)]$$

悬浮质量块只在平衡位置 r_0 附近作小幅运动。若 $\nabla[\vec{\mu} \cdot \vec{B}(r)]$ 在该范围内变化很小，可将其在 r_0 处的值定义为执行器力常数 K_f 。

$$F = K_f I_{coil}$$

K_f 应通过电流-力实验标定，并在控制模型中计入位置、温度与频率依赖。

完成线圈力学特性分析后，进一步讨论线圈引入的电路噪声与环路稳定性约束。将线圈等效为电阻与电感串联模型：

$$Z_{coil} = R_{coil} + j\omega L_{coil} \quad (4.14)$$

式中电感 L_{coil} 用于储存磁场能量，实现电磁力输出；电阻 R_{coil} 来自导线的欧姆损耗，该损耗会显著影响闭环系统稳定性。

电感元件会随工作频率升高引入持续增大的相位滞后，进一步降低闭环环路相位裕度；该相位滞后与运算放大器的固有相位偏移叠加，会增大系统自激振荡风险。线圈串联电阻可以对相位滞后起到抑制作用，提升回路稳定性；若线圈直流电阻趋近于零，线圈的相位将趋近 90° ，极易诱发闭环振荡。线圈阻抗的相位满足：

$$\tan \theta = \frac{\omega L_{coil}}{R_{coil}}$$

4.4 差分电容式位移传感单元

本系统采用差分电容位移读出：在质量块上下两侧设置固定极板，对质量块施加交流激励，并将两侧电容差转换为电压。该思路与 Xia 等人的多自由度电容读出地震仪采用的差分测量原则相近[3]。

静态平衡状态下极板电容为：

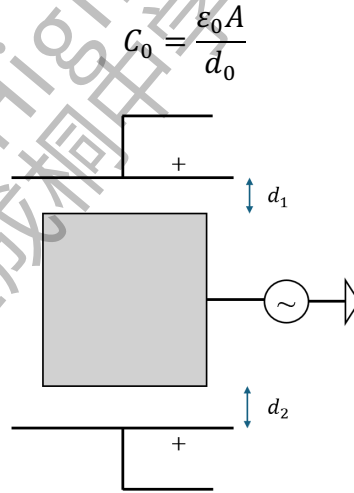


图 4-8 差分电容位移传感器原理示意图

设质量块相对平衡位置发生微小位移 Δd ，且两固定极板间距保持不变，则上下气隙为：

$$d_1 = d_0 - \Delta d, d_2 = d_0 + \Delta d, \quad \frac{\Delta d}{d_0} \ll 1$$

对应上下极板的电容：

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_2} \quad (4.16)$$

对小位移条件做泰勒一阶近似展开：

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_0 - \Delta d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d_0} \frac{1}{1 - \frac{\Delta d}{d_0}} \approx C_0 \left(1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right)$$

$$C_2 \approx C_0 \left(1 - \frac{\Delta d}{d_0}\right)$$

两电容差值与位移的关系为：

$$C_2 - C_1 = -2C_0 \frac{\Delta d}{d_0} \quad (4.17)$$

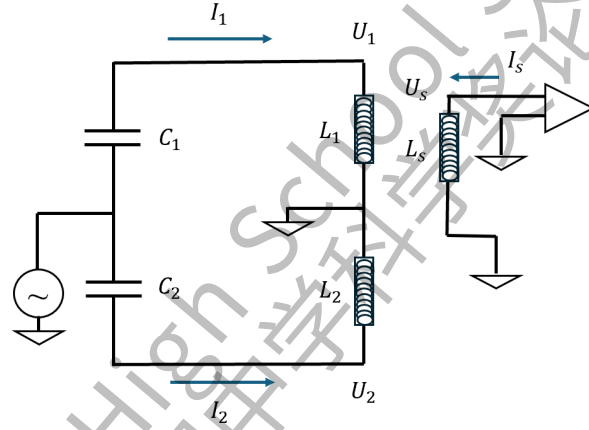


图 4-9 变压器耦合式差分电容读出电路

依据电容阻抗关系，两个极板支路的交流电流为：

$$I_1 = (U_m - U_1)j\omega C_1 \quad (4.18)$$

$$I_2 = (U_m - U_2)j\omega C_2 \quad (4.19)$$

变压器绕组电压匝数关系：

$$\frac{U_1}{n_1} = \frac{U_s}{n_s} = -\frac{U_2}{n_2} \quad (4.20)$$

代入匝数约束得到：

$$I_1 = (U_m - U_s)j\omega C_1$$

$$I_2 = (U_m + U_s)j\omega C_2$$

次级回路电压方程：

$$U_s = j\omega L_s I_s + j\omega M_1 I_1 - j\omega M_2 I_2 \quad (4.21)$$

互感系数定义：

$$M_1 = K\sqrt{L_1 L_s}, M_2 = K\sqrt{L_2 L_s}$$

为得到便于分析的理想表达式，先取耦合系数 $K = 1$ 且 $L_1 = L_2 = L_s = L$ 。实际变压器存在 $K < 1$ 、绕组电阻和寄生电容，需在后续电路模型与标定中加入。

$$U_s = j\omega L(I_s + I_1 - I_2) \quad (4.22)$$

次级回路空载条件 $I_s = 0$ ，联立得到读出输出电压表达式：

$$U_s = \frac{-\omega^2 L(C_1 - C_2)U_m}{1 - \omega^2 L(C_1 + C_2)} \quad (4.23)$$

为便于代数归一化，取驱动条件 $\omega^2 L C_0 = 1$ ，并结合电容和差关系。该条件不是式（4.23）分母的谐振条件；理想分母为零时模型将发散，实际设计必须计入损耗并避开不稳定的高增益点。

$$C_1 + C_2 = 2C_0, C_1 - C_2 = 2C_0 \frac{\Delta d}{d_0}$$

最终得到读出电压与位移的线性关系：

$$U_s = 2U_m \frac{\Delta d}{d_0} \quad (4.24)$$

4.5 电路仿真与 PCB 版图实现

本文使用 LTspice 完成器件与电路仿真，并在嘉立创 EDA 中完成原理图和 PCB 布局布线。实物样板已完成，可用于版图与装配核对；但尚未形成包含传感器、控制器、功率级和执行器的闭环整机测试，因此本节不对系统噪声、带宽或长期稳定性作实验性结论。

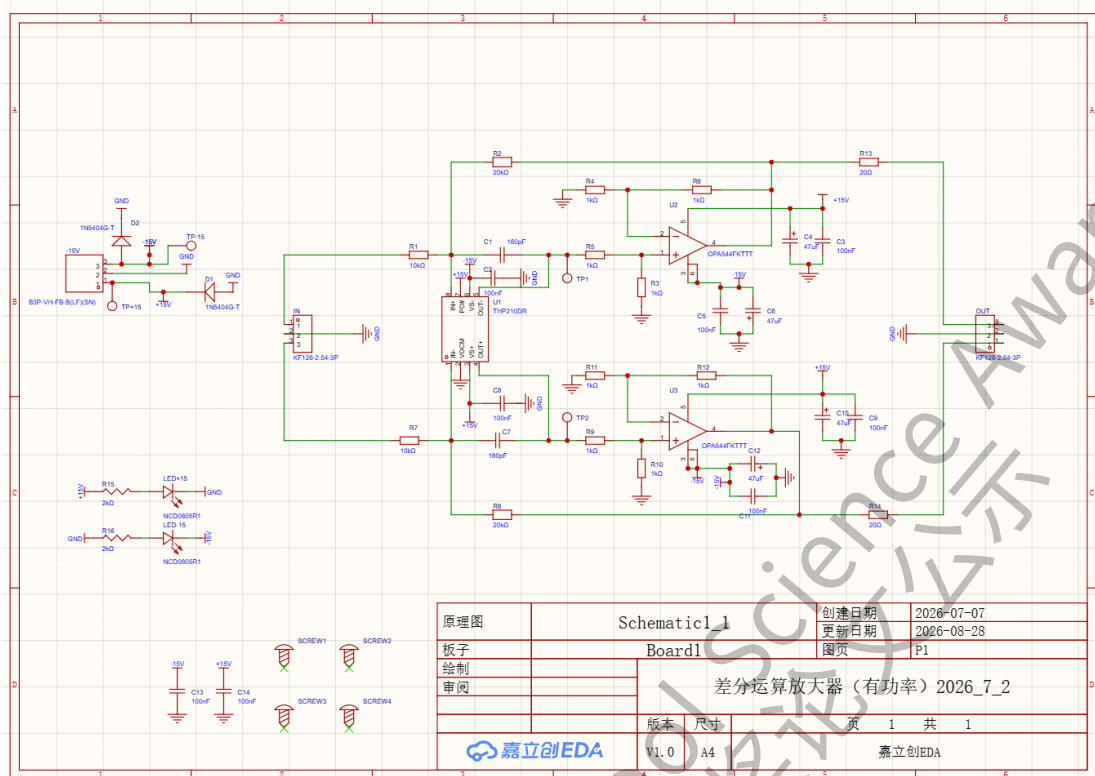


图 4-10 差分功率放大电路原理图（嘉立创 EDA）

完整电路原理图如下图所示。可以观察到，最终工程实现并未直接采用前文理论分析的两级运放串联拓扑，而是改用差分运算放大器架构，将输入信号拆分为两条差分信号通路。差分电路天然具备共模抑制能力：外界电磁干扰作为共模噪声同步耦合至两条信号链路，差分放大器仅放大两路信号差值，对共模噪声实现显著抑制，降低外部干扰对微弱位移传感信号的影响。

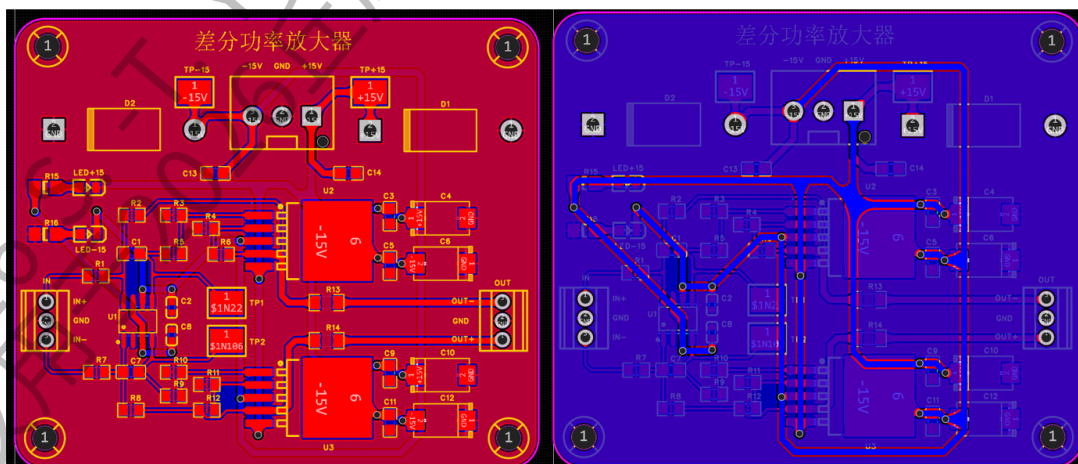


图 4-11 差分功率放大电路 PCB 版图

PCB 布局布线结果如下图，分为顶层与底层视图。由于功率电路正、负电源走线复杂，本设计采用过孔将全部负电源网络的连线引导至电路板底层布线，从而完成整套印刷电路板的布局设计。

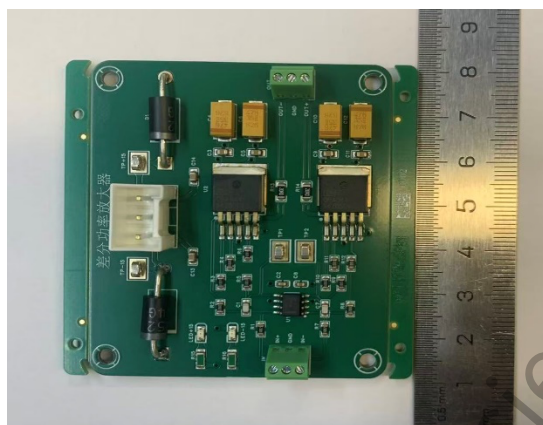


图 4-12 功率放大器电路板实物

4.6 整体仪器

在完成电磁系统与电路方案设计的基础上，未来我将开展整机结构设计。主要思路将采用严格同轴对称布局，底部基座集成下永磁体与下电容检测极板，中央悬浮质量块集成上永磁体、电容动极板与驱动线圈骨架，顶部端盖集成上电容检测极板与轴向软限位结构。相关工作还在开展过程中。

第五章 总结与展望

本文研究了磁悬浮垂直向地震仪的理论基础与工程方案。采用毕奥-萨伐尔积分和互感能量法推导同轴电流环的轴向作用力,并将每块有限厚度圆柱磁体沿轴向离散为若干等半径薄环,通过双重求和计算磁力。数值结果显示,磁力曲线峰值右侧存在轴向负刚度区;按恢复刚度定义,理想轴对称模型同时给出正的径向刚度。

基于分层模型,使用 **Mathematica** 计算磁力、刚度和尺寸参数,并通过 N 收敛曲线选择分层数。磁力实验与理论曲线在形状和相对变化趋势上相符;由于距离轴使用统一零点偏移量对齐,现有实验尚不能独立验证绝对气隙预测精度。

工程部分完成差分电容位移读出、数字 **PID**、功率放大器、驱动线圈和整机结构的方案设计。理想力平衡模型表明,反馈电流可用于反演外部加速度,**PID** 参数可改变等效恢复刚度、阻尼和稳态偏差;但传感器噪声、量化误差、功率级噪声、执行器标定误差与数字时延仍会进入闭环输出。

电路方面分析了嵌套反馈功率级、反馈因子、热噪声与稳定性之间的关系,并完成 **LTspice** 仿真、嘉立创 **EDA** 原理图与 **PCB** 设计以及实物样板。最终工程板采用差分通路,与前文的理想嵌套模型并不完全相同;其噪声谱、负载稳定性和输出电流精度仍需在实物线圈负载下测量。

本文的主要结论限于理论模型、数值计算、静态磁力实验和工程设计。所提出的永磁负刚度与主动反馈组合具有降低静态线圈功耗和实现紧凑结构的潜力,但尚不能据此宣称达到特定低频下限或测量精度。下一阶段应完成独立位移标定、力常数标定、闭环频率响应、加速度噪声谱、温度系数和长期漂移测试,并给出不确定度预算。

后续工作将首先完成单自由度闭环样机与上述性能标定,再评估多自由度扩展和主动隔振应用。只有在样机数据达到目标后,才适合讨论地震观测或精密台站隔振中的工程应用。

参考文献

- [1] K. S. Thorne, Random Processes, Version 1206.1.K, California Institute of Technology, 2012.
- [2] H. Miao, K. Arai, and R. X. Adhikari, Advanced Vibration Isolation Scheme Based Upon Magnetic Levitation, LIGO-T1000609-v1, LIGO Laboratory, 2010.
- [3] Y. Xia, D. Martynov, H. Yan, and H. Miao, “Compact four-degree-of-freedom seismometer with capacitive readout,” *Physical Review Applied*, vol. 23, no. 4, 044030, 2025, doi: 10.1103/PhysRevApplied.23.044030.
- [4] F. Matichard et al., “Advanced LIGO two-stage twelve-axis vibration isolation and positioning platform. Part 1: Design and production overview,” *Precision Engineering*, vol. 40, pp. 273–286, 2015, doi: 10.1016/j.precisioneng.2014.09.010.
- [5] L. J. B. LaCoste, “A new type long period vertical seismograph,” *Physics*, vol. 5, pp. 178–180, 1934.
- [6] L. J. B. LaCoste, “A simplification in the conditions for the zero-length-spring seismograph,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 25, no. 2, pp. 176–179, 1935.
- [7] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York: Wiley, 1999.
- [8] S. I. Babic and C. Akyel, “Magnetic force calculation between thin coaxial circular coils in air,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 4, pp. 445–452, 2008, doi: 10.1109/TMAG.2007.915292.
- [9] Electron Energy Corporation, SmCo Magnets and Applications, technical note, 2018. [Online]. Available: https://www.electronenergy.com/hubfs/Electronenergy_December2018/Docs/SmCo-Magnets-and-Applications.pdf (accessed 2026-09-13).
- [10] K. J. Åström and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008.
- [11] Analog Devices, AD8671/AD8672/AD8674: Precision, Very Low Noise, Low Input Bias Current Operational Amplifiers, Rev. F, datasheet, 2015.
- [12] Texas Instruments, OPA544 High-Voltage, High-Current Operational Amplifier, SBOS038, datasheet.
- [13] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors,” *Physical Review*, vol. 32, pp. 110–113, 1928, doi: 10.1103/PhysRev.32.110.

致 谢

我从小对地震这种破坏性的自然现象感兴趣，一直在学习如何准确地测量和预测地震。在进入十年级以后，我学习到不同地震仪的概念：既有结构最简单的机械式地震仪，也有基于被动位移测量的类型。但我了解到的大部分地震仪，都是通过被动测量判断地震幅值，且多数拥有固定误差，易受温度、湿度等环境因素影响。

一次偶然的机会，我接触到美国引力波观测台 LIGO 的相关文献，其中关于机械弹簧被动隔振方案，以及用磁悬浮替代弹簧的构想，启发我开始实验探索磁悬浮式地震仪的可行性。在与清华大学缪海兴老师探讨后，我得到了加入他的课题组的宝贵学习机会，由此开展了磁悬浮地震仪理论与设计研究，促成了本篇论文的完成。

首先，我由衷地感谢指导教师缪海兴老师。在本次研究中，缪老师为我讲授了系统专业的理论知识，提供了暑期实验场地与器材，指导我使用 Mathematica、嘉立创 EDA 等工具，并在论文撰写方面给予了诸多宝贵建议。本次研究指导均为缪老师无偿提供的学术指导，不存在任何有偿辅导、付费合作等情况。同时，我要感谢清华大学物理系李奇潮学长，他耐心解答了我的诸多问题；同时也感谢同实验室的同学，在实验仪器操作上给予我的指导与帮助。在这次研究中，其他人的贡献如下：缪老师负责研究方向把控、理论框架指导与论文指导；李奇潮学长协助我完成了部分实验操作与软件调试。

学术上的指引固然重要，情感上的支持同样珍贵。我由衷感谢家人在我陷入思维瓶颈时给予的支持，他们的期许是我不断前行的动力之一。

最后，我向丘成桐科学奖委员会致以最诚挚的谢意。感谢组委会提供的宝贵机会，让我得以近距离接触学术研究，体会到科研工作的艰辛与充实。这段经历不仅提升了我的学科能力，也磨砺了我的心性与意志。

本研究中最具挑战性的环节，是第三章同轴永磁体轴向相互作用力的完整解析推导。这个过程需要电磁学、微积分、矢量计算、椭圆积分等不同方面的知识，同时由于变量多，严谨性与细致度要求极高，对我造成了不小挑战。通过这次科研训练，我熟练掌握了毕奥-萨伐尔定律的计算、洛伦兹力公式、矢量叉乘的行列式展开与分量拆解，依托轴对称性论证径向分量积分、构造辅助积分实现降阶，

将积分化为标准第一类、第二类完全椭圆积分形式，最后还要通过磁场能量法与虚位移原理完成独立推导交叉验证，确保两条路径结果严格自洽。这一科研训练极大提升了我的研究能力。

作者介绍：

作者简介：Kevin Yifan Jiang (江一凡)，男，清华附中国际部十一年级学生。

个人贡献：在 Theoretical Analysis and Design of a Magnetically Levitated Vertical Seismometer 课题研究中，本人主导物理过程的推导、研究方案落实、技术实现与论文撰写。具体包括：编写 Mathematica 程序并完成磁力数值计算；通过 3D 打印制备实验构件并参与磁力测量；学习 PID 反馈控制并完成不同功率放大器方案的仿真；分析永磁体温度系数带来的误差；完成实验电路板的设计与绘制；完成论文撰写与排版。

奖项：

40th High School Physics Olympiad Beijing, Third Prize, 2023

41st High School Physics Olympiad Competition, Second Prize, 2024

Beijing High School Physics Test (Mechanics), Second Prize, 2024

21st Pan Pearl River Delta and Chinese Elite Schools Physics Olympiad (Mechanics), First Prize, 2025