

参赛学生姓名： 王庆涵

中学： 北京师范大学附属实验中学

省份： 北京市

国家/地区： 中国

指导老师姓名： 康文婷

指导老师单位： 北京师范大学附属实验中学

论文题目： 冷热交响：单端开口水平管热声自激振荡的建模与实验分析

冷热交响：单端开口水平管热声自激振荡的建模与实验分析

王庆涵

Cold-Hot Symphony: Modeling and Experimental Analysis
on Thermoacoustic Self-Excited Oscillation in a Horizontal Open-Closed Tube

摘要：经典 Rijke 管多采用两端开口的竖直管结构，管内具有自然对流或外加气流。不同于此，本文研究开口-封闭水平管内无主流条件下的热声自激振荡问题，开展理论建模与控制变量实验研究。该系统以多孔钢丝球作为热声核心，靠近封闭端加热、开口端冷却以建立轴向温度梯度。首先基于一维声学方程和开口-封闭边界解析求解波动方程得到四分之一波模态，再由 Rayleigh 能量判据和一阶热松弛模型把温度梯度、位置耦合、有限长度与能量损失统一到净增长率这个单一系数中。随后采用 Stuart-Landau 型振幅方程描述有限幅值饱和，并用集中参数法解释起振延迟和撤热余振。基于理论分析，搭建了实验平台，通过控制钢丝球位置、管长、管径开展了多组对比实验。结果表明钢丝球位置主要改变热声净增益而几乎不影响本征频率，管长是主导振荡主频的关键几何参数，局部温度梯度与有限热响应决定热声反馈的相位和强度，与管径尺寸有关的能量损失决定净增长率。此外，实验还观测到明显的时间尺度分离现象，起振延迟、撤热余振现象受热惯性控制，稳定声幅则基本符合非线性饱和规律。本文将复杂的热声自激过程归纳为“模态选择-热声净增益-非线性饱和-慢热演化”的完整物理链条，可为同类开口-封闭结构热声系统分析提供参考。

关键词：热声自激振荡；开口-封闭管；Rayleigh 判据；热响应；声学模态

目 录

1 引言	1
2 理论分析.....	3
2.1 物理模型与基本假设.....	3
2.2 声学模态与传播时间.....	4
2.3 热声反馈与线性稳定性.....	5
2.4 非线性饱和与慢热演化.....	7
3 实验装置与数据处理方法.....	9
3.1 实验装置与坐标定义.....	9
3.2 实验基本流程	10
3.3 控制变量实验设计.....	11
3.4 声学信号处理	12
4 实验结果与分析	15
4.1 钢丝球位置对热声振荡的影响	15
4.2 管长对振荡频率的影响.....	19
4.3 管径对振荡状态的影响.....	21
4.4 本章小结	21
5 总结与展望.....	23
参考文献	24
附录 A 主要理论推导	25
A.1 一维小扰动方程与开口-封闭模态	25
A.2 非均匀温度场下的传播时间	25
A.3 一阶快速热响应的频域形式	25
A.4 有限长度与几何修正的补充推导.....	26
A.5 慢热过程的两阶段解析近似	27
附录 B 核心 Python 代码程序.....	28
致谢	33

1 引言

热声振荡实验是一类常见的科普场景，通过持续不断的加热，即可令某一固定结构的物体发出持续不断的声音。其原理在于，当气体在具有温度梯度的多孔介质附近作周期性往复运动时，气体与固体之间会发生交替的吸热和放热过程。当这种非定常换热与声压波动之间具有合适的相位关系时，热量便可持续转化为有序声能，使初始微小扰动逐渐增长，并最终形成稳定的自激振荡。其本质是热能与声能之间的相互转化，不需要外部周期性驱动，其振荡由内部反馈自行维持，因此属于典型的自激系统^[1-2]。

在热声振荡系统中，最常见的是 Rijke 管^[3]，其结构多采用两端开口的竖直管，管内具有自然对流或外加气流。管子下半段放置热源，当管道受热后就可以持续不断地发出嗡嗡响声。Rijke 管是现代行波型热声发动机的雏形，基于 Rijke 管这种上下开口的结构，已经很多工作探究其热声转化机理并进行数学建模，进而设计有效方法抑制热声不稳定性^[5,7,11,14]。

两端开口的 Rijke 管中存在比较明显的自然对流现象，对其分析也已经比较全面了。在阅读文献的过程中，一个自然的想法产生了：如果管道不是开放的，而是封闭或者半封闭结构，或者管道不是竖直摆放，而是像一个“横笛”那样水平摆放，它是否仍然可以产生类似的声学现象呢？如果能，这一系统内部热-声转化的规律又是什么？

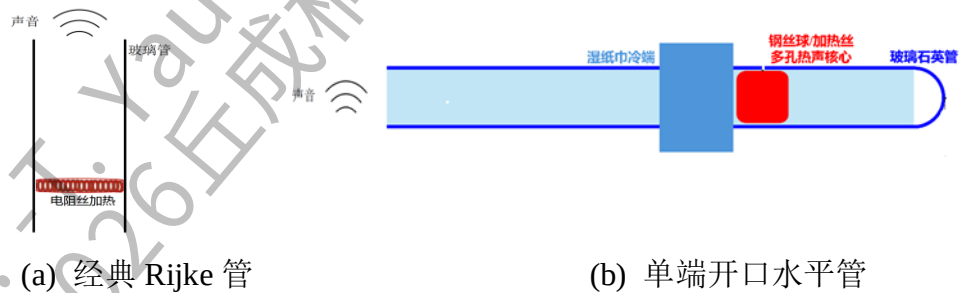


图 1-1 经典 Rijke 管与本文研究的单端开口水平管区别示意图

在上述疑问的驱动下，本文将传统 Rijke 管进行了修正，使用水平放置、左端开口而右端封闭的玻璃管作为研究对象，令管内没有持续贯通的平均流动，如图 1-1 所示。管内放置多孔钢丝球，同时承担换热核心与阻力元件的作用，其较大的气固接触面积有利于周期性换热和蓄热，而孔隙流动又会引入附加耗散。在

钢丝球靠开口端一侧设置局部冷却、靠封闭端一侧加热，在热声核心附近建立轴向温度梯度，由此形成与经典 Rijke 管不同的开口-封闭水平热声系统^[3-5]。

围绕上述问题，本文采用理论与实验相结合的方法进行了研究。在第二章中开展了理论建模研究，从经典的波动方程解析解出发，逐渐增加考虑非理想因素，最终构建了包含有限振幅、几何尺寸等因素影响的数学模型。在第三章中，介绍了本研究的实验装置，以及实验数据的处理方法。在第四章中，则结合实验数据，定量分析了钢丝球位置、管长和管径三个几何参数对热声自激振荡特性的具体影响。最后一章总结了上述工作，探讨了整个现象中涉及到的各个物理机制，并给出下一步研究的展望，形成完整的研究闭环。

2 理论分析

本章按“声学分析-线性稳定性-非线性与慢热过程”三层结构建立理论框架。首先由开口-封闭边界条件得到纵向四分之一波模态，并讨论非均匀温度场对传播时间和本征频率的修正。其次由 Rayleigh 能量收支^[1-2]和一阶热响应得到线性净增长率，并分析位置、管长和管径如何改变其中的驱动、相位和损失；最后用 Stuart-Landau 方程^[1-2]和慢热模型解释稳定声幅、起振延迟和撤热余振。详细声学推导、有限长度积分、慢热解析式以及单模态纯时滞/Hopf 边界等内容列于附录 A。

2.1 物理模型与基本假设

2.1.1 几何模型与坐标

实验管道水平放置，左端与环境连通，右端封闭，如图 2-1 所示。实验中钢丝球靠开口端一侧冷却、靠封闭端一侧加热，以在热声核心附近建立轴向平均温度梯度。取开口端为 $x=0$ ，封闭端为 $x=L$ ；玻璃管内直径为 D 、半径为 r ，钢丝球中心位置为 x_h 、轴向有效长度为 l_h 。

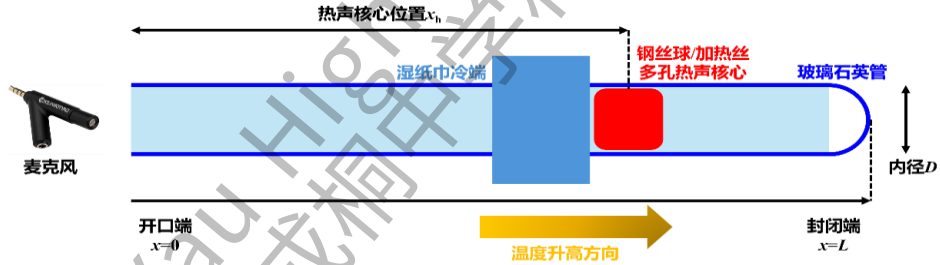


图 2-1 单端开口水平管热声实验装置示意图

考虑开口端声辐射，采用 $\Delta e \approx 0.61r$ 的端部修正^[11]，并将坐标原点向 x 轴反向平移 Δe ，重新定义有效坐标 ξ 、热源坐标 ξ_h 和有效声学长度 L_{eff} ：

$$\xi = x + \Delta e; \xi_h = x_h + \Delta e; L_{\text{eff}} = L + \Delta e; \Delta e \approx 0.61r = 0.305D \quad (2-1)$$

本文采用低阶一维模型：管径相对声波波长较小，声学扰动采用线性平面波近似；平均温度场建立和衰减为秒量级，而声学周期为毫秒量级，因此在单个声学周期内将其视为准定常背景；钢丝球内部孔隙流动与三维传热不进行逐尺度求解，而以快速热响应、有限长度因子和等效损失率表征。模型用于解释频率、起振和相对声幅的总体规律，而非复现钢丝球内部完整流动传热细节^[10-13]。

2.2 声学模态与传播时间

2.2.1 开口-封闭管纵向模态

将管内声场近似为沿轴向传播的一维小扰动声场，在一维小扰动近似下，开口端近似为声压节点，封闭端为质点速度节点。稳定起振后，声压扰动和轴向质点速度扰动分别为 $p'(x,t)$ 与 $u'(x,t)$ ，在有效坐标 ξ 下，相应的声学边界条件为^[1,4]：

$$p'(\xi = 0, t) = 0, u'(\xi = L_{\text{eff}}, t) = 0 \quad (2-2)$$

由上述边界条件求解经典波动方程，具体过程见附录 A.1，可得允许的纵向波数以及归一化声压、质点速度模态函数：

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L_{\text{eff}}}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2-3)$$

$$\varphi_{p,n}(\xi) = \sin(k_n \xi), \varphi_{u,n}(\xi) = \cos(k_n \xi) \quad (2-4)$$

相应的本征角频率和本征频率为：

$$\omega_n = ck_n, f_n = \frac{(2n-1)c}{4L_{\text{eff}}} \quad (2-5)$$

式(2-5)表明，开口-封闭管只允许奇数阶四分之一波纵向模态，其第一纵向模态频率为 $f_1=c/(4L_{\text{eff}})$ ，第二纵向模态 $f_2=3f_1$ 。因此，在 L_{eff} 和整体温度场基本不变时，其声学模态的本征频率基本固定，移动钢丝球只能改变模态的耦合。

图 2-2 直观给出前两阶的纵向模态，即开口端为压力节点/速度波腹，封闭端为压力波腹/速度节点。这说明局部热声驱动不能只由压力或速度单独决定，而取决于热声核心同时处在何种压力和速度组合位置。

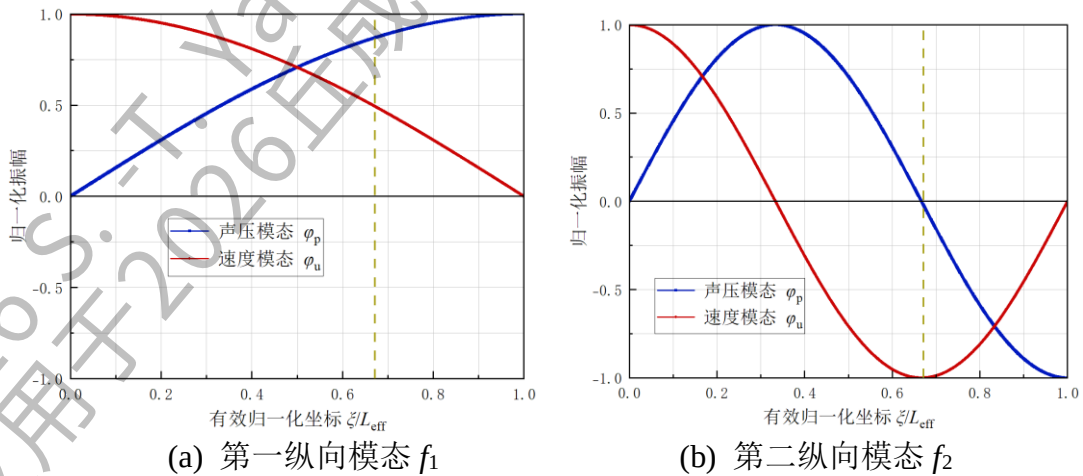


图 2-2 水平闭-开管的边界条件及前两阶纵向模态

2.2.2 非均匀温度场与等效声速

局部加热使声速 c 沿轴向分布不均^[12-13], 用声波沿有效长度的单程传播时间定义等效声速:

$$c_{eff}(t) = \frac{L_{eff}}{\tau_a(t)}, \tau_a(t) = \int_0^{L_{eff}} \frac{d\xi}{c(\xi, t)} \quad (2-6)$$

其中, τ_a 表示声波沿有效管长传播一次所需要的等效时间。第 n 个允许模态可近似写为 $f_n = (2n-1)c_{eff}/(4L_{eff})$ 。 c_{eff} 不是某一局部温度对应的声速, 而是由整个声传播路径上的温度分布共同决定的传播时间等效量。完整的局部声速和相位积分推导见附录 A.2, 等效声速 c_{eff} 将替代 c 用于主频的计算。

2.3 热声反馈与线性稳定性

2.3.1 Rayleigh 判据与快速热响应

Rayleigh 判据是热声效应的核心判据, 这一理论表明只有当热源接受热量的时刻, 恰好对应当地气体被压缩的时刻, 声波才会被放大。因此对第 n 模态, 周期平均热输入必须与声压具有正相关, 才能向声场提供净能量。使用 R_n 表示热源在第 n 阶声学模态上每个振动周期平均向声波注入的净能量, 并折算为振幅增长率^[6]。另外把壁面热黏性、开口辐射和多孔阻力等合并为等效衰减率 D_n , 则:

$$R_n = \frac{\gamma - 1}{2E_n \bar{\rho} c^2 T_n} \int_t^{t+T_n} p_n'(\xi_h, s) Q'(s) ds, \quad \Lambda_n = R_n - D_n \quad (2-7)$$

式(2-7)中的 Λ_n 是线性物理净增长率, $\Lambda_n > 0$ 表示小扰动增长, $\Lambda_n = 0$ 对应近似起振边界, $\Lambda_n < 0$ 表示衰减。

式(2-7)中的 Q' 表示热源向气体单位体积输入的瞬时热量功率波动值, 这是一个受到气流波动影响的瞬时换热量。考虑到钢丝球内的周期性气固换热并非瞬时完成, 用一阶热松弛模型^[11-14]描述声学周期尺度上的快速响应:

$$\tau_T \frac{dQ'}{dt} + Q' = K_T G_T u'(x_h, t) \quad (2-8)$$

其中, τ_T 为声学周期尺度上的等效热响应时间, K_T 为综合换热系数, $G_T = \partial \bar{T} / \partial x$ 表示钢丝球附近的有效轴向温度梯度, K_T 在本文低阶模型中综合反映钢丝球换热面积、孔隙结构以及局部流动状态等因素的影响。

将声波视为简谐扰动, 真正能够进入 Rayleigh 相关项的有效正交分量 $F_{T,n}$ 可写为:

$$F_{T,n} = \frac{\omega_n \tau_T}{1 + (\omega_n \tau_T)^2} \quad (2-9)$$

$F_{T,n}$ 在 $\omega_n \tau_T \approx 1$ 附近达到最大, 反映热惯性造成的幅值衰减和相位滞后的共同作用, 热惯性太小(响应太快)或太大(响应太慢)都不利于热声转换, 只有热惯性时间刚好与声波周期可比拟时, 能量转换效率最高。完整频域关系见附录 A.3。

2.3.2 钢丝球位置与自身长度

钢丝球位置变化不改变两端声学边界, 却会改变其所处位置的声压和质点速度幅值。点热源近似下^[10-12], 第 n 模态的空间耦合因子 S_n 定义为:

$$S_n(\xi_h) = \varphi_{p,n}(\xi_h) \varphi_{u,n}(\xi_h) = \frac{1}{2} \sin(2k_n \xi_h) \quad (2-10)$$

式(2-10)表明对于第一模态, 点热源放在 $L_{\text{eff}}/2$ 处, 压力和速度的乘积最大, 向声波注入能量的潜力最大。但还需要考虑实际钢丝球具有有限轴向长度 l_h , 在这段长度内, 不同位置的声压和速度相位不一样。假设其内部温度梯度和单位长度换热能力近似均匀, 空间平均可用有限长度因子 $F_{l,n}$ 表示:

$$F_{l,n} = \frac{\sin(k_n l_h)}{k_n l_h} \quad (2-11)$$

综合 Rayleigh 供能、快速热响应、位置耦合和自身有限长度后, 第 n 模态的线性净增长率 A_n 可写为:

$$A_n = C_n G_T S_n(\xi_h) F_{l,n} F_{T,n} - D_n \quad (2-12)$$

式中, $C_n > 0$ 为模态归一化和局部换热强度等有关综合系数, 包含气体物性、换热面积等固定参数, D_n 包含全部线性损失, G_T 表示温度梯度或者加热强度。

对于同一管长、管径和相近加热条件的位置扫描, 为了便于比较不同位置的相对稳定性, 进一步定义第一模态的无量纲稳定性指标:

$$J_{\text{pos}} = \varphi_p \varphi_u - b_1 \varphi_u^2 - b_2 \quad (2-13)$$

其中第一项保留压力-速度共同决定的空间热声耦合, 对应瑞利准则的正收益。 $b_1 \varphi_u^2$ 近似表示随往复速度增强而增加的多孔损失, 这是与速度关联的关键惩罚项, 其实质为空气在钢丝球处的阻力, 因此与速度的平方成正比。 b_2 表示近似不变的背景损失, b_1 和 b_2 均可以用实验数据标定。

考虑 $L=480$ mm、 $l_h=10$ mm 实验场景的第一模态, $k_1 l_h \approx 0.032$ 、 $F_{l,1} \approx 0.9998$, 纯声学空间平均修正不足 0.1%, 因此可用几何中心 x_h 代表其位置, 公式 (2-10) 的点热源近似已经可以提供足够精度。

2.3.3 管长与管径的影响

管长首先改变声学传播尺度。对第一纵向模态：

$$f_1(L) = \frac{c_{eff}}{4(L + 0.61r)} \quad (2-14)$$

因此，在 c_{eff} 变化不大时，主频近似随 $1/L_{eff}$ 降低。这也符合物理直觉，管子越长，空气柱越重，振荡得越慢，频率自然越低。后续管长实验将保持 x_b/L 不变，以尽量减小位置效应的叠加。局部受热造成的 c_{eff} 变化作为传播时间修正，详细展开见附录 A.4。

管径对本征频率的直接作用主要来自 $L_{eff}=L+0.305D$ 的端部修正，在本文研究的参数范围内，该几何变化带来的频移很小。这意味着管径基本上不影响频率，但是管径 D 会改变热黏性边界层的相对尺度、钢丝球填充率、旁通间隙和局部换热，从而同时影响损失 D_n 和热声驱动供能项 R_n 。因此管径可以影响能不能起振和振动幅度，关于边界层尺度和端部修正灵敏度的详细推导见附录 A.4。

2.4 非线性饱和与慢热演化

2.4.1 非线性饱和

当 A_1 由负转正后，线性模型只能判断扰动会增长，但声波振幅不会无限增长，线性模型不能给出最终的稳定幅值。在 Hopf 型起振附近，以三阶饱和项构造最简 Stuart-Landau 慢变包络^[9-10]：

$$\frac{dA}{dt} = \Lambda A - \kappa A^3 \quad (2-15)$$

其中， A 为声振荡的慢变包络幅值， $\kappa > 0$ 为等效非线性饱和系数。对于本文采用的超临界饱和近似， $\Lambda \leq 0$ 时稳定幅值 $A_\infty = 0$ ； $\Lambda > 0$ 时 $A_\infty = \sqrt{\Lambda/\kappa}$ 。即当系统位于线性稳定区时，微小扰动最终衰减；靠近起振边界时 A_∞ 随 $\sqrt{\Lambda}$ 上升，而进一步进入正增长区后，并在非线性耗散与线性增长达到平衡时形成有限的稳定幅值。

2.4.2 平均温差的慢热演化

上文 2.3.1 式(2-8)中， τ_T 用于描述声学周期内的快速换热，而实验中的平均温差建立和衰减为秒量级^[8,14]。为解释起振之前的延迟时间 t_{on} 和撤热后的余振维持时间 t_{post} ，采用一阶集总参数模型描述有效温差的建立与衰减，加热阶段用等效热时间常数 τ_h 描述有效温差向准稳态值建立，撤热阶段用 τ_c 描述平均温差衰减。

加热阶段用一阶集总参数热惯性方程描述有效温差 ΔT 的建立：

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{\Delta T_{\infty}(P) - \Delta T}{\tau_h} \quad (2-16)$$

其中， τ_h 为加热阶段的等效热时间常数， $\Delta T_{\infty}(P)$ 表示在给定加热条件 P 下可能达到的准稳态有效温差。当 ΔT 达到临界值 ΔT_{cr} 后， $\Lambda(t)$ 由负转正，但实验起振还需要声幅从背景水平增长到检测阈值。因此， t_{on} 是热建立时间与声学增长时间之和，对应的两阶段解析近似见附录 A.5。

撤去热源后，钢丝球和邻近结构的储热不会瞬间消失，该冷却过程近似为单时间常数控制的牛顿冷却，则有：

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{\Delta T}{\tau_c}, \Delta T(t) = \Delta T_0 \exp\left[-\frac{t - t_0}{\tau_c}\right] \quad (2-17)$$

若撤热瞬间 ΔT_0 仍高于 ΔT_{cr} ，残余热量就可能继续维持热声反馈；随后 $\Lambda < 0$ ，声幅才最终衰减到检测阈值。因此 t_{post} 同样是慢热残余驱动与声学衰减的组合量，临界时刻 t_{cr} 及 t_{on} 、 t_{post} 的解析近似见附录 A.5。

3 实验装置与数据处理方法

为定量研究钢丝球位置、管长和管径对单端开口水平管热声自激振荡特性的影响，搭建了相应的实验装置。本章介绍实验系统的组成，并说明实验操作步骤、控制变量设置以及声音信号的采集和处理方法，为后续实验结果的比较提供统一的测试基础。

3.1 实验装置与坐标定义

实验系统主要由水平玻璃管、多孔热声核心(钢丝球)、局部加热装置、湿纸巾冷端、封闭塞、支撑与定位机构、声音采集设备以及长度和时间测量工具组成。玻璃管左端与环境连通，右端采用耐热塞封闭，并通过支撑装置保持水平放置。图 3-1 所示为实验装置实物图，实验系统主要部件及其作用见表 3-1。

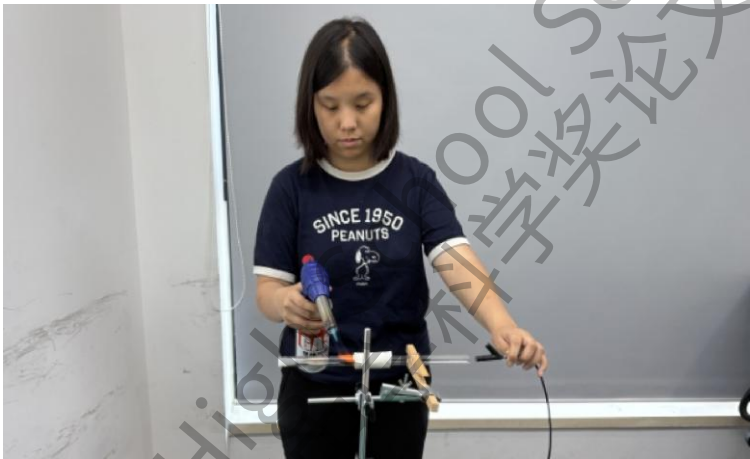


图 3-1 单端开口水平管热声实验装置

表 3-1 实验装置主要部件及其作用

部件	主要作用	实验中主要控制条件
水平玻璃管	构成开口—封闭声学谐振腔	水平状态、管长、内径和两端边界条件
钢丝球/加热丝	提供气固换热、蓄热和多孔流动通道	材料、质量、轴向长度和压实程度
喷枪/局部热源	加热钢丝球靠近封闭端的一侧，形成局部热端	热源强度、距离、方向和加热位置
湿纸巾	在热声核心开口端一侧形成局部冷端	包覆位置、宽度、层数和湿润程度
封闭塞	形成封闭端刚性声学边界	密封性、插入深度和固定方式
麦克风及采集软件	采集声音时域、峰值频率和相对声幅	与管口的距离、朝向、增益、采样和软件设置
标尺与计时设备	测量几何位置并记录起振、撤热和消声时刻	坐标基准、读数方式和计时判据

在玻璃管左侧开口截面设置坐标原点 $x=0$ ，沿管轴指向封闭端的方向定义为正方向，封闭端位置为 $x=L$ 。玻璃管内径记为 D ，内半径为 $r=D/2$ 。热声核心的几何中心位置记为 x_h ，其相对于管长的归一化位置表示为 x_h/L 。

实验采用由镍铬金属丝球——以下简称为钢丝球，构成多孔热声核心，其轴向有效长度约为 10 mm。钢丝球内部具有相互连通的孔隙结构，管内气体在声场作用下可在孔隙中发生往复运动，并与金属丝表面进行周期性换热。与此同时，多孔结构会对往复气流产生一定阻力，因此钢丝球既参与局部热声能量转换，也会引入附加的黏性和多孔耗散。正式比较实验中使用同一钢丝球，保持材料、质量、轴向长度和压实程度基本不变，移动位置时只改变其中心坐标，避免重新揉压导致孔隙率和阻力发生额外变化。

在钢丝球靠近开口端的一侧，通过在玻璃管外壁包覆湿纸巾增强该区域与环境之间的换热。钢丝球靠近封闭端的一侧采用明火焰进行局部加热，由此在热声核心附近建立沿管轴方向的冷热温差。湿纸巾主要是为了辅助建立温度梯度，因此在不同实验工况中，其包覆位置、宽度、层数和润湿程度保持一致，以减小冷端条件变化对实验结果的影响。

声音信号由布置在开口端外侧的麦克风采集。麦克风安装在独立支架上，其轴线朝向管口。在各组对比实验中，麦克风与管口之间的距离、高度和朝向保持一致，录音软件的采样参数、频谱设置和增益条件也保持不变，以保证不同工况下声音信号具有可比性。需要说明的是，由于实验条件的限制，本实验未采用标准声学校准器对麦克风测量进行绝对声压标定，因此软件输出的 dB 数值仅表示当前测量系统下的相对声幅，但是该数据同样可以用于比较不同实验工况之间声幅的变化趋势。

3.2 实验基本流程

每组实验采用统一流程：装置复位并确认初始热状态基本一致后，固定玻璃管、封闭端、钢丝球、冷端和麦克风。先记录背景信号，再开始局部加热并计时，当目标频段出现持续窄带峰且可听声音同步存在时判定起振。进入稳定平台后提取主频和相对声幅，随后撤去热源，继续记录直至窄带振荡消失。全过程保存开始加热、判定起振、撤去热源和声音消失四个时间戳。

为提高不同工况的可比性，除主动改变的几何量外，同组实验尽量保持同一钢丝球的材料、质量、轴向长度和压实状态不变，并固定湿纸巾的包覆位置和润湿程度、热源档位与距离、封闭塞插入状态以及麦克风距离、朝向、增益和采样设置。每一工况结束后均待装置充分冷却，再进行下一工况。

3.3 控制变量实验设计

为分别考察钢丝球位置、管长和管径对热声自激振荡特性的影响，本文设计了三组控制变量实验。各组实验仅主动改变一个主要几何参数，其余可控条件尽量保持一致，以减小热源状态、冷端条件、钢丝球结构及测量设置变化对实验结果的干扰。具体实验方案见表 3-2。

表 3-2 控制变量实验

实验组	主动改变量	固定或尽量保持的条件	主要输出量	研究目的
位置实验	$x_h=100、150、180、200、250、300、320、360、400、420、450、470\text{ mm}$	$L=480\text{ mm}$, $D=20\text{ mm}$; 同一钢丝球、冷端、热源操作和麦克风设置	是否稳定起振、 f_s 、 L_s 、 t_{on} 、 t_{post}	确定有限起振窗口及稳定振幅随位置的变化
管长实验	$L=300、400、500、600\text{ mm}$	$D=20\text{ mm}$; $x_h/L\approx 0.67$; 尽量保持热声核心、加热和采集条件一致	稳定主频及锁频稳定性	验证 $f\propto 1/L_{eff}$ 的四分之一波关系
管径实验	$D=30、40\text{ mm}$	$L=700\text{ mm}$; $x_h/L\approx 0.67$; 热源、冷端和采集条件一致	稳定主频、 t_{on} 、 t_{post}	研究管径—钢丝球几何匹配与热黏性损失的综合影响

3.3.1 钢丝球位置实验

实验中固定管长 $L=480\text{ mm}$ 、内径 $D=20\text{ mm}$ ，依次测试钢丝球中心位置 $x_h=100\text{ mm}\sim 470\text{ mm}$ 的多组工况，通过设置较多的试验工况点覆盖靠近开口端、中部以及靠近封闭端的区域，观察钢丝球空间位置对起振条件和稳定振荡特性的影响。

在位置变化过程中，玻璃管长度、内径及两端声学边界保持不变，因此管道整体本征频率的变化预计较小，而钢丝球所在位置的声压和质点速度幅值会明显变化。根据第 2 章的理论分析，这种变化会进一步影响局部热声耦合和多孔耗散之间的平衡。因此，本组实验主要记录各位置是否能够形成稳定振荡，并比较稳定主频 f_s 、稳定相对声幅 L_s 、起振延迟 t_{on} 以及撤热余振时间 t_{post} 的变化。

3.3.2 管长实验

管长实验固定内径 $D=20\text{ mm}$ ，并将钢丝球归一化位置保持在 $x_h/L\approx 0.67$ ，改变管长 $L=300、400、500$ 和 600 mm 。选择相同归一化位置是为了使热声核心在各管长中的模态相对位置尽可能接近，从而把频率变化主要归因于有效声学长度。对单端开口管，理论频率采用(2-14)式：

$$f_1(L) = \frac{c_{eff}}{4(L + 0.61r)} \quad (2-14)$$

本组实验主要记录不同管长下的稳定主频及锁频状态，用于检验上述四分之一波关系，并进一步分析局部非均匀温度场对实验频率可能产生的修正。

3.3.3 管径实验

实验固定管长 $L=700\text{ mm}$ ，并保持 $x_h/L \approx 0.67$ ，仅比较 $D=30$ 和 40 mm 。由于这两个管径对应的端部修正理论频差远小于当前频率分辨率，本组实验的重点不是拟合简单的 $D-f$ 关系，而是比较主频锁定、 t_{on} 和 t_{post} 的变化，并据此讨论壁面热黏性损失、钢丝球填充/旁通和局部换热条件的综合作用。

按照第 2 章的分析，在当前管长范围内，管径通过开口端修正对理想四分之一波频率产生的直接影响较小。但管径改变后，管道横截面积、气体体积以及热黏性边界层相对于管径的尺度均会发生变化。同时，由于钢丝球并未随管径进行严格几何相似缩放，其横截面填充状态、与管壁之间的旁通间隙以及局部加热和冷却区域的相对尺度也可能随之改变。

因此，本组实验不以建立简单的管径-频率定量关系为目的，而主要比较不同管径下主频、起振延迟 t_{on} 以及撤热余振时间 t_{post} 。结合这些实验现象，再讨论管径变化可能通过热黏性损失、钢丝球几何匹配及局部换热条件影响系统稳定性的途径。

3.4 声学信号处理

实验记录的主要声学数据包括原始声音信号、短时 FFT 频谱、随时间变化的峰值频率 $f_p(t)$ 和相对声幅 $L_{\text{rel}}(t)$ ，同时记录开始加热、起振、撤去热源和声音消失等特征时刻。为避免加热初期的过渡过程、偶然噪声以及撤热后的衰减过程对稳态结果产生影响，数据处理时首先确定稳定振荡区间，再从该区间内提取稳定主频、频率锁定特征和相对声幅等参数。

为说明实际信号的处理过程，图 3-2 给出了 $L=480\text{ mm}$ 、内径 $D=20\text{ mm}$ ，钢丝球位置为 $x_h=320\text{ mm}$ 时工况的一组真实测试数据。其中，图 3-2(a) 为整个记录过程中峰值频率随时间的变化，图 3-2(b) 为该组实验导出的一个短时原始信号窗口的 FFT 频谱。

从图 3-2(a) 可以看出，实验初期峰值频率较为分散，主要受到环境噪声影响；随着热声振荡建立，峰值频率逐渐集中，并在约 $20\text{ s} \sim 80\text{ s}$ 内持续锁定于 187.5 Hz ，表明系统进入稳定振荡状态。图 3-2(b) 中 187.5 Hz 为短时 FFT 的最大峰值，考虑到单个短时频谱可能受非平稳过程和背景噪声影响，本文稳定主频的判定以时间历程中的持续锁频为主要依据，FFT 频谱作为辅助判断。

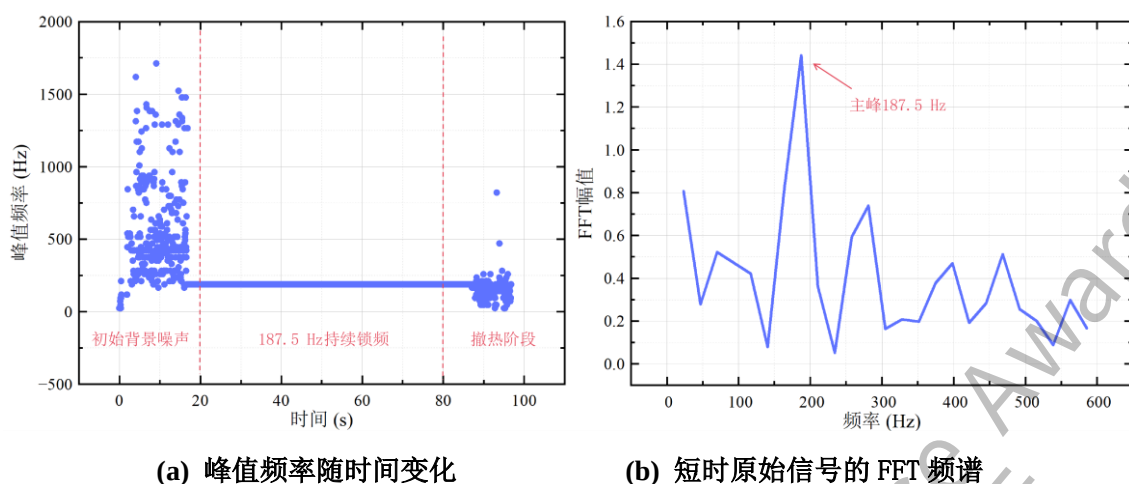


图 3-2 原始信号及其 FFT 频谱

3.4.1 稳定时间区间与起振判定

稳定时间区间选取在明确起振之后、撤去热源之前。该区间内峰值频率应主要分布在一个或少数几个相邻频率箱中，相对声幅不应出现持续的单向增大或减小趋势。

起振判定以目标频段内持续出现的窄带频谱峰为主要依据。当该频谱峰明显区别于加热前的背景波动，并在一定时间内持续存在时，将其判定为热声振荡开始建立；可听声音仅作为辅助判断。实验操作引起的瞬时尖峰、外界敲击以及喷枪产生的短时宽带噪声不作为起振依据。若峰值频率在多个相邻频率箱之间反复切换，则保留其频率竞争特征，不强行归入单一稳定主频。对于此类工况，除给出占优频率外，还同时统计不同频率箱的出现比例及连续锁定情况。

3.4.2 稳定主频与频率锁定指标

本文获得的峰值频率序列具有离散频率间隔 $\Delta f = 23.4375$ Hz，由于真实峰值可能位于相邻离散频率点之间，本文取半个频率箱宽度作为单次频率读数的分辨范围：

$$u_f = \frac{\Delta f}{2} = 11.71875 \text{ Hz} \quad (3-2)$$

稳定主频 f_s 取稳定时间区间内峰值频率序列的众数，即出现次数最多的频率箱。为了避免仅凭众数掩盖频率跳变，还同时计算主锁定比例、最长连续锁频时间和次峰占比。

若稳定区间内共有 N 个频率采样点，其中有 N_1 个采样点位于主频箱，则主锁定比例定义为：

$$R_1 = \frac{N_1}{N} \quad (3-3)$$

次占优频率比例 R_2 按相同方法计算。最长连续锁频时间则取主频箱连续出现的最长采样段决定。

因此，本文对稳定主频的判断并不只依据众数，只有当主频占优且连续锁定时间足够长时，才把该记录定性为稳定主频。

3.4.3 稳定相对声幅与归一化

为了比较不同实验工况下的振荡强弱，在各工况稳定时间区间内选取连续 10 s 的稳定信号计算代表性声幅，取稳定声幅较高且持续状态完整的一段，并以其中 dB 序列的中位值作为稳定相对声幅 L_s 。采用中位值而非最大值，可以降低偶然噪声、操作扰动以及少量异常峰值对结果的影响。

在软件输出的 dB 数值按照声压或幅值比定义的前提下，与理论振幅进行比较时，首先将不同工况之间的 dB 差转换为线性幅值比，再以所有比较工况中的最大稳定声幅进行归一化：

$$A_{rel,i} = 10^{(L_{s,i} - L_{s,max})/20} \quad (3-4)$$

由此得到的 $A_{rel,i}$ 为无量纲相对幅值，其中最大稳定声幅对应 $A_{rel}=1$ ，其余工况按照相对于该工况的线性幅值比缩放，从而用于比较不同实验条件下稳定振幅的相对变化。

3.4.4 起振时间与撤热后持续时间

起振延迟 t_{on} 和撤热余振 t_{post} 分别由式(A-15)和式(A-17)计算，两者均是热过程与声学过程叠加后的综合时间，其中 t_{on} 包含有效温差建立和越过稳定性边界后的振幅增长， t_{post} 包含撤热后残余温差继续供能以及随后进入净衰减区的过程。

4 实验结果与分析

本章对钢丝球位置、玻璃管长度和玻璃管内径三组控制变量实验结果进行分析，并结合第 2 章建立的声学模态、热声驱动-损失关系和慢变热过程模型讨论其物理原因。分析重点包括稳定主频、相对声幅、起振延迟和撤热余振时间等特征量。其中，位置实验主要考察热声核心空间位置对起振条件和稳定声幅的影响，管长实验用于检验单端开口管的四分之一波频率关系，管径实验则着重比较不同尺度下的频率锁定状态和振荡稳定性。用 Python 程序对实验结果进行了分析，部分核心代码请见附录 B。

4.1 钢丝球位置对热声振荡的影响

4.1.1 实验现象与有限起振窗口

位置实验固定玻璃管长度 $L=480\text{ mm}$ 、内径 $D=20\text{ mm}$ ，以左侧开口端为坐标原点，依次改变钢丝球中心位置 x_h 。不同位置下的实验装置状态如图 4-1 所示，实验结果汇总于表 4-1。

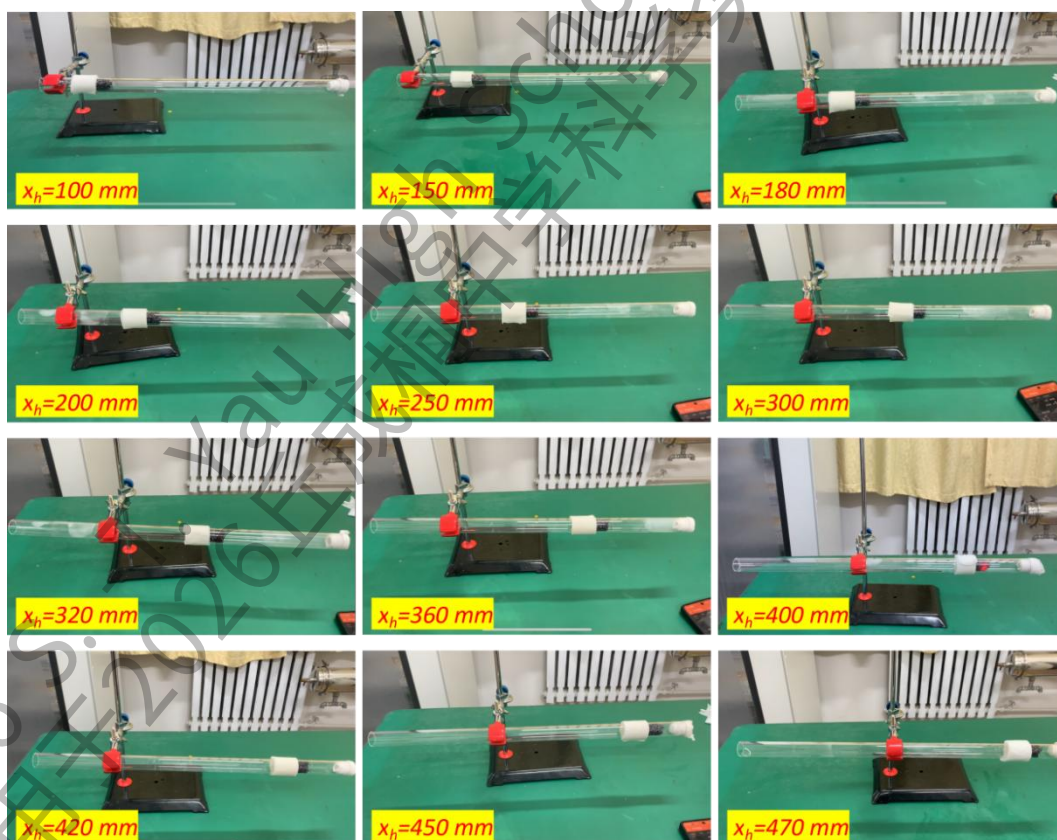


图 4-1 不同钢丝球位置下的实验装置状态

表 4-1 钢丝球不同位置的实验结果

钢丝球位置 x_h/mm	相对位置 x_h/L	是否 稳定起振	起振时间 t_{on}/s	稳定频率 f_s/Hz	相对声幅 L_s/dB	撤热余振 t_{post}/s
100	0.208	否	—	—	—	—
150	0.313	否	—	—	—	—
180	0.375	是	37.72	187.5	-20.29	9.37
200	0.417	是	13.37	187.5	-17.55	46.87
250	0.521	是	12.00	187.5	-15.53	50.00
300	0.625	是	13.80	187.5	-14.11	46.14
320	0.667	是	15.05	187.5	-13.78	54.53
360	0.750	是	11.87	187.5	-13.71	46.56
400	0.833	是	15.92	187.5	-14.04	36.49
420	0.875	是	17.22	187.5	-13.82	27.61
450	0.938	否	—	—	—	—
470	0.979	否	—	—	—	—

由表 4-1 可以看出，在当前实验条件下，稳定热声振荡仅出现在 $x_h=180\sim 420\text{ mm}$ 范围内，对应 $0.375\leq x_h/L\leq 0.875$ 。100、150 mm 以及 450、470 mm 均未形成可持续的稳定窄带振荡，这说明热声核心存在有限的起振窗口。

根据图 2-2 和式(2-10)，开口端附近虽然质点速度大，但声压较小且多孔穿流损失可能增强。封闭端附近虽然声压较大，但质点速度趋近于零，周期性气固换热受限。因此，位置的变化通过改变空间耦合因子 S_1 影响热声驱动，并最终由式(2-12)改变净增长率 A_1 。第 2.3.2 节把这一竞争写成无量纲稳定性指标 $J_{pos}=\varphi_p\varphi_u-b_1\varphi_u^2-b_2$ ，其中 b_1 和 b_2 需要由实验校准。以本组 12 个位置的起振/不起振边界为约束，拟合得到 $b_1=0.4836$ 、 $b_2=0.10905$ ，即：

$$J_{pos} = \varphi_p\varphi_u - 0.4836\varphi_u^2 - 0.10905 \quad (4-1)$$

将式(4-1)用于 12 个测试位置后， $J_{pos}>0$ 与实验起振区间相对应，给出 100 mm、150 mm 不起振、180 mm $\sim$ 420 mm 连续起振、450 mm、470 mm 再次不起振的分类。

4.1.2 钢丝球位置对稳定频率的影响

不同钢丝球位置下的稳定峰值频率如图 4-2 所示。图中误差棒取半个频率箱宽度，即 $\pm 11.71875\text{ Hz}$ ，未形成稳定起振的位置以红色叉号标出。

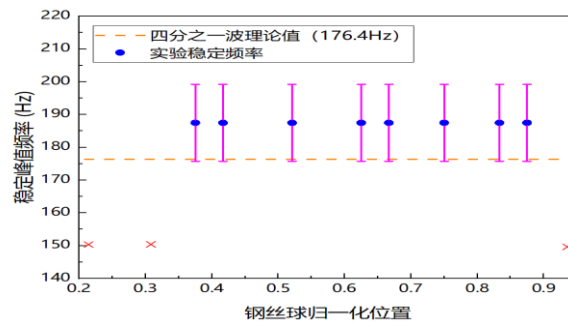


图 4-2 钢丝球位置对稳定峰值频率的影响

如图 4-2 所示，全部稳定起振工况的频率均为 187.5 Hz。对 $L=480\text{ mm}$ 、 $r=10\text{ mm}$ 采用 $\Delta e=0.61r$ 后， $L_{\text{eff}}\approx 486.1\text{ mm}$ 。若以室温声速 343 m/s 计算的第一四分之一波频率约为 176.4 Hz ，与实验值相差约 11.1 Hz ，小于本文采用的半频率箱宽度 $\pm 11.71875\text{ Hz}$ ，这表明有效声速略大于室温声速。

更重要的是， x_h 由 180 mm 移动到 420 mm 时主频没有出现漂移。这与第 2.2 节和第 2.3 节的理论分析一致，位置主要影响净增长率，而 L_{eff} 及边界条件保持不变，因此它显著改变了能否起振和振幅多大，却不在一阶近似下改变第一模态的固有角频率 ω_0 ，即不改变本征频率。

4.1.3 钢丝球位置对稳定声幅的影响

稳定声幅的 dB 值按第 3.4.3 节式(3-4)统一转换为相对于最大声幅工况的归一化线性幅值 A_{rel} ，本节不再重复。位置实验中的最大稳定相对声幅出现在 $x_h=360\text{ mm}$ 处，对应 $L_{\text{s,max}}=-13.71\text{ dB}$ 。

不同位置下归一化稳定声幅的实验结果及半经验模型结果如图 4-3 所示。

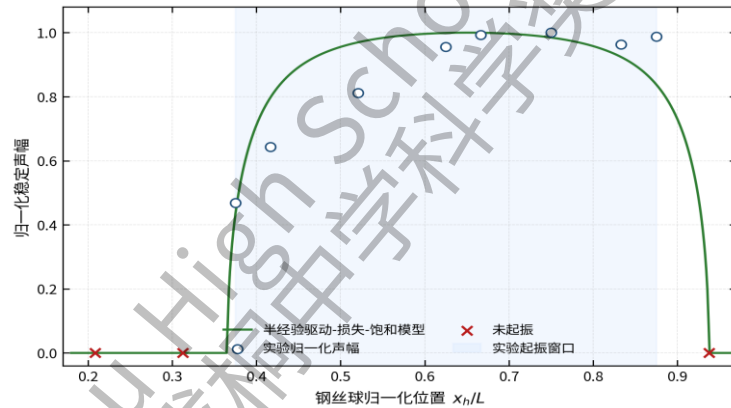


图 4-3 钢丝球位置与归一化稳定声幅的实验-模型比较

由实验结果可见，在起振窗口下边界附近， $x_h=180\text{ mm}$ 处的稳定相对声幅仅为 -20.29 dB ，对应归一化线性幅值约为 $A_{\text{rel}}=0.469$ 。随着钢丝球向封闭端方向移动，稳定声幅迅速增加。 $x_h=200\text{ mm}$ 和 250 mm 时，相对声幅分别增大至 -17.55 dB 和 -15.53 dB ，对应 A_{rel} 分别约为 0.643 和 0.811 。当钢丝球进一步移动至 $300\text{ mm}\sim 420\text{ mm}$ 范围后，稳定相对声幅维持在约 $-13.7\text{ dB}\sim -14.1\text{ dB}$ 之间，相应归一化幅值约为 $0.955\sim 1.000$ ，位置变化对稳定声幅的影响明显减弱。

实验声幅随位置呈现明显的“边界弱-快速增长-高幅平台”的变化趋势， 180 mm 处最弱， $200\text{ mm}\sim 250\text{ mm}$ 快速上升， $300\text{ mm}\sim 420\text{ mm}$ 基本维持在最大幅值附近。该趋势与第 2.4.1 节的非线性饱和分析相符， $J_{\text{pos}}>0$ 对应物理 A_1 转为正值后，振幅先随稳定裕度增大而上升，再受非线性耗散限制形成有限平台。

第 2.4.1 节的 Stuart-Landau 关系给出了靠近起振边界时 $A_{\infty} \propto \sqrt{\Lambda}$ 的基本趋势，但实验幅值在较宽位置范围内形成平台。为把经式(4-1)校准的 J_{pos} 与实验归一化声幅 A_{rel} 作比较，采用下式做经验映射，并将其记为 A_{fit} ，其中系数由声幅数据拟合得到：

$$A_{\text{fit}} = \tanh\left(3.864 \sqrt{\max(J_{\text{pos}}, 0)}\right) \quad (4-2)$$

从图 4-3 可以看出，式(4-2)给出的 A_{fit} 能够描述由起振边界进入稳定区后的总体上升趋势，若将未形成稳定起振的 4 个位置定义为 $A_{\text{rel}}=0$ ，并对全部 12 个位置比较， A_{fit} 相对于 A_{rel} 在本组校准数据上的 $RMSE=0.093$ 、 $R^2=0.953$ 。但是，在 $x_h/L \approx 0.63 \sim 0.88$ 范围内，实验平台比拟合曲线更平坦，尤其 420 mm 附近的实验幅值高于模型。这个偏差说明， J_{pos} 对线性稳定边界的低阶描述并不能唯一决定大振幅状态，实际温度场、储热、旁通流和局部热源/冷端分布都会影响高幅非线性过程。

4.1.4 起振时间与撤热余振时间

不同钢丝球位置下的起振延迟和撤热余振时间如图 4-4 所示。

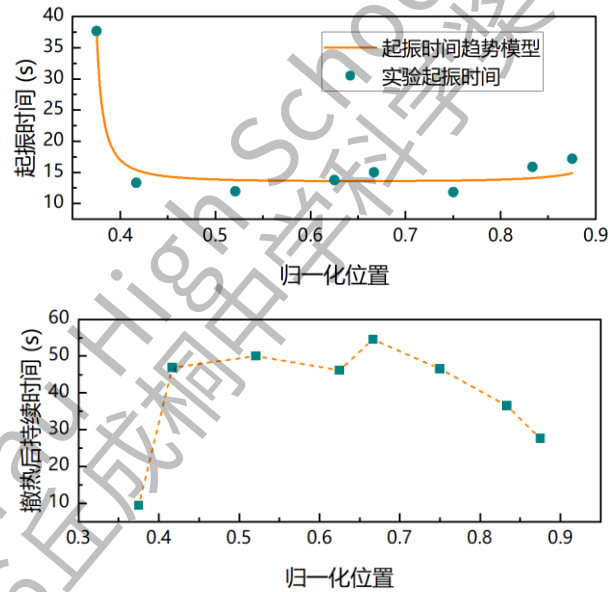


图 4-4 钢丝球位置对起振时间和撤去热源后余振时间的影响

在 8 个能够形成稳定振荡的工况中，起振延迟时间 t_{on} 为 11.87 s~37.72 s，中位数 14.43 s；撤热余振 t_{post} 为 9.37 s~54.53 s，中位数 46.35 s。

时间特征与稳定声幅给出的结论相互补充。180 mm 工况起振最慢（37.72 s）且撤热余振最短（9.37 s），与其位于下起振边界附近、热裕度较小的状态一致；360 mm 起振最快（11.87 s），而 320 mm 余振最长（54.53 s）。第 2.4.2 节和附录 A.5 给出了 t_{on} 和 t_{post} 对应的慢热阈值过程。在 187.5 Hz 下，一个声学周期仅约 5.33 ms，而本组余振持续 9.37 s~

54.53 s，相当于约 $1.8 \times 10^3 \sim 1.0 \times 10^4$ 个声学周期。如此大的时间尺度差异进一步说明，撤热后持续发声主要受平均温差和 $\Delta(t)$ 缓慢跨阈值控制。

进一步比较 8 个稳定起振工况的 t_{on} 与 t_{post} ，二者呈较明显的负相关，其 Pearson 相关系数为 -0.892。从实验趋势看，起振延迟较长的工况往往具有较短的撤热余振时间，而能够较快起振的工况通常可以在撤热后维持更长时间的振荡。

4.2 管长对振荡频率的影响

4.2.1 实验现象与数据结果

管长实验固定内径 $D=20$ mm，并将钢丝球归一化位置控制在 $x_b/L \approx 0.67$ 附近，分别测试 $L=300$ mm、400 mm、500 mm 和 600 mm 的玻璃管。随着玻璃管长度增加，实验中听到的声音由较高频逐渐向较低频移动。不同管长下的实验装置如图 4-5 所示，测量结果见表 4-2。

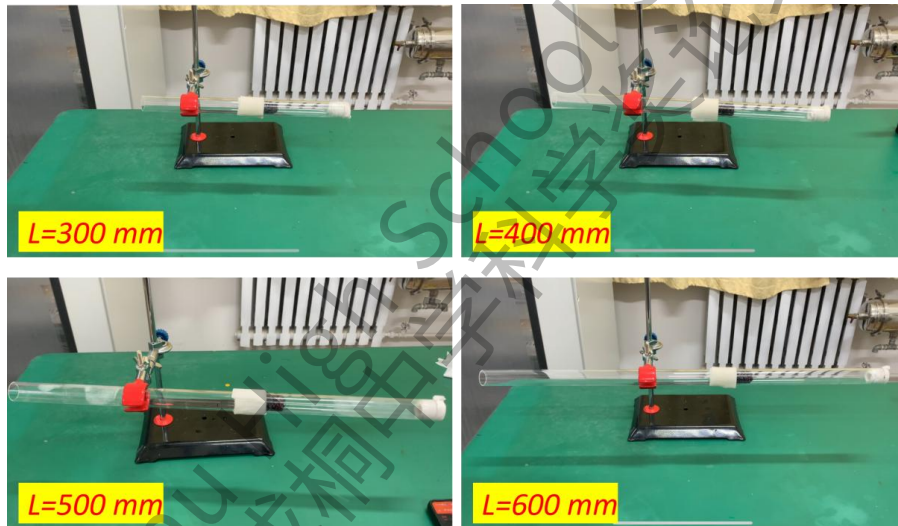


图 4-5 不同管长下的实验装置

表 4-2 管长实验数据与室温理论频率

管长 L/mm	有效管长 L_{eff}/mm	实验频率/Hz	室温理论频率/Hz
300	306.1	304.6875	280.14
400	406.1	234.3750	211.15
500	506.1	187.5000	169.43
600	606.1	140.6250	141.48

由表 4-2 可见，实验稳定主频随管长增加而明显下降， $L=300$ mm、400 mm、500 mm 和 600 mm 时分别为 304.6875 Hz、234.3750 Hz、187.5000 Hz 和 140.6250 Hz。该结果直接对应第 2.2 节的声学理论分析，即第一纵向模态主要由有效传播长度选择；若不同工况的传播时间等效声速变化不大，则主频应近似随 $1/L_{\text{eff}}$ 变化。因此，管长实验与位置实验呈

现出各自不同的作用：位置变化主要改变稳定性而不显著改变主频，管长变化则直接、单调地改变主频。

4.2.2 四分之一波模型的定量检验

为进一步检验稳定主频与有效声学长度之间的关系，令 $X_i=1/L_{\text{eff},i}$ ，对 300 mm、400 mm、500 mm 和 600 mm 四个工况作拟合，如图 4-6 所示。

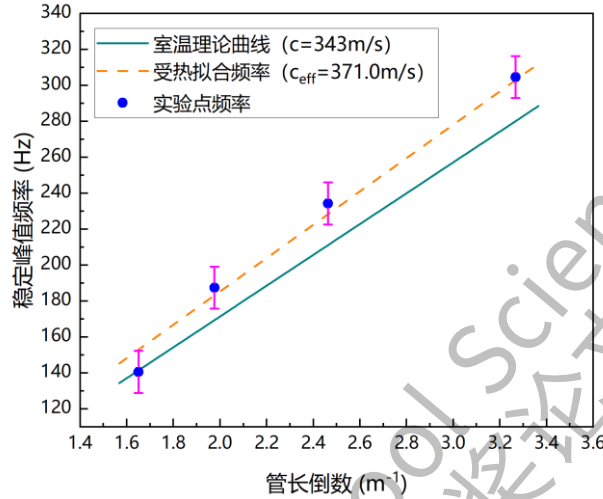


图 4-6 稳定频率与有效管长倒数的关系

以 $X_i=1/L_{\text{eff},i}$ 作过原点拟合，则斜率为 $c_{\text{eff}}/4$ 。四个数据点采用相同的半频率箱分辨范围，因此等权最小二乘即可。拟合得到传播时间等效声速 $c_{\text{eff}}=370.95 \text{ m/s}$ ，拟合统计量为 $R^2=0.9858$ 、 $RMSE=8.01 \text{ Hz}$ 。较高的 R^2 和相对较小的拟合残差表明，在当前实验范围内， $1/L_{\text{eff}}$ 能够较好地描述稳定主频随管长变化的总体趋势。与 4.1 节的位置实验相比，管长变化直接改变了声波在开口端与封闭端之间的传播距离，因此对主频产生了明显且具有单调性的影响。

4.2.3 等效声速与非均匀温度场

拟合得到的 $c_{\text{eff}}=370.95 \text{ m/s}$ 高于室温声速 343 m/s ，这并不意味着整根气柱均处于与 370.95 m/s 对应的均匀温度。按照理论定义， c_{eff} 是整条声程的传播时间等效量；局部受热区可使总传播时间缩短。

从各工况看，300 mm、400 mm 和 500 mm 管的实验频率分别高于室温模型约 24.55 Hz、23.22 Hz 和 18.07 Hz，而 600 mm 工况的实验频率 140.625 Hz 与室温理论值 141.48 Hz 十分接近。这是因为管越短，受热区占总声程比例越高；管越长，其相对影响越弱。这一现象与第 2 章提出的非均匀温度场传播时间模型相符。若局部受热区域的绝对尺度在不同管长工况下变化不大，则其在较短气柱中所占的相对比例更大，因而对总传播时间和振荡频率产生更明显的修正。当管长增加时，同一局部受热区域对整个声程的相对贡献减弱。

4.3 管径对振荡状态的影响

管径实验固定玻璃管长度 $L=700$ mm，并将钢丝球归一化位置控制在 $x_h/L \approx 0.67$ 附近，分别比较内径 $D=30$ mm 和 40 mm 两种工况。不同管径下的实验装置如图 4-7 所示，主要实验结果汇总于表 4-3。

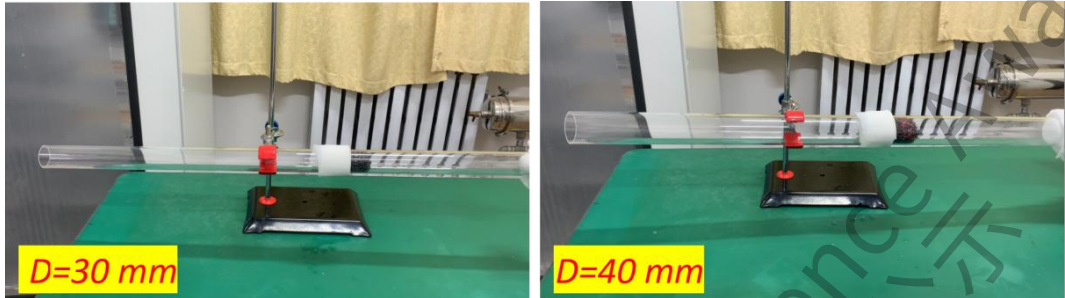


图 4-7 不同管径下的实验装置

表 4-3 管径实验的频率占优状态

内径/mm	端部修正理论频率/Hz	实验频率/Hz	起振时间 t_{on}/s	撤热余振 t_{post}/s
30	120.92	140.625	22.00	38.00
40	120.40	117.1875	36.87	12.00

按第 2.3.3 节的端部修正关系， $D=30$ mm 和 40 mm 对应的室温第一模态频率约为 120.92 Hz 和 120.40 Hz，理论差仅 0.52 Hz，远小于本文 23.4375 Hz 的频率箱宽度。因此不能将两种管径的频率差解释为端部修正造成的偏移。

更值得关注的是稳定状态和时间特征， $D=30$ mm 时频率为 140.625 Hz、 $t_{on}=22.00$ s、 $t_{post}=38.00$ s； $D=40$ mm 时频率为 117.1875 Hz、 $t_{on}=36.87$ s、 $t_{post}=12.00$ s。结合第 2.3 节，这些差异可能是由壁面热黏性损失、钢丝球填充与旁通以及局部气固换热共同引起的，即通过改变 D_1 和 $F_{T,1}$ 而引起。这说明，管径的变化显著影响了起振和撤热余振的时长，且管径越小，起振时长越短，状态建立越容易，撤热余振越持久。

4.4 本章小结

前述三组实验分别改变了钢丝球位置、玻璃管长度和管径。虽然三个参数影响热声振荡的途径不同，但其作用可以结合第 2 章建立的理论模型进行解释。 L_{eff} 和温度场选择声学模态及 ω_n ；快速热松弛 τ_T 通过 $H_{T,n}$ 和 $F_{T,n}$ 决定局部换热中真正能进入 Rayleigh 功率的正交分量；位置耦合与各类损失把这一供能转换为唯一的物理净增长率 Λ_n ； $\Lambda_n > 0$ 后，非线性饱和决定稳定声幅；而秒量级 τ_h 、 τ_c 只负责缓慢改变 $G_T(t)$ 和 $\Lambda(t)$ ，从而控制 t_{on} 与 t_{post} 。

位置实验中，同一 L 、 D 下主频保持 187.5 Hz，但起振窗口、声幅和时间特征明显改变，说明 x_h 主要作用于热声耦合与损失平衡。

管长实验中, 保持 $x_h/L \approx 0.67$ 后, 频率随 L_{eff} 增加而单调降低并近似服从 $1/L_{\text{eff}}$, 局部受热通过 c_{eff} 作进一步修正。

管径实验中, 端部修正本身不足以解释观测差异, 而填充状态、旁通、边界层和局部换热等均会进入等效阻尼和反馈强度。

从时间尺度看, 本实验还表现出显著的时间尺度分离。以 187.5 Hz 的稳定振荡为例, 单个声学周期约为 $1/f_1 \approx 5.33 \times 10^{-3} \text{ s}$, 而实验中的起振延迟和撤热余振通常为数秒至数十秒。前者对应声压和质点速度的快速周期振荡, 后者则与钢丝球、邻近气体及管壁的加热、储热和冷却过程有关。

因此, 本文的理论框架结合实验回答了以下四个问题: 声学边界允许什么模态; 一阶热响应在该模态频率下能提供多少 Rayleigh 有效供能; 供能扣除损失后 A 是否为正; 若 A 为正, 振幅如何饱和, 而平均热状态又如何缓慢使 A 跨越阈值。

5 总结与展望

本文针对水平单端开口玻璃管中的局部多孔热声自激振荡，建立了相应的理论框架，设计并完成了对应的三组控制变量实验，得到了以下主要结论：

- 1) 开口-封闭边界决定奇数阶四分之一波声学的理论框架。位置实验在固定 L 和 D 下主频保持 187.5 Hz，而管长实验中主频随 L_{eff} 增加显著下降，说明管长是本文工况下最直接的选频参数，而非均匀温度场主要通过传播时间等效声速对理想 $1/L_{\text{eff}}$ 关系作修正。
- 2) 钢丝球位置主要调节热声净增益而不是本征频率。 $L=480\text{ mm}$ 、 $D=20\text{ mm}$ 时，仅 $x_h=180\text{ mm}\sim 420\text{ mm}$ 能够稳定起振。该有限窗口可由压力-速度空间耦合、速度相关多孔损失和背景耗散之间的竞争解释。10 mm 钢丝球对第一模态的有限长度空间平均修正不足 0.1%，热声核心点热源近似在本文工况下成立。
- 3) 稳定声幅和时间特征反映了线性稳定性之外的动力学过程。声幅由起振边界附近的低值进入高幅平台，符合 Hopf 失稳后非线性饱和的理论预测。 t_{on} 和 t_{post} 为秒至数十秒，而声学周期仅为毫秒量级，表明局部加热、储热和冷却过程与声学振荡分处于不同的时间量级上。
- 4) 管径对理想四分之一波频率的直接几何修正很小，但 $D=30\text{ mm}$ 和 40 mm 的起振与余振差异明显，说明管径更可能通过热黏性损失、钢丝球填充和旁通、局部换热及辐射阻抗改变稳定状态。

总体而言，本文将复杂的热声自激过程归纳为“模态选择-热声净增益-非线性饱和-慢热演化”四个环节，使理论与实验相互印证。但是，本文也存在着一些局限性，受限于测量设备，没能精确的同步测量钢丝球两侧及轴向温度场， G_T 、 ΔT_{cr} 、 τ_T 、 τ_h 和 τ_c 不能独立辨识。其次，对钢丝球的温度控制比较粗糙，后续若同步测量并精确控制钢丝球两侧温度、绝对声压以及更高时间分辨率的声压包络，可分别拟合慢热时间常数与临界温差，并结合高时间分辨率声压包络进一步约束快速热松弛时间和瞬时净增长率，并检验模型在不同热源结构和更高纵向模态下的适用范围。

参考文献

- [1] 马大猷. 热声学的基本理论和非线性I. 热声学[J]. 声学学报, 1999, 24(4): 337-350.
- [2] 马大猷. 热声学的基本理论和非线性II. 热声管中的非线性声波[J]. 声学学报, 1999, 24(5): 449-462.
- [3] Rijke P L. Notice of a new method of causing a vibration of the air contained in a tube open at both ends[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1859, 17(116): 419-422.
- [4] 马大猷. 黎开管振荡的简单理论[J]. 声学学报, 2001, 26(4): 289-294.
- [5] 陈福连, 涂建华, 王勤勇. 关于温度梯度与 Higgins-Rijke 型热声现象的研究[J]. 声学学报, 2002, 27(5): 420-424.
- [6] 陈福连, 史祖龄, 钟英杰. 关于瑞利激振准则的讨论[J]. 浙江工学院学报, 1994, 30(3): 29-33.
- [7] 韩飞, 岳国森, 沙家正. Rijke 热声振荡的非线性效应[J]. 声学学报, 1997, 22(3): 249-254.
- [8] 刘迎文, 何雅玲, 沈超, 黄竞. 热声系统中振荡滞后特性的试验研究[J]. 工程热物理学报, 2007, 28(3): 376-378.
- [9] 汪拓, 吴锋, 李端勇, 陈浩, 林杰. 驻波热声系统的自激振荡机理[J]. 物理学报, 2015, 64(4): 044301.
- [10] Matveev K I, Culick F E C. A study of the transition to instability in a Rijke tube with axial temperature gradient[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 264(3): 689-706.
- [11] 李国能, 周昊, 岑可法. Rijke 型燃烧器热声振动特性的试验研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(1): 174-177.
- [12] Balasubramanian K, Sujith R I. Thermoacoustic instability in a Rijke tube: Non-normality and nonlinearity[J]. Physics of Fluids, 2008, 20(4): 044103.
- [13] Subramanian P, Mariappan S, Sujith R I, et al. Bifurcation analysis of thermoacoustic instability in a horizontal Rijke tube[J]. International Journal of Spray and Combustion Dynamics, 2010, 2(4): 325-356.
- [14] 党南南, 张正元, 张家忠. Rijke 管热声振荡的稳定性切换行为研究[J]. 物理学报, 2018, 67(13): 134301.

附录 A 主要理论推导

A.1 一维小扰动方程与开口-封闭模态

将管内声场近似为沿轴向传播的一维小扰动声场。设平均密度为 $\bar{\rho}$ ，局部声速为 c ，声压扰动和轴向质点速度扰动分别为 $p'(x,t)$ 与 $u'(x,t)$ ，单位体积热释放率扰动为 $q'(x,t)$ 。忽略管内平均流动对声传播的一阶影响后，线性化动量方程和能量方程可写为：

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\rho} c^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = (\gamma - 1) q'(x, t) \quad (\text{A-2})$$

消去质点速度扰动，可得到含局部热释放源项的一维受迫波动方程：

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = (\gamma - 1) \frac{\partial q'}{\partial t} \quad (\text{A-3})$$

将热源项置零，并结合正式(2-2)的开口压力节点和封闭端速度节点，即可通过分离变量得到正式(2-3)~式(2-5)的奇数阶四分之一波模态。这一推导的作用是说明管长和端部修正首先决定允许的本征频率，而热声核心位置主要通过后续反馈项改变模态稳定性。

A.2 非均匀温度场下的传播时间

在空气可近似视为理想气体，且比热比 γ 的变化暂不考虑时，局部声速可表示为：

$$c(\xi, t) = \sqrt{\gamma R_g \bar{T}(\xi, t)} \quad (\text{A-4})$$

对于开口-封闭管，第 n 个允许纵向模态在整个有效声学长度上的累积相位近似满足：

$$\omega_n \int_0^{L_{\text{eff}}} \frac{d\xi}{c(\xi, t)} \approx \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (\text{A-5})$$

由此可得：

$$f_n(t) \approx \frac{2n-1}{4\tau_a(t)}, \tau_a(t) = \int_0^{L_{\text{eff}}} \frac{d\xi}{c(\xi, t)} \quad (\text{A-6})$$

其中， τ_a 表示声波沿有效管长传播一次所需要的等效时间。进一步定义传播时间意义下的等效声速 $c_{\text{eff}} = L_{\text{eff}}/\tau_a$ ，即得到正式(2-6)。因此 c_{eff} 是整条声程的传播时间等效量，而不是任一局部温度对应的声速。

A.3 一阶快速热响应的频域形式

对于角频率为 ω_n 的简谐扰动，正式(2-8)的一阶热松弛模型对应的频域关系：

$$\frac{\hat{Q}'}{\hat{u}'} = \frac{K_T G_T}{1 + i\omega_n \tau_T} \quad (\text{A-7})$$

其幅值因子为 $1/\sqrt{1 + (\omega_n \tau_T)^2}$ ，相位滞后为 $\varphi_{T,n} = \arctan(\omega_n \tau_T)$ 。在理想开口-封闭驻波中，局部压力与速度近似相差 $\pi/2$ ，因此进入 Rayleigh 相关项的是相对于速度的正交分量，即 $|H_{T,n}| \sin \varphi_{T,n} = \omega_n \tau_T / [1 + (\omega_n \tau_T)^2]$ ，就是正文式(2-9)的 $F_{T,n}$ 。

A.4 有限长度与几何修正的补充推导

若钢丝球内部单位长度换热能力近似均匀，则有限长度空间耦合应对钢丝球覆盖区间取平均：

$$\bar{S}_n(\xi_h, l_h) = \frac{1}{l_h} \int_{\xi_h - l_h/2}^{\xi_h + l_h/2} \phi_{p,n}(\xi) \phi_{u,n}(\xi) d\xi \quad (\text{A-8})$$

代入 $\phi_{p,n} = \sin(k_n \xi)$ 、 $\phi_{u,n} = \cos(k_n \xi)$ 并积分，可得：

$$\bar{S}_n = \frac{1}{2} \sin(2k_n \xi_h) \frac{\sin(k_n l_h)}{k_n l_h} \quad (\text{A-9})$$

因此有限长度因子为 $F_{l,n} = \text{sinc}(k_n l_h)$ 。当 $k_n l_h \ll 1$ 时，其低阶近似为：

$$F_{l,n} \approx 1 - \frac{(k_n l_h)^2}{6}, \quad k_n l_h \ll 1 \quad (\text{A-10})$$

正文仅保留本文工况下 $F_{l,1} \approx 0.9998$ 的结论。对于管长变化，由 $f_1 = c_{\text{eff}} / (4L_{\text{eff}})$ 作一阶对数微分可得：

$$\frac{\delta f_1}{f_1} \approx \frac{\delta c_{\text{eff}}}{c_{\text{eff}}} - \frac{\delta L_{\text{eff}}}{L_{\text{eff}}} \quad (\text{A-11})$$

若把声程近似分成未明显受热区和长度为 l_T 的受热区，则单程传播时间可近似写为：

$$\tau_a(L) \approx \frac{L_{\text{eff}} - l_T}{c_0} + \frac{l_T}{c_h} \quad (\text{A-12})$$

管径通过端部修正对频率的直接灵敏度为：

$$f_1(D) = \frac{c_{\text{eff}}}{4(L + 0.305D)}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial D} = -\frac{0.305c_{\text{eff}}}{4(L + 0.305D)^2} \quad (\text{A-13})$$

由式(A-13)可知，在管长远大于管径的条件下，端部修正量相对于整个有效声学长度较小，因此改变管径所引起的理论基频变化通常较弱。也就是说，仅由开口端几何修正难以解释管径变化时可能出现的明显振荡状态差异。

相比于上述直接频率修正，管径还会改变声波传播过程中的热黏性耗散。对于频率为 ω 的周期振荡，黏性边界层和热边界层的特征厚度分别为：

$$\delta_v = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \delta_k = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} \quad (\text{A-14})$$

在薄边界层近似下, 边界层厚度与管半径之比会随管径 D 改变, 因此壁面热黏性损失对不同管径的相对重要性也随之变化。

A.5 慢热过程的两阶段解析近似

由正文式(2-16)并取加热初始温差近似为零, 可得到温差首次达到 ΔT_{cr} 的热建立时间; 若越过阈值后的早期声幅以代表性正增长率 A_g 指数增长, 则起振延迟近似为:

$$t_{on} \approx -\tau_h \ln \left(1 - \frac{\Delta T_{cr}}{\Delta T_{\infty}} \right) + \frac{1}{A_g} \ln \left(\frac{A_{det}}{A_0} \right) \quad (\text{A-15})$$

撤热后由正文式(2-17)可得温差重新降至 ΔT_{cr} 、即 A 再次跨过零点的时刻:

$$t_{cr} = t_0 + \tau_c \ln \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_{cr}} \right) \quad (\text{A-16})$$

若随后把 $A < 0$ 阶段近似为以有效衰减率 D 衰减, 则可见余振时间包含残余热驱动和最终声学衰减两部分:

$$t_{post} \approx \tau_c \ln \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_{cr}} \right) + \frac{1}{D} \ln \left(\frac{A(t_{cr})}{A_{det}} \right) \quad (\text{A-17})$$

式(A-15)~式(A-17)均是两阶段低阶近似, 主要用于解释 t_{on} 和 t_{post} 的物理组成。

附录 B 核心 Python 代码程序

总体运行程序

```
def run_model(cfg: ModelConfig, output_dir: Path) -> dict[str, object]:
    cfg.validate()
    configure_plot_style()
    output_dir.mkdir(parents=True, exist_ok=True)

    print("[1/8] 绘制闭开管边界和模式.....")
    figure_closed_open_modes(cfg, output_dir)
    print("[2/8] 计算位置-频率-声幅模型.....")
    position_metrics = figure_position_model(cfg, output_dir)
    print("[3/8] 求解快声学 DDE.....")
    dde = solve_acoustic_dde(cfg)
    figure_dde_response(cfg, output_dir, dde)
    print("[4/8] 求解加热、撤热和慢包络.....")
    thermal = solve_slow_thermal_envelope(cfg)
    figure_thermal_process(cfg, output_dir, thermal)
    print("[5/8] 拟合管长模型.....")
    length_fit = fit_effective_sound_speed(cfg)
    figure_length_model(cfg, output_dir, length_fit)
    print("[6/8] 绘制管径频率箱竞争.....")
    diameter_metrics = figure_diameter_model(cfg, output_dir)
    print("[7/8] 绘制起振与撤热余振实验对比.....")
    time_metrics = figure_position_time_metrics(cfg, output_dir)
    print("[8/8] 绘制空间耦合和时滞相位因子.....")
    figure_coupling_and_delay(cfg, output_dir)

    summary: dict[str, object] = {
        "model_scope": "水平管; x=0 开口、x=L 封闭; 一维纵向低阶模型",
        "config": asdict(cfg),
        "acoustic": scalar_dictionary(dde),
        "thermal": scalar_dictionary(thermal),
        "position_validation": position_metrics,
        "length_validation": scalar_dictionary(length_fit),
        "diameter_comparison": diameter_metrics,
        "time_metrics": time_metrics,
        "limitations": [
            "DDE 系数为与半经验增长率一致的等效参数, 并非材料常数。",
            "慢热过程参数尚未由同步温度数据辨识。",
            "管径结果只有两个工况, 只能证明纯端部修正不足。",
        ],
    }
    save_data_files(cfg, output_dir, dde, thermal, summary)
    return summary
```

计算位置-频率-声幅模型

```
def figure_position_model(cfg: ModelConfig, output_dir: Path) -> dict[str, float]:
    reference_cfg = replace(
        cfg,
        length_m=POSITION_EXPERIMENT_LENGTH_M,
        diameter_m=POSITION_EXPERIMENT_DIAMETER_M,
        heater_position_m=0.320,
    )
    x_dense_m = np.linspace(
        0.18 * reference_cfg.length_m, 0.98 * reference_cfg.length_m, 900
    )
    dense = position_model_components(x_dense_m, reference_cfg)
    points = position_model_components(POSITION_MM / 1000.0, reference_cfg)
    experimental_amplitude = normalized_experimental_amplitude()
    rmse, r_squared = regression_metrics(
        experimental_amplitude, points["normalized_amplitude"]
    )
```

```

room_frequency = modal_frequency_hz(
    1,
    reference_cfg.length_m,
    reference_cfg.diameter_m,
    reference_cfg.room_sound_speed_m_s,
)
fig, axes = plt.subplots(2, 1, figsize=(8.2, 7.2), sharex=True)
ax = axes[0]
started = POSITION_STARTED
ax.errorbar(
    POSITION_MM[started] / reference_cfg.length_m / 1000.0,
    POSITION_FREQUENCY_HZ[started],
    yerr=cfg.frequency_uncertainty_hz,
    fmt="o",
    mfc="white",
    mec=BLUE,
    ecolor=BLUE,
    capsize=3,
    label="可起振位置",
)
ax.scatter(
    POSITION_MM[~started] / reference_cfg.length_m / 1000.0,
    np.full(np.count_nonzero(~started), room_frequency - 27.0),
    marker="x",
    color=RED,
    s=45,
    label="未起振位置 (仅标记)",
)
ax.axhline(room_frequency, color=ORANGE, ls="--", lw=1.3,
            label=f"室温四分之一波理论 {room_frequency:.2f} Hz")
ax.set_ylabel("稳定主频 / Hz")
ax.legend(loc="best")
panel_label(ax, "a")

ax = axes[1]
ax.plot(
    x_dense_m / reference_cfg.length_m,
    dense["normalized_amplitude"],
    color=GREEN,
    lw=2.0,
    label="式(2-22)、式(2-24)模型",
)
ax.scatter(
    POSITION_MM / reference_cfg.length_m / 1000.0,
    experimental_amplitude,
    facecolor="white",
    edgecolor=BLUE,
    s=38,
    label="实验归一化声幅",
    zorder=3,
)
ax.axhline(0.0, color=GRAY, lw=0.8)
ax.text(
    0.02,
    0.92,
    f"RMSE={rmse:.4f}, $R^2$={r_squared:.4f}",
    transform=ax.transAxes,
    ha="left",
    va="top",
)
ax.set_xlabel(r"钢丝球归一化位置  $x_h/L$ ")
ax.set_ylabel("归一化稳定声幅")
ax.set_ylim(-0.05, 1.08)
ax.legend(loc="lower right")
panel_label(ax, "b")
save_figure(fig, output_dir, "02_position_model_comparison.png")
return {"position_rmse": rmse, "position_r_squared": r_squared}

```

求解声学 DDE

```
def solve_acoustic_dde(cfg: ModelConfig) -> dict[str, np.ndarray | float]:
    params = dde_coefficients(cfg)
    omega = float(params["omega_rad_s"])
    delay = float(params["delay_s"])
    zeta = float(params["zeta"])
    alpha = float(params["alpha_s_inv2"])
    beta = float(params["beta_s_inv"])
    dt = delay / cfg.dde_steps_per_delay
    n_steps = int(math.ceil(cfg.dde_duration_s / dt))
    time = np.arange(n_steps + 1, dtype=float) * dt
    eta = np.zeros(n_steps + 1)
    eta_dot = np.zeros(n_steps + 1)
    eta[0] = cfg.dde_initial_eta

    def past_state(query_time: float, current_index: int) -> np.ndarray:
        if query_time <= 0.0:
            return np.array([cfg.dde_initial_eta, 0.0])
        grid_position = query_time / dt
        left_index = int(math.floor(grid_position))
        fraction = grid_position - left_index
        if left_index >= current_index:
            return np.array([eta[current_index], eta_dot[current_index]])
        right_index = left_index + 1
        left = np.array([eta[left_index], eta_dot[left_index]])
        right = np.array([eta[right_index], eta_dot[right_index]])
        return (1.0 - fraction) * left + fraction * right

    def rhs(stage_time: float, state: np.ndarray, current_index: int) -> np.ndarray:
        delayed = past_state(stage_time - delay, current_index)
        current_eta, current_velocity = state
        delayed_eta, delayed_velocity = delayed
        acceleration = (
            -omega**2 * current_eta
            - 2.0 * zeta * omega * current_velocity
            + alpha * delayed_eta
            + beta * delayed_velocity
            - cfg.dde_nonlinear_mu_s_inv * current_eta**2 * current_velocity
        )
        return np.array([current_velocity, acceleration])

    for index in range(n_steps):
        state = np.array([eta[index], eta_dot[index]])
        current_time = time[index]
        k1 = rhs(current_time, state, index)
        k2 = rhs(current_time + 0.5 * dt, state + 0.5 * dt * k1, index)
        k3 = rhs(current_time + 0.5 * dt, state + 0.5 * dt * k2, index)
        k4 = rhs(current_time + dt, state + dt * k3, index)
        next_state = state + dt * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6.0
        if not np.all(np.isfinite(next_state)):
            raise FloatingPointError(
                f"DDE 在 t={current_time:.6f} s 处发散; 请减小反馈或时间步长。"
            )
        eta[index + 1], eta_dot[index + 1] = next_state

    envelope = analytic_envelope(eta)
    analysis_start = min(cfg.fft_start_time_s, 0.8 * cfg.dde_duration_s)
    analysis_mask = time >= analysis_start
    segment = eta[analysis_mask] - np.mean(eta[analysis_mask])
    window = np.hanning(segment.size)
    spectrum = 2.0 * np.abs(np.fft.rfft(segment * window)) / np.sum(window)
    frequencies = np.fft.rfftfreq(segment.size, dt)
    dominant_index = int(np.argmax(spectrum[1:]) + 1)
    dominant_frequency = float(frequencies[dominant_index])
    predicted_amplitude = math.sqrt(
        max(8.0 * float(params["growth_approx_s_inv"]), 0.0)
        / cfg.dde_nonlinear_mu_s_inv
    )
```

```

)
params.update(
    {
        "dt_s": dt,
        "dominant_frequency_hz": dominant_frequency,
        "predicted_steady_amplitude": predicted_amplitude,
        "final_mean_envelope": float(np.mean(envelope[time >= 0.9 * time[-1]])),
    }
)
return {
    "time": time,
    "eta": eta,
    "eta_dot": eta_dot,
    "envelope": envelope,
    "frequencies": frequencies,
    "spectrum": spectrum,
    **params,
}

```

求解加热、撤热和慢包络

```

def solve_slow_thermal_envelope(cfg: ModelConfig) -> dict[str, np.ndarray | float]:
    time = np.arange(
        0.0,
        cfg.thermal_end_time_s + 0.5 * cfg.envelope_dt_s,
        cfg.envelope_dt_s,
    )
    delta_t = temperature_difference_history(time, cfg)
    components = position_model_components(
        cfg.heater_position_m, cfg, delta_t_k=delta_t
    )
    growth_rate = cfg.growth_scale_s_inv * components["lambda_star"]
    amplitude = np.full(time.size, cfg.envelope_noise_floor)

    for index in range(time.size - 1):
        current = amplitude[index]
        derivative = growth_rate[index] * current - cfg.envelope_kappa_s_inv *
current**3
        amplitude[index + 1] = max(
            cfg.envelope_noise_floor,
            current + cfg.envelope_dt_s * derivative,
        )

    audible = amplitude >= cfg.envelope_detection_level
    pre_off = audible & (time <= cfg.heat_off_time_s)
    onset_time = float(time[np.argmax(pre_off)]) if np.any(pre_off) else math.nan
    after_off_indices = np.flatnonzero(audible & (time >= cfg.heat_off_time_s))
    persistence = (
        float(time[after_off_indices[-1]] - cfg.heat_off_time_s)
        if after_off_indices.size
        else 0.0
    )
    critical_delta_t = float(
        critical_temperature_difference_k(cfg.heater_position_m, cfg)
    )
    crossing_indices = np.flatnonzero(
        (time >= cfg.heat_off_time_s) & (delta_t <= critical_delta_t)
    )
    crossing_time = (
        float(time[crossing_indices[0]]) if crossing_indices.size else math.nan
    )
    acoustic_frequency = modal_frequency_hz(
        1,
        cfg.length_m,
        cfg.diameter_m,
        cfg.fitted_effective_sound_speed_m_s,
    )
    return {
        "time": time,

```

```

    "delta_t": delta_t,
    "growth_rate": growth_rate,
    "amplitude": amplitude,
    "critical_delta_t_k": critical_delta_t,
    "onset_time_s": onset_time,
    "threshold_crossing_time_s": crossing_time,
    "persistence_time_s": persistence,
    "persistence_cycles": persistence * acoustic_frequency,
}

```

拟合管长模型

```

def fit_effective_sound_speed(cfg: ModelConfig) -> dict[str, np.ndarray | float]:
    length_eff = effective_length(LENGTH_MM / 1000.0, cfg.diameter_m)
    x_value = 1.0 / length_eff
    x_fit = x_value[LENGTH_FIT_MASK]
    y_fit = LENGTH_FREQUENCY_HZ[LENGTH_FIT_MASK]
    slope = float(np.sum(x_fit * y_fit) / np.sum(x_fit**2))
    c_eff = 4.0 * slope
    predicted = c_eff / (4.0 * length_eff)
    residual_fit = y_fit - predicted[LENGTH_FIT_MASK]
    rmse = float(np.sqrt(np.mean(residual_fit**2)))
    r_squared = 1.0 - float(np.sum(residual_fit**2) / float(
        np.sum((y_fit - np.mean(y_fit)) ** 2)
    ))
    validation_error = float(
        LENGTH_FREQUENCY_HZ[~LENGTH_FIT_MASK][0] - predicted[~LENGTH_FIT_MASK][0]
    )
    return {
        "length_eff_m": length_eff,
        "inverse_length_m_inv": x_value,
        "predicted_hz": predicted,
        "c_eff_m_s": c_eff,
        "rmse_hz": rmse,
        "r_squared": r_squared,
        "validation_error_hz": validation_error,
    }

```

致谢

本项目的选题来源于网上的一段科普视频，一次偶然的机会，我在网上看到了关于 Rijke 热声震荡管的演示实验，一段看似空空如也的管道在经过加热之后就可以发出响亮的轰鸣声。这实在是有一些神奇！在我过去的概念中，声音应该是振动的产物，如果想要发出声音，要么需要有一个振动源——比如一个音响，里面的薄膜充当振动源。要么就是有一个源源不断的气源来充当动力源——比如烧开的水壶，蒸发的水蒸气充当了这个气源，也可以发出很响亮的声音。或者是一些管乐器，这时候是演奏者的口腔充当这个气源。而 Rijke 管里似乎看不到明显的气源或者振动源，仅靠一个单一热源，为什么能够发出如此响亮的声音？

之后，在查阅了一些文献后，我逐渐认识到这是一种典型的热声自激振荡现象，前人在经典的 Rijke 管中也已经做了比较多的工作。在仔细阅读了相关文献并深入分析后，我注意到单端开口水平管这一构型目前尚无较为充分的研究，其热声起振规律与经典上下开口的 Rijke 管似有较大不同。因此，我决定从这一结构入手，尝试研究其背后的物理原理。

在长达 10 个月之久的研究过程中，我遇到了很多困难，也学到了很多知识。从一开始阅读文献的过程中，我就遇到了大量难以理解的数学公式，这是因为缺少与微分方程相关的知识。我从最基本的常微分方程和数学物理方程补起，逐渐学会了使用分离变量法和格林函数法求解二阶线性偏微分方程。随后还较为系统的自学了传热学和工程热力学相关的知识，逐渐理解了传热过程的复杂性，并且掌握了在复杂物理现象中常用的“模化”方法——即将不好处理的非理想因素打包到一个系数里的研究手段，正如处理对流换热系数那样。这一方法帮助我抓大放小，紧扣热声震荡现象里的关键因素，而将其它小的影响因素“打包”处理，未来使用实验数据直接拟合。此外，我还学习了利用 python 进行数值计算，对数值计算有了基本的概念，虽然未能深入理解一些复杂数值计算方法，但至少做到了“掉包侠”的水平——知道在什么方程中调用什么 scipy 中的数值计算函数来求解。

在实验阶段也遇到了一些难题。首先是钢丝球定位与状态一致性的问题。钢丝球需要在管内精确移动到指定位置，但每次移动后其压实程度和孔隙率都可能发生细微变化，进而影响多孔阻力和气固换热面积。为解决这一问题，我专门制作了带刻度的推杆工具，每次移动后用游标卡尺复核几何中心坐标，并尽量避免重新揉压钢丝球，确保不同位置工况下其轴向长度和填充状态基本一致。其次是冷端条件的控制，湿纸巾包覆的宽度、层数和湿润程度直接影响局部冷却效果，但实验过程中纸巾会逐渐干燥，导致冷端温度漂移。为

此专门制定了标准化的包覆流程，固定纸巾宽度和层数，并在每组实验前重新润湿，持续时间较长的实验则在不移动位置的前提下及时补水。加热环节同样充满挑战：喷枪火焰的距离、角度和档位稍有不同，钢丝球两侧建立的温差就会明显变化，甚至可能因局部过热导致玻璃管破裂。在反复尝试后确定了固定的加热距离和喷枪角度，设置了防护挡板，同时在实验前仔细检查玻璃管是否有裂纹。此外，封闭端的密封性也是一个容易被忽视的问题，早期实验中封闭塞插入深度不一致或存在微小漏气，会改变管道的声学边界条件，导致频率和起振条件出现异常波动。后来统一了封闭塞的插入深度，并在每次实验前检查密封状态，才使数据的可重复性明显提高。

当然，仍有一些问题尚未完全解决：管径实验中热黏性损失、多孔阻力和旁通流动各自的贡献还无法独立辨识，只能塞进一个综合性的系数里模糊处理掉了。非线性饱和系数的物理意义也有待通过进一步的实验来验证。这些不足我会在未来继续深入思考，寻找有效的解决办法。

这次研究对于我有很重大的意义，从现象观察、问题提出、文献检索、理论分析、编程求解、装置搭建到最后的论文撰写，在每一个步骤中都遇到了一些问题，并且也都努力尝试解决了这些问题。整个过程曲折、痛苦、但又成就感非凡，我想这个过程正是学习和成长的证明。

本文未使用 AI 工具，特此说明。

我由衷感谢北师大实验中学康老师对论文选题的悉心指导，为理论建模工作提供宝贵建议，并指导我如何写出一篇合格的学术论文。

感谢在这一段科研道路中所有帮助过我的老师和同学们，还有我的父母，感谢你们的支持，才有了这样一个充实而完整的研究。