

参赛成员姓名：_____ 吴雨凡 喻高进 王湛和 _____

中学：_____ 南京外国语学校 _____

省份：_____ 江苏 _____

国籍/地区：_____ 中国 _____

指导老师姓名：_____ 熊波 _____

论文题目：_____ 磁力牛顿摆的非线性模态耦合与能量局域化研究 _____

摘要

磁力牛顿摆利用磁铁之间的排斥作用，在无接触条件下传递振动。将一侧磁铁拉开后释放，我们最初观察到两个磁摆的振幅交替增大和减小，与普通线性耦合摆的拍频现象相似。在小振幅条件下，将两个摆角相加、相减，可以得到振幅近似不变的同相模和反相模，两者的叠加能够解释单个磁摆的振幅变化。然而，改变释放角度和悬点间距后，我们发现运动不再总是符合这一描述：**两个模态自身的振幅也会缓慢变化，在部分条件下，同相模可以持续占优，使两摆在一段时间内主要保持同向运动。**这一发现促使我们进一步研究：线性拍频之外的变化从何而来，又能否通过调节参数控制振动形式？

为研究这些现象，我们搭建双磁摆和三磁摆实验装置，通过视频追踪获得角度时间序列，并进行磁铁质量、磁化强度和阻尼的标定。理论上，先用圆柱磁铁的等效电流模型计算磁相互作用并数值求解运动方程，再采用磁偶极子近似和泰勒展开进行解析分析。实验与数值时间序列、频谱的比较，为模型提供了检验，也为区分线性拍频和非线性模态变化建立了基准。

进一步观察模态坐标中的运动轨迹，我们发现，较大振幅下的轨迹不再保持线性系统近似矩形的边界，而是在同相方向凸出、反相方向凹陷。**通过比较模态时间序列、势能方向截面及不同阶次势能的消项结果，我们将轨迹扭曲与模态振幅调制联系起来，并识别出四阶势能项，即三阶动力学项，对所考察现象的关键作用。**这表明，观察到的变化并非只是两个线性模态叠加的结果，而与非线性作用下模态之间的相互影响有关。

参数比较还揭示了一个与直观判断不同的趋势：**在部分参数范围内，悬点间距增大、磁耦合减弱，振幅调制和轨迹扭曲反而增强。**为解释这一现象，我们对简化模态方程作快周期平均，分析两个模态之间的平均传能方向。结果表明，传能方向与相位差有关；耦合减弱时，相位关系变化较慢，同一方向的传能可以持续更久，从而积累出更明显的振幅变化。因此，调制强弱不仅取决于耦合作用的大小，也取决于传能持续的时间。双磁摆的理论—实验比较及三磁摆的扩展计算支持了这一趋势。

继续改变参数，我们还发现，振动可以由两侧交替增强转为一侧持续占优，形成空间局域化。它与同相模占优描述的是不同现象：前者关注振动集中在哪一侧，后者关注两摆主要以什么形式运动。**我们结合模态振幅、相位差和局部周期，将局域化与模态频率靠近、局部周期交叉及相位差在有限范围内往复变化联系起来，并从 1:1 内共振解释其产生过程。**解析近似进一步给出了频率相等时振幅与相位应满足的条件，不同间距下的数值交叉点比较支持了这一关系。

为回答怎样选择参数才能使同相运动更占优势，我们采用模态包络宽度比构造指标 L ，并绘制参数热图。结果表明，**同相模能够达到的振幅优势并不随释放角度或间距单调增强，而是在接近局域化转变的区域更加明显。**25 个实验点与含阻尼理论结果的逐点比较，为这一趋势提供了初步支持。弱阻尼计算还显示，随着振幅衰减，系统可以由早期局域化转为后期两摆振幅交替变化。

本文从类似线性拍频的实验运动出发，发现并研究了模态自身的振幅变化，进而解释了弱耦合下调制增强的现象，以及局部周期交叉与局域化之间的联系。通过实验比较、势能项对照和解析分析，我们将可见的摆动形式与非线性来源、相位演化和能量传递对应起来，为调节磁摆的振动形式与空间分布提供了依据。

关键词： 磁力牛顿摆；非线性模态耦合；振幅调制；内共振；局域化

目录

1 引言	6
1.1 从传统牛顿摆到磁力牛顿摆	6
1.2 已有研究与本文研究内容	6
2 实验系统与数据处理	8
2.1 实验装置与释放方式	8
2.2 磁铁质量与磁化强度标定	9
2.3 角阻尼标定	11
2.4 视频追踪与数据处理	12
3 磁力牛顿摆的动力学模型	12
3.1 广义坐标与模型假设	12
3.2 动能与重力势能	13
3.3 圆柱磁铁建模与磁势能计算	13
3.4 含线性阻尼的拉格朗日方程	15
4 线性简正模与拍频基准	16
4.1 从实验观察振幅交替	16
4.2 拉格朗日方程与势能的泰勒展开	17
4.3 双磁摆简正模与频谱验证	18
4.4 三角恒等变换解释拍频	19
4.5 摆长、间距与初始条件的影响	20
4.6 三磁摆的模式扩展	20
5 模态振幅如何变化？	22
5.1 从实验观察两种振动模态	22
5.2 使用轨迹形状分析简正模波动	26
5.3 四阶势能项的对照检验	28
5.4 使用三阶模态方程解释相位差与模态能量传递	29
5.5 为什么耦合减弱时扭曲反而增强	31
5.6 三磁摆中的扩展验证	32
6 非线性效应带来的能量局域化与稳定振动优化	35
6.1 从轨迹扫描到局域化	36
6.2 频率失配与耦合强度的解释	38
6.3 轨迹变化与两个模态的相位	38
6.4 周期交叉后的四个阶段	39
6.5 频率交叉的解析条件与检验	41
6.6 模态占优程度与参数热图	42

6.7 阻尼对局域化和热图的影响	46
6.8 改变非线性强度的数值对照	47
6.9 理论热图与 25 个实验点的比较	50
7 三磁摆及更多磁摆的能量传递	51
8 结论与展望	52
参考文献	54
作者贡献与致谢	54
附录 A 线性分析补充材料	57
A.1 完整时间序列与模态频谱	57
A.2 摆长、间距与释放状态的比较	58
A.3 三磁摆的标量方程与解析解	59
附录 B 非线性解析方程与平均关系的推导	61
B.1 磁偶极子模型与总阶展开	61
B.2 平衡平移与平均做功	61
B.3 基频提取与相位变化	62
附录 C 辅助扫描与弱非对称情形	62
C.1 轨迹和时间序列扫描的参数	62
C.2 摆长略有差别的情况	63
附录 D 多磁摆与混沌的初步研究	64
D.1 多个磁摆的振动传递	64
D.2 混沌的参数探索	68
D.3 Poincaré 截面与返回图	71
附录 E 局部周期与其他内共振情形	74
E.1 坐标与参数比较	74
E.2 接近 2:1 内共振的结果	77
附录 F 符号计算记录	79

1 引言

1.1 从传统牛顿摆到磁力牛顿摆

我们知道，常见的牛顿摆是通过小球碰撞来传递机械能的。如果将小球替换为相互排斥的磁铁，即使互不接触，振动依然能在摆之间传递；但由于磁斥力随距离非线性变化，整个系统实际上演变成了一个非线性耦合摆。图 1.1 展示了两种装置的对比。

本研究的选题来自 2026 年 IYPT 第 15 题“磁力牛顿摆”[8]。在比赛中，我们队主要研究了其基本的运动过程。赛后我们发现该系统还有很多值得探讨的动力学现象，于是决定进一步深入研究：在最基础的双磁铁系统中，若仅释放其中一侧，系统在什么条件下倾向于同相振动，又在什么条件下以反相振动为主？这种模式分配由何决定，能否在一定时间内稳定维持？带着这些疑问，我们重新搭建了实验装置，展开了系统的研究。

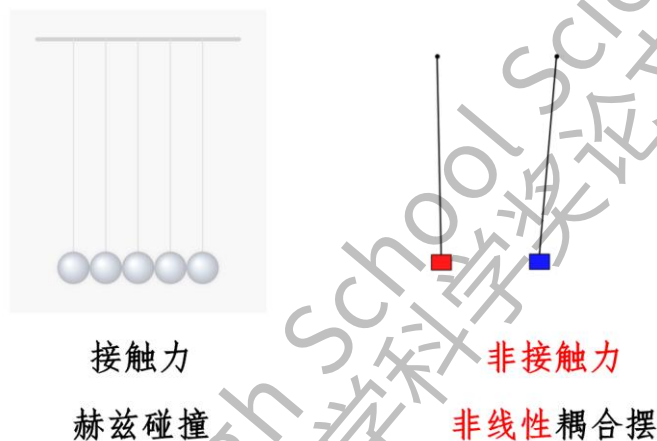


图 1.1 普通牛顿摆与磁力牛顿摆示意图。左侧普通的牛顿摆通过接触碰撞传递振动，而右侧的磁力牛顿摆通过非接触的磁相互作用耦合，从而带来新奇的物理现象。

1.2 已有研究与本文研究内容

已有研究为分析耦合振动提供了一个基本区分：单个振子的振幅变化，不一定意味着模态之间发生了能量交换。在线性、无阻尼条件下，各简正模独立演化，模态振幅保持不变，而它们的叠加仍可使单个振子的振幅交替增强和减弱[1-3]。因此，判断线性拍频之外的变化，需要进一步观察模态本身的振幅。

当振幅增大时，非线性作用可以改变模态频率，并使不同模态相互影响。Givois 等研究了两个具有三次非线性项的耦合振子在 1:1 内共振附近的运动，并通过圆板振动实验比较理论与实测结果[7]。这里的 1:1 内共振，是指两个频率接近的模态通过非线性作用发生共振耦合。研究显示，随着振幅增大，系统可以由主要一个模态参与，转为两个模态共同参与，并形成较固定的相位关系。

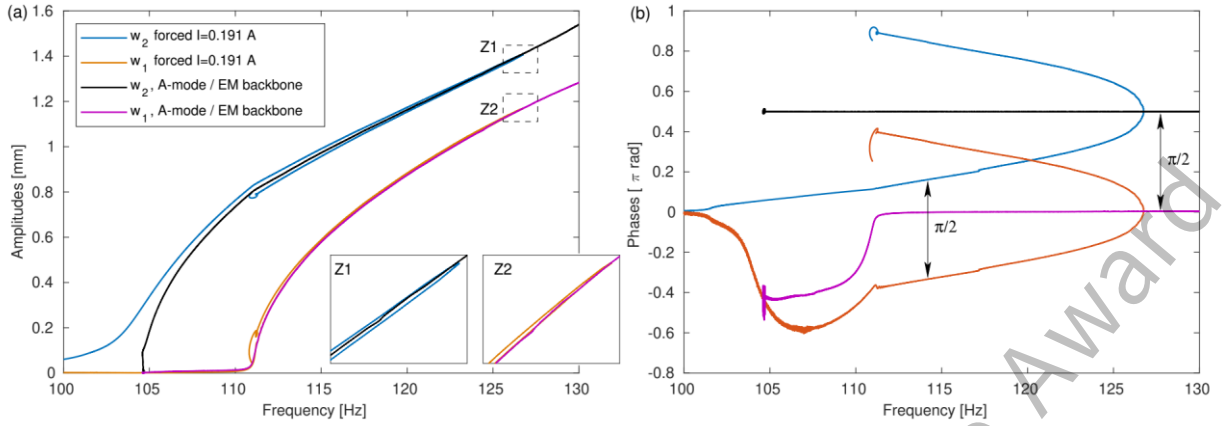


图 1.2 圆板实验中的模态振幅与相位响应。左图为振幅随频率的变化，右图为相位随频率的变化。约 111 Hz 附近，原先响应较弱的模态开始明显参与振动；相应共振分支上，两个模态形成约 $\pi/2$ 的相位差。引自 Givois 等[7]，原文图 10。

这一结果说明，分析非线性模态耦合时，需要将振幅、频率和相位结合起来。本文据此比较两个磁摆的角度之和、角度之差，并观察模态包络与局部周期的变化，以区分单摆拍频和模态本身的振幅调制。上述圆板研究提供的是分析思路，磁摆自由释放后的传能过程仍需由本系统的方程和实验确定。

另一类相关研究关注振动在空间中的分布。Flach 和 Gorbach 综述了非线性离散系统中的局域化振动，尤其是时间上周期变化、空间上集中于少数位置的离散呼吸子[6]。这类运动可以出现在由相同单元组成的系统中，不一定依赖结构缺陷或参数不均匀。其主要特征是少数位置保持较大振幅，远离这些位置后，振幅迅速减小。

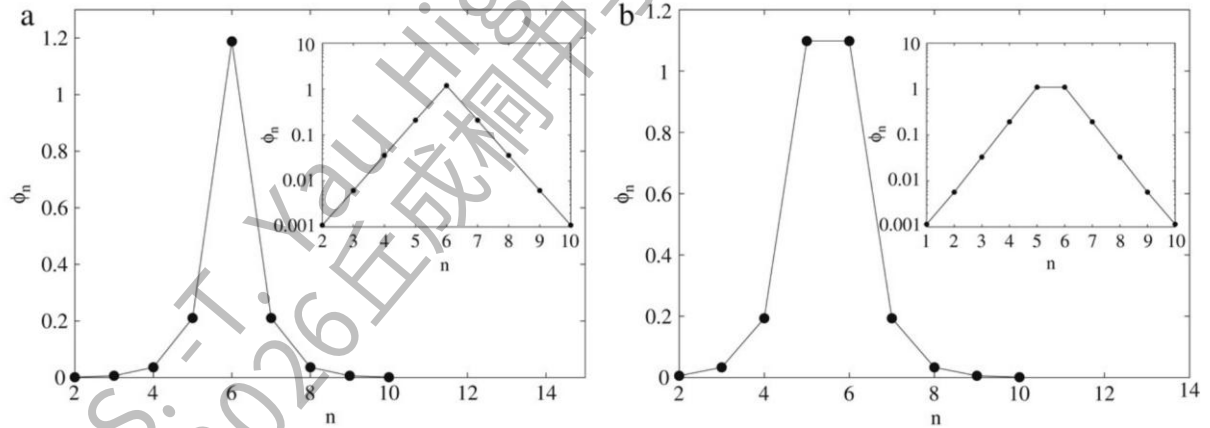


图 1.3 非线性晶格模型中的局域化振幅分布。左图的振幅主要集中在一个格点，右图主要集中在相邻两个格点。横轴 n 为格点编号，纵轴 ϕ_n 为模型中的振幅；插图采用对数纵坐标，显示振幅随距离迅速衰减。引自 Flach 和 Gorbach[6]，原文图 5。

局域化研究表明，单元之间存在耦合，并不意味着振动一定会充分传遍整个系统。本文用“局域化”描述观察时段内一侧磁摆持续保持较大振幅的现象。同时，模态占优与空间局域化需要分别判断：前者描述主要以哪种形式振动，后者描述振动主要集中在哪里。因此，本文同时保留单摆坐标与模态坐标，考察两者之间的联系。

综上，内共振研究解释了模态如何相互影响，局域化研究则说明了振动可能集中于少数位置。基于此，本文主要围绕三个问题展开讨论：第一，经典的线性耦合模型究竟能在多大程度上解释实验现象？第二，模态本身的能量分布如何随时间演化，它主要受哪一阶非线性势能项主导？第三，如何通过调控初始条件与系统参数，让某种特定的振动模式在观测期内持续占优？全文内容安排如下：第 1 章介绍课题研究内容；第 2 章介绍实验装置与测量方案；第 3 章建立物理模型并进行数值求解；第 4 章先在线性近似下分析拍频特征；第 5 章结合实验数据，探讨非线性效应对各模态振幅调制的物理机理；第 6 章研究强非线性下的能量局域化，并通过参数热图寻找系统呈现规律运动的最优参数区间；第 7 章进一步拓展至多摆链系统的能量传递规律；第 8 章给出全文总结与展望。

2 实验系统与数据处理

2.1 实验装置与释放方式

实验装置主要由固定支架、3D 打印定位板、多绳悬挂磁铁、塑料释放夹具及高速视频采集设备构成，如下图所示。其中，定位板用于精确调节悬点间距；每只磁铁均采用两根细绳构成双 V 形悬挂，形成平行四边形限位结构，以约束磁铁的自旋与面外摆动。磁铁表面的胶带开槽用于固定悬绳节点，并贴有色块以供视频追踪识别。相邻磁铁的轴向充磁方向相反，在近共轴构型下提供稳定的斥力相互作用。

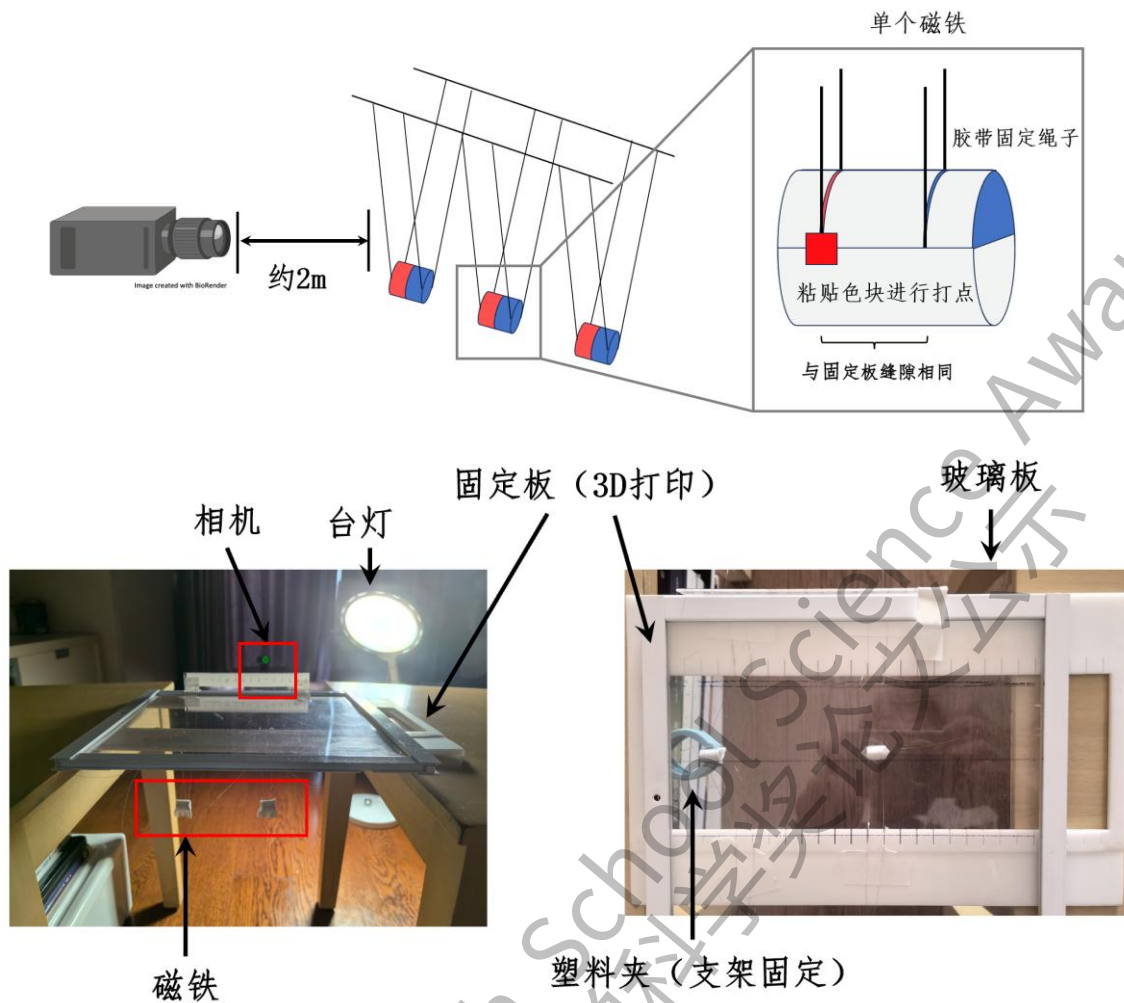


图 2.1 实验装置示意与实物。定位板控制悬点间距，多绳悬挂限制姿态变化，夹具用于静止释放。

相机正对运动平面侧向放置，距装置约 2 m，以减小视差引起的测量误差，并配合台灯补光以保证成像清晰。磁铁安装完毕后，利用带刻度标线的玻璃板与激光测距仪完成空间几何校准，确保各磁铁静止时的最低点严格处于同一水平线上。实验释放前，先用夹具固定拉开指定角度的磁铁，待其余磁铁在该静磁约束下完全静止后再释放。因此，其余磁铁的初始位置处于“受约束平衡态”，而非系统的自由无约束平衡态；相应的数值模拟初始条件也需严格复现这一释放过程。

在后续公式中，摆长 l 定义为等效悬点至磁铁质心的转动半径；质量 m 包含磁铁本体以及随动胶带和追踪色块的总质量；悬点间距 d 则直接通过 3D 打印定位板上的预设卡槽进行调节与读取。

2.2 磁铁质量与磁化强度标定

如下图所示，我们用电子天平完成小磁铁的质量测定。为避免强磁铁吸引天平内部的铁磁性元件导致称量失真，先在托盘上垫入厚书本并完成去皮，再放置磁铁进行读数。而磁化

强度的标定则借助特斯拉计测量磁铁轴向不同距离处的磁感应强度，随后将其代入均匀磁化圆柱模型的理论公式中拟合反演得到。

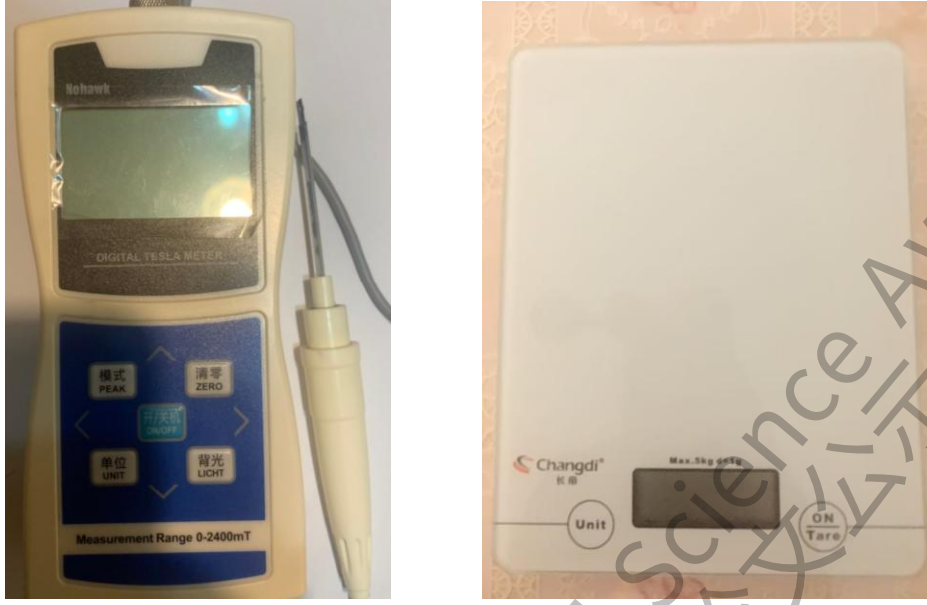


图 2.2: 左图为用于测量磁感应强度得到磁铁磁化强度的特斯拉计，探针位于白色套子内部。右图为用于测量磁铁及上面粘贴的胶带等的总质量的电子天平。

对于磁感应强度的理论计算，记 R 为半径、 h 为轴向长度， s 为测点到磁铁中心的轴向距离，则轴向磁场理论的表达式为[4]

$$B_{ax}(s) = \frac{\mu_0 M}{2} \left(\frac{s + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(s + \frac{h}{2}\right)^2 + R^2}} - \frac{s - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(s - \frac{h}{2}\right)^2 + R^2}} \right)$$

若以磁铁近端面作为测距起点，端面外距离 z 与质心距离满足关系 $s = z + h/2$ 。在空间定位时，测距基准严格对应霍尔传感器的敏感元中心，并扣除地磁等环境背景场与探头的零点漂移误差。经最小二乘拟合，所得磁铁的有效磁化强度约为 $7.04 \times 10^5 \text{ A/m}$ 。

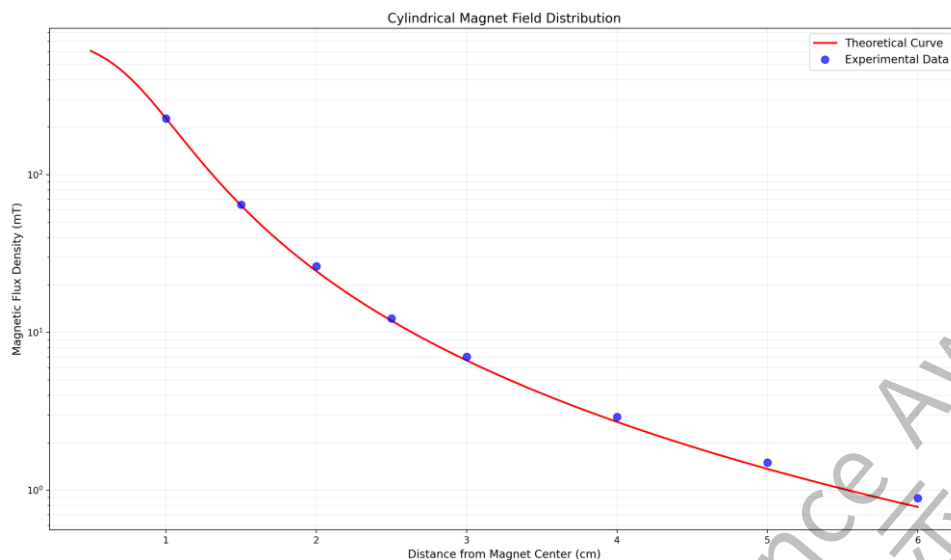


图 2.3 磁铁轴向磁场标定拟合图。散点为测量结果，实线为均匀磁化圆柱模型拟合；横轴为到磁铁中心的距离。

2.3 角阻尼标定

为了标定磁摆的阻尼，移去其余磁铁后，我们记录单个磁摆的自由衰减历程。利用线性角阻尼模型计算摆角的时间序列，并对理论计算与实验实测曲线分别进行希尔伯特变换以提取振幅包络，进而通过最小二乘法拟合确定等效阻尼系数。相应的单摆运动方程与参数拟合结果如下：

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$b \approx 5.10 \times 10^{-6} \text{ N m s/rad}$$

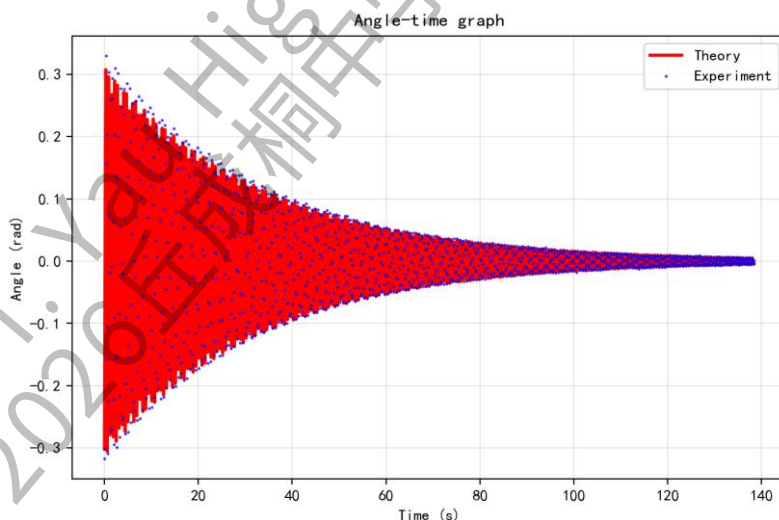


图 2.4 单磁摆振幅衰减拟合。该阻尼系数描述单一磁铁自由摆动的耗散，后续比较使用相同的角阻尼系数进行理论计算。

2.4 视频追踪与数据处理

为了更好的追踪小磁铁的运动轨迹，我们使用 Tracker 提取标记点坐标，经尺度、标记偏移和坐标方向校正后得到磁铁质心轨迹。若竖直坐标向上，悬点为 (X_i, Y_i) ，质心为 (x_i, y_i) ，摆角从竖直向下方向起算且向右为正，则

$$\theta_i(t) = \text{atan2}(x_i(t) - X_i, Y_i - y_i(t))$$

摆角信号的频谱由离散傅里叶变换通过 FFT 算法高效求解。在对比数值结果与实验测量时，两者严格统一了时间窗截取长度、采样步长、去直流分量及归一化准则。记录时间为 T_{obs} 时，频谱的分辨率极限对应为 $1/T_{\text{obs}}$ ；基线静态偏移与缓慢零点漂移所贡献的极低频响应仅作为测量本底，不纳入简正模态范畴。对于非线性效应的讨论，数据需先平移扣除无扰自由平衡位置，随后再投影至模态空间构造相应的广义坐标。

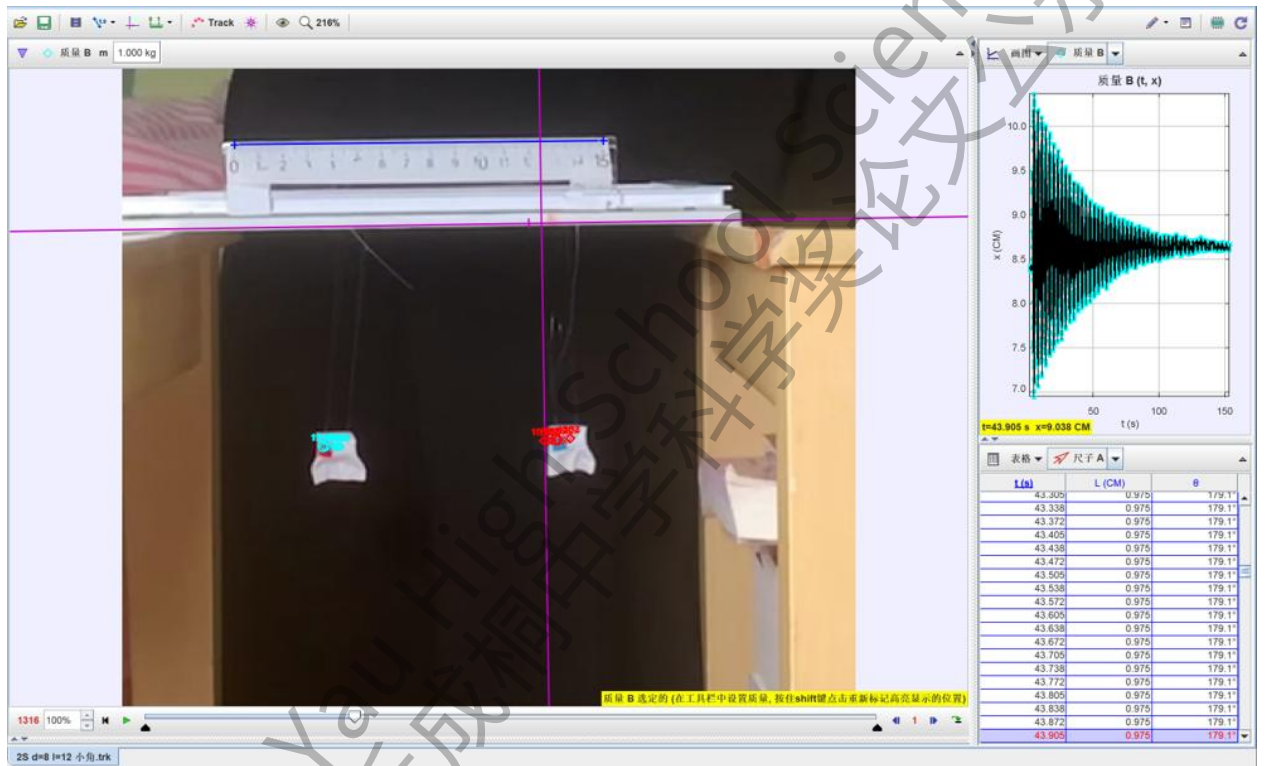


图 2.5 Tracker 视频追踪界面。标记点轨迹经几何校正后转换为摆角时间序列。

3 磁力牛顿摆的动力学模型

3.1 广义坐标与模型假设

本章中，我们搭建磁力牛顿摆的动力学模型。我们首先考虑由 n 个磁铁组成的系统，以各磁铁的摆角 θ_i 作为广义坐标。悬绳质量忽略，摆长视为固定；磁铁中心主要在同一竖直平面内运动，磁化方向由悬挂结构限制。磁铁近似为均匀磁化的刚性圆柱，磁场随运动准静态变化，耗散先用与角速度成正比的阻尼描述。

如下图所示，当所有的磁铁等摆长、等间距时，第 i 个磁铁的中心位置为

$$(l \sin \theta_i + (i - 1)d, -l \cos \theta_i)$$

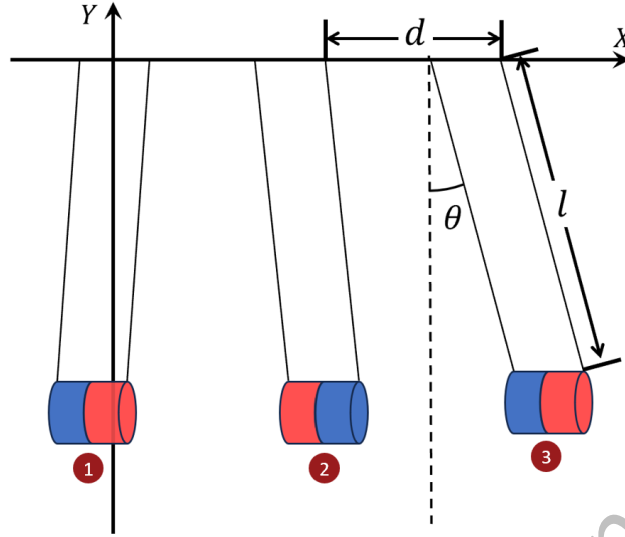


图 3.1 磁力牛顿摆的坐标与磁极排列。 d 为悬点间距， l 为质心运动半径， θ 为偏转角。

3.2 动能与重力势能

在磁铁姿态近似固定、运动主要为质心平动的假设下，系统动能为

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_i^2$$

以各摆的悬点为重力势能零点，有

$$V_g = \sum_{i=1}^n -mgl \cos \theta_i$$

若磁铁存在明显的刚体转动，还需计入相应转动动能。但是本文采用上述平面约束模型，因此仅将剩余晃动作为误差来源。

3.3 圆柱磁铁建模与磁势能计算

均匀磁化体可以用等效束缚电流表示[4]。对于磁化强度为 $\mathbf{M}$ 的磁体，体束缚电流密度与面束缚电流密度分别为

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为磁体表面的外法向单位矢量。对于均匀轴向磁化的圆柱，体束缚电流为零，侧面存在沿圆周方向的面电流。因此，可将圆柱表示为沿轴向连续排列的圆形电流环。

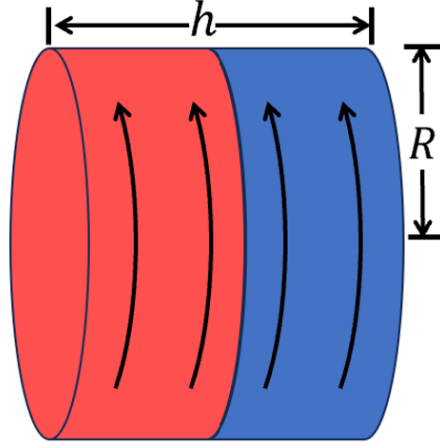


图 3.2 圆柱磁铁的等效束缚电流。h 为轴向长度，R 为半径。

而轴向厚度为 dh 的薄层对应电流

$$dI = M dh$$

利用毕奥–萨伐尔定律计算薄层磁场，再沿磁铁轴向积分：

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right) dh \end{aligned}$$

式中的圆周积分沿电流环进行，轴向积分覆盖磁铁全长。该表达式保留了磁铁有限尺寸与空间偏移的影响。

两个体积元的相对位置矢量可写为

$$\vec{R}_{ij} = (x_i - (x_j + \Delta h), y_i - (y_j + r \sin \varphi), r \cos \varphi)$$

在固定磁化分布、忽略相互退磁修正的近似下，磁铁 i 与磁铁 j 的相互作用势能为

$$V_{\text{mag}(i,j)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -M_j \cdot B_{x_i(\vec{R}_{ij})} r dr d\varphi dh$$

考虑相邻磁铁采用交替的磁化方向：

$$M_{2k-1} = M, M_{2k} = -M$$

因此系统的总磁势能可写为：

$$V_{\text{mag}} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n V_{\text{mag}(i,j)}$$

在这里，每一对磁铁只计一次相互作用。相邻与非相邻磁铁的吸引或排斥由磁化方向和相对位置共同决定。此时，系统总势能 V 为重力势能与磁相互作用势能之和。

3.4 含线性阻尼的拉格朗日方程

为了求解这一复杂的非线性动力学系统，我们构建系统的拉格朗日量，其定义为：

$$L = T - V$$

运动方程为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = c \dot{\theta}_i$$

这里 c 表示有符号的阻尼系数，耗散时取负值；若用正数 b 表示阻尼强度，则 $c = -b$ 。在摆长固定的情况下，方程可整理为：

$$m_i l_i^2 \ddot{\theta}_i + b_i \dot{\theta}_i + m_i g l_i \sin \theta_i + \frac{\partial V_{mag}}{\partial \theta_i} = 0$$

上式同时包含重力恢复作用、磁耦合和耗散。其总机械能定义为

$$E = T + V$$

其对应的能量变化为：

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_i b_i \dot{\theta}_i^2$$

无阻尼时总能量保持不变，有阻尼时总能量减少。计算中用这一关系检查数值结果。

下面考虑这个微分方程的边界条件。自由系统的平衡位置满足：

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

在实际的实验释放前，部分磁铁被夹具固定，而其余磁铁在这一约束下达到平衡。因此，基于我们的理论模型计算时先固定被拉开的磁铁，再求其余磁铁的平衡位置，最后以零初速度释放。这样便将释放前由磁力产生的静态偏移计入初始条件。

在本文后续的理论模型求解过程中，我们将二阶运动方程化为角度与角速度组成的一阶方程组，并采用自适应 Runge-Kutta 方法求解[5]。其中电流圆柱模型保留磁铁尺寸和摆动几何条件，以用于数值计算的结果及实验的结果相互比较；而磁偶极子模型则用于泰勒展开，以方便求得小振幅下的解析结果。这两种模型承担不同任务：前者尽量保留实际磁力，而后者使简正模和拍频的来源容易看清。

4 线性简正模与拍频基准

4.1 从实验观察振幅交替

我们首先对基础的动力学系统开展了数值模拟与实验观测。图 4.1 对比了基于等效圆柱电流模型计算出的两个磁摆运动时程与实验实测摆角数据，上、下两幅子图分别对应第一摆和第二摆的角度。可以看到，理论曲线与实验数据点吻合良好，验证了理论模型与实验装置的可靠性。随着时间推移，两摆的振幅呈现明显的周期性交替消长，即典型的拍频现象。该运动特征与经典的线性耦合摆高度相似，因此在后文中，我们先引入磁偶极子近似，推导双磁摆动力学的一阶解析解以解释这一行为。

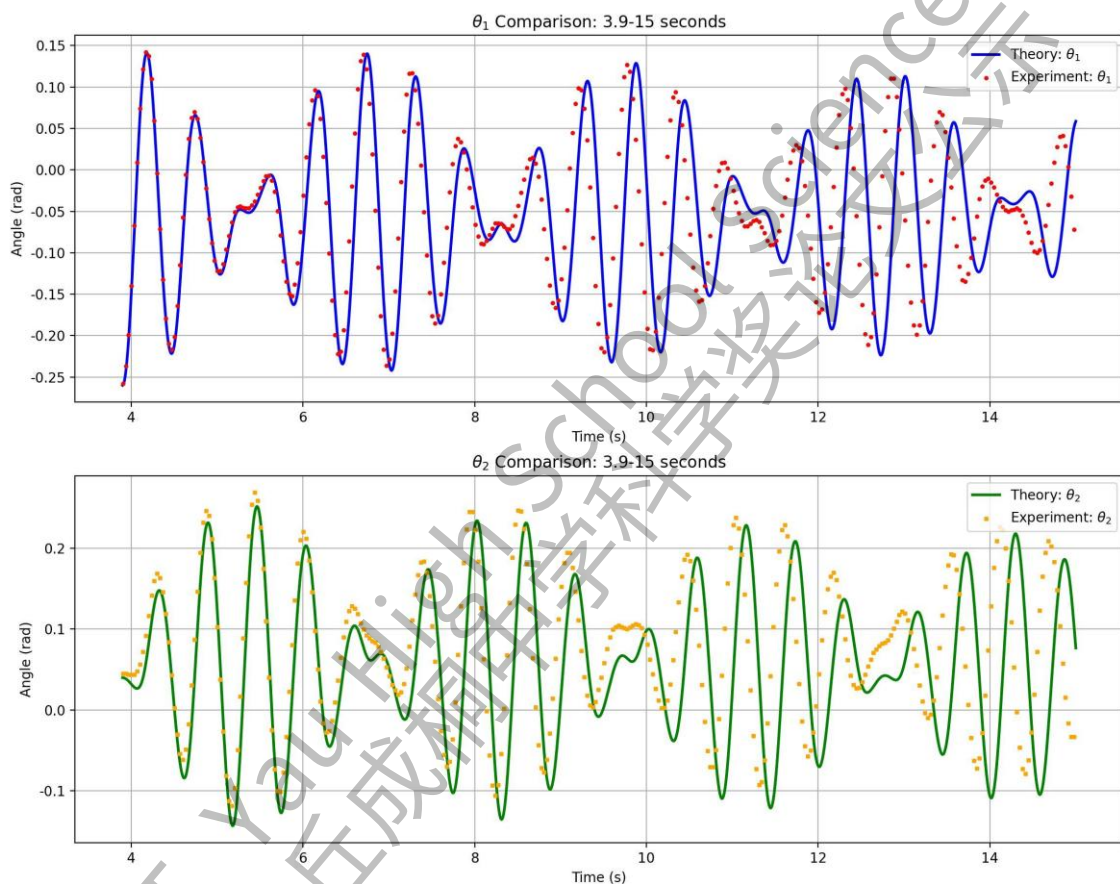


图 4.1 双磁摆运动的实验与数值比较。上、下图分别为 θ_1 和 θ_2 ，表示两个磁铁的摆角，其显示振幅在交替变化，不是很稳定。完整时间序列见图 A.1。

我们进一步从简正模的视角来分析系统的动力学行为。对于双自由度的线性耦合摆，其任意运动均可正交分解为同相模与反相模的线性叠加：在同相模中，两摆同向摆动；在反相模中，两摆则反向运动。**两类模态均为简谐振动，但各自的固有频率存在微小差异；正是由于二者的相位不断发生漂移，叠加后才导致单摆振幅出现“此起彼伏”的拍频现象。**直观上看，这种两摆交替受激的运动形式较为杂乱，难以长时间维持某种特定的规则形态。这促使我们**思考：能否通过调节系统参数，打破两种模态势均力敌、相互调制的局面，从而使某一特定模态在较长时间内占据主导？**为此，我们首先在线性小振幅近似下展开深入探讨。

4.2 拉格朗日方程与势能的泰勒展开

考虑无阻尼、等质量、等摆长的双磁摆，两个摆角均向右为正。磁铁中心坐标为：

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1, y_1 = -l \cos \theta_1 \\ x_2 &= d + l \sin \theta_2, y_2 = -l \cos \theta_2 \end{aligned}$$

相对位置与中心间距满足：

$$\begin{aligned} \Delta x_{12} &= d + l(\sin \theta_2 - \sin \theta_1), \Delta y_{12} = l(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ r_{12} &= \sqrt{\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2} \end{aligned}$$

相邻磁矩沿水平方向反平行，大小记为 μ ，且 $\mu = M\pi R^2 h$ 。第一个磁铁在第二个磁铁中心产生的水平磁场为

$$B_{x,12} = \frac{\mu_0 \mu (3\Delta x_{12}^2 - r_{12}^2)}{4\pi r_{12}^5}$$

由此得到磁势能与重力势能：

$$\begin{aligned} V_B &= -(-\mu)B_{x,12} = \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \frac{2\Delta x_{12}^2 - \Delta y_{12}^2}{(\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2)^{5/2}} \\ V_G &= -mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{aligned}$$

此时，动能、总势能与拉格朗日量为

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2), V = V_B + V_G, L = T - V$$

由第 3 章的拉格朗日方程，可以得到：

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} \\ ml^2 \ddot{\theta}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_2} \end{aligned}$$

为了求线性解，我们使用 Mathematica 将势能在 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 处展开到二阶。定义耦合参数

$$k = \frac{\mu_0 \mu^2}{\pi d^5}$$

展开并整理后，有

$$V_{\leq 2} = V_0 + \frac{mgl}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{3kdl}{2}(\theta_2 - \theta_1) + 3kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2$$

V_0 是与摆角无关的常数。一次项说明竖直位置不是自由平衡位置。对势能求导并除以 ml^2 ，得到

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 + \frac{6k}{m}(\theta_1 - \theta_2) &= -\frac{3kd}{2ml} \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 + \frac{6k}{m}(\theta_2 - \theta_1) &= \frac{3kd}{2ml} \end{aligned}$$

令角加速度为零，可得这一近似下的平衡角：

$$\theta_{1,eq} = -\frac{3kd}{2(mg + 12kl)}, \theta_{2,eq} = \frac{3kd}{2(mg + 12kl)}$$

再引入相对平衡位置的角位移

$$\xi_1 = \theta_1 - \theta_{1,eq}, \xi_2 = \theta_2 - \theta_{2,eq}$$

代入后，常数项由平衡条件抵消，得到

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \frac{g}{l}\xi_1 + \frac{6k}{m}(\xi_1 - \xi_2) &= 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \frac{g}{l}\xi_2 + \frac{6k}{m}(\xi_2 - \xi_1) &= 0 \end{aligned}$$

4.3 双磁摆简正模与频谱验证

我们模仿对线性耦合摆的处理方法，将这两个方程分别取和与取差分别得到同相和反相振动的微分方程。这两个方程不相互耦合。以平衡位置为零点，记 $\xi_i = \theta_i - \theta_{i,eq}$ ，并定义：

$$Q_p = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}}, Q_m = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}$$

归一化因子 $\sqrt{2}$ 是两个振型 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$ 的模长。两条运动方程相加得到同相模方程，相减得到反相模方程：

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_p + \omega_p^2 Q_p &= 0, \omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \ddot{Q}_m + \omega_m^2 Q_m &= 0, \omega_m = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{12k}{m}} \end{aligned}$$

同向运动：和相加，差相消

反向运动：和相消，差相加

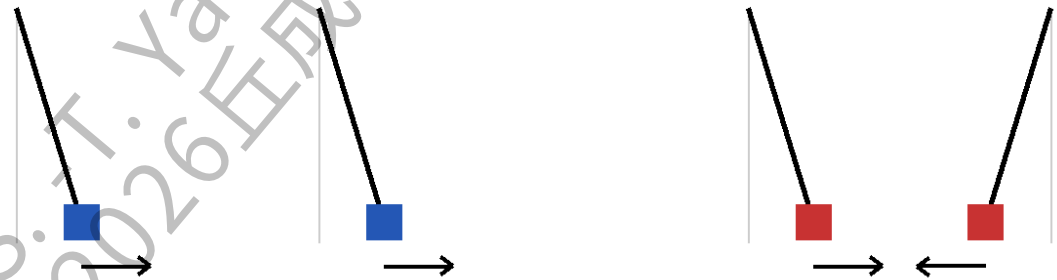


图 4.2 双磁摆的线性振型。左为同相模 $(1, 1)$ ，右为反相模 $(1, -1)$ 。

同相模中，两磁摆同向运动，在这一线性近似下不改变间距，因此频率完全由重力决定。反相模中，磁力则提供额外恢复作用，因此频率较高。静止释放时，两个磁摆的运动写为

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_{1,eq} + A_p \cos \omega_p t + A_m \cos \omega_m t \\ \theta_2(t) &= \theta_{2,eq} + A_p \cos \omega_p t - A_m \cos \omega_m t \end{aligned}$$

$$A_p = \frac{\xi_{10} + \xi_{20}}{2}, A_m = \frac{\xi_{10} - \xi_{20}}{2}$$

其中 A_p 与 A_m 由相对自由平衡位置的初始偏转决定。在无阻尼线性系统中，它们保持不变。由于本节模态坐标带有 $1/\sqrt{2}$ ，其模态振幅等于相应系数的 $\sqrt{2}$ 倍。第 5 章为对应解析代码，改用未归一化的角度和、角度差，并在使用振幅前说明这一约定。

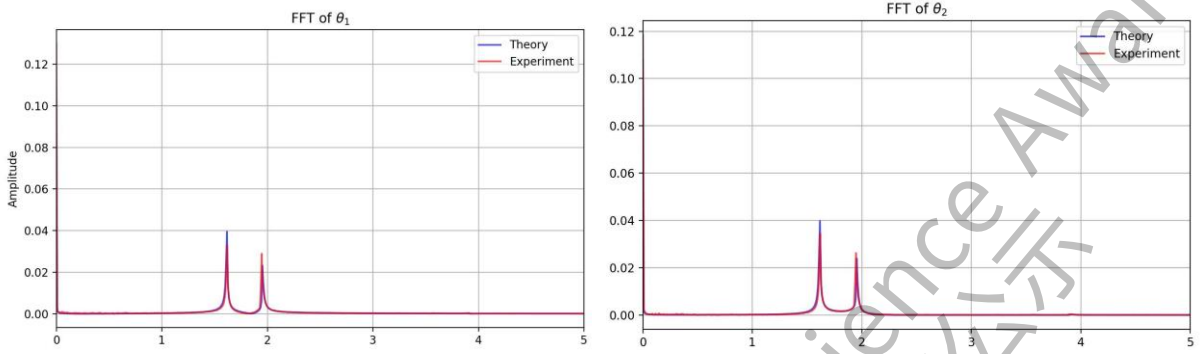


图 4.3 双磁摆的频谱。左、右分别为 θ_1 和 θ_2 ；蓝线为数值结果，红线为实验结果。两个坐标具有相同的主要峰位。

4.4 三角恒等变换解释拍频

我们下面解释为何磁摆会呈现拍频包络现象。为从解析解中直接看出振幅变化，定义平均角频率与频率差：

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_p + \omega_m}{2}, \Delta\omega = \omega_m - \omega_p$$

利用和差化积公式

$$\begin{aligned} \cos \omega_p t + \cos \omega_m t &= 2 \cos \bar{\omega} t \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \\ \cos \omega_p t - \cos \omega_m t &= 2 \sin \bar{\omega} t \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \end{aligned}$$

两个磁摆相对平衡位置的运动可写为

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= (A_p + A_m) \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \bar{\omega} t + (A_p - A_m) \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \bar{\omega} t \\ \xi_2(t) &= (A_p - A_m) \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \bar{\omega} t + (A_p + A_m) \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

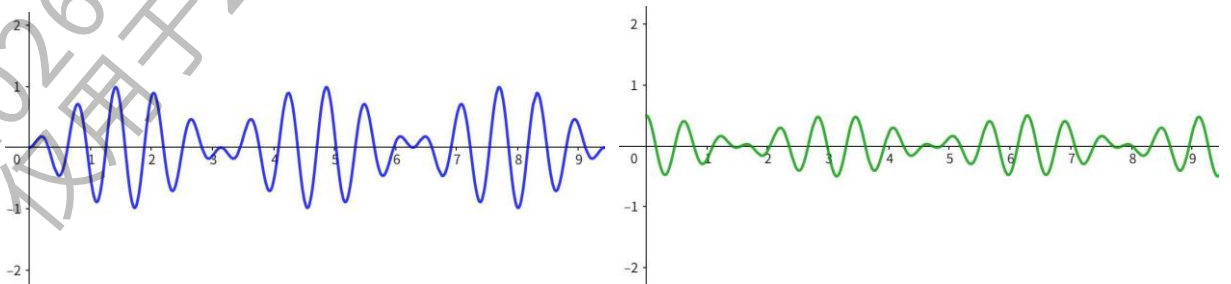


图 4.4 三角乘积项的示意曲线。快速振荡受到慢变因子调制，两类项在不同时间段占优。

含平均频率的因子描述快速摆动，含频率差的因子描述慢变幅。特别地，第一摆的相对初始偏转为 a 、第二摆为零且均静止释放时，有

$$A_p - A_m = \frac{\xi_{10} + \xi_{20}}{2} - \frac{\xi_{10} - \xi_{20}}{2} = \xi_{20} \approx 0$$

因此

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &\approx a \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \bar{\omega} t \\ \xi_2(t) &\approx a \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \bar{\omega} t\end{aligned}$$

两个包络分别按余弦和正弦的绝对值变化，因此振幅交替增强。一般初始条件下，两个包络满足

$$\begin{aligned}R_1^2(t) &= A_p^2 + A_m^2 + 2A_p A_m \cos \Delta\omega t \\ R_2^2(t) &= A_p^2 + A_m^2 - 2A_p A_m \cos \Delta\omega t\end{aligned}$$

包络最小值取决于两个模态的激发是否相等，所以线性系统也可能保留一定余振。同一磁摆的包络从最大值再次回到最大值所需的时间为

$$T_{beat} = \frac{2\pi}{|\Delta\omega|} = \frac{1}{|f_m - f_p|}$$

可见，平均频率决定快速摆动，频率差决定拍周期。单个磁摆振幅变化时，两个线性简正模仍然各自独立振动。

4.5 摆长、间距与初始条件的影响

附录图 A.5 对比了不同摆长下的系统频谱响应。当摆长由 9.132 cm 缩短至 7.393 cm 时，主共振峰明显向高频方向移动，这符合单摆固有频率随摆长减小而增大的物理规律。

磁耦合强度参数 k 理论上与悬点间距 d 的五次方成反比。当间距从 8 cm 缩短至 7 cm 时，磁斥力增强导致反相模频率显著升高，使得同相与反相模态的频差走宽，时域上的拍频周期随之缩短；相应的频域与时程对比详见图 A.6。

此外，两摆的初始释放位移直接决定了各模态的初始激发挥发度。若第二摆偏离自由平衡位置的初始位移非零，两模态所占份额通常不再等幅，导致时域振幅包络的谷值无法归零（图 A.7）。需要指出的是，未受直接牵引的磁摆虽在初始磁斥力作用下略微偏离自由平衡点，但因该初始偏角极小，这一副效应在当前参数下并不显著。

4.6 三磁摆的模态扩展

三个磁摆具有三个简正模。由于磁矩交替排列，相邻磁铁近共轴时相互排斥，两端磁铁则相互吸引。保留非近邻作用后，用方程相加、相减可得到以下三个组合：

$$S_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, S_2 = \xi_1 - \xi_3, S_3 = \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{45k}{8m}}, \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{18k}{m}}$$

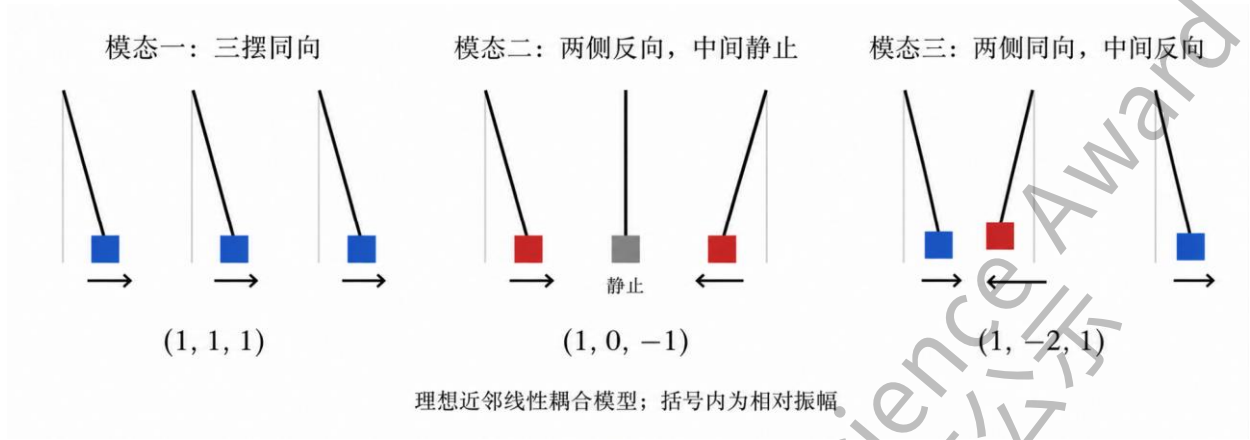


图 4.5 三磁摆的线性振型，从左至右为(1, 1, 1)、(1, 0, -1)和(1, -2, 1)。

第二模态对于中间磁摆的影响为 0。因此，两端磁摆的 FFT 一般包含三个主峰，中间磁摆的 FFT 则只有两个主峰，分别代表第一、第三模态。实验频谱支持这一结果，如图 4.6 所示。完整的标量方程、解析解及参数比较列于附录 A。

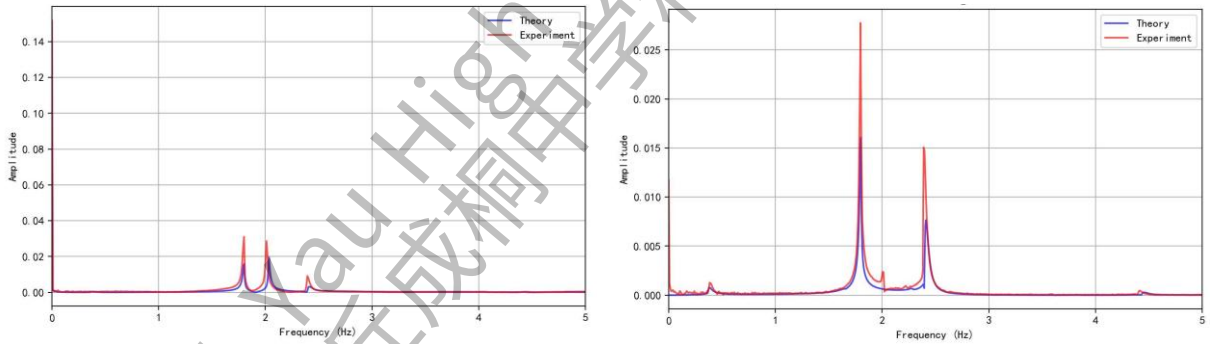


图 4.6 三磁摆的频谱。左为端部磁摆，右为中间磁摆；中间位置对第二模态的响应较弱。

以上结果说明，小振幅下的振幅交替主要可以用不同频率的模态叠加解释。但这还没有回答大振幅时两种振动成分的比例是否保持不变。因此，下一章中我们将直接比较取和、取差后的实验曲线，研究超出线性拍频的变化。

5 模态振幅如何变化？

5.1 从实验观察两种振动模态

上一章表明，两摆振幅的交替消长可以由线性拍频机制很好地解释。然而，磁力耦合摆的全部动力学行为是否都能纳入线性框架？答案显然是否定的。随着初始摆角与悬点间距的进一步改变，实验中呈现出两类截然不同的运动构型：在某些工况下，两摆振动剧烈互易，时域波形杂乱且缺乏规律；而在另一些条件下，系统在经历短暂初始演化后，转而长期维持以同向摆动为主的相对稳定状态。

然而，若仅直接观察单个摆角的位移时程（如图 5.1 所示），强烈的拍频调制往往会掩盖深层的非线性特征。为此，我们通过对两摆角分别作线性加和与相减（如图 5.2 所示），我们构造出系统的简正模时间序列。图 5.3 直观展示了这一坐标变换的优势：上图中看似复杂的单摆摆角曲线，在投影至模态空间（下图）后，便清晰地解构为两个振幅近似恒定的周期性模态。可以说，本文所关注的各类“非线性现象”，其动力学本质正是简正模在振幅与频率演化上对标准正弦响应的偏离。

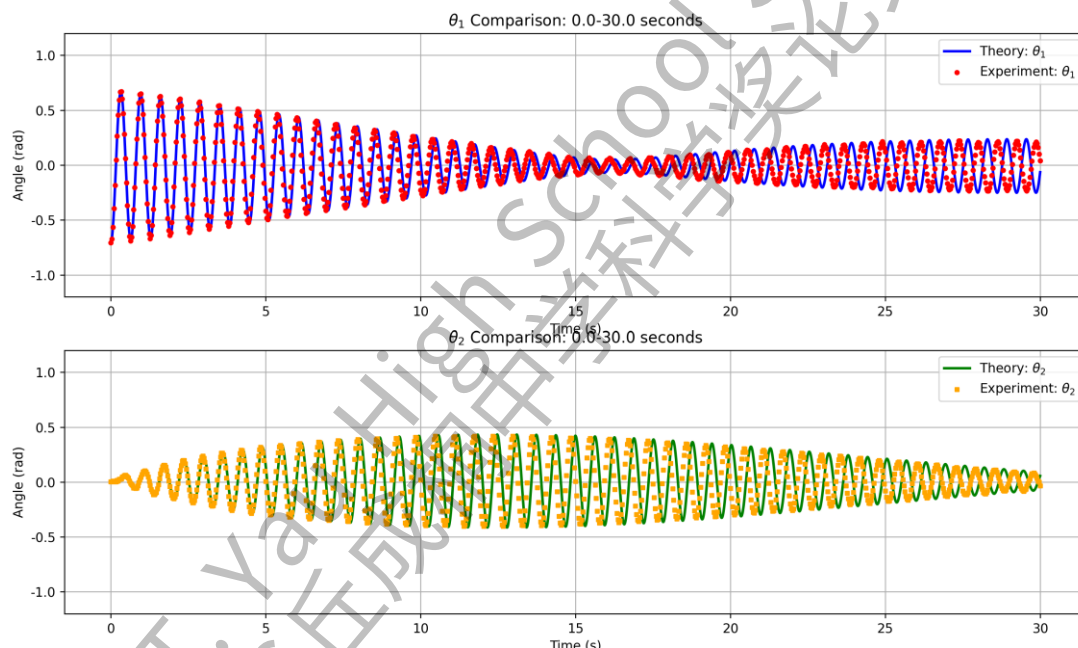


图 5.1 两摆振动强弱变化的实验与理论比较。上、下图分别为 θ_1 和 θ_2 ，曲线为理论结果，散点为实验数据。第一摆的振幅先减小、随后有所恢复；第二摆的振幅也随时间变化。仅凭摆角曲线，难以判断模态自身的振幅是否改变。

同向运动：和相加，差相消

反向运动：和相消，差相加

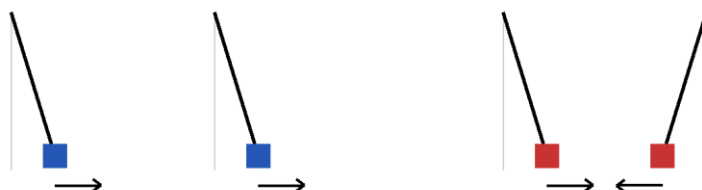


图 5.2 取和、取差的含义示意。左侧为同相振型，右侧为反相振型；两摆的偏转均相对于平衡位置描述。纯同相运动在角度差中消失，纯反相运动在角度和中消失。

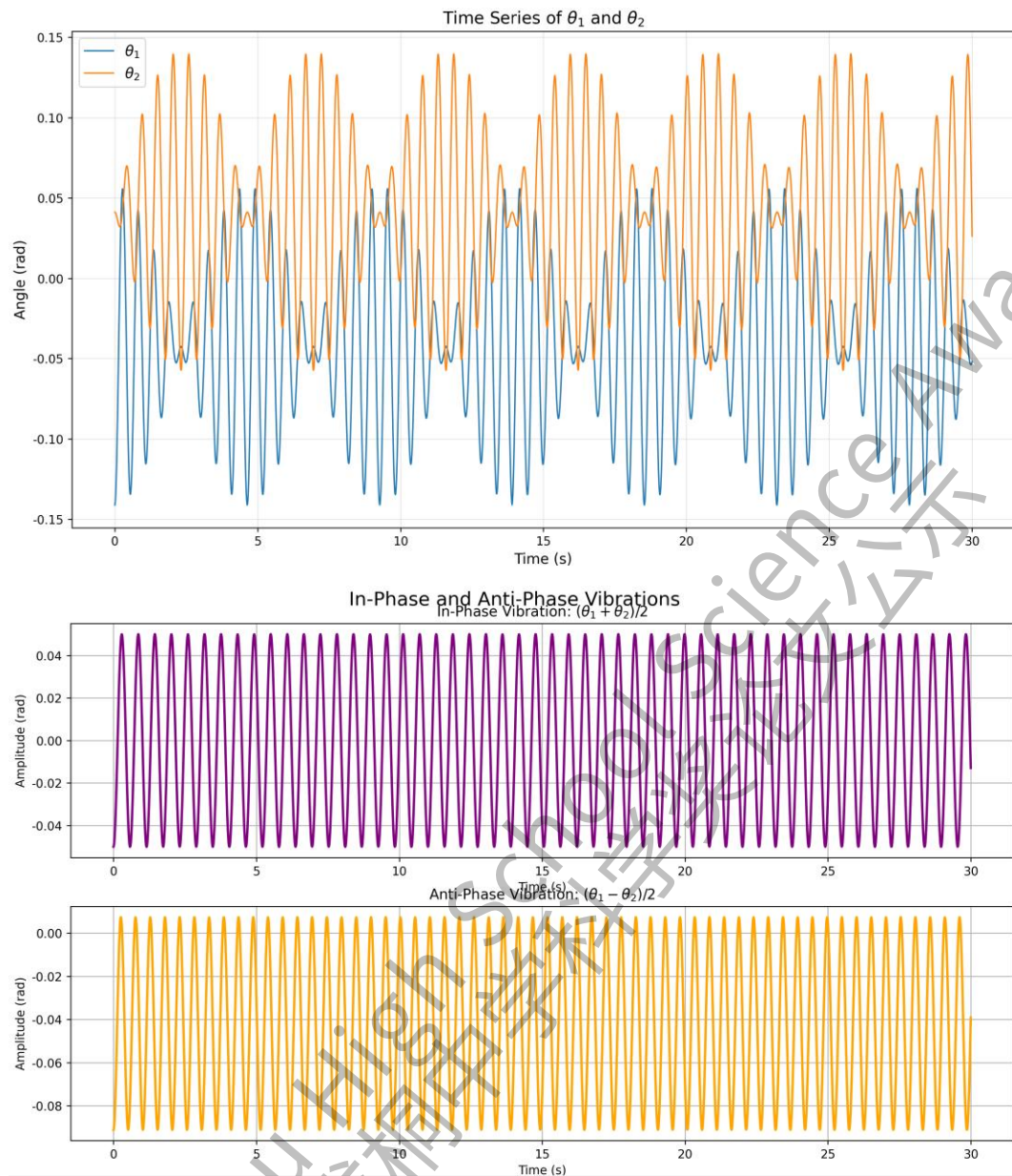


图 5.3 小振幅情况下的时间序列。上图为两个摆角，下图为同相、反相分量。

为进一步验证上述理论预测，我们开展了对应的实验检验。如图 5.4 所示，在两种不同间距下，同相模与反相模的时程演化均清晰可辨，实验数据与理论曲线吻合良好。进一步追踪各响应曲线的振幅包络（极值连线）可以发现，代表反相模的角度差包络起伏程度存在显著差异：随着悬挂间距 d 的增大，包络的波动幅度明显增加。

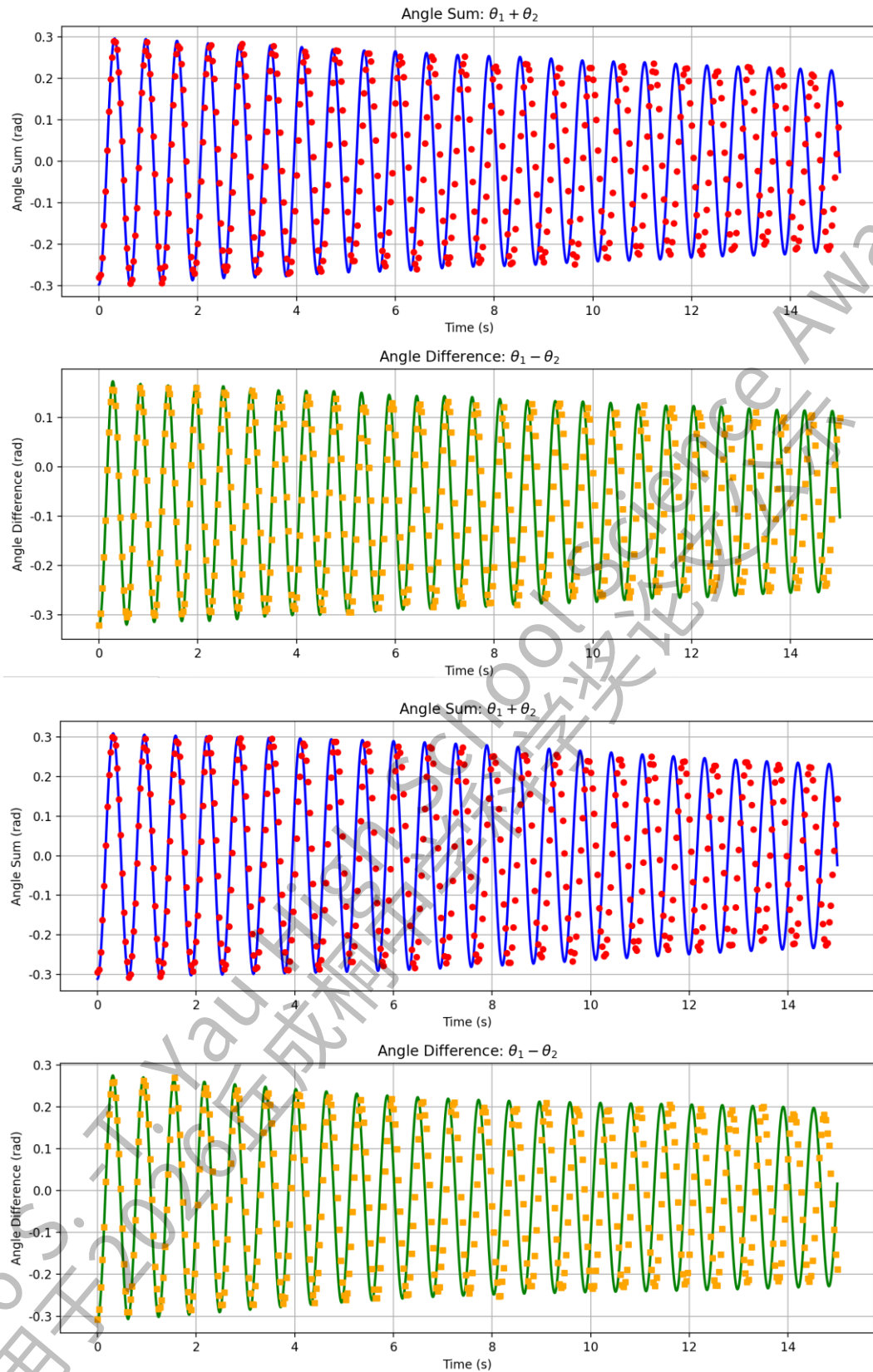


图 5.4 $d = 10 \text{ cm}$ (上) 与 $d = 15 \text{ cm}$ (下) 的模态理论—实验比较。每组上图为角度和，下图为角度差。比较同一组内两模态的包络变化，以及两组之间调制程度的差别；曲线、散点分别为理论与实验。

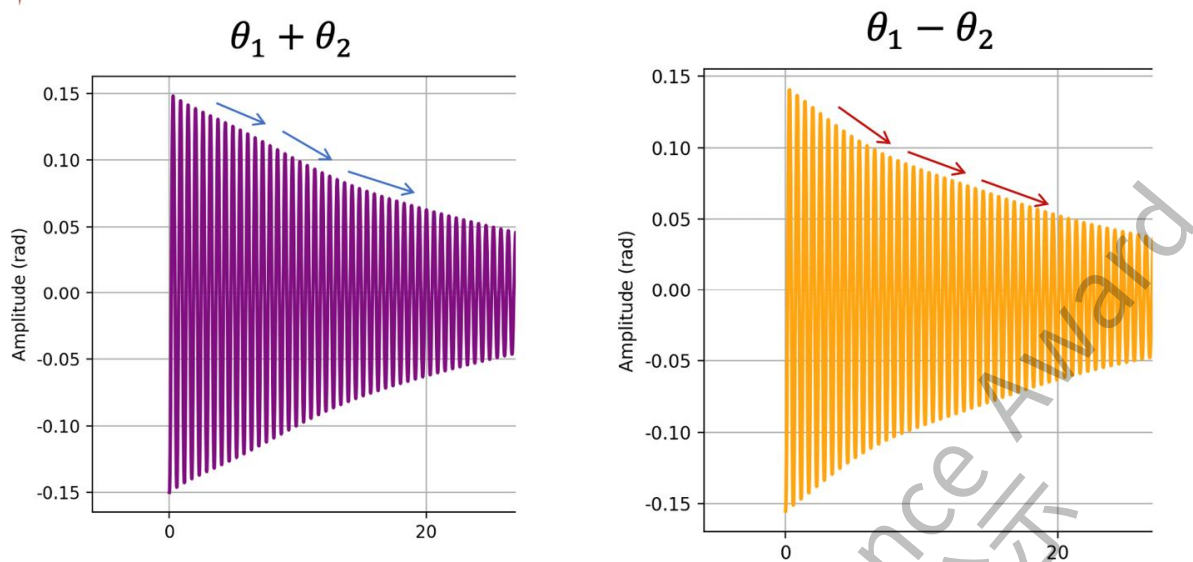


图 5.5，更长时间的带阻尼理论曲线，使用箭头标明了简正模振幅的变化

更显著的差异展现在图 5.6 的实验结果中：尽管两模态在初始时刻的振幅相当，但反相模在演化初期便出现剧烈衰减，约 10 s 后振幅始终维持在极低水平；与此同时，同相模则始终保持着可观的振幅。这一分化特征在理论计算与实验实测中均清晰可见。这表明，通过合理调控释放初始条件与悬点间距，系统能够实现动力学自组织——从初始的双模态竞争混叠状态，自发转变为同相模持续占据主导的构型，而这恰好对应了我们此前所期望寻得的“稳定”振动状态！

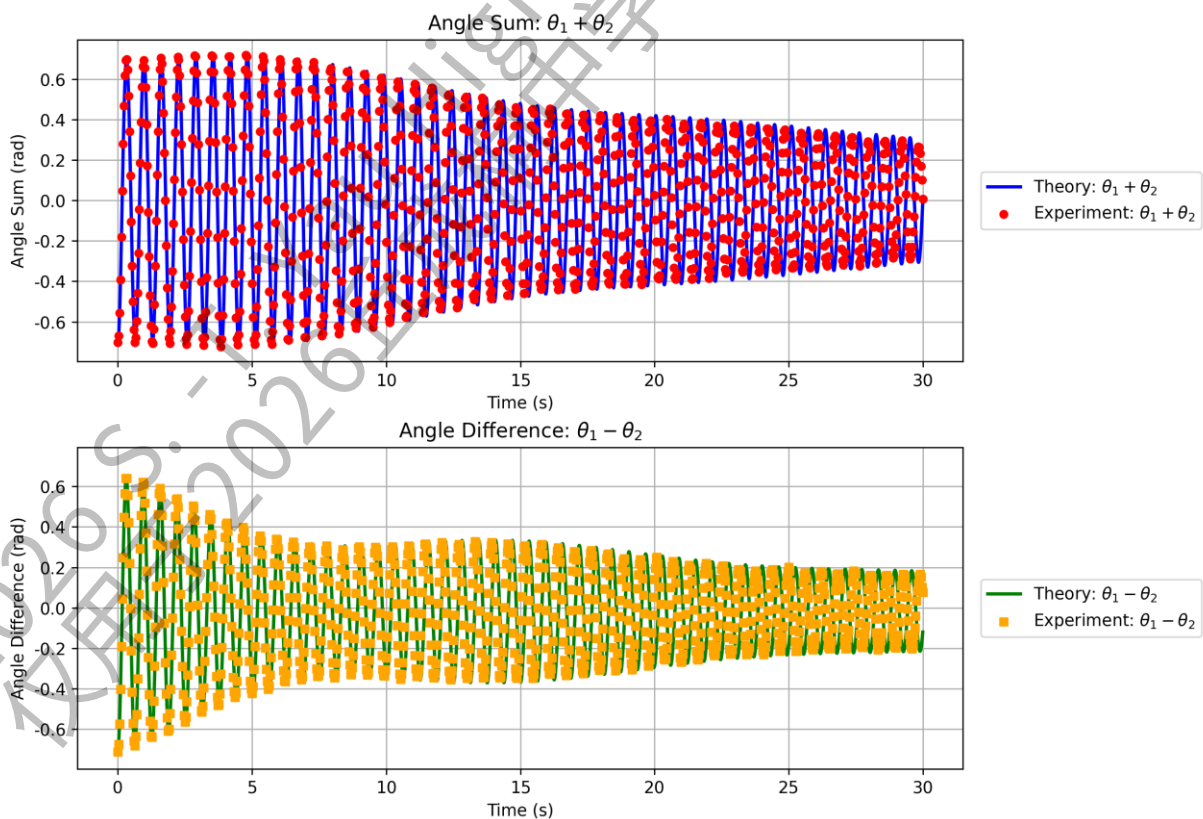


图 5.6 d 和初始角度更大时两种模态表现的实验与理论对照。

5.2 使用轨迹形状分析简正模波动

为更直观地展现时程演化中的动力学特征，我们进一步在模态相平面中对比系统的运动轨迹（图 5.7）。在理想无阻尼的线性模型中，两简正模的振幅严格恒定，相平面轨迹被严格限制在一个矩形区域内；而在考虑完整非线性相互作用后，轨迹在同相模轴向明显向外凸出，而在反相模轴向则呈现内凹畸变。需要强调的是，此处展示的是以角度和、角度差为坐标轴的模态空间轨迹，而非两只磁铁在真实物理空间中的运动轨迹。这种轨迹的几何变形恰与前述模态振幅的调谐规律相呼应，下文将结合系统势能的泰勒展开深入阐释其物理机制。

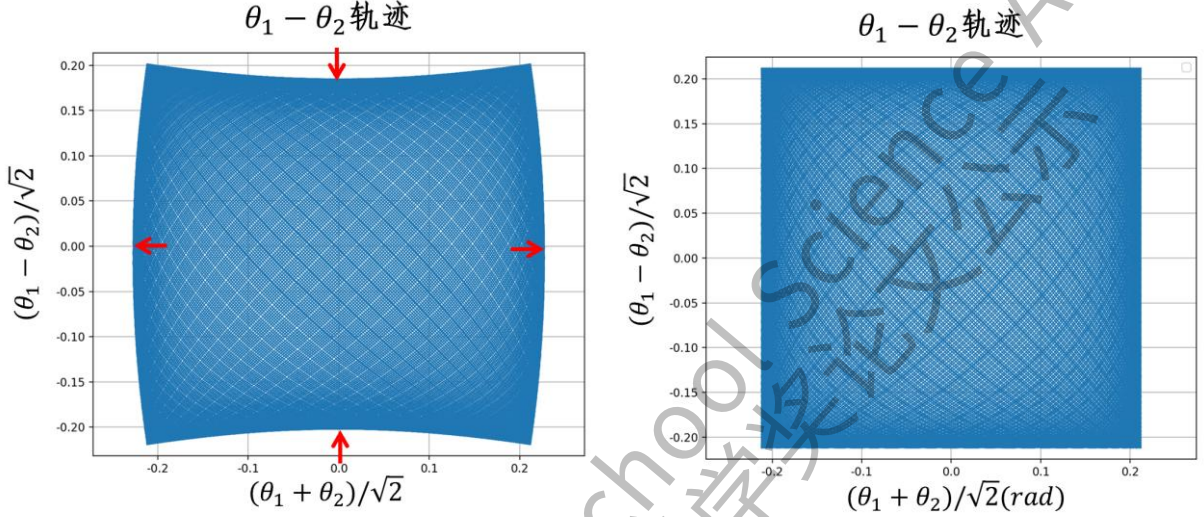


图 5.7 非线性与线性模型的模态轨迹。左图的左右边界向外凸出、上下边界向内凹入；右图保持矩形边界。比较的是无阻尼计算，用于分离阻尼衰减与非线性变形。

为解释这一现象，我们分别提取同相方向和反相方向的势能曲线

$$V_{(1,1)} = V(\theta_1, \theta_2), (\theta_1 = \theta_2)$$

$$V_{(1,-1)} = V(\theta_1, \theta_2), (\theta_1 = -\theta_2)$$

我们再计算这两个方向上的势能二阶导数，并与线性近似比较，如图 5.8 所示。线性势能是二次函数，二阶导数为

常数；完整势能的二阶导数则随摆角改变。原数值图两端的突变来自差分边界处理，不参与这里的趋势判断。

从图 5.8 中可以发现，在所考察的振幅范围内，势能曲线在同相方向相对平缓，在反相方向相对陡峭。这解释了为什么轨迹在同相方向凸出、在反相方向凹陷：相同的势能变化在前一方向允许较大的位移，在后一方向允许的位移较小。

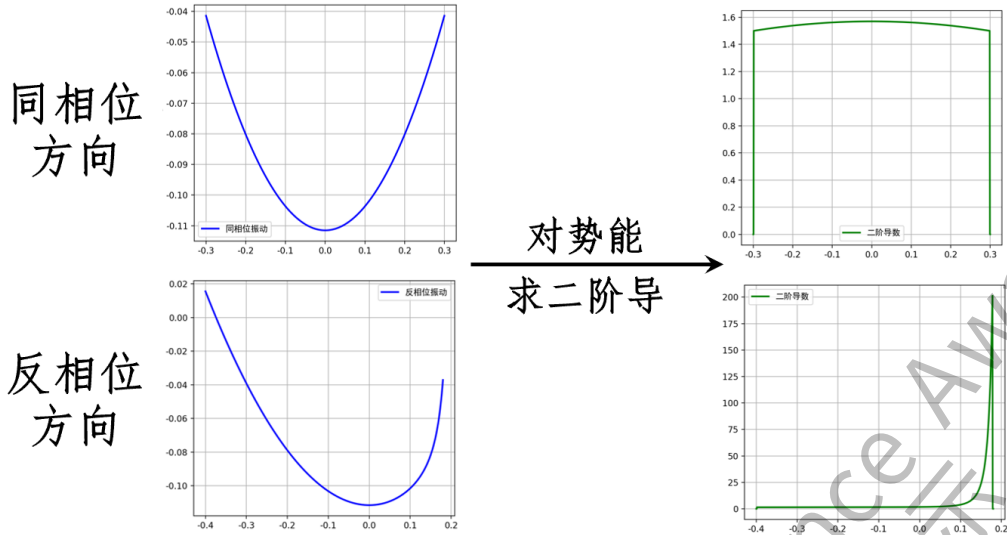


图 5.8 同相、反相方向的势能曲线及其二阶导数。线性近似用于比较两个方向上恢复作用的变化。

在确定了相平面的运动边界后，我们还可以通过轨迹的具体拓扑形态来分析简正模的演化。系统在包络边界内描绘出类似李萨如图形的复杂缠绕轨道。图 5.9 左侧展示了两模态振幅波动较小的平稳阶段；右侧则对应同相模振幅增大、反相模振幅同步衰减的演化阶段，这在几何上印证了同相成分的增强与反相成分的削弱具有互补的协同性。上述振幅反向消长的动力学规律，同样可以在图 5.10 的摆角时程曲线中清晰地观测到。

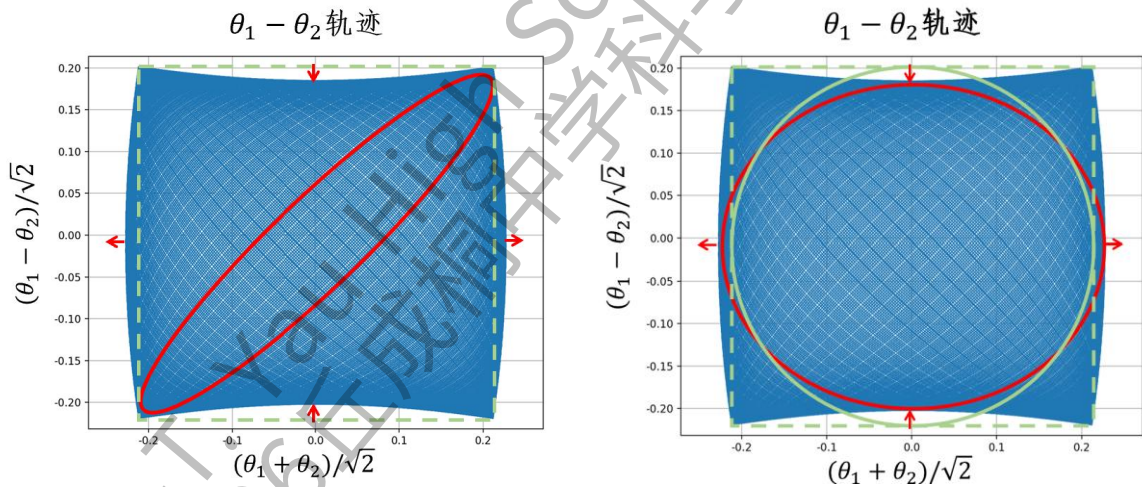


图 5.9 轨迹与模态振幅变化的对应。红线为磁力牛顿摆轨迹，浅绿色边框为线性轨迹的包络，浅绿色曲线为对应相位的线性运动。

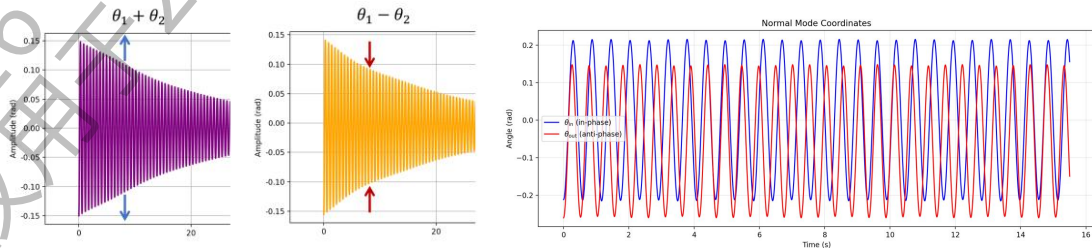


图 5.10 有阻尼与无阻尼的模态时间序列。左为有阻尼，右为无阻尼。比较两个模态的峰值包络，可见部分阶段同相模增强时反相模减弱。

5.3 四阶势能项的对照检验

前述相轨迹与时程图直观表明了简正模振幅会发生动态调制，但其核心机理尚待进一步厘清。为查明究竟是哪一阶非线性势能项主导了该模态振幅演化，我们在保持相同初始条件与观测时长的基准下，采用逐步截断势能项的方法进行对比仿真。将系统的总势能沿平衡位置关于广义坐标进行多元泰勒展开，表达式如下：

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots$$

V_n 表示总次数为 n 的势能项。对势能求一次广义坐标的负导数即可得到广义恢复力，因此势能展开中的二阶项对应动力学方程中的线性回复项，四阶势能项则对应经典的三阶非线性力项。图 5.11 对比了三种截断方案下的动力学响应：仅保留二阶与四阶项、保留二阶并剔除四阶项，以及包含所展开的全部非线性项。我们将上述两组截断情况与第三幅图（即保留全阶势能的对照基准）进行对比。自上而下观察：第一幅图保留了 $V_2 + V_4$ ，对比代表两模态的蓝、橙曲线上包络可以发现，二者峰值高度差随时间发生显著演化，且演化形态与全阶对照组高度吻合；而在第二幅图中剔除 V_4 后，两条包络线趋于相互平行，振幅的慢变调制特征明显被削弱。由此我们可以得出结论：**在本研究的非线性磁耦合系统中，四阶势能项是引发模态振幅调制的关键起因，而三阶势能项的贡献相对有限！**

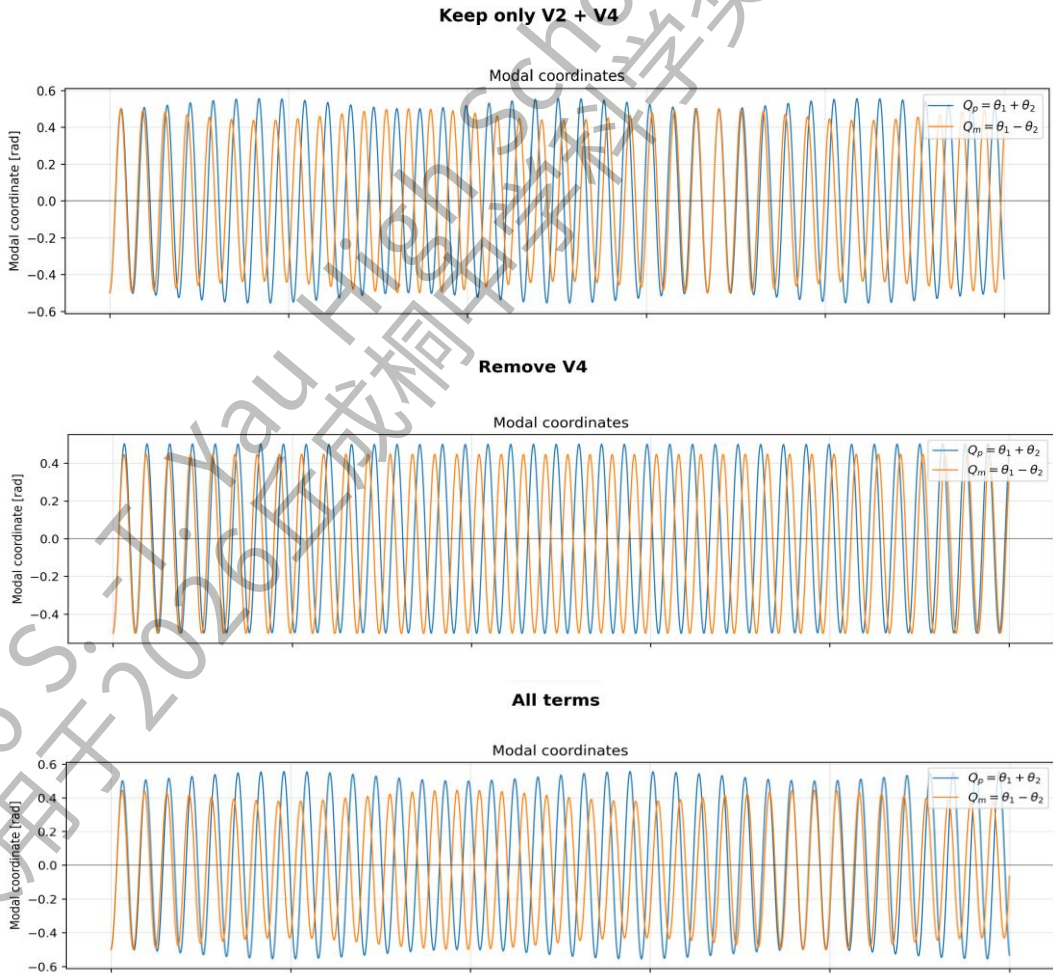


图 5.11 势能消项对照。从上到下第一个图保留 $V_2 + V_4$ ，第二个图删除 V_4 ，第三个图作为对照，保留所有阶势能

5.4 使用三阶模态方程解释相位差与模态能量传递

截断势能项的对照分析指明了引起模态畸变的主导阶数，接下来我们进一步阐明模态间能量转移的具体物理机制。我们沿用第 4 章的磁偶极子模型推导拉格朗日方程，但此次在动力学方程中将非线性项展开至角度的三阶（对应势能的四阶项）。需要说明的是，等效圆柱电流模型将继续用于精确的数值求解与实验对照；而此处构建的低阶解析方程，则旨在定性厘清模态振幅、相位以及瞬时频率三者之间的动态关联。计算时，我们将两个角度同时乘以辅助量 ε ，再按 ε 保留到三阶，最后令 $\varepsilon=1$ 。这样保留的是总次数不超过三的项，例如 $\theta_1^2\theta_2$ 。把两条方程相加、相减，即得到同相模和反相模的方程：

$$Q_p = \theta_1 + \theta_2, \quad Q_m = \theta_1 - \theta_2$$

记 $k = \mu_0\mu^2/(\pi d^5)$ ， μ 为磁偶极矩，等于电流圆柱模型的磁化强度 M 乘以体积 $\pi R^2 h$ 。完整三阶展开见附录 B。由于已知耦合较弱时非线性效应较强（这一点我们通过数值扫描得知，下文会进行定性说明），且上一节中已经用数值方法证明二阶项并不重要，我们可以推断含 k 项乘上二阶或者三阶 Q 项后为小量。为得到便于解释的定性方程，我们略去二阶动力学项及含 k 的三阶项，保留重力三阶项、线性磁耦合项和常数偏移项：

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_p &= -\frac{g}{l}Q_p + \frac{g}{8l}Q_m^2Q_p + \frac{g}{24l}Q_p^3 \\ \ddot{Q}_m &= -\frac{3dk}{lm} - \left(\frac{g}{l} + \frac{12k}{m}\right)Q_m + \frac{g}{24l}Q_m^3 + \frac{g}{8l}Q_mQ_p^2 \end{aligned}$$

反相模中的常数项不能直接删去。先取稳定平衡 $Q_p=0, Q_m=q_0$ ，再将反相坐标平移到这里位置：

$$\begin{aligned} \frac{3dk}{lm} + \left(\frac{g}{l} + \frac{12k}{m}\right)q_0 - \frac{g}{24l}q_0^3 &= 0 \\ q_p &= Q_p, \quad q_m = Q_m - q_0 \end{aligned}$$

以下振幅均相对于平衡位置计算。平移后的线性角频率记为 Ω_p 和 Ω_m ，它们的平方差仍为 $12k/m$ 。

要判断两个模态为何交替增强、减弱，我们需要计算交叉耦合作用在一个快振动周期内做的功。在本文中我们将两个模态近似写成振幅和相位缓慢变化的余弦振动：

$$q_p = A_p \cos \theta, \quad q_m = A_m \cos(\theta + \varphi), \quad \theta \approx \omega t$$

其中 A_p, A_m 为模态振幅， $\varphi = \theta_m - \theta_p$ 为反相模相对于同相模的相位差。因此， $\varphi > 0$ 表示反相模领先， $\varphi < 0$ 表示同相模领先。这里的 θ_p, θ_m 是振动相位，与磁摆角度 θ_1, θ_2 不同。

记 $c = g/(8l)$ ，同相模受到的交叉耦合作用为 $cq_m^2q_p$ 。将它乘以同相模速度，再对一个快振动周期取平均，就得到平均输入功率。利用三角恒等式可得：

$$\begin{aligned} \langle P_p \rangle &\approx \frac{c\omega A_p^2 A_m^2}{8} \sin 2\varphi = \frac{g\omega A_p^2 A_m^2}{64l} \sin 2\varphi \\ \langle P_m \rangle &\approx -\frac{g\omega A_p^2 A_m^2}{64l} \sin 2\varphi \approx -\langle P_p \rangle \end{aligned}$$

式中的功率除以了共同的模态惯性系数 $m l^2/2$ ；乘回这一系数即可得到实际功率。可以看到，两个简正模在严格同相时 $\varphi = 0$ ，正功和负功在最低阶平均中抵消；若 $0 < \varphi < \pi/2$ ，反相模向同相模传递能量；若 $-\pi/2 < \varphi < 0$ ，则同相模向反相模传递能量。

相位差最初主要由两个模态的线性频率差积累而来。随着振幅分配改变，非线性频移也会改变两模态的快慢。这里需要区分相位差和频率差：前者表示已经领先多少，后者决定领先程度正在怎样变化。其中，局部周期取相邻两个主波峰的时间间隔：

$$T_{p,n} = t_{p,n+1} - t_{p,n}, \quad \tau_{p,n} = \frac{t_{p,n+1} + t_{p,n}}{2}$$

反相模按同样方法处理，再把两组结果插值到同一实际时间轴上。周期较短的模态相位积累较快。在波形以基频为主、变化缓慢时，有：

$$\dot{\varphi} = \omega_m - \omega_p \approx 2\pi \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p} \right)$$

因此，周期曲线可以说明相位差正在增大还是减小，以及变化的快慢；相位差本身则需要给定初始相位，再对上式的频率差作时间积分。周期差不能直接当成相位差。当两条局部周期曲线交叉时， φ 的变化方向可能反转，但 φ 通常不同时等于零。

如图 5.12 所示，反相模的周期始终较短，展开后的 φ 持续增加。第一阶段，同相模振幅增大、反相模振幅减小，对应反相模向同相模传递能量；在上述近似下，这一段对应 $0 < \varphi < \pi/2$ 。第二阶段，反相模振幅恢复，对应 $\pi/2 < \varphi < \pi$ ，此时 $\sin(2\varphi)$ 变负，同相模向反相模传递能量。

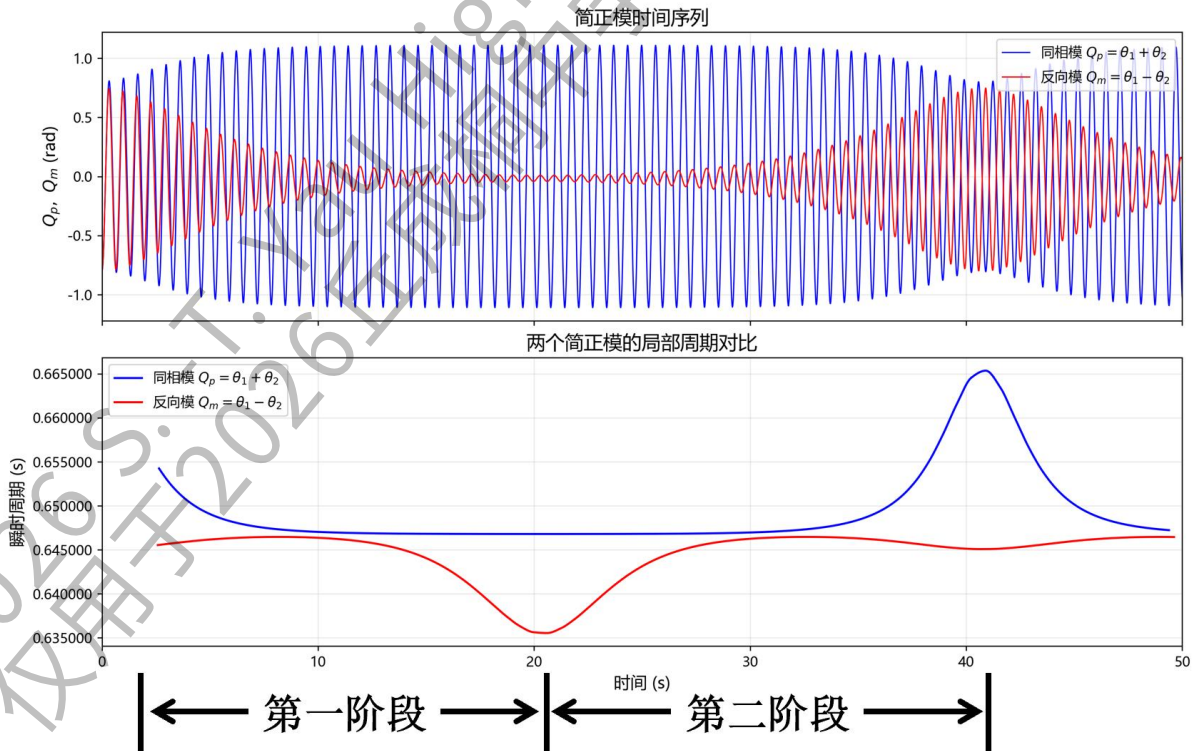


图 5.12 极接近临界却还未发生周期交叉时的两个阶段。上为模态时间序列，下为局部周期；蓝色为同相模，红色为反相模。第一，第二阶段按简正模能量交换方向过程划分。

5.5 为什么耦合减弱时扭曲反而增强

由上述解析表达式可知，能量在两个简正模之间的转移并不直接由耦合强度 k 决定，而是由模态间的相位差 φ 所主导（这也是本近似推导的直接结论）。有限的相位差打开了模态间能量交换的通道，而相位差的演化快慢则决定了能量定向传递的持续时间。耦合参数 k 实际上是通过以下间接机制调控能量传递量的：当悬点间距 d 增大时，线性耦合强度 k 相应减弱，导致两模态的固有频率差变小、相对相位漂移变慢，系统因而能在单一传能方向上维持更久，从而在单周期内累积出更显著的振幅调制。图 5.13 显示，相位变化较慢的一组在相平面中呈现出更剧烈的轨迹畸变，验证了即便磁耦合减弱，累积的振幅变化反而可能被放大的物理现象。图 5.13 的数据与本章开头的实验结果均支持这一机制。

回到本章最初的核心疑问：模态能量分配的变化剧烈程度，既取决于瞬时耦合强度，更取决于有效传能方向的维持时间。双磁摆的动力学行为表明，模态振幅的演化已超出了线性拍频的解释，势能消项和平均做功分别说明了主要阶次与传能方向。接下来，我们将研究扩展至三磁摆系统，检验这种“耦合减弱反而诱导更强调制”的反常趋势在多模态竞争下是否依然成立。

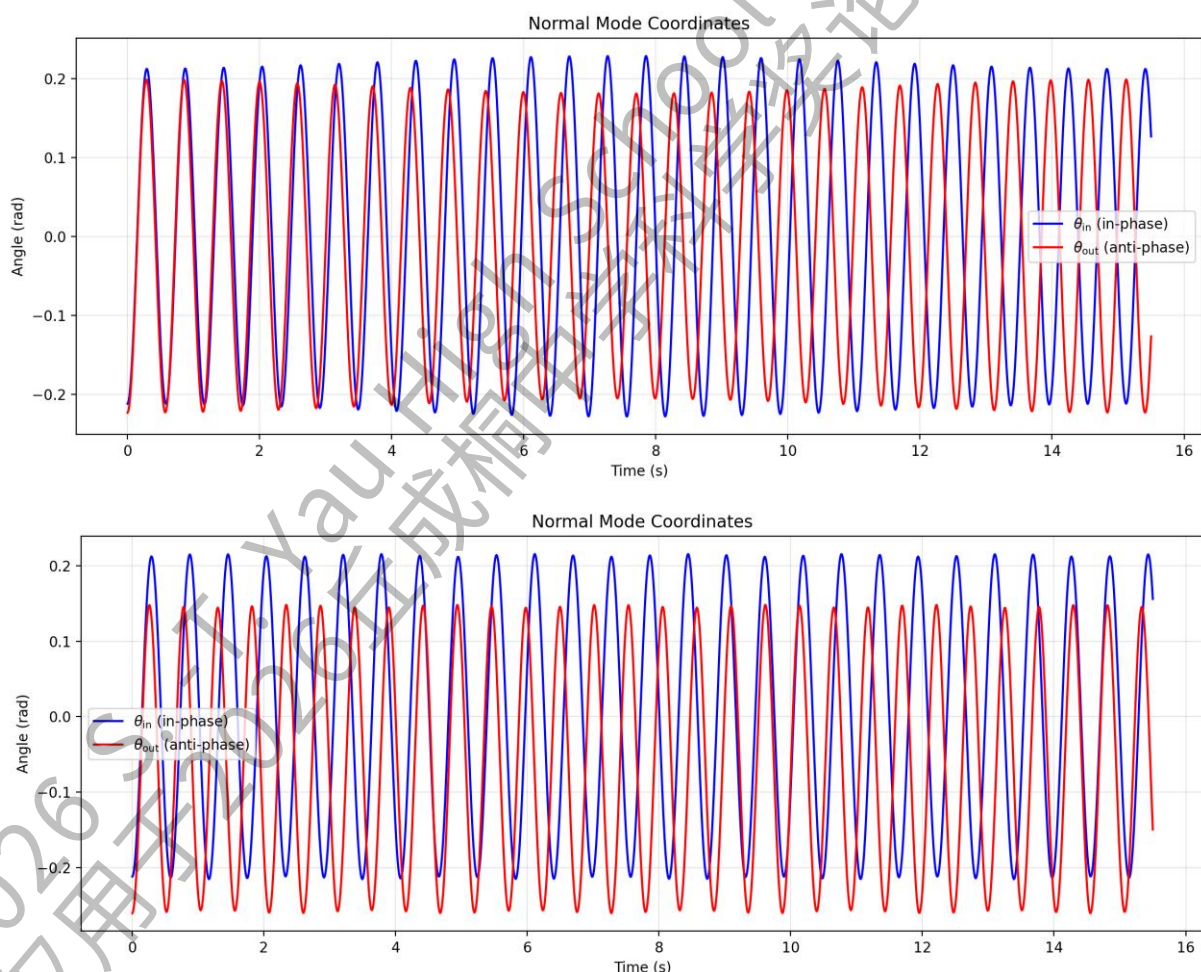


图 5.13 相位关系变化快慢对振幅变化的影响。上图 $d=15\text{cm}$ ，下图 $d=10\text{cm}$ 。上图的相位关系变化较慢，下图变化较快；前者在同一传能方向上积累的时间更长。

5.6 三磁摆中的扩展验证

我们进一步把相同的比较扩展到三磁摆。首先画出三个摆角组成的空间轨迹及其平面投影，再将运动放在三个简正模坐标内。图中 q_{same} 、 q_{anti} 和 q_{mix} 分别对应(1, 1, 1)、(1, 0, -1)和(1, -2, 1)方向。

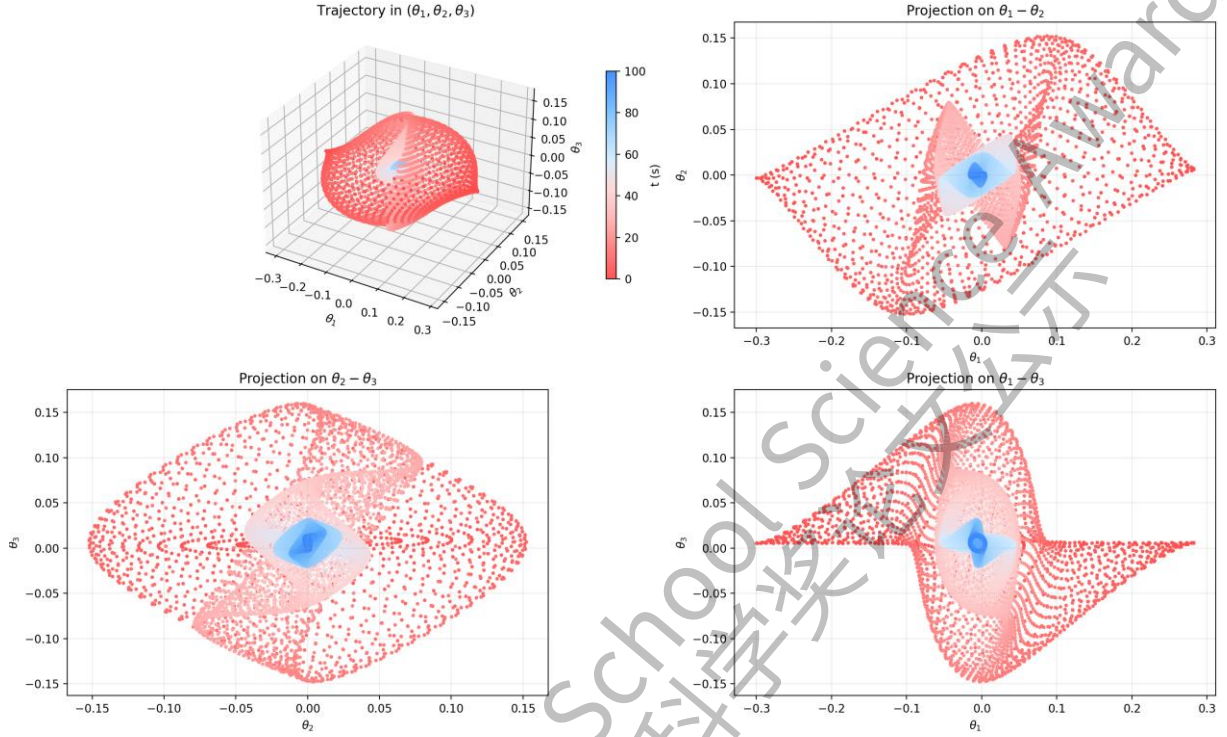


图 5.14 三磁摆在物理坐标中的三维轨迹。

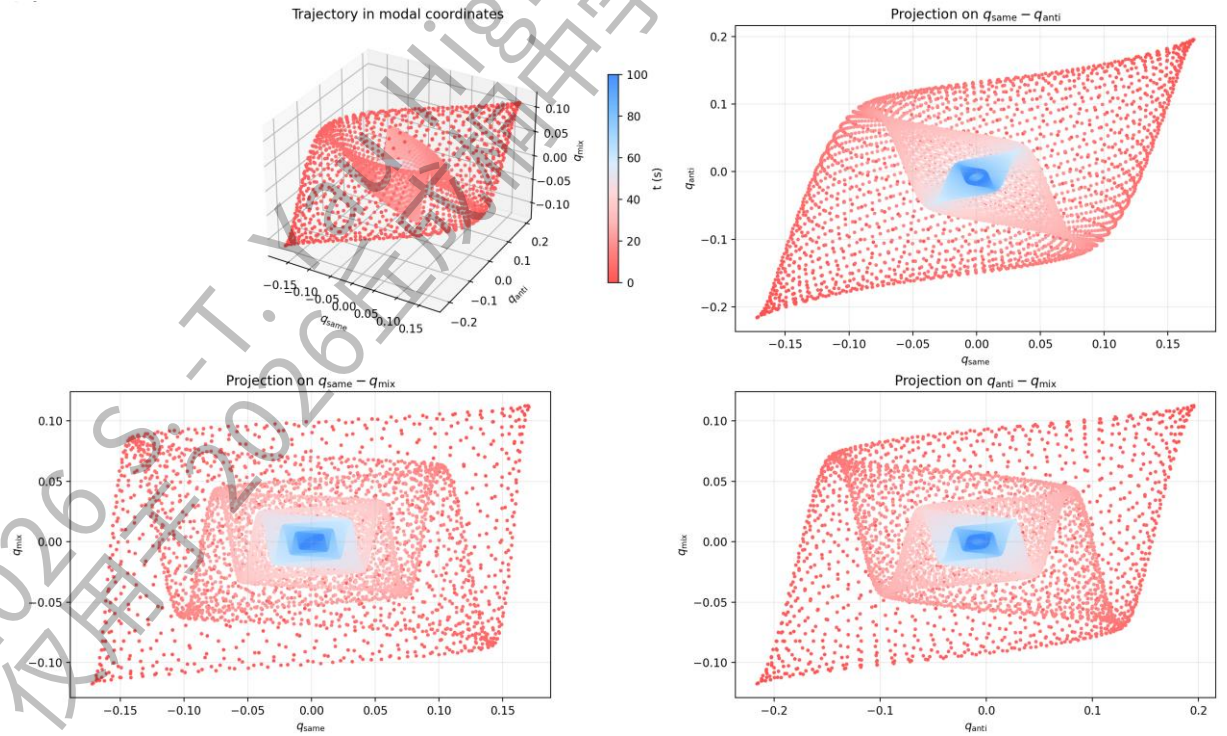


图 5.15 三磁摆投影到线性模态坐标后的三维轨迹。

图 5.16 和图 5.17 保持第一摆初始角度为 -0.3 rad ，分别取 $d = 0.16 \text{ m}$ 和 $d = 0.12 \text{ m}$ ，并消除阻尼项。对比模态轨迹及其投影，可以清晰地看到看到较大间距下边界扭曲更明显。这与双磁摆的观察一致，说明上述解释也能用于理解三个模态参与时的结果。

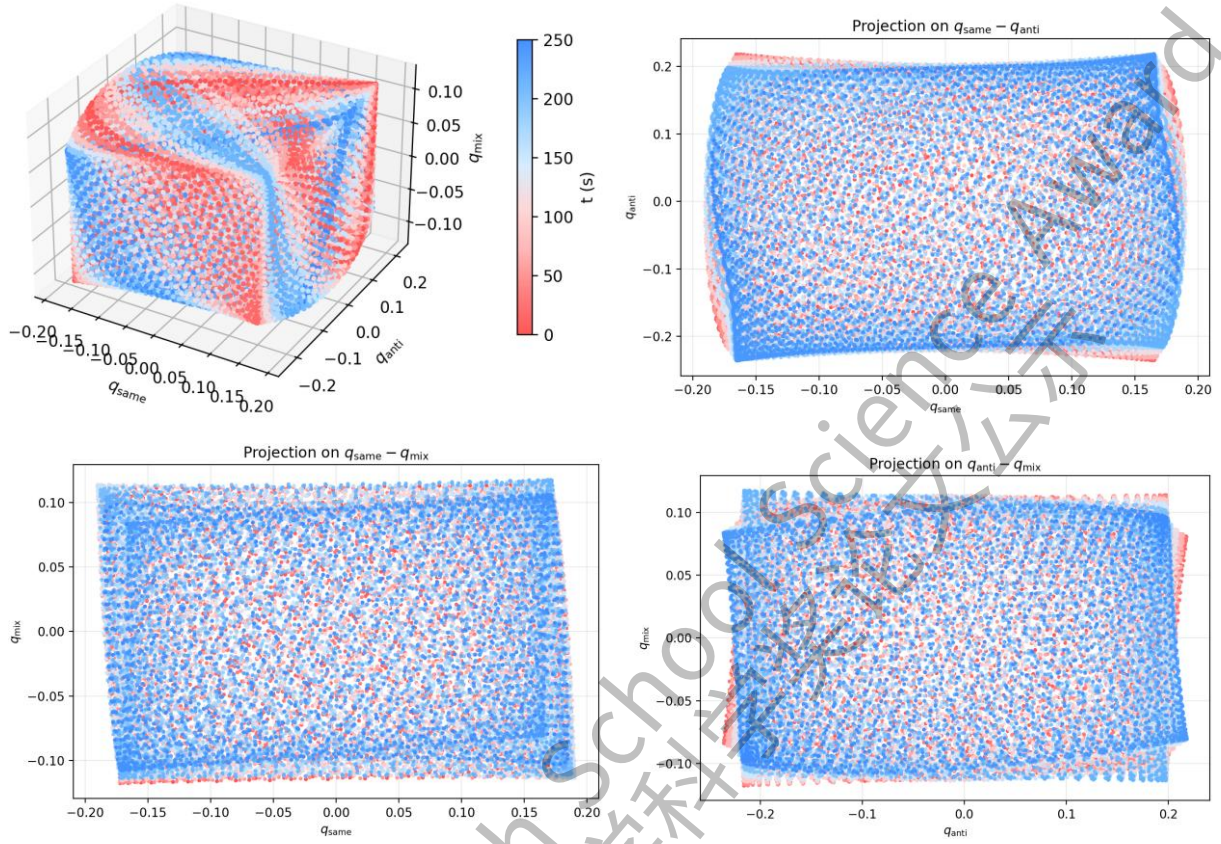


图 5.16 $d = 0.16 \text{ m}$ 、 $\theta_{i0} = -0.3 \text{ rad}$ 时无阻尼情况下三磁摆的时间序列与轨迹。

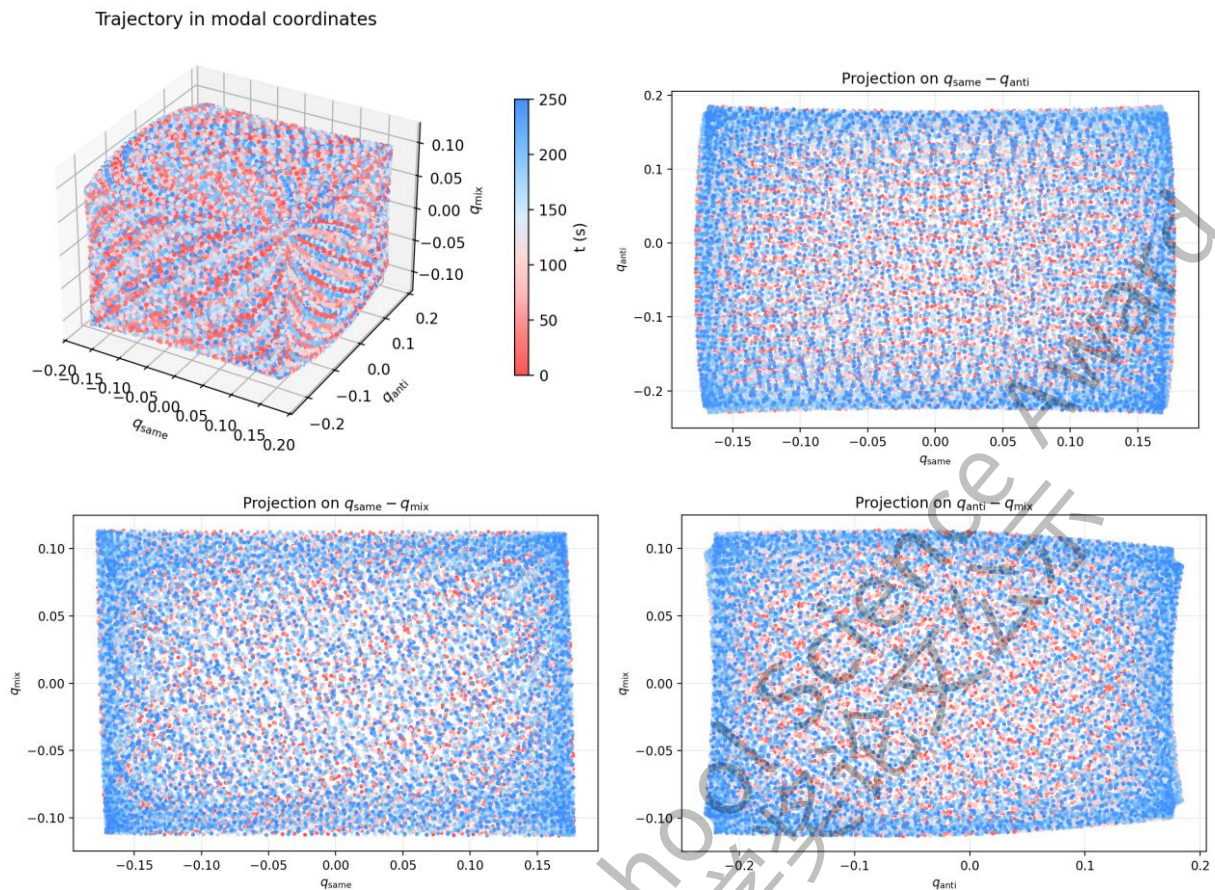


图 5.17 $d = 0.12 \text{ m}$ 、 $\theta_{i0} = -0.3 \text{ rad}$ 时无阻尼情况下三磁摆的时间序列与轨迹。

由背景知识我们可以得知，四阶势能项常常产生 1:1 内共振效应。这也定性解释了为何两个模态频率越接近振幅扭曲越强。然而，在本章节中，反向位模频率仍然始终高于同相位模频率。因此，我们进一步提出：继续改变初始摆角和悬点间距，使两个模态的频率相等并发生交叉，振幅与相位的变化会有什么不同？以及能否使一种振动形式持续占优，达到视觉上“稳定”振动的效果？下一章将围绕这些问题展开。

6 非线性效应带来的能量局域化与稳定振动优化

前面我们提出，希望通过调节参数，使系统从两种振动成分叠加、看起来较“乱”的运动，转为一种模态持续主导的较“稳定”运动。第五章表明，非线性作用能够改变两个模态的振幅比例。那么，这种变化能否使一种模态在较长时间内保持优势，而不只是短暂增强？

在特定初始偏角与悬挂间距下（增大初始摆角的绝对值和悬点间距 d ），实验中确实观测到了该预期行为：开始时，两个模态的振幅相近；随后，反相模的振幅明显减小，而同相模仍保持较大的振幅。约 10 s 之后，反相模在剩余观察时段内始终较弱，同相振动持续占据主导。虽然阻尼使整体振幅逐渐衰减，但两种模态的减弱程度明显不同。图中的实验数据与理论曲线呈现出相同的趋势。

这说明，改变释放条件和悬点间距，可以使两种模态的占比发生显著变化，并使同相振动在一段时间内持续占优。下面我们将进一步比较不同参数下的模态振幅、局部周期和相位差，研究这种持续占优的状态在什么条件下出现，以及它与两摆之间的振动传递和局域化有怎样的联系。

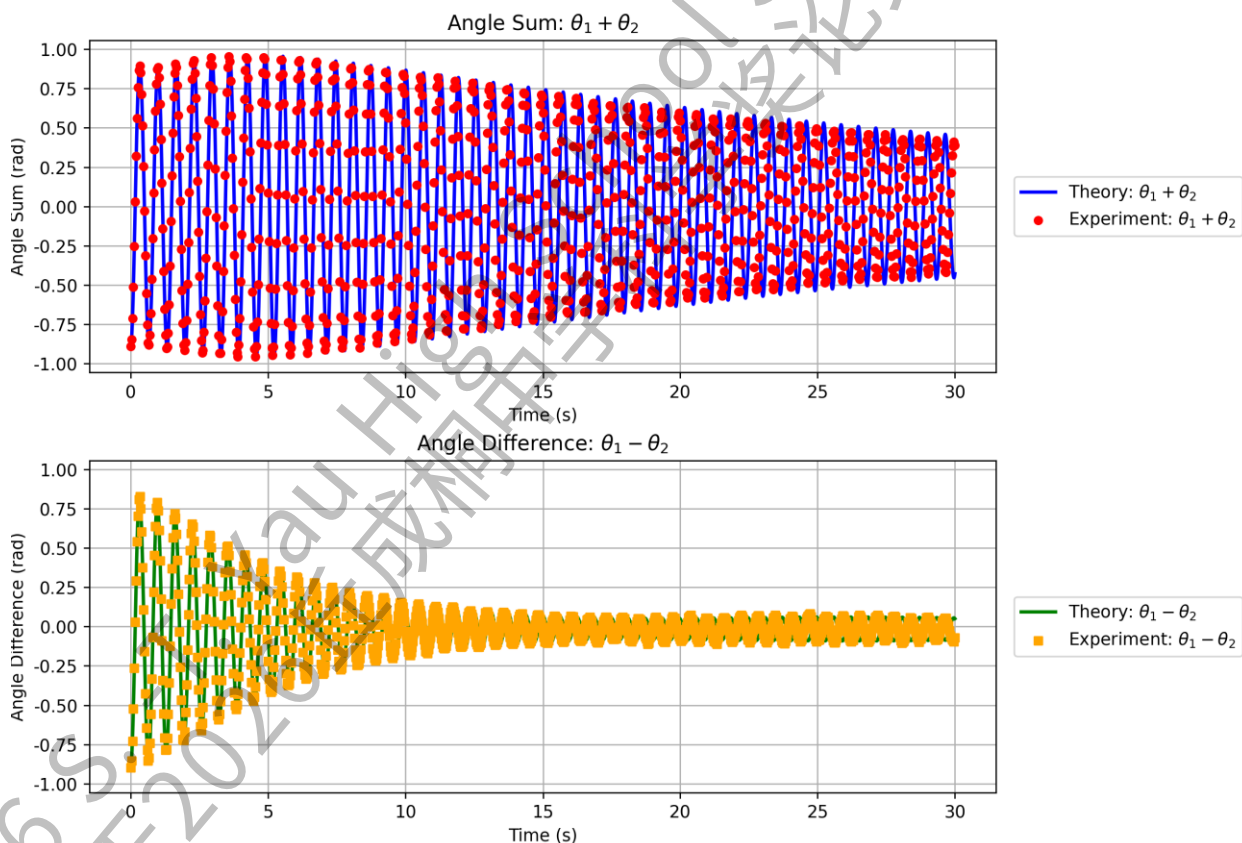
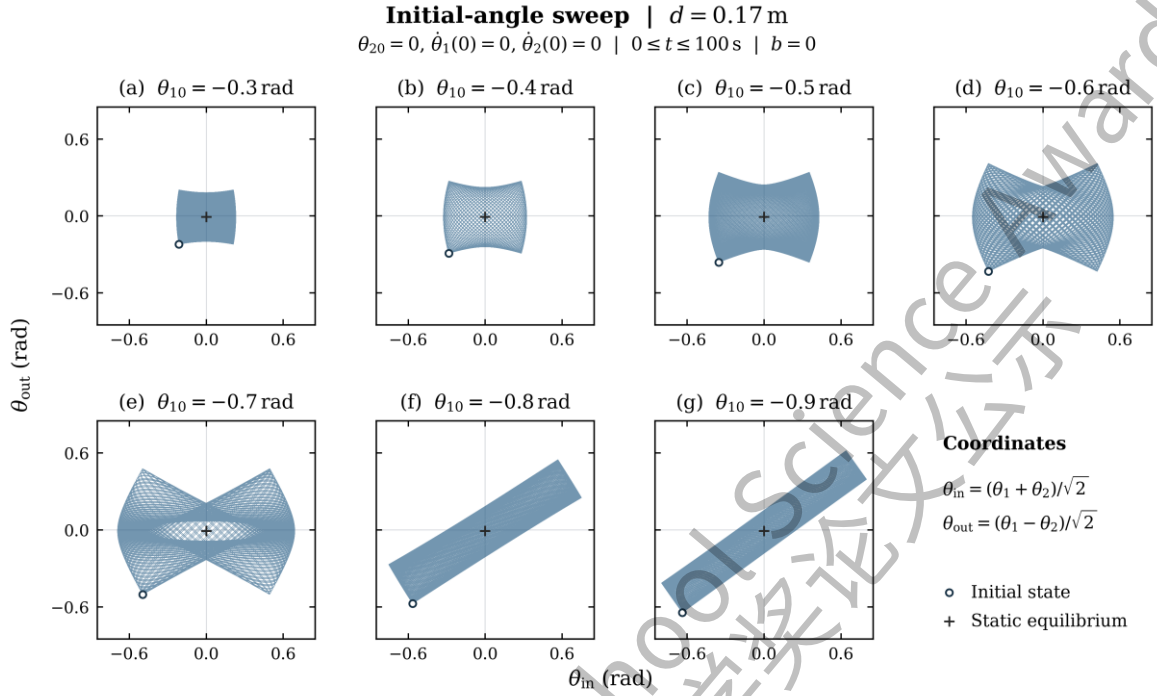


图 6.1 同相模持续占优时的理论与实验时间序列。上图为摆角之和 $\theta_1 + \theta_2$ ，下图为摆角之差 $\theta_1 - \theta_2$ 。实线表示理论计算，散点表示实验测量。初始阶段后，反相模振幅明显减小，同相模则在观测时间内持续占优。

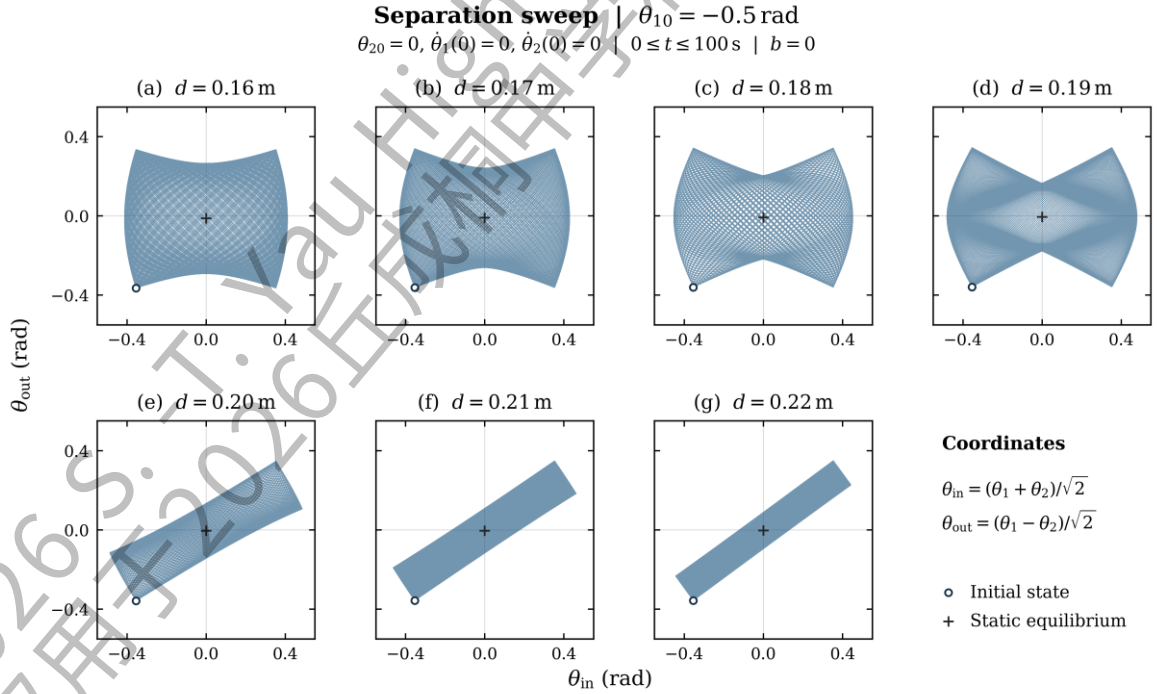
6.1 从轨迹扫描到局域化

我们分别改变第一磁摆的初始角度 θ_{10} 和两个磁摆的悬点间距 d ，画出无阻尼时的轨迹扫描图，如图 6.2 和图 6.3 所示。这里“增大初始角度”指增大其绝对值，即将磁铁拉得更远。



Initial angles are offsets from static equilibrium. Equal aspect ratio; common scale within each sweep.

图 6.2 初始角度扫描。 $d = 0.17 \text{ m}$ ， θ_{10} 从 -0.3 rad 变化到 -0.9 rad 。轨迹沿原图的简正模方向排列。



Initial angles are offsets from static equilibrium. Equal aspect ratio; common scale within each sweep.

图 6.3 悬点间距扫描图。

可以看到，初始偏转或间距增大时，轨迹扭曲先增强；继续增大到一定程度，轨迹形状会发生明显的变化。随后我们画出改变前后的 θ_1 、 θ_2 时间序列，以从磁铁的角度进行分析。

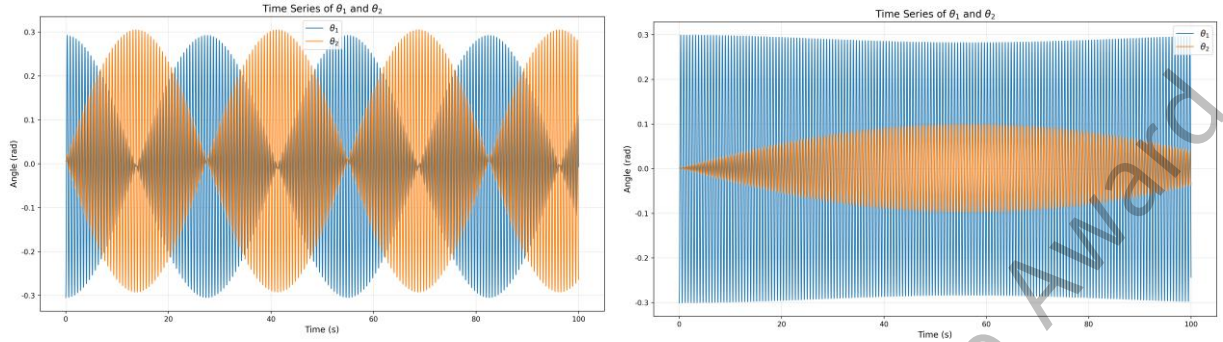


图 6.4 局域化前后的物理坐标时间序列。

在图 6.4 左侧， θ_1 与 θ_2 的振幅交替变化；在右侧， θ_2 的振幅始终无法超过 θ_1 。能量像是被“锁在”了第一个磁铁中，因此我们将这种一侧磁摆持续占优的现象称为非线性局域化。这里直接观察的是摆角及其振幅，后文再从模态相位解释这一变化。

我们的实验也支持振动局域化这一结论。如图 6.5 所示，释放后，第一个磁摆始终保持较大的振幅；第二个磁摆虽然在磁耦合作用下逐渐振动起来，但其振幅明显小于第一个磁摆。实验测量与理论计算在两摆振幅大小及其变化趋势上较为一致，说明这一局域化现象也能够实际装置中观察到。

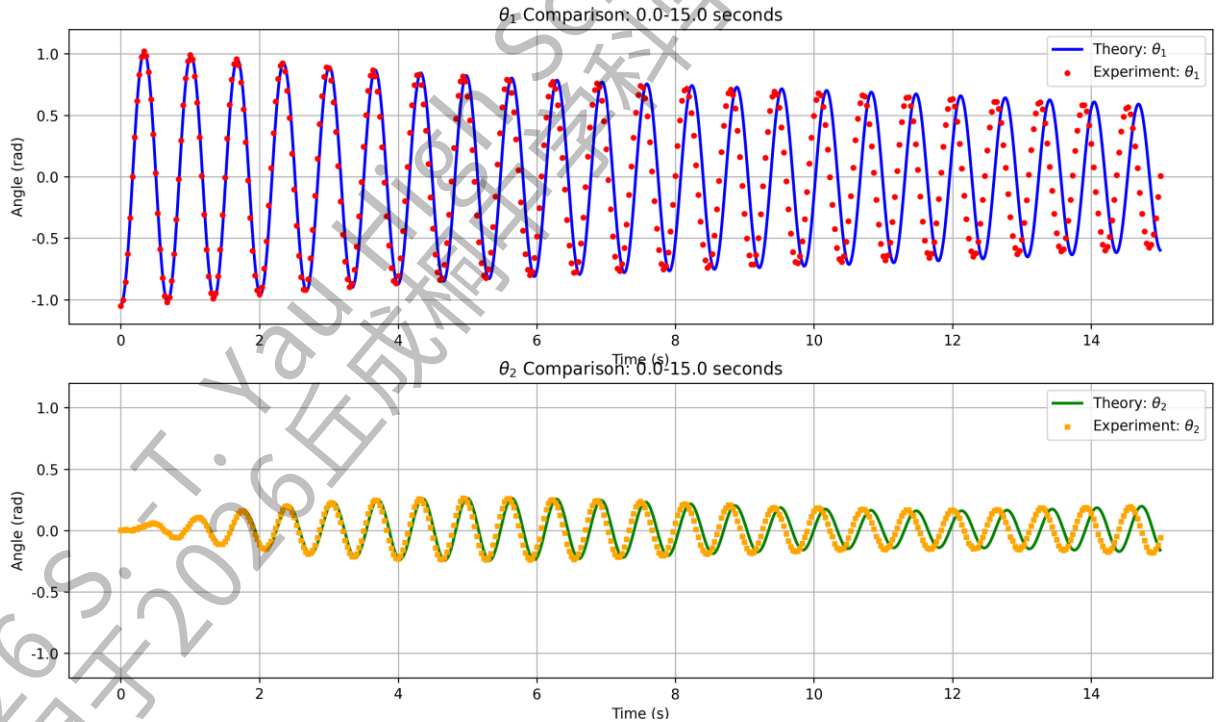


图 6.5 振动局域化状态下两磁摆摆角的理论与实验对比。上、下图分别为 θ_1 和 θ_2 的时间序列，实线表示理论计算，散点表示实验测量。在 0–15 s 内，第一个磁摆的振幅持续大于第二个磁摆，表现出振动集中于一侧的局域化特征。

6.2 频率失配与耦合强度的解释

从两个磁铁各自的运动来看，初始状态下 θ_1 的振幅比 θ_2 大。由于重力恢复作用具有软弹簧特征，大振幅磁铁的摆动的频率较低，第一摆与第二摆之间便会出现频率失配。我们可以近似把它看成第一磁摆驱动第二磁摆的受迫振动过程：当两者频率不匹配时，第一摆难以有效驱动第二摆，第二摆的振幅便难以超过第一摆。

这也从另一个角度解释了前面的参数规律。初始偏转越大，两摆之间由振幅引起的频率失配越明显，更容易出现局域化；悬点间距越大，磁耦合越弱，振动越难从第一摆充分传递到第二摆，也更容易出现局域化。

6.3 轨迹变化与两个模态的相位

在进一步细化悬点间距 d 与初始偏转角的扫描步长后，我们发现当参数步入某一临界区间时，相空间轨迹构型发生了显著的拓扑转变。图 6.6 对比了这一分界线前后的轨迹形态：局域化发生后，运动区域几乎完全收缩在第一摆振幅占优的相空间半区。

这一动力学转变过程可以形象地类比为“越过势垒”：势垒左侧对应能量主要富集于第一摆，右侧则对应集中于第二摆。局域化前，系统具备足够的“动能”越过势垒鞍点，表现为宏观能量在两摆之间周而复始地完整转移；当接近临界参数时，越过山顶的演化速度显著变慢，在鞍点附近的弛豫滞留时间明显拉长；而一旦越过临界阈值，系统便彻底丧失了翻越鞍点的能力，只能在势垒同侧发生折返振荡；若继续偏离临界点，其折返边界将进一步远离势顶。需要说明的是，该比喻本质上刻画的是相空间能量流动通道的几何闭合与分配受限，并不意味着无阻尼系统的机械能总量在“翻山”过程中存在耗散。

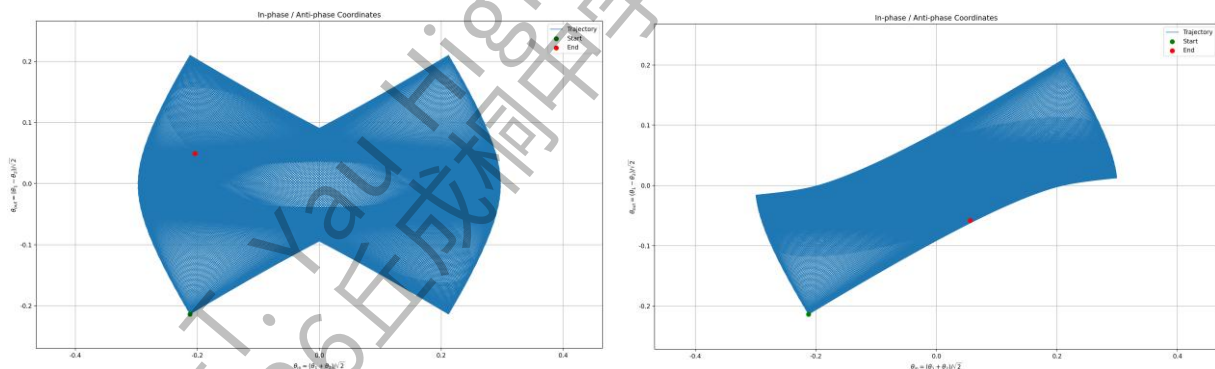


图 6.6 正常非线性轨迹与局域化轨迹。左图覆盖两侧，右图主要保留一侧。

为了进一步理解这一变化，我们画出局域化前后两个简正模的时间序列，如图 6.7 所示。两组曲线的振幅变化看起来相近，但相位关系不同。

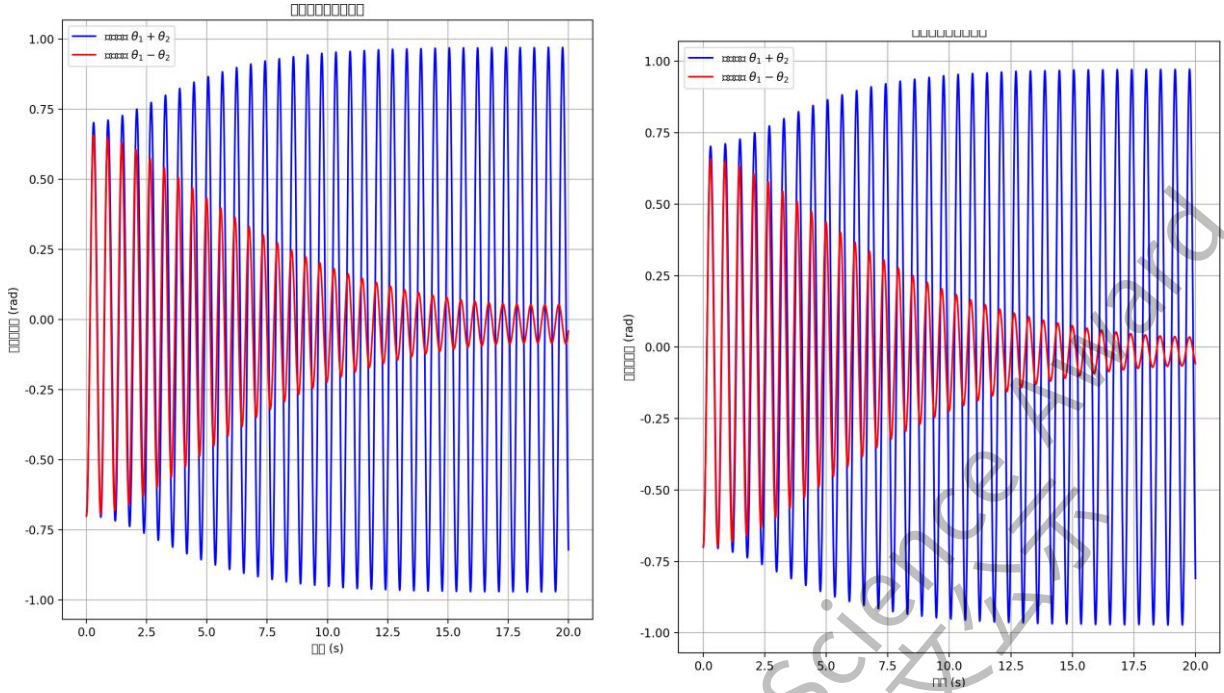


图 6.7 局域化前后两个简正模的时间序列（半个周期）。左为局域化前，右为局域化后；蓝色为同相模 $\theta_1 + \theta_2$ ，红色为反相模 $\theta_1 - \theta_2$ 。

在左图中，两模态振动一段时间后，其波峰逐渐发生错位。这是因为在线性近似下，反相模的固有频率高于同相模，频差导致两者间的相位差随时间不断累积。而在右图中，两模态在所示时段内的峰值几乎始终保持对齐，简正模的整体振动相位高度趋同。这一显著特征表明，在非线性的调制下两者的平均响应频率发生了牵引并趋于一致！

从内共振的视角来看，本文所观察到的能量局域化本质上可归结为 1:1 内共振诱发的“锁相”（phase-locking）态。两模态不仅频率发生并合，而且维系着长期稳定的相位差；将其重新投影回物理坐标时，便在空间上一侧形成建设性相干相加、另一侧形成相消相减，从而造就了单侧磁摆持续占优的局域化构型（如下式所示）。这与前一节从两物理磁摆有效频率失配出发的分析框架互为补充、相互印证。

$$\theta_1 = \frac{Q_p + Q_m}{2}, \quad \theta_2 = \frac{Q_p - Q_m}{2}$$

当两简正模振幅相当且维持近似零相位差时，其线性组合在第一磁摆处相干叠加，在第二磁摆处则干涉抵消，从而在实空间形成第一磁摆持续占优的能量局域化现象；这便将抽象的模态演化与直观的单摆振幅行为统一了起来。本文所观测到的局域化，定性上可归结为两模态频率接近 1:1 时的内共振响应。主导这一相干锁相过程的正是动力学方程中的三阶非线性项（对应四阶势能项[7]），这与第 5 章的势能截断对照完全吻合。此外，原系统方程中还包含二阶动力学项，它们会在两模态频比逼近 1:2 时诱发 1:2 内共振，相应的数值模拟证据已在附录中详细给出。

6.4 周期交叉后的四个阶段

为检验两模态频率趋于一致的判断，我们沿用前述方法，提取各模态相邻两波峰之间的时间间隔作为对应振动段的局部周期，并绘制其随时间的演化序列（图 6.8）。

在图 6.8 左侧未发生局域化的工况下，两条局部周期曲线始终彼此分离、互不相交，表明反相模的振动频率始终高于同相模；而在右侧发生局域化的工况下，两曲线频繁出现交叉，说明两模态的瞬时频率开始交替领先与滞后，其长时平均周期已趋于完全相等。

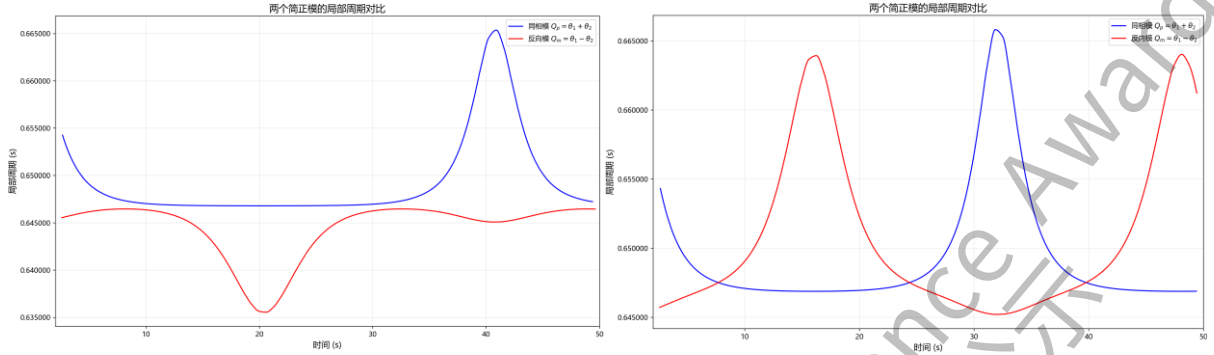


图 6.8 局域化前后的模态局部周期。蓝色为同相模，红色为反相模；左侧两条曲线不交叉，右侧出现交叉。

下面我们将结合局部周期的演化规律与前文推导的弱非线性解析方程，深入阐明能量在两模态间定向传递与反转的物理机制。图 6.9 将这一动态演化历程细划分为四个典型阶段：

第 1.1 阶段，红色周期小于蓝色周期，反相模领先，且领先程度增大，即 $\varphi > 0$ 、 φ 继续增大。

第 1.2 阶段，红色周期超过蓝色周期，反相模仍然领先，但领先程度逐渐减小，直到 φ 回到 0。只要这两段中 φ 保持在 0 到 $\pi/2$ 之间，能量就持续由反相模传向同相模。可见，周期交叉改变了相位差的变化方向，却没有立即改变传能方向。

第 2.1 阶段，反相模开始落后，而且落后程度增大，即 $\varphi < 0$ 、 φ 继续减小。

第 2.2 阶段，两条周期曲线再次交叉，反相模的落后程度逐渐减小，直到 φ 再次回到 0。在 $-\pi/2 < \varphi < 0$ 的范围内，这两段中能量由同相模传回反相模。不同于上一节，四个阶段共同表现为相位差围绕 0 往复变化。

在所对比的局域化算例中，越远离临界分界线，两模态的时程极值对齐越紧密，相对相位差的摆动包络范围也随之收缩；这导致模态间单周期内的有效能量交换量显著减少，直观表现为两简正模振幅调制程度的微弱化。

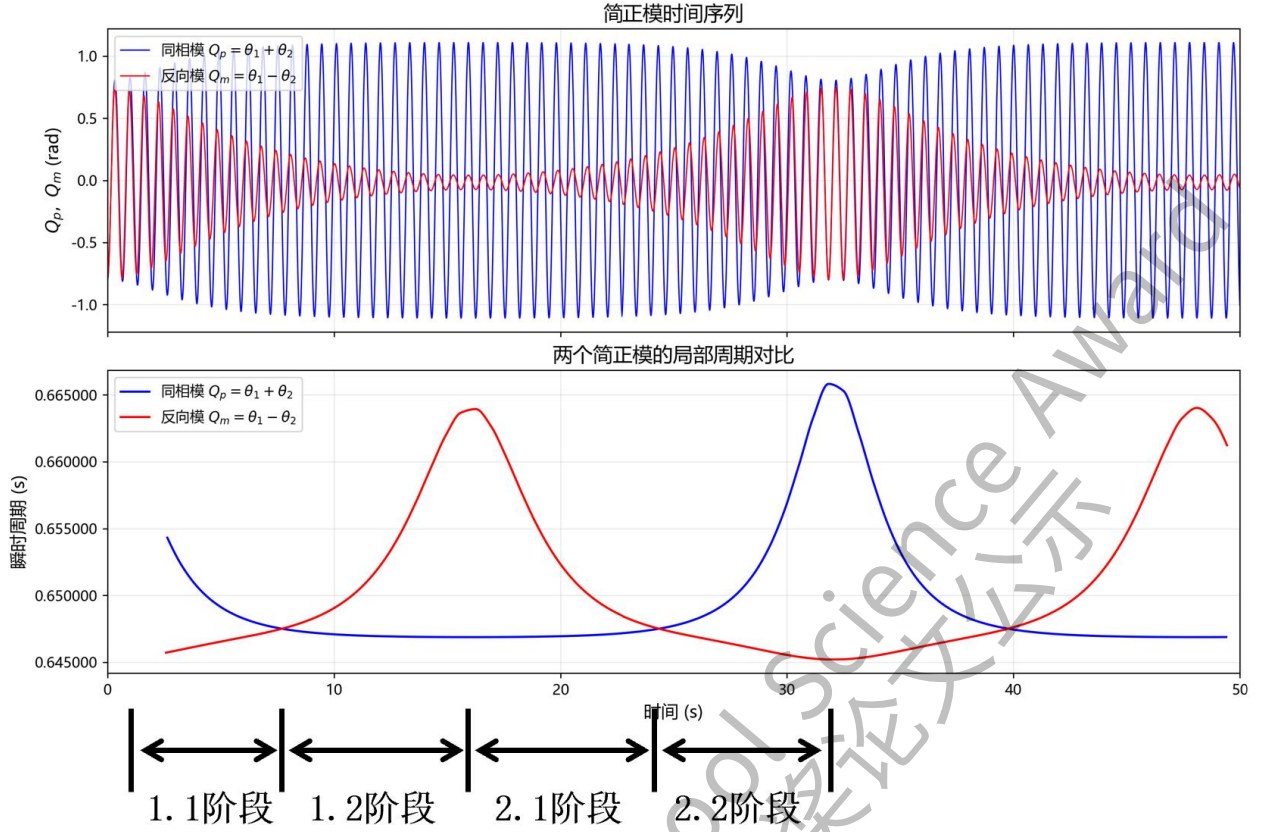


图 6.9 发生周期交叉时的四个阶段。蓝色为同相模，红色为反相模；1.1 与 1.2、2.1 与 2.2 的分界分别对应局部周期交叉。1.2 和 2.1 的分界则对应能量传递方向的变化。

6.5 频率交叉的解析条件与检验

周期曲线为什么会交叉？这是因为三阶项除了改变振幅，还会改变频率。将第 5 章的余弦近似代入方程，利用三角恒等式提取基频中与位移同相的部分，可得：

$$\begin{aligned}\omega_p^2 &\approx \Omega_p^2 - \frac{g}{32l} [A_p^2 + A_m^2(2 + \cos 2\varphi)] \\ \omega_m^2 &\approx \Omega_m^2 - \frac{g}{32l} [A_m^2 + A_p^2(2 + \cos 2\varphi)]\end{aligned}$$

两式相减后，得到较为直接的关系：

$$\omega_m^2 - \omega_p^2 \approx \frac{12k}{m} - \frac{g}{16l} (A_p^2 - A_m^2) \cos^2 \varphi$$

右侧第一项是线性频率差，第二项是振幅和相位造成的非线性修正。开始时两个模态振幅接近，第二项较小，反相模频率较高。能量向同相模传递后， A_p 增大、 A_m 减小，第二项可能抵消第一项。当两者相等时，两模频率接近相等；若差值继续变号，就出现交叉。相应的切换条件为：

$$\begin{aligned}\frac{g}{16l} (A_p^2 - A_m^2) \cos^2 \varphi &\approx \frac{12k}{m} \\ (A_p^2 - A_m^2) (\cos \varphi)^2 &\approx \frac{192kl}{mg}\end{aligned}$$

这不是运动方程在交点处突然换成了另一条方程，而是连续变化的振幅和相位使频率差通过了零点。交点处 φ 的变化率为零， φ 本身通常不为零，因此交叉可以发生在振幅仍朝原方向变化的时候。完整的三角变换和取平均过程放在附录 B。

图 6.10 中，三次交叉对应的比值均接近 1，所列数值约为 0.992 至 1.076，偏离 1 的最大幅度约为 7.6%。改变间距后仍保持这一符合程度，也就说明了我们解析计算的交叉点是近似正确的。由于解析式省略了部分磁力非线性项，数值无法严格等于 1。

切换条件还说明：在质量、模态振幅与相位差相同的比较下， k 越小或 l 越小，右侧 $192kl/(mg)$ 越小，越容易达到频率相等的条件。对于固定磁偶极矩， k 随 d 的五次方反比减小，因此增大 d 也会降低这个门槛。这解释了为什么耦合减弱后仍可能出现交叉。不过实际改变摆长或间距也会改变振幅演化，完整的临界位置仍应由数值扫描确定。

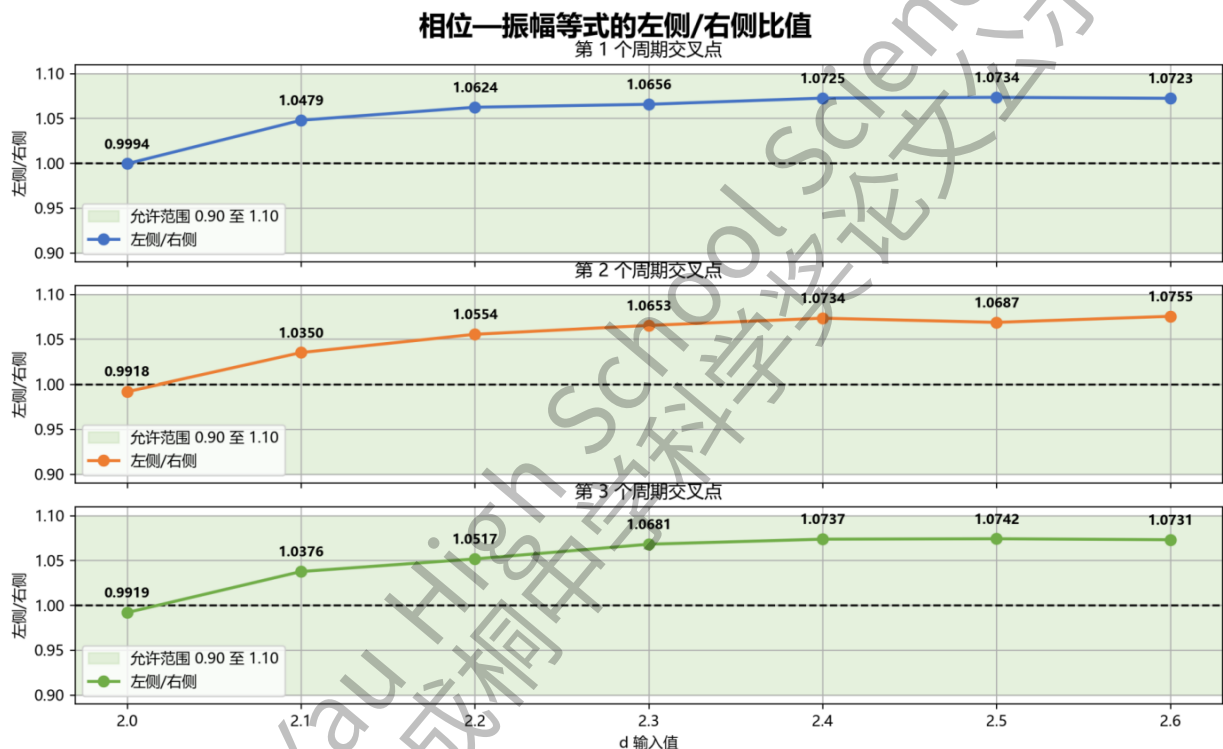


图 6.10 改变悬点间距时切换条件的数值检验。分别在第 1、2、3 个局部周期交叉点，将相位—振幅条件的左侧除以右侧；虚线为 1，绿色带为 0.90 至 1.10。横轴为 d/l ， d 的范围取 0.2m 至 0.26m。

6.6 模态占优程度与参数热图

若初始仅单侧拉起一只磁铁释放，理论上两简正模所激发的初始振幅基本相当。在线性近似下，该振幅配比严格守恒，两物理摆因简正模频差积累的相位差而呈现经典的交替拍频振荡。既然非线性相互作用能够打破模态振幅守恒，我们进一步探究：能否通过合理选取系统参数，促使同相或反相模态在宏观时段内建立绝对的竞争优势？

为回答这一核心问题，图 6.11 与图 6.12 分别对初始偏转角与悬点间距进行了系统扫描，直接对比两模态的时程演化轨迹。图中蓝色曲线对应同相模，红色曲线对应反相模。

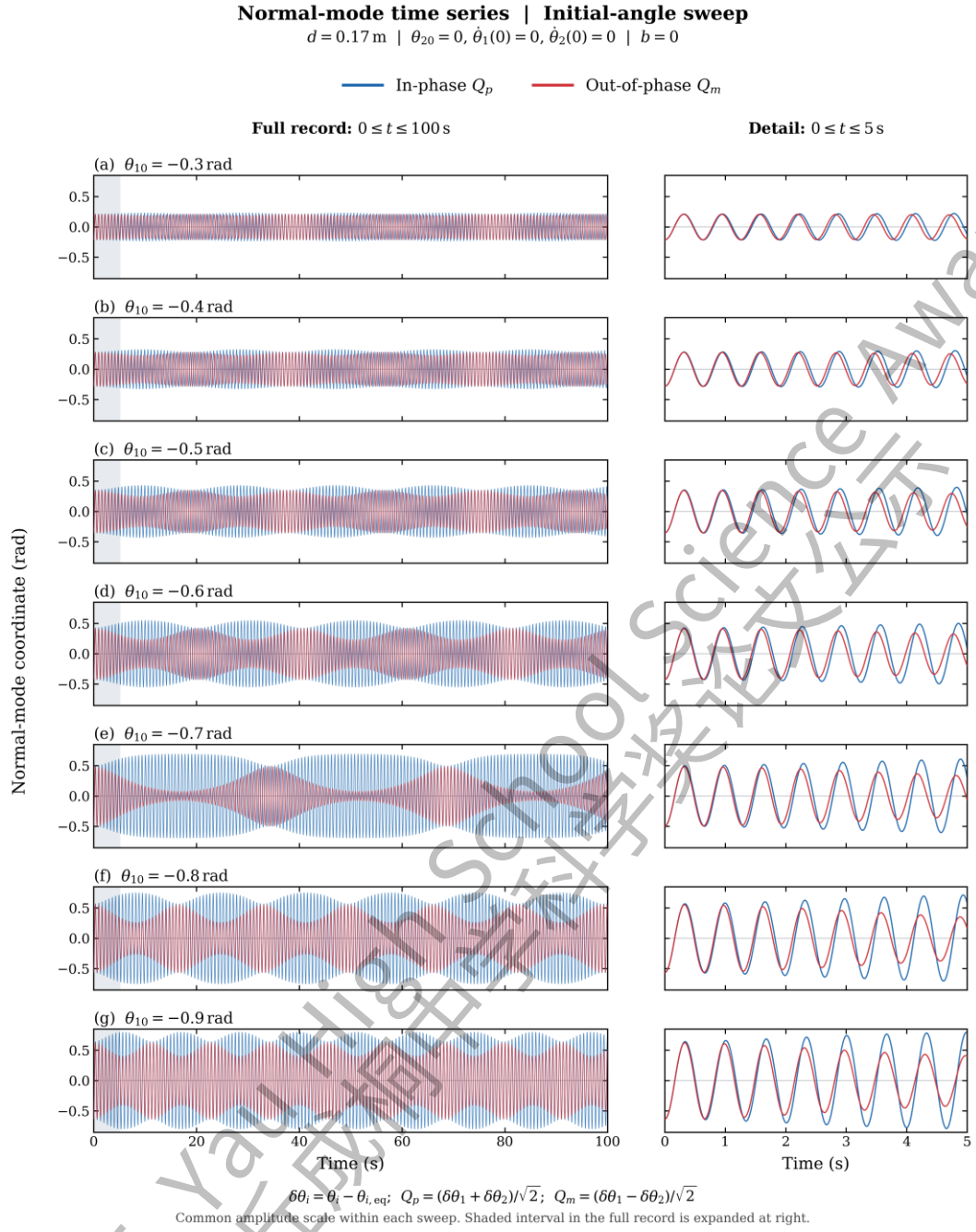


图 6.11 初始角度变化时的模态时间序列。按图中参数 $d = 0.17 \text{ m}$, θ_{10} 从 -0.3 rad 变化到 -0.9 rad ; 同相模占优程度先增强后减弱。

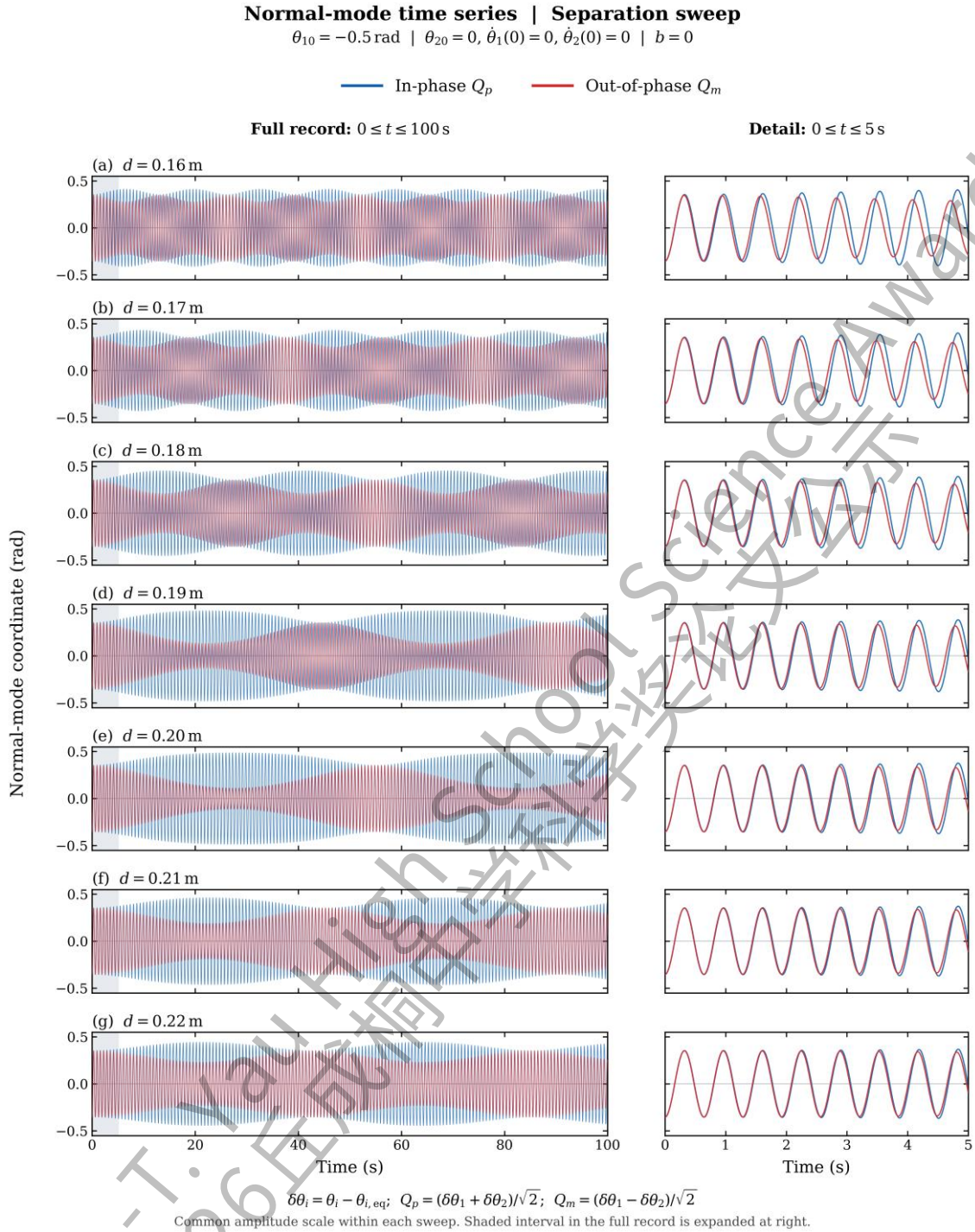


图 6.12 悬点间距变化时的模态时间序列。按图中参数 $\theta_{10} = -0.5 \text{ rad}$, d 从 0.16 m 变化到 0.22 m ; 同样呈现先增强后减弱的趋势。

时间序列显示, 同相模的主导程度随初始偏转或 d 增大先增强后减弱, 反相模受抑制的程度也呈相同趋势。与轨迹和周期曲线对照可见, 较强的模态振幅变化出现在接近局域化转变的区域, 而不一定出现在一侧磁摆最明显占优的参数处。

前面用接近山顶的运动作比喻: 系统越接近临界状态, 在平缓处停留的时间越长, 表现为模态振幅变化的慢周期变长。从时间序列可见, 随着初始偏转或 d 增大, 同相模的主导程度先增加后减小, 反相模受到抑制的程度也先增强后减弱。这与轨迹扫描中的变化一致: 最明显的模态振幅变化出现在接近局域化转变的区域, 而不是局域化最明显处。

我们使用振幅比 L 描述同相模的主导程度。先由峰、谷求出两个模态的上下包络，再取反相模包络宽度与同相模包络宽度之比在整个观察时段内的最小值：

$$L = \min \left[\frac{Q_{(1,-1)upper} - Q_{(1,-1)under}}{Q_{(1,1)upper} - Q_{(1,1)under}} \right]$$

式中 **upper** 和 **under** 分别表示上、下包络； $Q_{(1,1)}$ 为同相模， $Q_{(1,-1)}$ 为反相模。 L 越小，说明至少在某段时间内，同相模相对反相模越占优。 L 是模态幅度的比较，不直接等同于某一个物理磁摆中的能量比例。

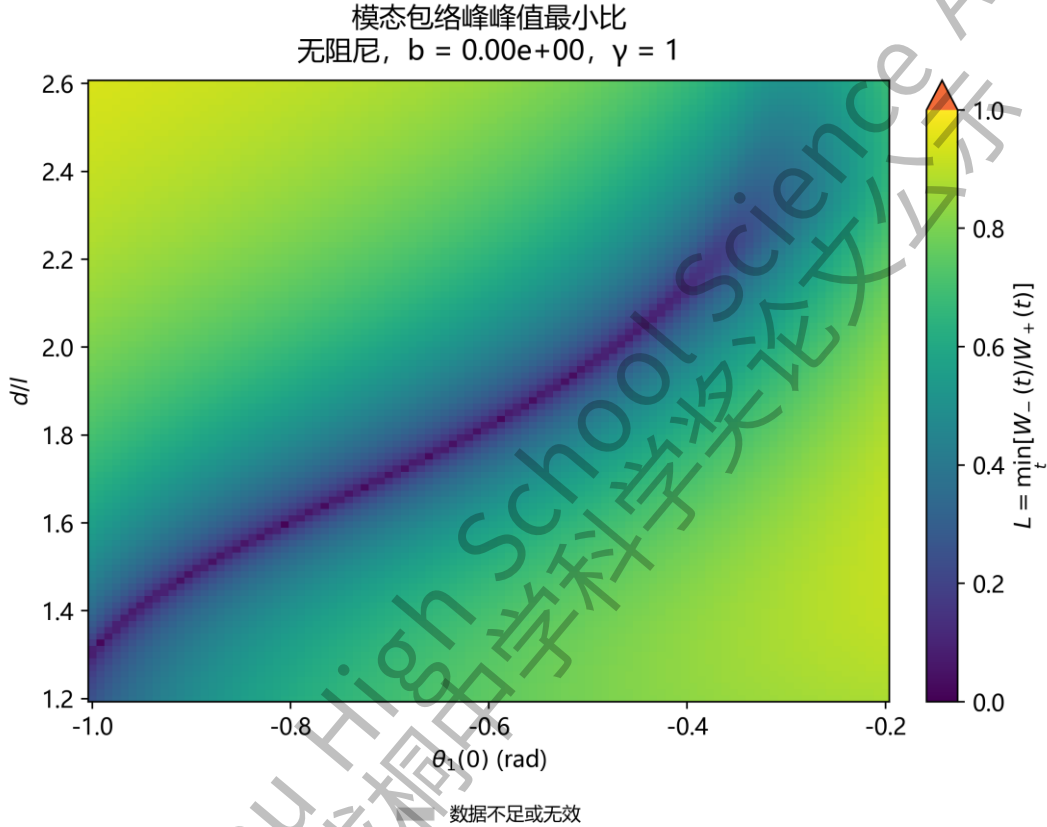


图 6.13 无阻尼情况下的 L 参数热图。低值带对应同相模明显占优的参数组合，远离该区域时 L 逐渐接近 1。

图中间存在一条 L 较小的带状区域。离它越远， L 通常越接近 1，两个模态的幅度比变化较小。这与前面的扫描一致：临近正常非线性运动与局域化之间的转变时，同相模能够达到较明显的优势。可以看到，图 6.13 中的 L 最低曲线大致与图 6.14 中的局部周期交叉/不交叉分界线吻合。

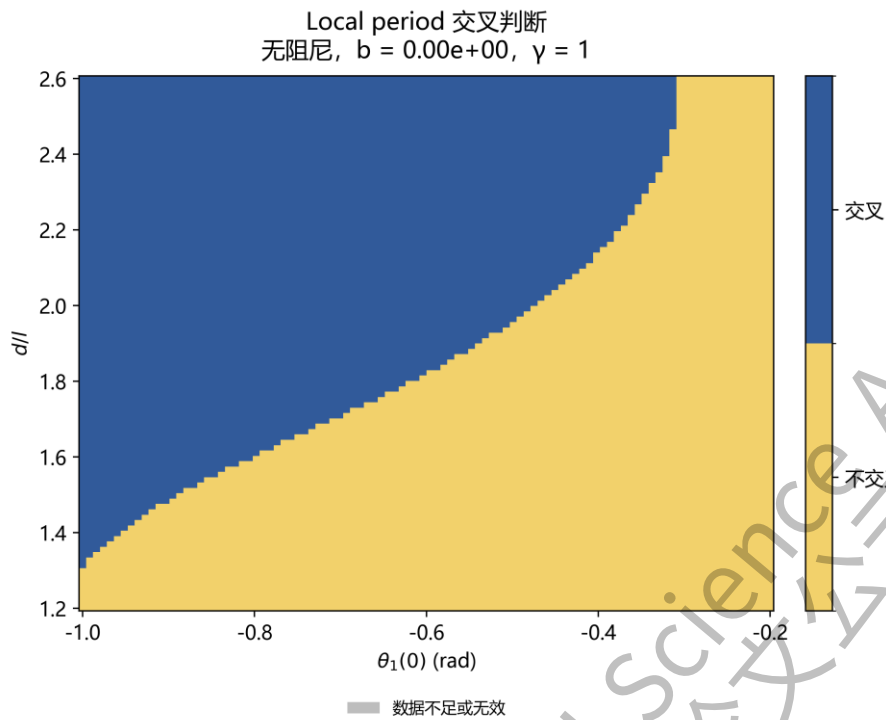


图 6.14 无阻尼情况下局部周期是否交叉的参数分布。与图 6.13 的低 L 区域对照, 比较周期分类边界与振幅调制增强区域的位置。

6.7 阻尼对局域化和热图的影响

加入实验标定的阻尼后, 图 6.15 仍能看到类似的低值带, 但其位置发生向左的偏移。这是因为阻尼使振幅随时间减小, 同一个初始条件在后续运动中会经历较小振幅的状态, 因此初始振幅需较大才能让系统在 L 取最小值时更接近是否局域化的分界线。

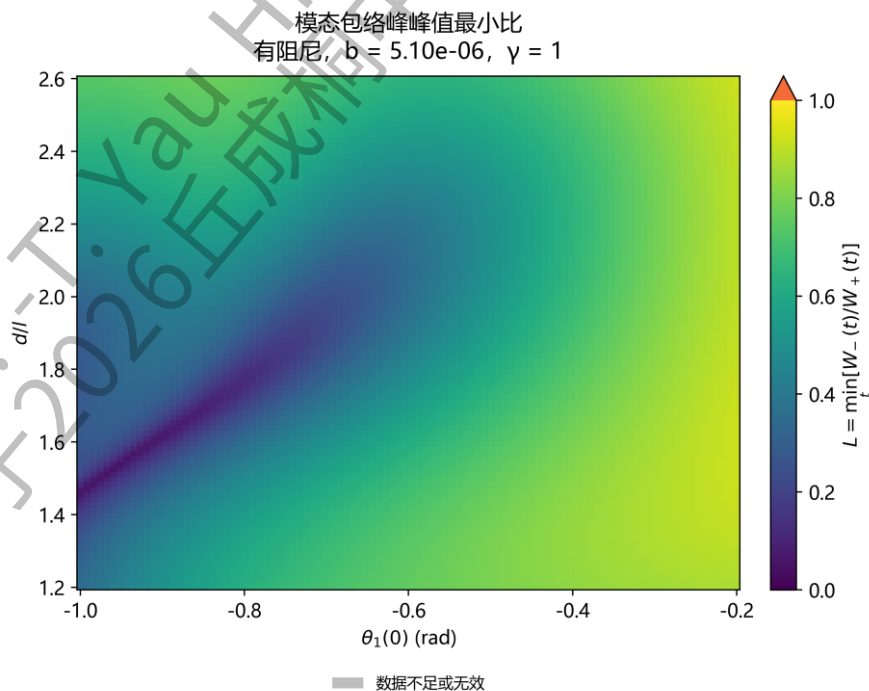


图 6.15 加入阻尼后的 L 参数热图。与图 6.13 相比, 低值带发生偏移。

为更清楚地观察这个过程，我们把阻尼调为原值的 0.1 倍。图 6.16 显示，系统在开始阶段保持局域化，第一磁摆持续占优；随着振幅衰减，局域化消除，后半段重新出现两摆交替振动。这说明阻尼的作用不只是使曲线整体变矮。它还会通过减小磁摆振幅减小非线性频移，使系统从局域化区域进入能够充分交换振动的区域。

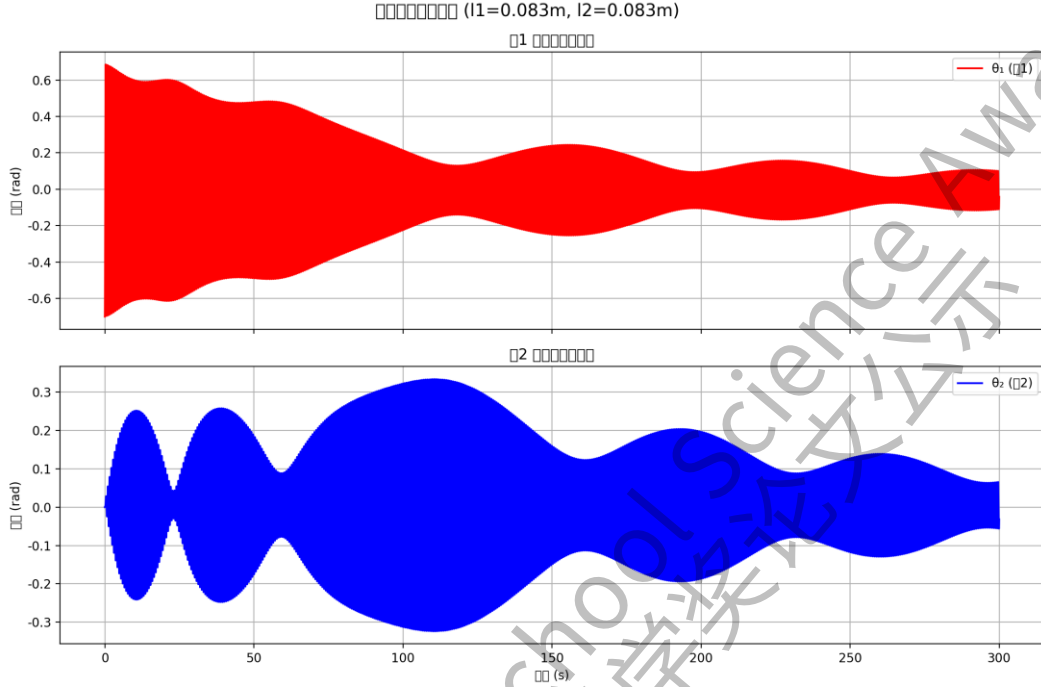


图 6.16 阻尼为原值 0.1 倍时的长时间序列。早期为局域化，随后转为非局域化的振幅交替。

6.8 改变非线性强度的数值对照

我们可以把全部高于二阶的势能项合在一起，统一乘以系数 γ ，比较整体非线性强度的影响：

$$V_\gamma = V_{\leq 2} + \gamma(V - V_{\leq 2})$$

$V_{\leq 2}$ 表示保留到二阶的势能部分。 $\gamma=0$ 为线性近似， $\gamma=1$ 恢复原来的非线性强度。图 6.17 和图 6.18 分别给出无阻尼、有阻尼结果。随着 γ 改变，低 L 区域的位置与形状也发生变化，表明同相模占优程度由初始条件、耦合与非线性共同决定。

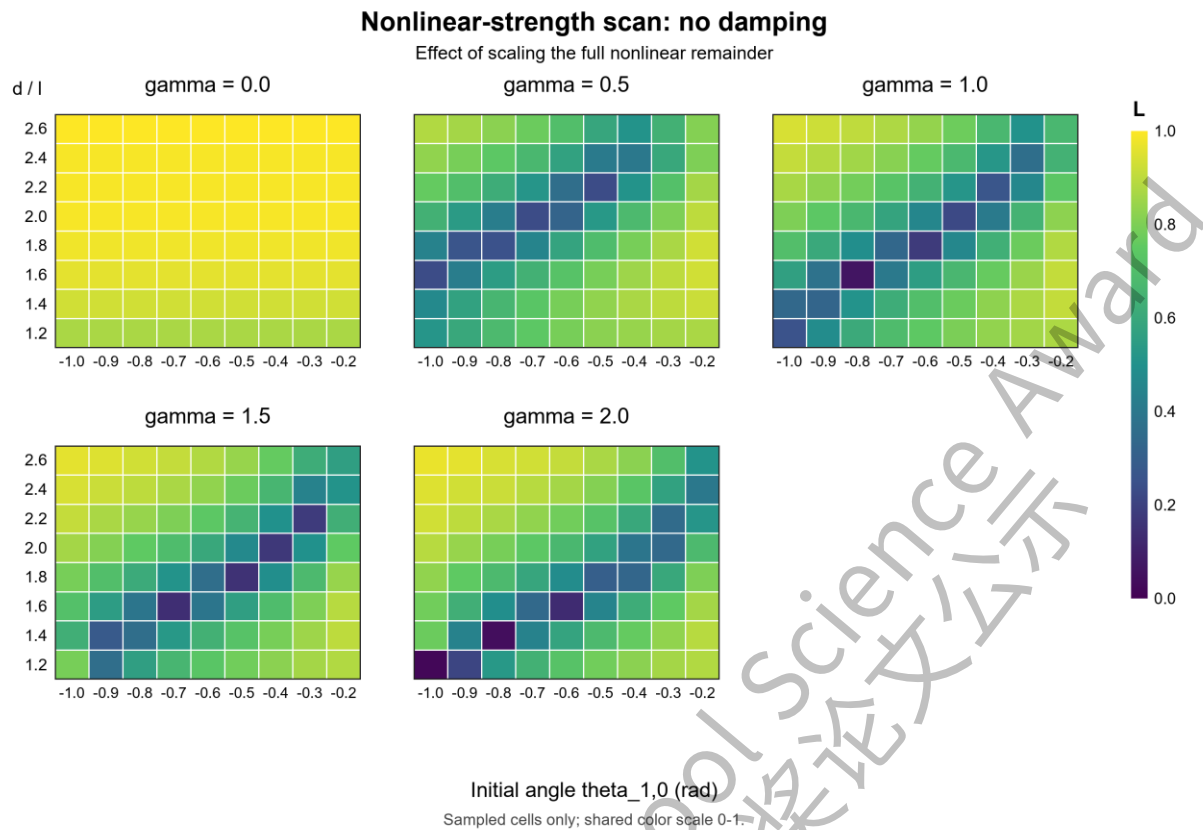


图 6.17 无阻尼时整体非线性强度 γ 的对照。各子图按原图标注值重排，统一色标。

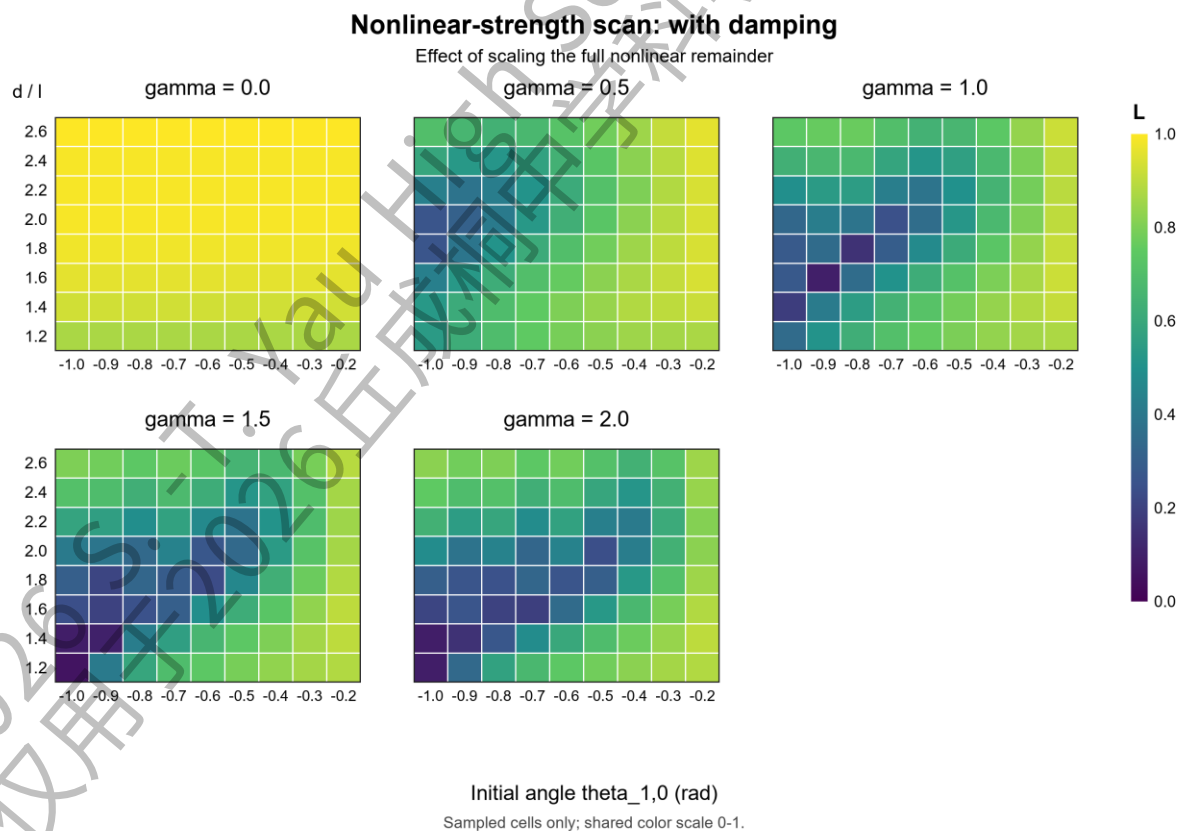


图 6.18 有阻尼时整体非线性强度 γ 的对照。各子图按原图标注值重排；与图 6.17 结合，可区分非线性强度和耗散造成的变化。

为了进一步验证四阶势能项是否导致同向模占有，我们单独改变四阶势能的系数 β_4 ，具体含义为

$$V_{\beta_4} = V + (\beta_4 - 1)V_4$$

$\beta_4 = 1$ 为原模型， $\beta_4 = 0$ 表示删去四阶势能， β_4 大于 1 则增强这一项，其余势能项保持原值。图中的分界随 β_4 改变，也就支持了四阶势能项的重要作用。

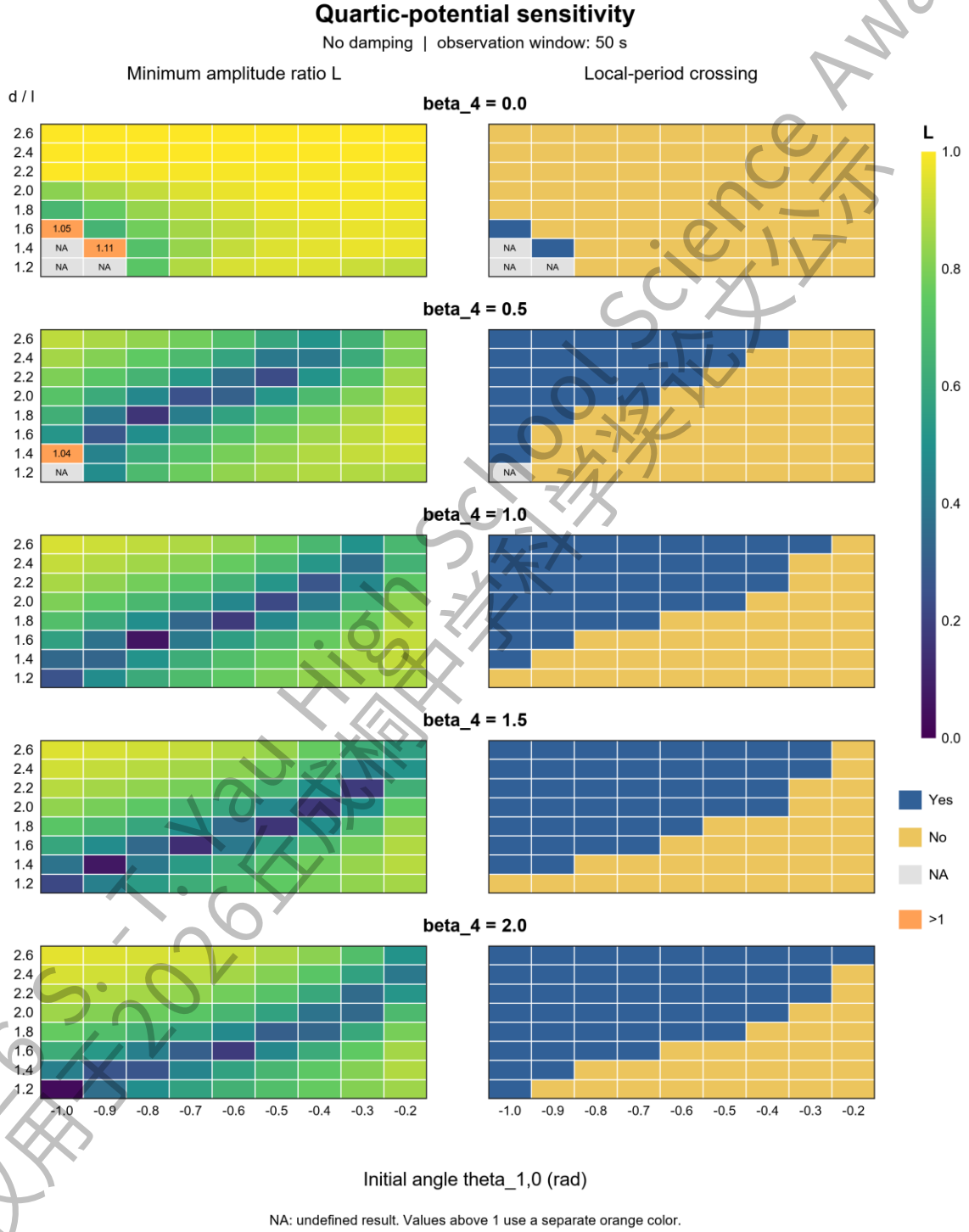


图 6.19 四阶势能系数 β_4 对 L 与局部周期交叉的影响。从上至下 $\beta_4 = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ ；左列为 L，右列为交叉分类。Yes 表示交叉，No 表示不交叉，NA 表示未判定；橙色为 L 超过 1 的点。

6.9 理论热图与 25 个实验点的比较

前面的理论—实验时间序列已验证我们模型的适用性。下面我们对于 $l=0.1\text{m}$, $d=0.13, 0.16, 0.19, 0.22, 0.25\text{m}$ 的初始条件各采取 5 种初始角度释放, 并按同一方法提取包络并计算 L , 再与含实验阻尼的理论热图比较以验证我们的理论热图。

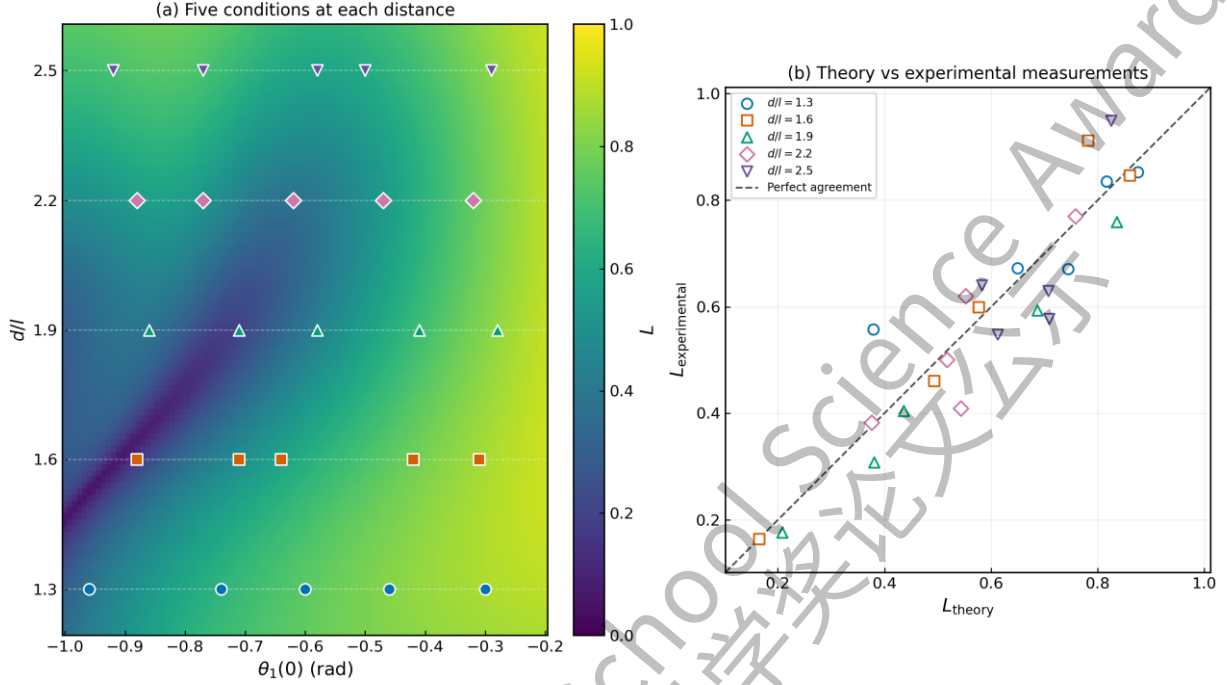


图 6.20 含阻尼理论热图与 25 点实验比较。左图标出各实验条件, 右图横、纵轴分别为理论 L 与实验 L , 虚线表示二者相等。点偏离虚线的程度反映逐点差异。

7 三磁摆及更多磁摆的能量传递

在三磁摆系统中，运动演化不仅涉及多个简正模的协同参与，且长程磁相互作用跨越了单纯的近邻耦合范畴。第 5 章已通过三磁摆验证了“弱耦合诱导更强轨迹畸变”的动力学趋势；本章则进一步探讨：在单端激发的初始条件下，无阻尼数值仿真时段内远端第三摆所能获取的最大峰值能量输入。图 7.1 保留了全阶全长程磁相互作用，系统对比了初始偏角与悬挂间距 d 的联合影响。

在图示参数与观察时段内，较小间距下第三摆可获得较大的累计能量输入；间距增大后，传到第三摆的能量减少。较大的 d 也可能使传递变慢，因此应延长观察时段，检查低值区域是否仍然存在。本图支持有限时间内的传递受限，还不能单凭它认定能量永久锁在第一摆，也不能断言初始角度越大就一定越局域化。

扩展到更多磁摆后，模态频率更多，能量可以沿不同路径传播，也可能在部分磁摆或模态中维持较长时间。双磁摆中“振幅改变频率、相位影响传能”的思路仍可作为解释线索，但只比较一对模态的周期是否交叉已不足以确定整个系统的局域化。需要同时查看各摆的时间序列、能量分布和多个模态的相位变化。

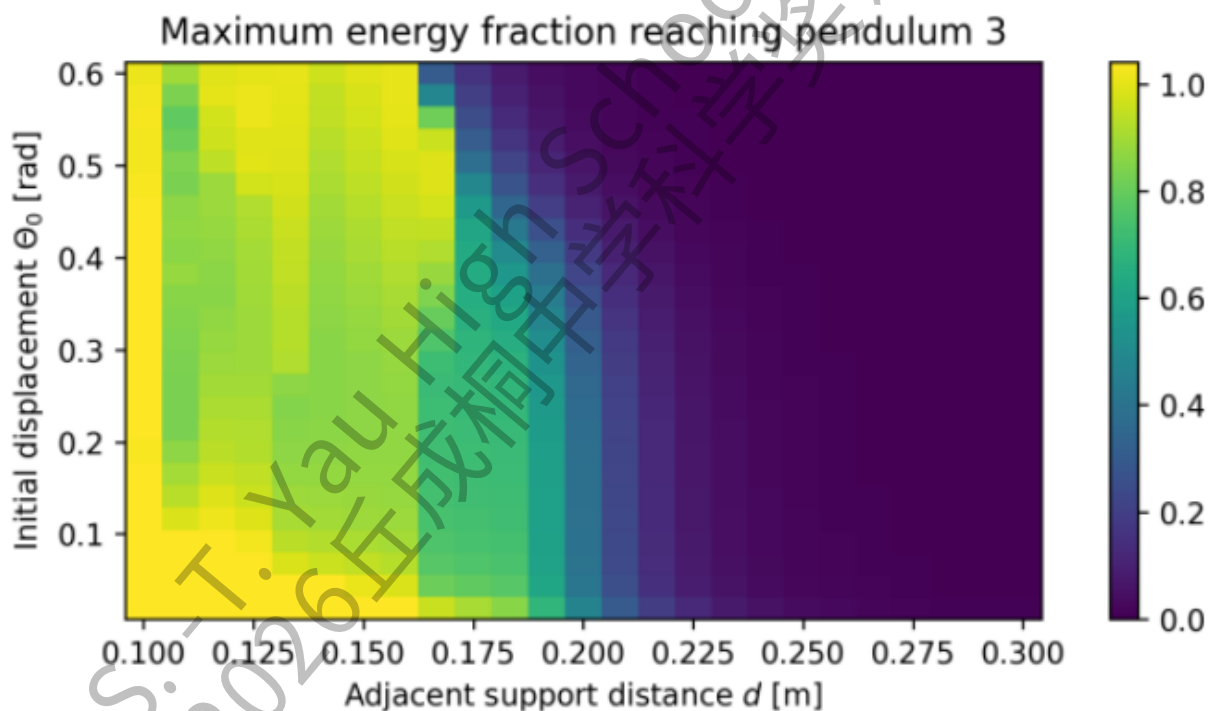


图 7.1 三磁摆计算中第三摆的最大能量输入比例。横轴为相邻悬点间距 d ，纵轴为初始角度。保留全部磁相互作用，比较相同观察时段内的最大值。

8 结论与展望

本研究从磁力牛顿摆的实验运动出发,研究两个磁摆释放后振动形式如何变化,以及能否通过调节参数使某种振动形式持续占优。我们结合视频追踪、圆柱磁铁模型的数值计算与磁偶极子近似下的解析推导,将观察到的摆角变化与模态振幅、相位及局部周期联系起来。

研究发现,较大振幅下,简正模本身会出现缓慢的振幅调制,模态轨迹在同相方向凸出、反相方向凹陷。不同阶次势能的对照表明,四阶势能项,即三阶动力学项,对所考察的模态调制起关键作用。**在部分参数范围内,耦合减弱反而使振幅调制和轨迹扭曲增强。**平均做功分析说明,耦合减弱使相位关系变化变慢,同一方向的传能持续更久,从而积累出更明显的振幅变化。双磁摆的理论—实验比较及三磁摆计算支持这一趋势。

继续改变释放角度和悬点间距,系统可由两摆振幅交替变化,转为一侧持续占优的局域化运动。**我们将这一变化与两个模态的频率靠近、局部周期交叉及相位差的往复变化对应起来,从 1:1 内共振解释其产生过程。**解析近似给出了频率相等时振幅与相位应满足的关系,不同间距下的数值交叉点对这一关系提供了检验。

参数热图进一步表明,**同相模能够达到的振幅优势在接近局域化转变的区域更加明显,并不随释放角度或间距单调增强。**25 个实验点与含阻尼理论结果的比较提供了初步支持。弱阻尼计算还显示,系统可随振幅衰减,由早期局域化转为后期非局域化。这些结果说明,振动形式既与耦合强度有关,也与振幅分配及相位演化有关。

未来的研究可以从多个方向进行扩展。首先,本文主要研究双磁摆情况下的模态耦合和能量传递。当磁摆数量进一步增加时,系统的模态数量随之增加,能量可以通过更多模态和相互作用路径传递。磁摆数量较多时,可以将其看作一条具有长程磁相互作用的非线性振子链。可以研究能量在更多模态间如何传递,以及局部释放产生的扰动如何沿链传播,振动在什么条件下集中于少数磁摆。这能够将本文对两个磁摆间能量交换的研究与发现的局域化现象扩展到多磁摆情况下。

其次,在共振机制方面,本文主要讨论具有三次非线性项的类 Duffing 振子之间的 1:1 内共振。未来可以在实验装置上通过调整摆长、质量、磁铁磁化强度和悬点间距,使两个模态的频率接近 1:2,进一步研究不同频率比例下的能量交换。结合附录中的初步计算,可以比较 1:1 与 1:2 内共振对应的振幅调制、相位关系和传能过程,从而判断本文观察到的规律在其他共振条件下如何变化。

这些结果与结构减振中的能量转移问题具有联系。由我们的研究可知,模态频率交叉时代表的可能是某种模态主导,或是某个磁摆主导。我们可以通过调整参数控制系统的状态,从而控制能量在不同振子间的传递。建筑物可以与附加振子组成耦合系统,通过适当的频率配置与阻尼减小主体的振动。例如,台北 101 采用调谐质量阻尼器,主要用于减小强风引起的楼体摆动[9]。已有研究还探索了非线性能量阱,利用非线性耦合将主体结构的振动能量转移至附加装置并耗散,以降低冲击或地震作用下的结构响应[10]。本文的磁摆系统为研究这类过程提供了一个便于观察和调节的实验平台。后续可以在其中一个磁摆上增加阻尼,并施

加外部激励，检验能否通过参数选择，使能量更多地离开受保护的主体，转移至附加振子中耗散。

此外，还可以在磁摆附近设置线圈，将振动转化为电能，探索模态耦合对振动能量采集的影响。因此，本研究的应用价值在于为“能量向哪里传递、传递能够持续多久，以及如何通过参数调节这一过程”提供实验依据和分析思路。

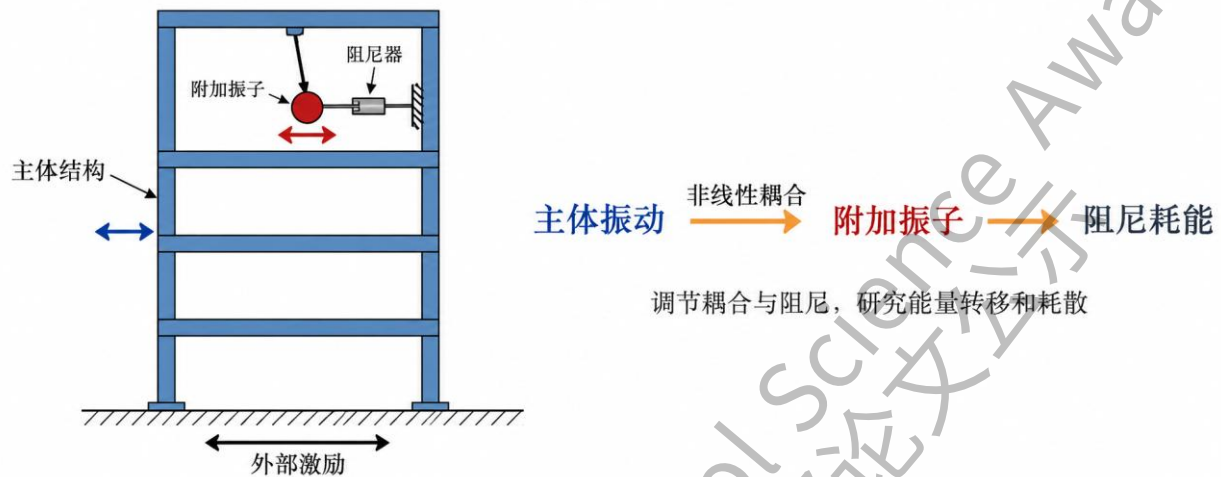


图 8.1 非线性耦合用于结构减振的研究思路。主体结构与附加振子通过非线性作用耦合，振动能量转移至附加振子后由阻尼耗散。该图为后续应用研究的概念示意，不代表本文已完成建筑抗震性能验证。

参考文献

- [1] Strogatz S H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. 2nd ed. Westview Press, 2015.
- [2] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. Wiley, 1979.
- [3] Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical Mechanics. 3rd ed. Addison-Wesley, 2002.
- [4] Griffiths D J. Introduction to Electrodynamics. 4th ed. Pearson, 2013.
- [5] Dormand J R, Prince P J. A family of embedded Runge–Kutta formulae[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1980, 6(1): 19–26.
- [6] Flach S, Gorbach A V. Discrete breathers—Advances in theory and applications[J]. Physics Reports, 2008, 467(1–3): 1–116.
- [7] Givois A, Tan J J, Touzé C, Thomas O. Backbone curves of coupled cubic oscillators in one-to-one internal resonance: bifurcation scenario, measurements and parameter identification[J]. Meccanica, 2020, 55(3): 481–503.
- [8] International Young Physicists' Tournament. Problems for IYPT 2026: Problem 15, Magnetic Newton's cradle[EB/OL]. <https://iypt.org/problems/iypt-2026-problems/>.
- [9] TAIPEI 101. 观景台特点介绍：风阻尼球 [EB/OL]. <https://www.taipei-101.com.tw/tw/observatory/feature>.
- [10] Wierschem N E, Spencer B F Jr. Targeted energy transfer using nonlinear energy sinks for the attenuation of transient loads on building structures[R]. Urbana-Champaign: Newmark Structural Engineering Laboratory, University of Illinois, 2015. Report No. 045. <https://hdl.handle.net/2142/88396>.

作者贡献与致谢

本研究源于 2025—2026 赛季 IYPT 第 15 题“磁力牛顿摆”。最初吸引我们的是一个直观的问题：将一侧磁铁拉开后释放，两个磁摆究竟会以什么形式振动？随着实验进行，我们发现，熟悉的拍频不能解释全部运动。在不同释放角度和悬点间距下，系统有时表现为两摆振幅交替变化，有时则出现一种振动形式持续占优，或振动集中于一侧的现象。这些观察促使我们从摆角变化进一步研究模态振幅、相位和能量传递。在论文接近完成之际，我们向给予我们指导和支持的老师、同学及家人表示感谢。

首先，感谢指导教师熊波老师。熊老师作为校外指导教师，全程无偿参与本课题指导。在研究讨论中，老师帮助我们将对现象的兴趣转化为可以通过实验回答的问题，提醒我们先观察运动，再选择分析方法。当实验与预想不同时，老师鼓励我们检查实验条件和计算假设，寻找差异的来源。在理论分析中，老师帮助我们梳理线性拍频、模态调制和局域化的区别；在论文整理中，又提醒我们从实验现象出发，围绕发现及其解释组织内容。这些指导帮助我们逐步理清了研究思路。

本研究由吴雨凡、喻高进和王湛和共同完成，分别承担理论与数值分析、实验实施、数据处理与比较等工作，并共同讨论结果、整理论文。

组员吴雨凡主要负责理论模型、解析推导和数值模拟。为描述实际磁摆运动，我最初采用磁偶极子近似，但发现磁铁距离较近时误差较大，因此改用圆柱磁铁的等效电流模型计算磁相互作用，通过拉格朗日方程进行数值求解。为了理解结果，我又对磁偶极子模型作泰勒展开，得到同相模和反相模，并利用三角恒等变换解释拍频。但这也让我想到，如果研究止步于线性拍频，磁力牛顿摆与普通弹簧耦合振子又有什么不同？

为寻找线性理论之外的现象，我阅读了《Nonlinear Dynamics and Chaos》，尝试绘制庞加莱截面、返回图等，却没有找到容易分析的规律。后来，我想到物理辩论中接触过的李萨如图，开始比较磁摆与线性系统的时间序列和轨迹。通过角度相加、相减，我发现简正模自身的振幅也在变化，再通过不同阶次势能的消项对照，确定四阶势能项对所考察现象的重要作用。

最让我困惑的是，为什么耦合减弱，轨迹扭曲反而增强？起初，我只关注磁力高阶项的系数，没有充分考虑它与线性项的相对大小，以及重力的非线性。势能截面能够解释轨迹边界，却还不能说明振幅随时间的变化。因此，我进一步分析简化模态方程中的平均做功，将相位变化与传能持续时间联系起来。随后，实验中出现了同相模持续主导的较稳定振动，这促使我继续比较参数，并区分模态占优与空间局域化，结合局部周期和解析近似解释其产生过程。我主要承担论文中理论模型、非线性机制和局域化分析部分的撰写。

组员喻高进主要负责实验装置的搭建、调试和数据采集。起初，我认为将磁铁悬挂起来就能完成实验，但很快发现，看见运动与获得可靠数据是两件不同的事。理论假设磁摆在同一平面内运动，实际磁铁却可能转动或偏离平面。尤其在间距较小时，朝向稍有偏差，就可能在振动中扭转并吸附在一起。因此，我反复检查悬挂方式、磁铁朝向和释放状态，使实际运动尽量符合模型条件。

释放过程也需要注意。直接用手松开磁铁可能带入初速度，第一摆被拉开后，第二摆的静止位置也会改变。因此，我在拍摄前确认各摆已经静止，记录初始位置，并检查释放装置是否干扰运动。遇到异常曲线时，我先回看录像，寻找释放碰触或磁铁扭转等具体原因，而不是仅因结果与预期不同就排除数据。我主要参与实验装置与操作过程的写作，也体会到可靠的实验来自对细节的耐心检查。

组员王湛和主要负责视频追踪、数据处理和理论—实验图表整理。将录像转化为角度序列时，我需要确定坐标原点、标尺和追踪位置，并检查自动追踪是否受到反光、遮挡或磁铁转动的影响。对于曲线中的异常变化，我会回看对应录像，判断它来自实际运动还是追踪偏差，避免将处理误差当作物理现象。

整理热图和实验点时，我还需要核对间距、初始角度和阻尼条件，确保理论与实验采用相同的比较指标。随着图像和论文版本增多，图号、参数标签和文字引用容易不一致，因此我也参与图注、单位和论文格式的检查，协助撰写数据处理与结果比较部分。这让我认识到，清楚的图表不仅要展示结果，也应让读者知道结果是怎样得到的。

我们感谢南京外国语学校在日常学习中给予我们的培养，以及关心本课题的老师和同学。课堂学习为理解模型提供了基础，讨论中的疑问则促使我们检查表达和证据。感谢家人在实验

拍摄、程序计算和论文整理期间给予的理解与支持，使我们在工作需要反复进行时仍能坚持。我们也感谢相关文献的作者及科研软件的开发者，他们的工作为本研究提供了知识和工具基础。

在磁力牛顿摆及耦合振动相关研究过程中，我们使用了 DeepSeek 进行知识咨询、程序编写与修改、数值分析方法讨论及可视化辅助，使用时间为 2025 年 8 月 16 日至 2026 年 9 月，涉及 38 个有提问记录的自然日，共 173 条用户消息，使用方式为围绕研究问题分阶段、多轮交互。上述统计包含导出记录中的分支消息，仅对应此次整理的对话范围。使用过的模型为 Deepseek V3.1, V3.2, V4, V4.1。

具体用途包括：咨询圆柱磁铁的磁场与相互作用能、电流环模型、磁偶极子近似及椭圆积分等问题；根据本人提供的公式、物理条件和程序要求生成或修改代码，包括将双摆、三摆程序扩展至更多磁摆，添加平衡位置求解、能量计算、傅里叶变换、拍频分析、参数扫描及非线性图像等功能；讨论简正模式、势能与稳定性、庞加莱截面、返回映射、李雅普诺夫指数和集体行为等分析方法；排查程序运行错误、讨论计算加速方案，并辅助生成时间序列图、频谱图、势能曲面和用于展示的 GIF 动画。此外，部分对话用于获取文献检索关键词和资料线索。DeepSeek 的输出既包括解释和修改建议，也包括完整程序及分析框架，其参与不限于语法检查或代码报错修复。

作为喜爱物理的学生，我们习惯了从给定条件出发求解，但这次研究中，更困难的常常是确定应该观察什么、追问什么。从摆角转向模态坐标，再加入相位与周期的比较，我们才逐渐看清运动中的联系。比起得到符合预期的曲线，我们更珍惜从困惑出发，经过检查和讨论后理解一部分现象的过程。几块磁铁和细绳组成的装置，让我们不断修正自己的判断，也留下了值得继续探索的问题。我们希望将这份好奇、耐心和求证的习惯带入今后的学习。

附录 A 线性分析补充材料

A.1 完整时间序列与模态频谱

本附录保留线性部分的完整时间序列和参数比较，便于与第 4 章的局部观察及解析结果对应。

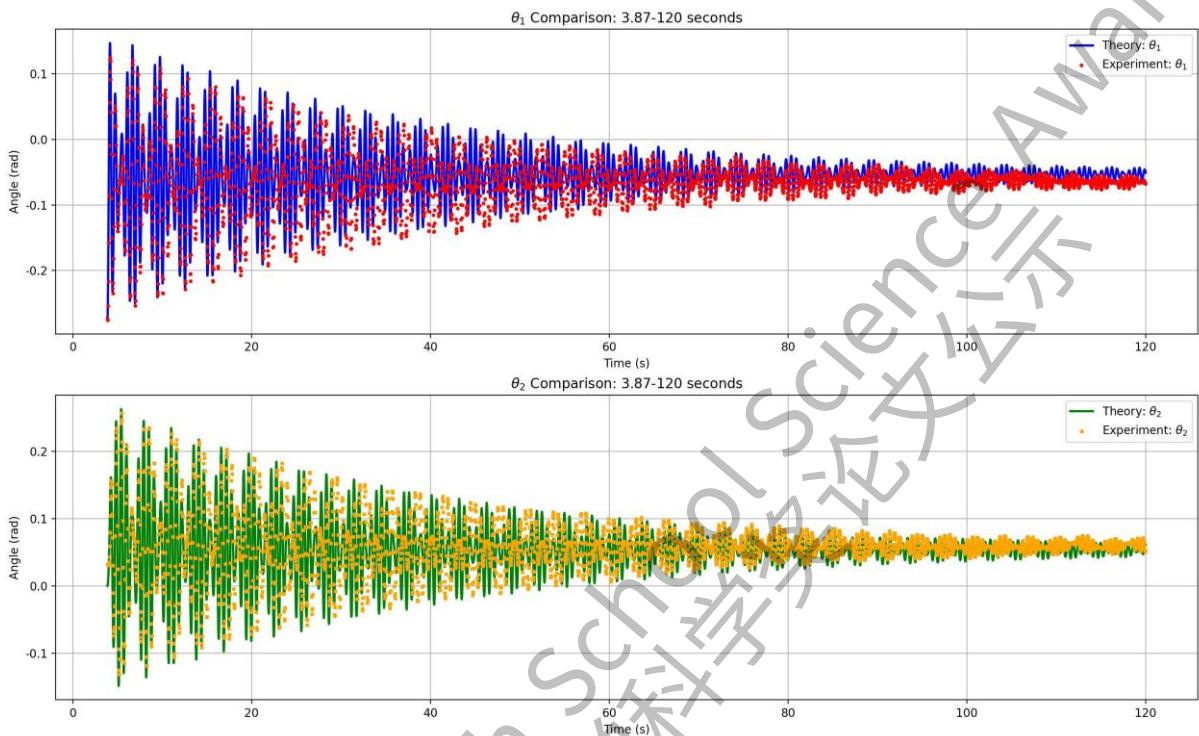


图 A.1 双磁摆的完整时间序列及理论—实验比较。

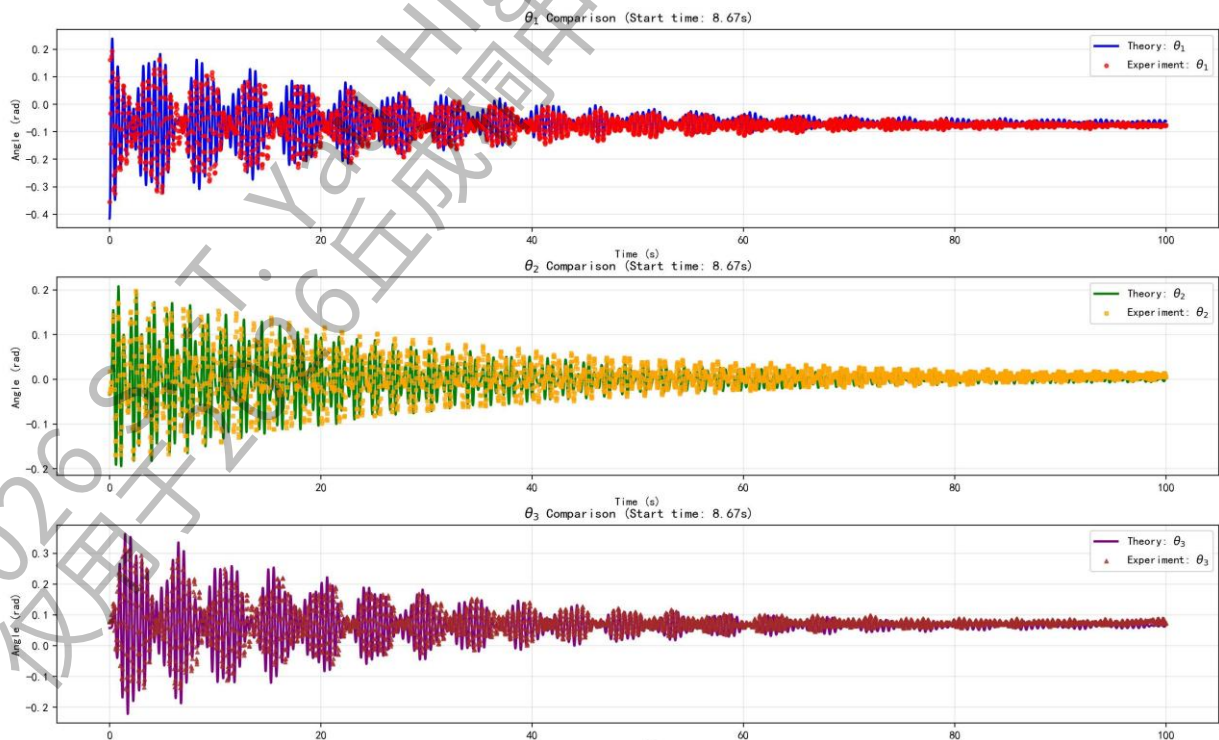


图 A.2 三磁摆的完整时间序列及理论—实验比较。

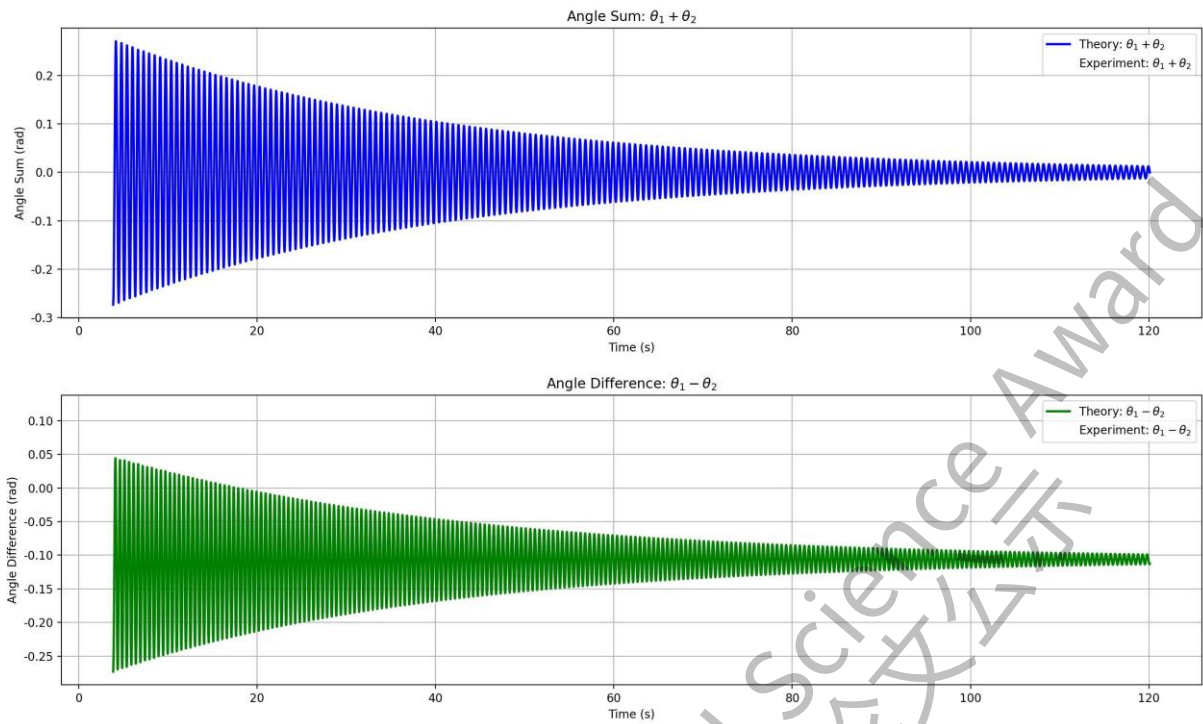


图 A.3 双磁摆取和、取差后的模态时间序列。

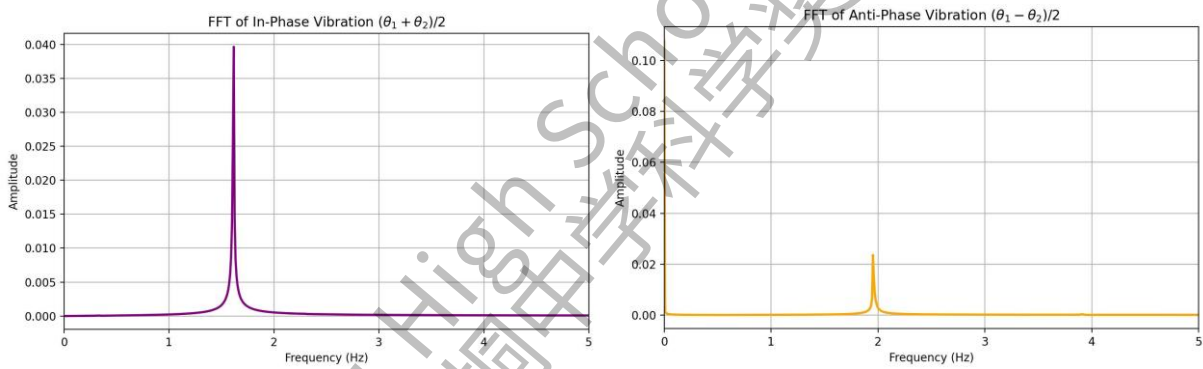


图 A.4 同相与反相分量的频谱。各组合主要保留一个非零模态频率。

A.2 摆长、间距与释放状态的比较

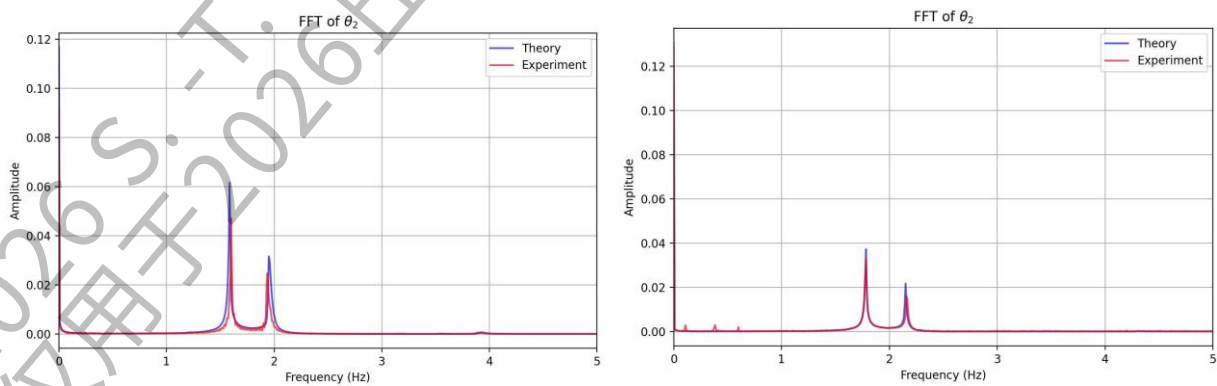


图 A.5 不同摆长的双磁摆频谱比较。两组摆长分别为 9.132 cm 和 7.393 cm，摆长减小时主要频率升高。

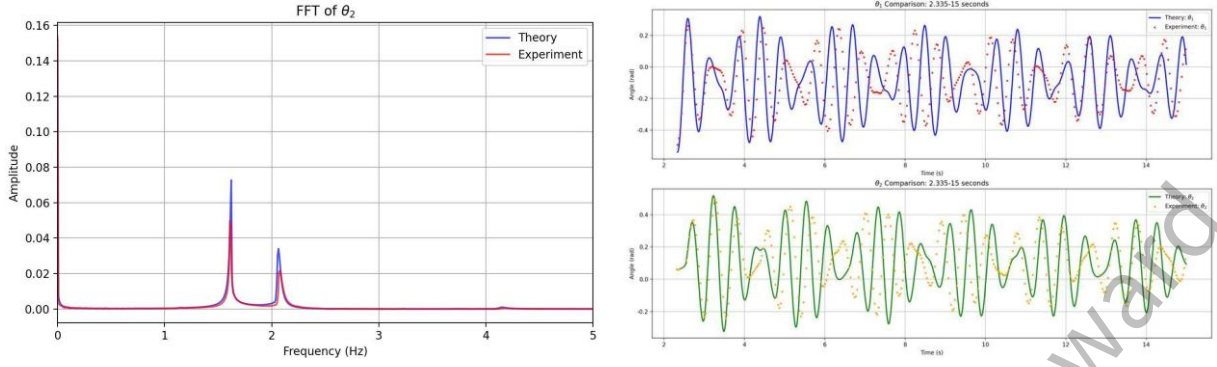


图 A.6 悬点间距减至 7 cm 时的频谱和局部时间序列。与图 A.5 左侧的 8 cm 间距基准比较，较强耦合增大频率差并缩短拍周期。

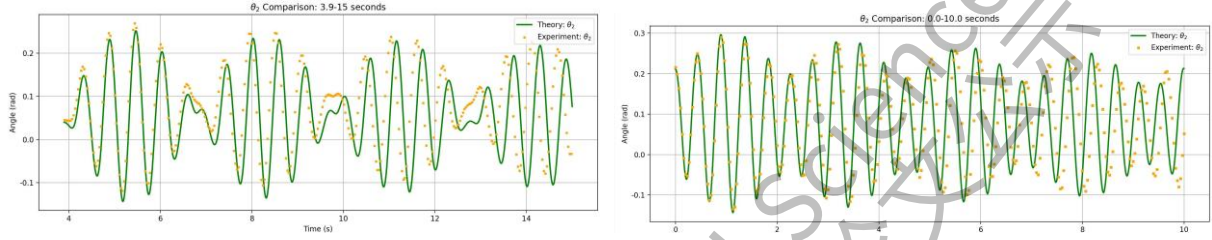


图 A.7 双磁摆第二摆在不同释放状态下的时间序列。初始状态改变两个模态的比例，进而改变包络谷值。

A.3 三磁摆的标量方程与解析解

相邻磁铁与两端磁铁的线性刚度分别为

$$\kappa_{12} = \kappa_{23} = 6k, \quad \kappa_{13} = -\frac{6k}{32} = -\frac{3k}{16}$$

减去自由平衡角后，三个方程为

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \frac{g}{l}\xi_1 + \frac{6k}{m}(\xi_1 - \xi_2) - \frac{3k}{16m}(\xi_1 - \xi_3) &= 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \frac{g}{l}\xi_2 + \frac{6k}{m}(2\xi_2 - \xi_1 - \xi_3) &= 0 \\ \ddot{\xi}_3 + \frac{g}{l}\xi_3 + \frac{6k}{m}(\xi_3 - \xi_2) - \frac{3k}{16m}(\xi_3 - \xi_1) &= 0 \end{aligned}$$

按照第 4.6 节取和、取差，即得到三个独立模态。静止释放时，物理坐标的解析解为

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_{1,eq} + A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + A_3 \cos \omega_3 t \\ \theta_2(t) &= \theta_{2,eq} + A_1 \cos \omega_1 t - 2A_3 \cos \omega_3 t \\ \theta_3(t) &= \theta_{3,eq} + A_1 \cos \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t + A_3 \cos \omega_3 t \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{\xi_{10} + \xi_{20} + \xi_{30}}{3}, \quad A_2 = \frac{\xi_{10} - \xi_{30}}{2}, \quad A_3 = \frac{\xi_{10} - 2\xi_{20} + \xi_{30}}{6}$$

两端磁摆均可含有三个模态，中间磁摆只含第一、第三模态。因此，中间摆仍可用两个频率的和差化积解释振幅变化，而两端的叠加一般更复杂。

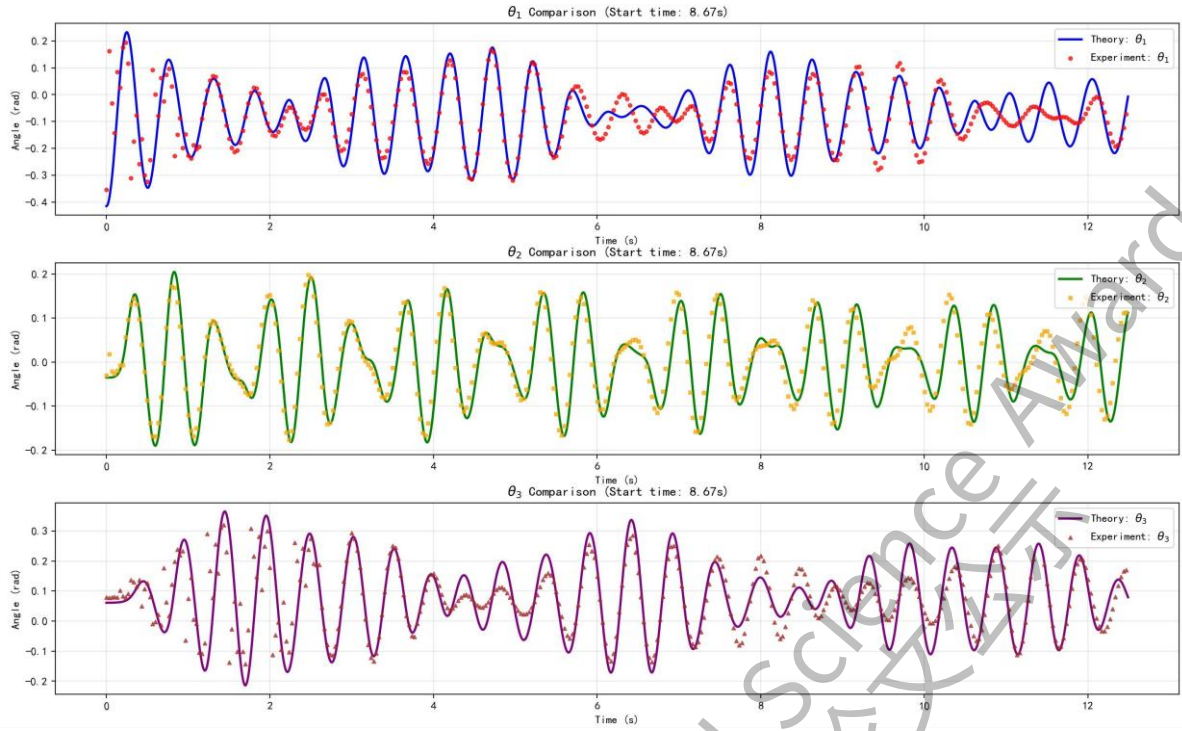


图 A.8 三磁摆早期运动的局部时间序列。三个位置的振幅变化节奏不同。

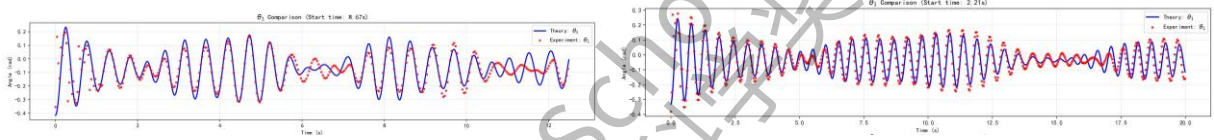


图 A.9 三磁摆悬点间距的比较。分别为 $d = 0.08 \text{ m}$ 和 0.10 m ；间距增大后，慢变幅结构延展到更长时间。

中间磁摆的包络满足

$$R_2^2(t) = A_1^2 + 4A_3^2 - 4A_1A_3 \cos(\omega_3 - \omega_1)t$$

当中间磁摆相对平衡位置的初始位移为零时， $A_1 = 2A_3$ 。只要这两个模态被非零激发，包络就能出现较深的谷值。改变中间摆的初始状态，则会改变这一叠加比例。

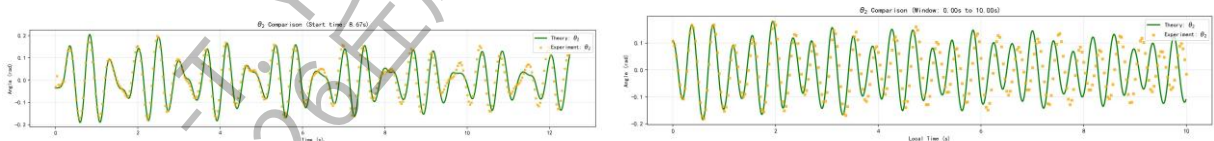


图 A.10 三磁摆中间位置在不同初始条件下的时间序列。左侧初始角接近零，右侧有非零初始偏角。

附录 B 非线性解析方程与平均关系的推导

B.1 磁偶极子模型与总阶展开

解析计算沿用第 3 章的几何关系与拉格朗日方法。令 $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, 有:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1, \quad y_1 = -l \cos \theta_1 \\ x_2 &= d + l \sin \theta_2, \quad y_2 = -l \cos \theta_2 \\ V_B &= \frac{\mu_0 M^2}{4\pi} \frac{3\Delta x^2 - r^2}{r^5}, \quad V_G = mg(y_1 + y_2) \\ T &= \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2), \quad L = T - (V_B + V_G) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

先对角度方程作总三阶展开, 再相加、相减并除以 ml^2 。取 $d > 0$, 并代入 $k = \mu_0 M^2 / (\pi d^5)$ (这里 M 为磁矩), 得到文本计算中的完整三阶模态方程:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_p + \frac{g}{l} Q_p - \frac{3dk}{4lm} Q_m Q_p - \left(\frac{g}{8l} + \frac{9k}{2m} \right) Q_m^2 Q_p - \frac{g}{24l} Q_p^3 &= 0 \\ \ddot{Q}_m + \frac{3dk}{lm} + \left(\frac{g}{l} + \frac{12k}{m} \right) Q_m &+ \left(-\frac{3kd}{8lm} + \frac{30kl}{dm} \right) Q_m^2 + \left(-\frac{g}{24l} - \frac{2k}{m} + \frac{60kl^2}{d^2 m} \right) Q_m^3 \\ - \frac{3dk}{8lm} Q_p^2 - \left(\frac{g}{8l} + \frac{9k}{2m} \right) Q_m Q_p^2 &= 0 \end{aligned}$$

从这些方程删去磁力的非线性项, 就得到正文采用的简化式。对运动方程保留三阶, 相当于对势能保留四阶, 二者的阶次不能混用。

B.2 平衡平移与平均做功

对正文简化式作 $Q_m = q_0 + q_m$ 平移后, 线性频率为:

$$\Omega_p^2 = \frac{g}{l} - \frac{g}{8l} q_0^2, \quad \Omega_m^2 = \frac{g}{l} + \frac{12k}{m} - \frac{g}{8l} q_0^2$$

记 $c = g/(8l)$, $a = g/(24l)$, 余下的非线性项为:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_p + \Omega_p^2 q_p &= 2cq_0 q_m q_p + cq_m^2 q_p + aq_p^3 \\ \ddot{q}_m + \Omega_m^2 q_m &= 3aq_0 q_m^2 + cq_0 q_p^2 + aq_m^3 + cq_m q_p^2 \end{aligned}$$

在两个频率接近 1:1 且慢调制近似成立时, 二次项的直接代入只产生常数项或二倍频项。以下只保留三次项的一阶平均贡献。它们对同相模的瞬时功率为:

$$\begin{aligned} \dot{q}_p &\approx -\omega A_p \sin \theta \\ P_p &\approx -c\omega A_p^2 A_m^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

对 θ 的一个完整周期取平均:

$$\langle P_p \rangle \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -c\omega A_p^2 A_m^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2(\theta + \varphi) d\varphi = \frac{c\omega A_p^2 A_m^2}{8} \sin 2\varphi = \frac{g\omega A_p^2 A_m^2}{64l} \sin 2\varphi$$

反相模同理得到相反的最低阶平均功率。这个相反关系只针对周期平均，瞬时还存在耦合势能的储存与释放。按正文的归一化，交叉耦合势能为 $-c q_p^2 q_m^2 / 2$ ，不能要求两模瞬时功率处处互为相反数。

B.3 基频提取与相位变化

计算频率修正时使用:

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \\ \cos \theta \cos^2(\theta + \varphi) &= \frac{1}{4} (2 + \cos 2\varphi) \cos \theta - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \sin \theta \\ &\quad + \frac{1}{4} \cos(3\theta + 2\varphi) \end{aligned}$$

其中，与 $\cos \theta$ 同相的基频项修正频率，与 $\sin \theta$ 同相的项对应振幅缓慢变化，三倍频项修正波形。两模分别比较基频系数后得到正文的频率修正式，再相减即可得到切换条件。

解析式中的 Q_p 、 Q_m 按两个摆角直接相加、相减定义。部分扫描图采用除以 $\sqrt{2}$ 后的归一化坐标；从这些图或数据读取振幅用于切换条件时，需先乘回 $\sqrt{2}$ 。相位差和局部周期不受这一共同缩放影响，但振幅平方及其对应系数必须采用同一种约定。

从两条周期曲线估计连续相位差时，应累积角频率差，而不是直接累积周期差:

$$\varphi(t) \approx \varphi(t_0) + 2\pi \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{T_m(s)} - \frac{1}{T_p(s)} \right) ds$$

上述积分需使用同一时间轴，并给定初始相位。对数值解，可在连续插值上寻找速度由正变负的零点来定位主波峰，避免峰值时刻被固定采样间隔量化。对实验序列，应先识别主峰并检查噪声和高次谐波造成的小峰。模态振幅接近零时，相位本身不易可靠确定，这类区间不应仅凭周期曲线判断交叉。

附录 C 辅助扫描与弱非对称情形

C.1 轨迹和时间序列扫描的参数

图 6.2、6.3、6.11 和 6.12 对应同一辅助扫描程序的轨迹与模态时间序列结果。该程序将磁铁两端等效为磁荷，近似计算有限长度磁铁之间的相互作用，用于比较参数变化引起的运动差异。本文的电流圆柱模型用于实验数值比较，磁偶极子模型用于解析推导，辅助扫描采用的模型与参数在此单独说明。

程序取 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $l = 0.10 \text{ m}$, $m = 0.0081 \text{ kg}$, $R = 0.005 \text{ m}$, $h = 0.015 \text{ m}$, $M = 7.222719 \times 10^5 \text{ A/m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $b = 0$ ，采用 DOP853 方法进行无阻尼数值积分。

对于每个悬点间距，程序先求出两个磁摆的自由平衡位置，再设置相对于各自平衡位置的初始偏转。第一摆的初始偏转为 θ_{10} ，第二摆的初始偏转为零，两摆初始角速度均为零。第一组固定 $d = 0.17$ m，扫描 $\theta_{10} = -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9$ rad；第二组固定 $\theta_{10} = -0.5$ rad，扫描 $d = 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.20, 0.21, 0.22$ m。每组计算时长为 100 s。上述初态用于参数扫描；与实际释放实验比较时，仍需按照第 3 章的方法设置对应的约束平衡初态。

C.2 摆长略有差别的情况

补充计算还考虑了右侧磁摆的摆长比左侧长一个小量 Δl 的情况。原有近似给出的两个频率如下，均随 Δl 增加而降低。这里 l 表示左侧摆长， Δl 表示两摆的摆长差， k 沿用线性部分的耦合参数。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{g\Delta l}{2l^2}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{12k}{m} - \frac{g\Delta l}{2l^2}}$$

图 C.1 弱摆长差条件下的原有频率近似。该式仅用于小 Δl 的补充分析。

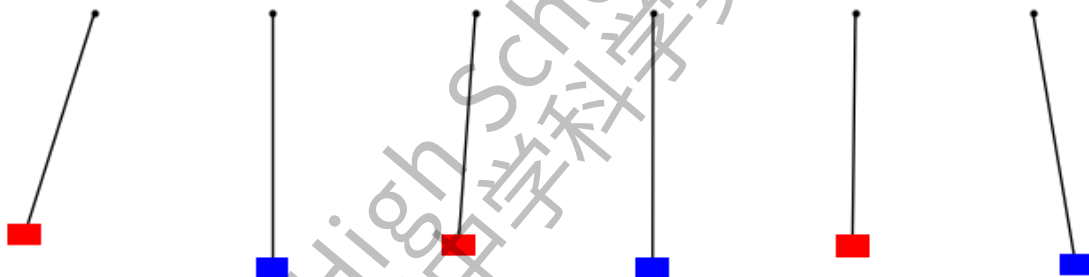


图 C.2 弱非对称磁摆动画的三个代表性画面，按动画先后顺序排列。

实际装置中的摆长或质量差异会使理想和差坐标不能完全分离模态，因此理论—实验比较还应考虑这种弱非对称影响。

附录 D 多磁摆与混沌的初步研究

D.1 多个磁摆的振动传递

随着磁摆数量增加，振动会从初始激发的一侧向其余磁摆传递。左侧振幅逐渐减小，右侧磁摆依次参与运动。下面保留多磁摆动画的代表性画面和对应的角度曲线。

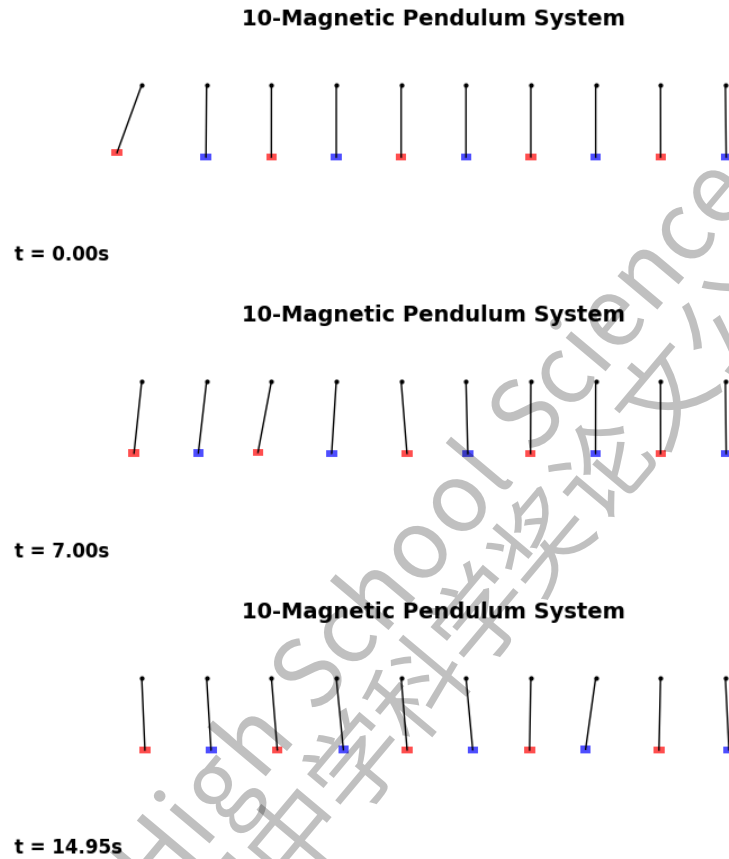


图 D.1 多磁摆振动传递的三个代表性画面，按动画先后顺序排列。

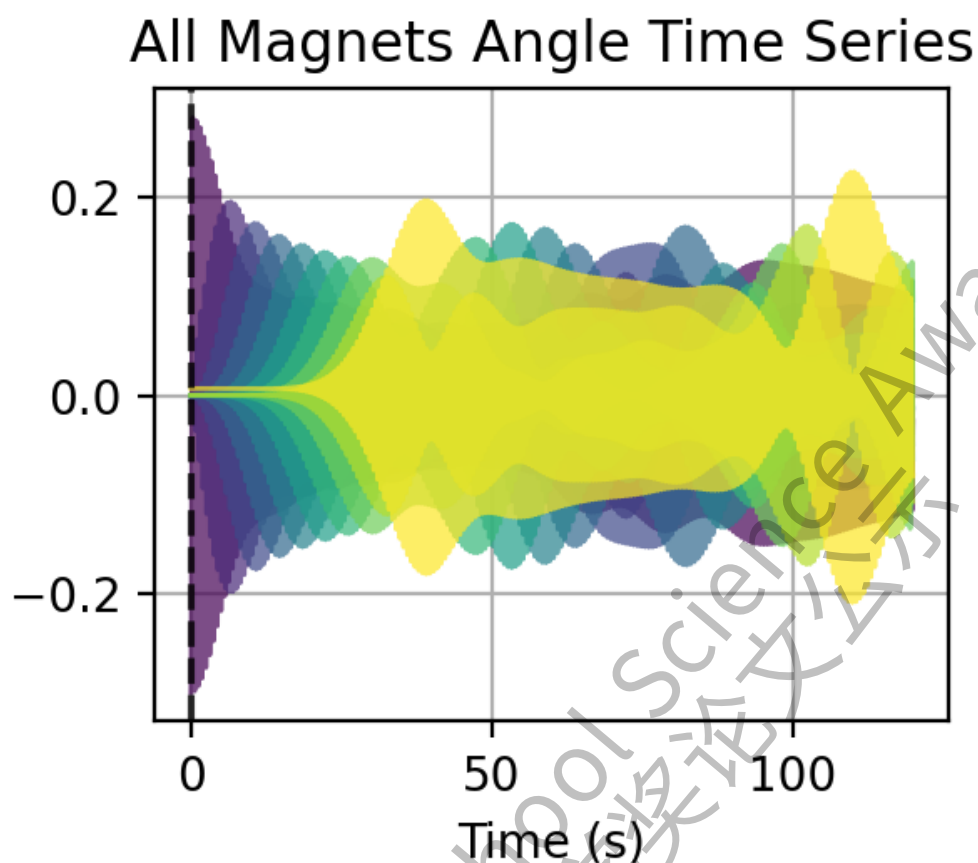


图 D.2 多磁摆的角度时间序列。不同颜色表示不同位置的磁摆。

我们还分别计算四个、五个和六个磁摆的时间序列与 FFT 频谱。磁摆增多后，参与运动的频率更多，频谱也更加密集。

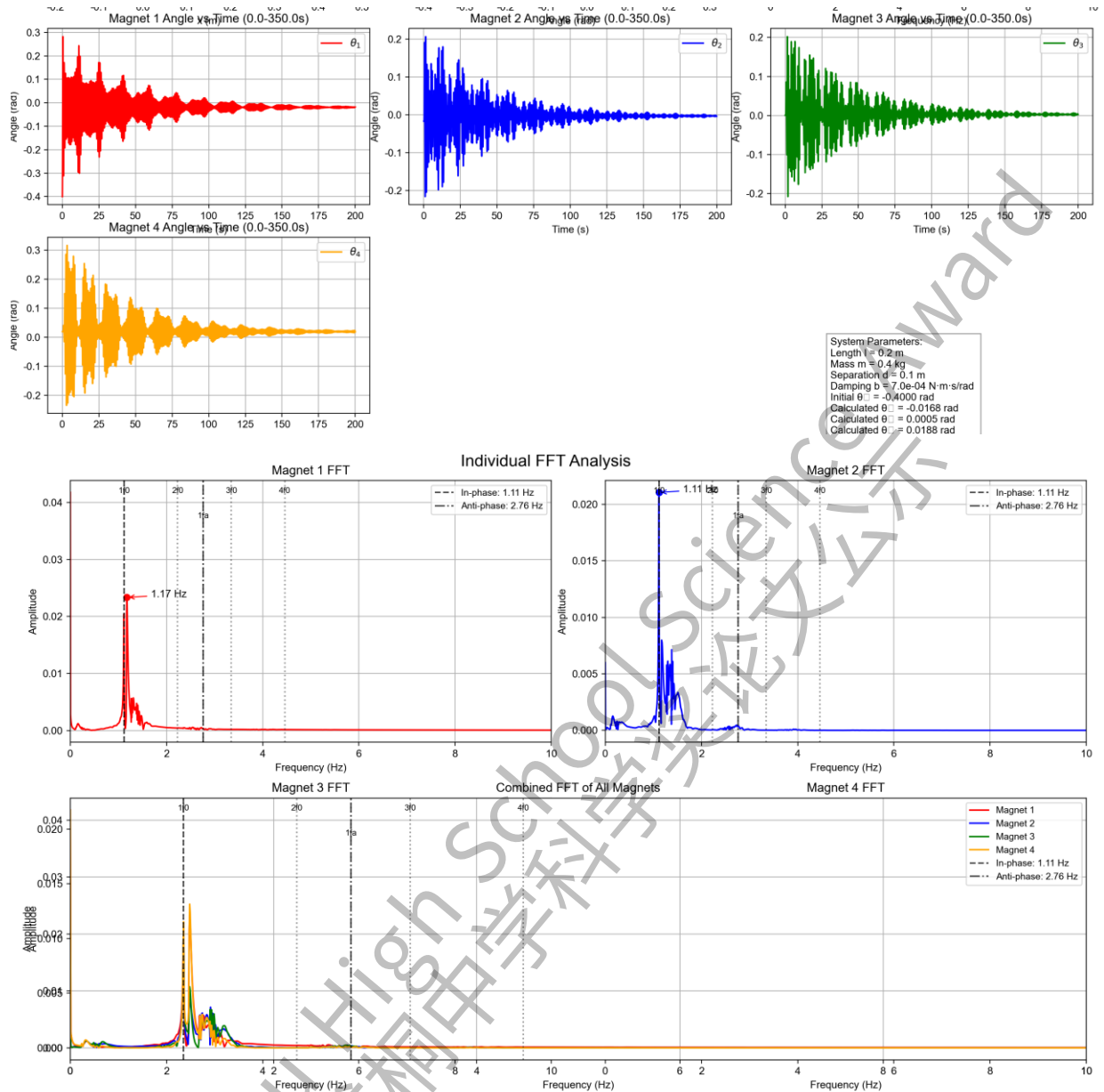


图 D.3 4 个磁摆的时间序列与 FFT 频谱。上为时间序列，下为频谱。

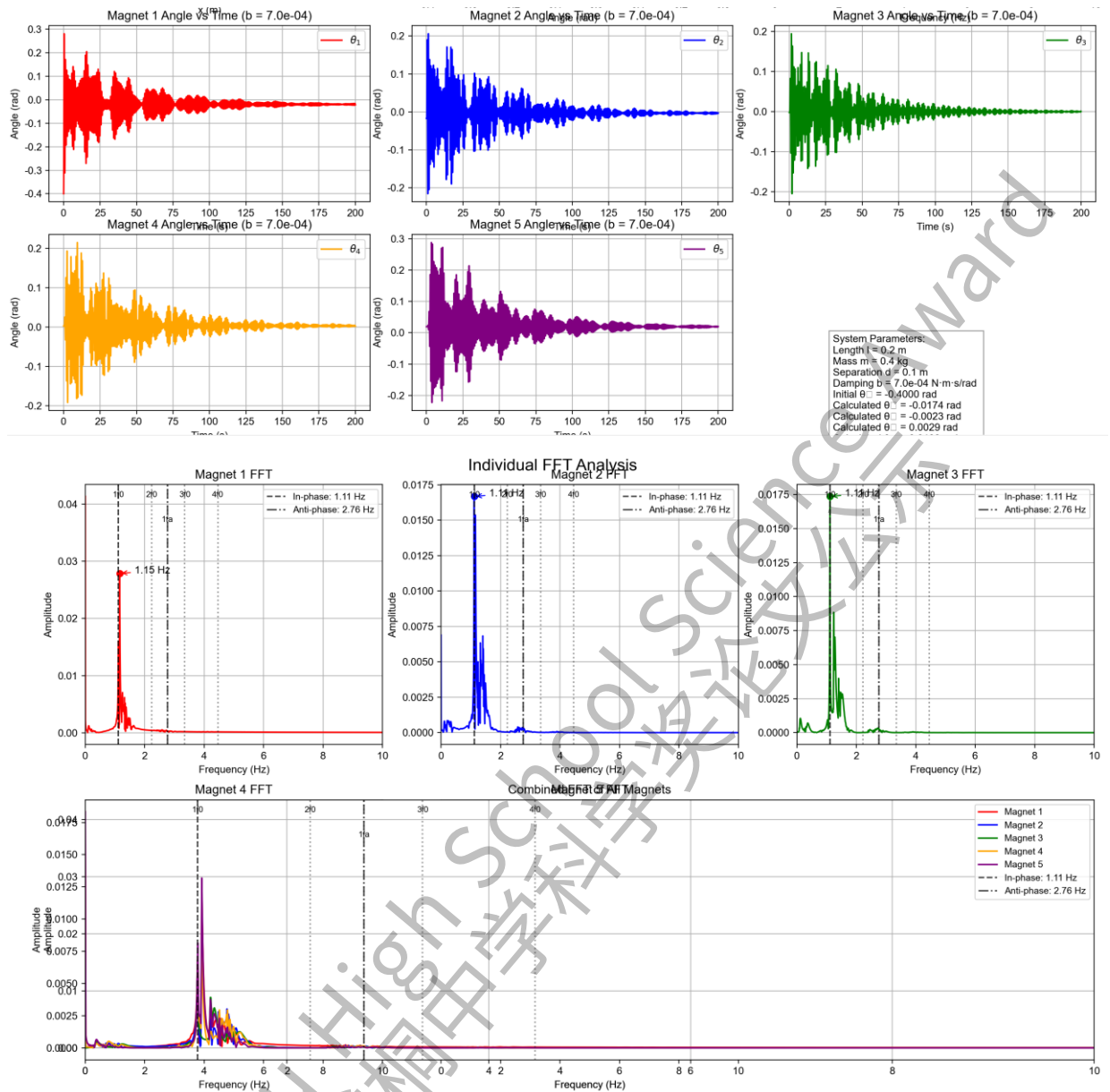


图 D.4 5 个磁摆的时间序列与 FFT 频谱。上为时间序列，下为频谱。

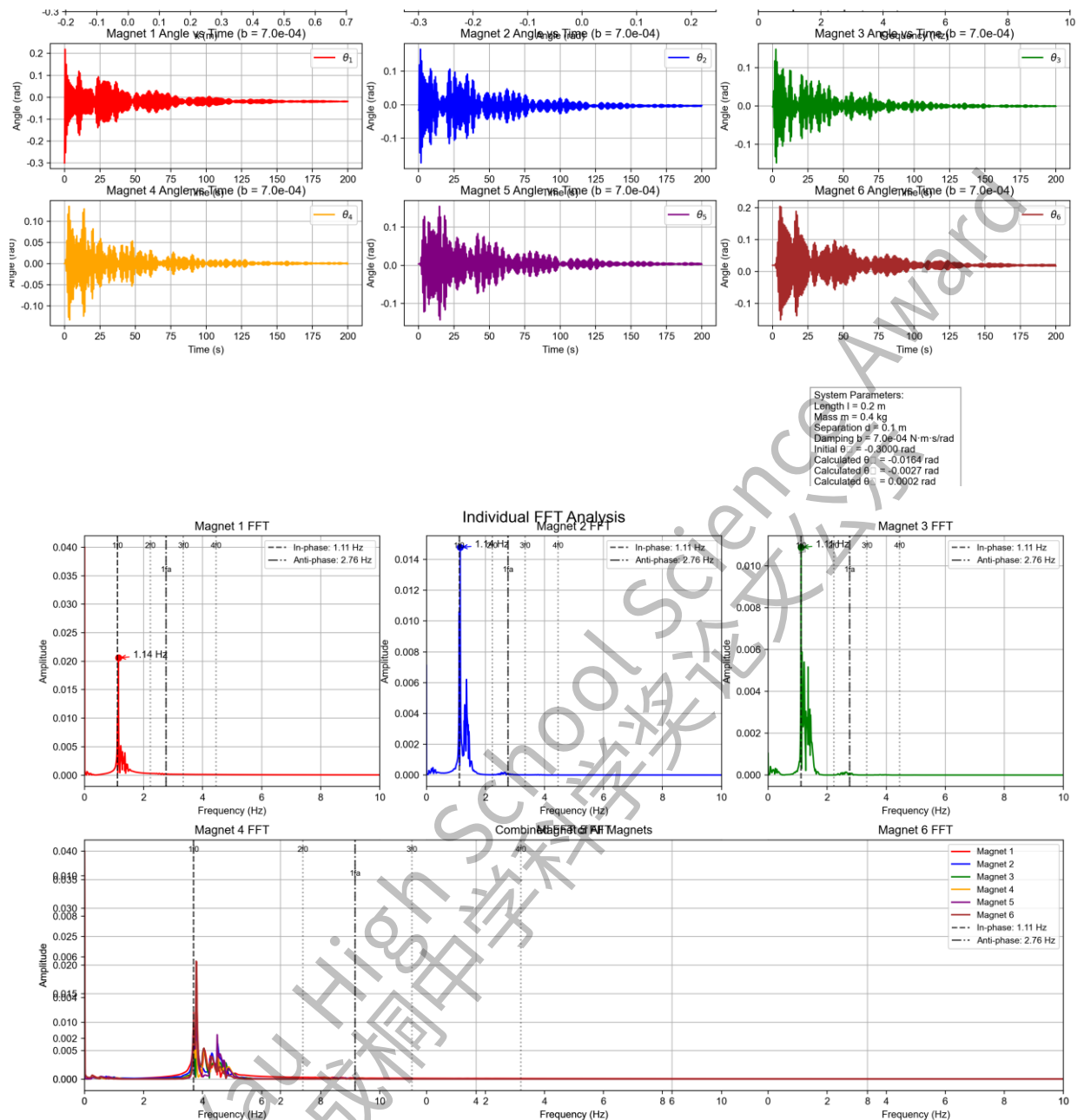


图 D.5 6 个磁摆的时间序列与 FFT 频谱。上为时间序列，下为频谱。

D.2 混沌的参数探索

补充研究把频谱逐渐展宽视为寻找混沌的线索。由于多个离散频率、非线性谐波和有限时间窗也可能使谱线密集，仅凭 FFT 外观尚不能确定混沌。因此，我们进一步比较零交叉间隔、Lyapunov 指数和相空间截面。

图 D.6 采用零交叉间隔方差进行参数分类：先记录信号连续穿过零点的时刻，再比较这些间隔是否规则。原图将不规则区域标为混沌候选区，同时单独标出碰撞和角度超限的参数。

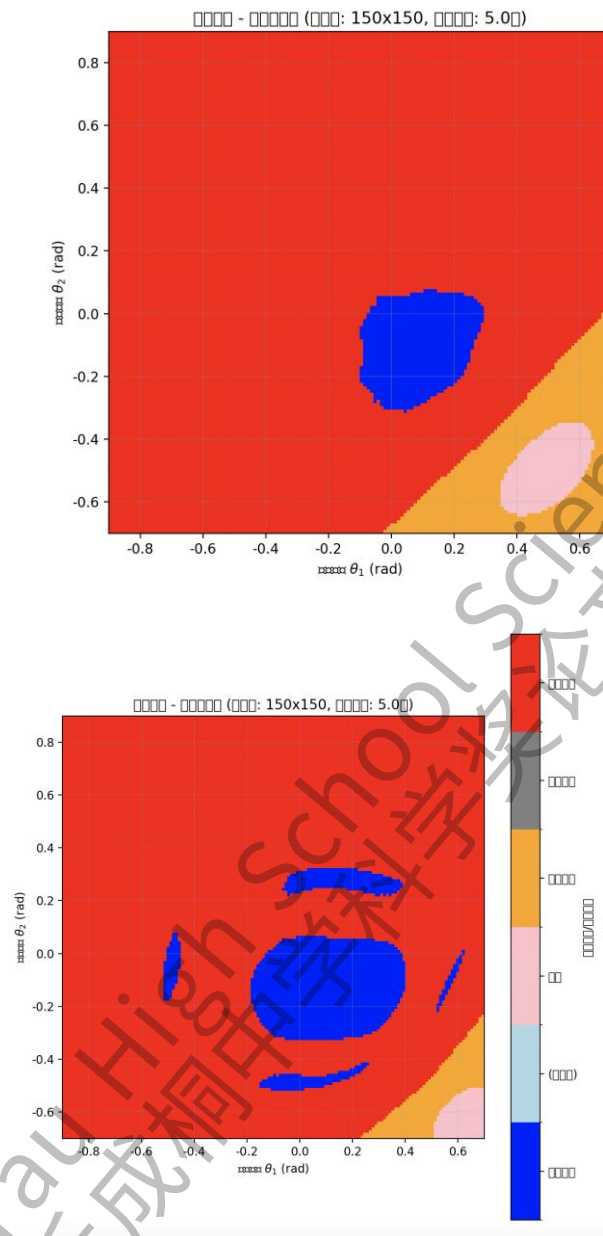


图 D.6 零交叉间隔方差得到的参数分类。红色为混沌候选区，蓝色为规则区，橙色为碰撞，粉色为角度超限。

图 D.7 保留 Lyapunov 指数扫描的数值输出。该指数描述相邻初始状态之间的距离随时间增长或缩小的速率；正值提示对初始条件敏感。有限时间的正值还需通过延长积分时间、检查扰动归一化和积分精度来确认。

d=0.2448	完成	李指数=7.97980323
d=0.2481	完成	李指数=7.85299325
d=0.2513	完成	李指数=7.32351493
d=0.2545	完成	李指数=7.28984706
d=0.2578	完成	李指数=7.21000259
d=0.2610	完成	李指数=7.22887081
d=0.2642	完成	李指数=7.15952567
d=0.2675	完成	李指数=7.44080341
d=0.2707	完成	李指数=7.09164470
d=0.2739	完成	李指数=7.15833783
d=0.2772	完成	李指数=6.72226888
d=0.2804	完成	李指数=7.69821092
d=0.2836	完成	李指数=7.01700525
d=0.2869	完成	李指数=7.30364353
d=0.2901	完成	李指数=7.47019105
d=0.2933	完成	李指数=7.98756102
d=0.2966	完成	李指数=7.26576553
d=0.2998	完成	李指数=7.53741870
d=0.3030	完成	李指数=7.34623030
d=0.3063	完成	李指数=7.42773950
d=0.3095	完成	李指数=7.44813084
d=0.3127	完成	李指数=7.32055533
d=0.3160	完成	李指数=7.13360050
d=0.3192	完成	李指数=7.22955857
d=0.3224	完成	李指数=7.01319717
d=0.3257	完成	李指数=7.13079519
d=0.3289	完成	李指数=7.63199030
d=0.3321	完成	李指数=7.52297801
d=0.3354	完成	李指数=7.73598962
d=0.3386	完成	李指数=6.83627001
d=0.3418	完成	李指数=7.49960915
d=0.3451	完成	李指数=7.74199030
d=0.3483	完成	李指数=7.66311556
d=0.3515	完成	李指数=7.44604107
d=0.3547	完成	李指数=7.85274748
d=0.3580	完成	李指数=7.27994536
d=0.3612	完成	李指数=7.59923017

图 D.7(a) 第一组 Lyapunov 指数扫描的原始输出。它提供初值敏感性的补充信息，尚未与图 D.6 逐点完成对应。

```

8 10=-0.5000 完成, 李指数=-0.44453133
8 10=-0.4286 完成, 李指数=-0.42133179
8 10=-0.3571 完成, 李指数=-0.43248141
8 10=-0.2857 完成, 李指数=-0.42118477
8 10=-0.2143 完成, 李指数=-0.44515254
8 10=-0.1429 完成, 李指数=-0.44128880
8 10=-0.0714 完成, 李指数=-0.43266063
8 10=0.0000 完成, 李指数=-0.43565369
8 10=0.0714 完成, 李指数=-0.45271626
8 10=0.1429 完成, 李指数=-0.43663968
8 10=0.2143 完成, 李指数=-0.42928204
8 10=0.2857 完成, 李指数=-0.42962851
8 10=0.3571 完成, 李指数=-0.43996006
8 10=0.4286 完成, 李指数=-0.44600891
8 10=0.5000 完成, 李指数=-0.44265779
描 1 ...
1=0.0600 完成, 李指数=-0.81602129
1=0.0648 完成, 李指数=-0.74229169
1=0.0697 完成, 李指数=-0.62591794
1=0.0745 完成, 李指数=-0.53666798
1=0.0793 完成, 李指数=-0.47866212
1=0.0841 完成, 李指数=-0.42890417
1=0.0890 完成, 李指数=-0.38087868
1=0.0938 完成, 李指数=-0.33624555
1=0.0986 完成, 李指数=-0.31334997
1=0.1034 完成, 李指数=-0.25476850
1=0.1083 完成, 李指数=-0.25387922
1=0.1131 完成, 李指数=-0.22588366
1=0.1179 完成, 李指数=-0.20769390
1=0.1228 完成, 李指数=-0.19892840
1=0.1276 完成, 李指数=-0.18088647
1=0.1324 完成, 李指数=-0.16874552
1=0.1372 完成, 李指数=-0.15634802

```

图 D.7(b) 第二组 Lyapunov 指数扫描的原始输出。

D.3 Poincaré 截面与返回图

为进一步分辨规则与不规则运动，我们在轨迹按同一方向经过选定截面时记录状态。图中 Poincaré 截面采用 $\theta_1 = 0$ 且第一摆角速度为正的穿越条件，记录第二摆的角度和角速度；返回图比较相邻两次穿越时的第二摆角度。图中 ω_1 、 ω_2 表示两摆的角速度。

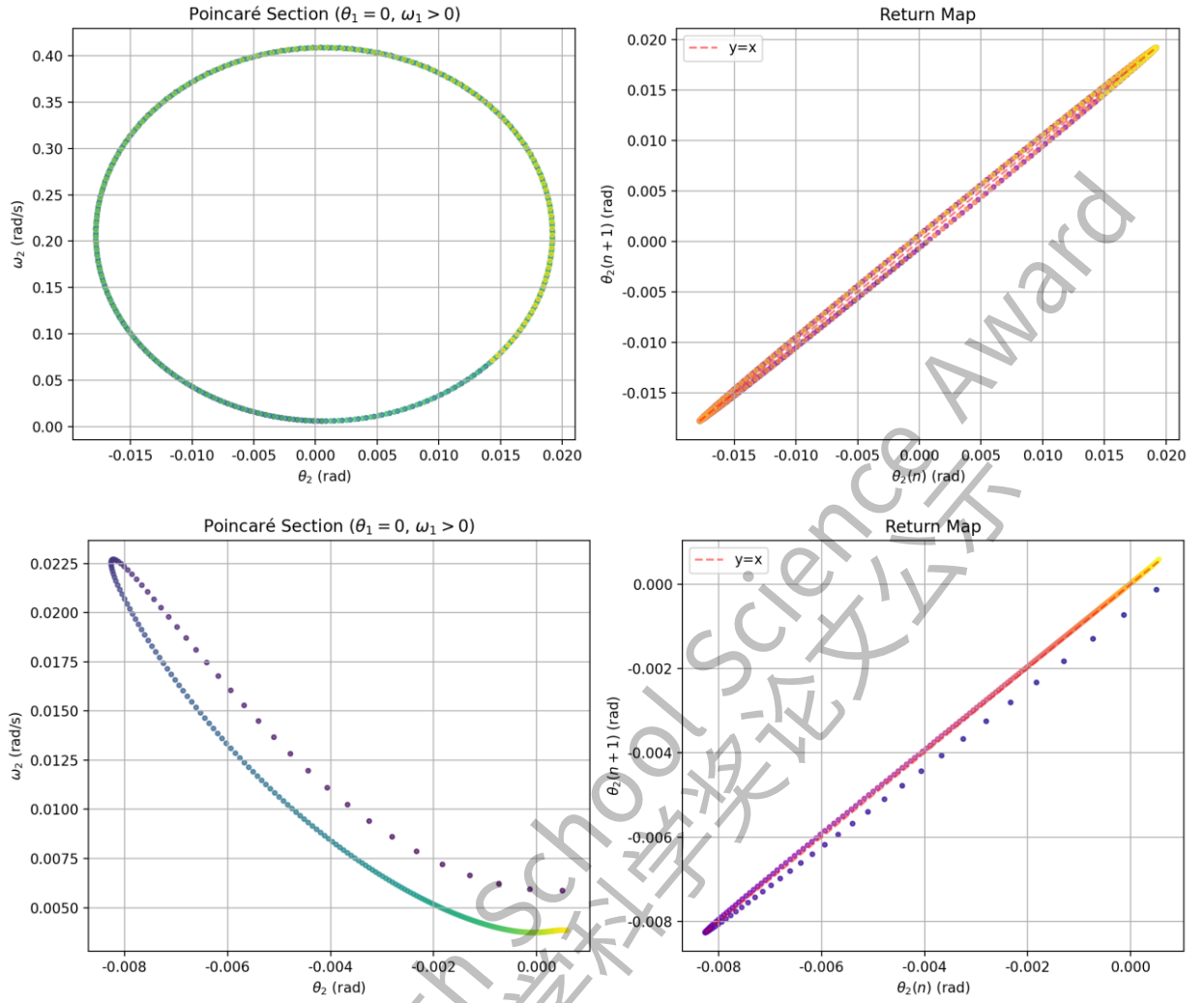


图 D.8 两组参数下的无阻尼运动 Poincaré 截面与返回图。 $\theta_{2,n}$ 和 $\theta_{2,n+1}$ 表示相邻两次截面穿越时记录的第二摆角度。上面的两组图表示非线性效应较弱时的图，下面的则为非线性效应强，可能接近局域化时的图

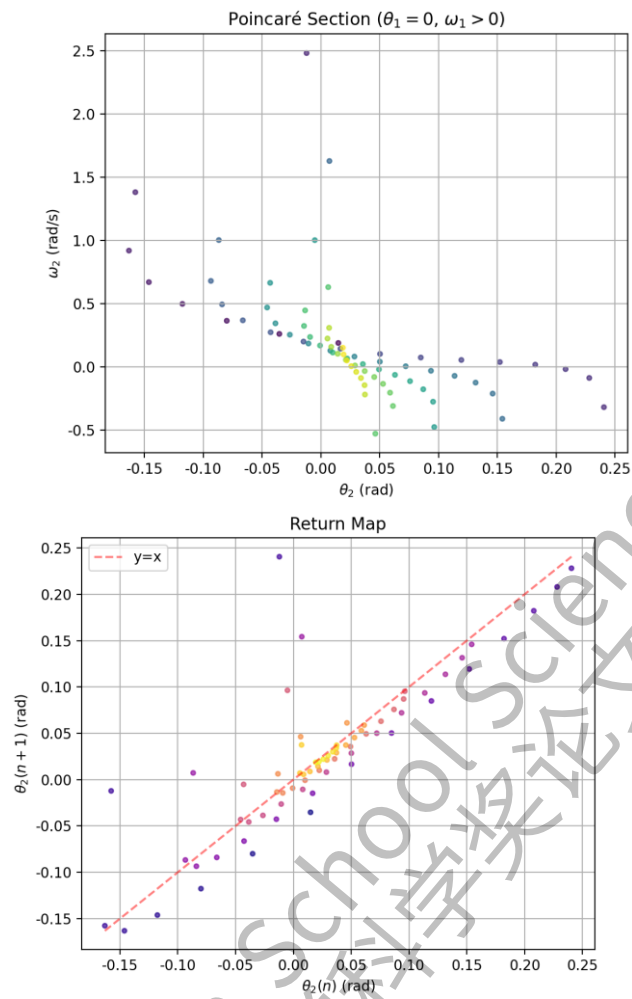


图 D.9 考虑阻尼非线性运动的 Poincaré 截面与返回图。左为截面，右为返回图；点的分布比图 D.8 更加分散。

这些图表明，多磁摆和较强非线性条件下存在值得进一步研究的复杂运动。目前混沌部分保留为初步结果，不把轨迹扭曲或局域化本身直接称为混沌。

附录 E 局部周期与其他内共振情形

E.1 坐标与参数比较

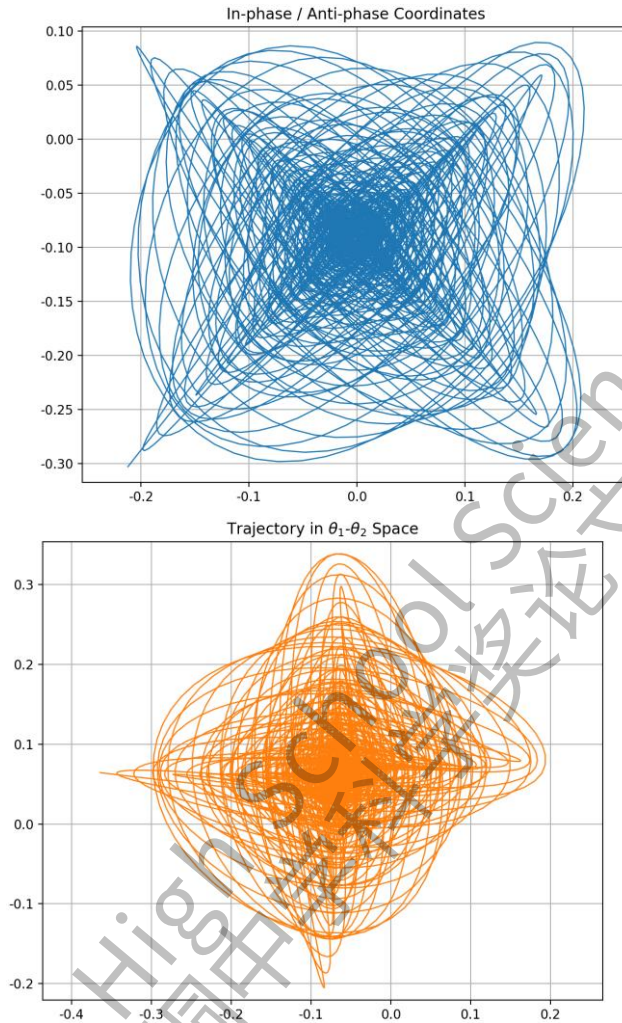


图 E.1 考虑阻尼情况的同一非线性运动在物理坐标与简正模坐标中的表示。可以看到，这组图像中不易于观察出规律，因此我们采取无阻尼理论模拟

以下保留补充材料中不同间距下的局部周期、轨迹及时间序列，作为第 6 章参数比较的延伸。周期曲线中的微小变化，需结合同时段幅值和相位观察。

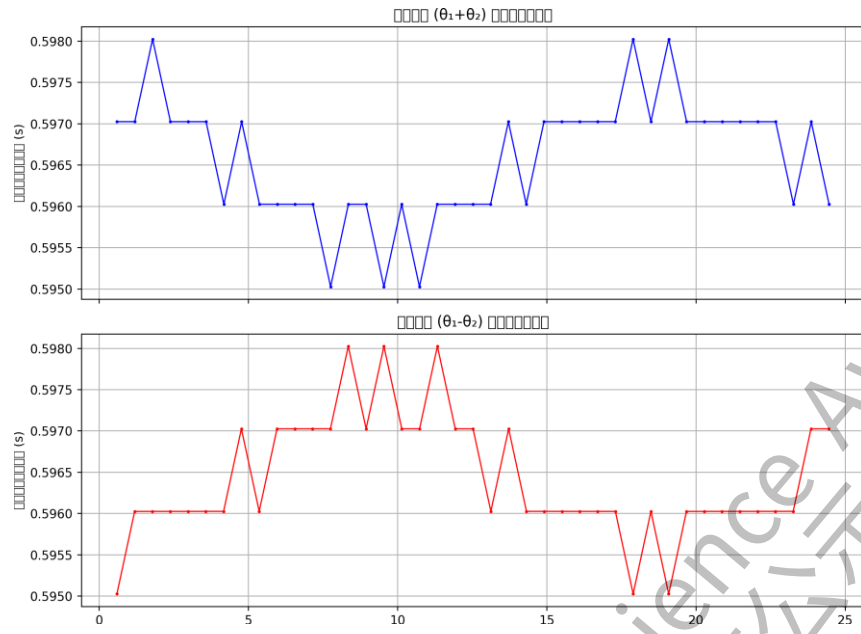


图 E.2 $d = 0.23$ m 时的局部周期比较。

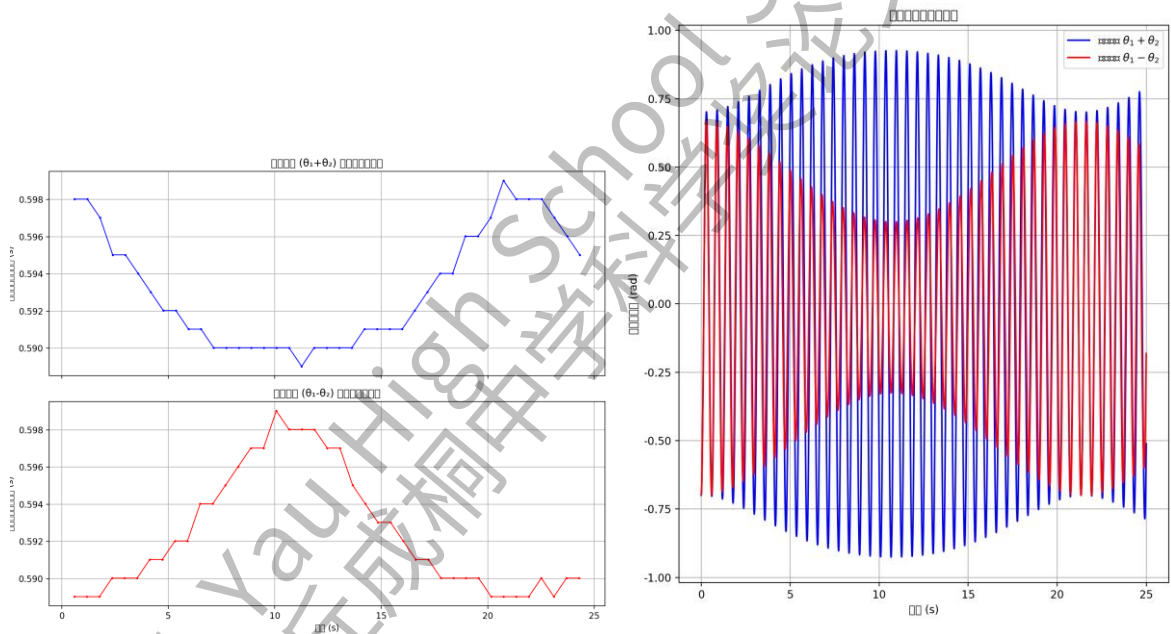


图 E.3 $d = 0.17$ m 时的局部周期与模态时间序列。

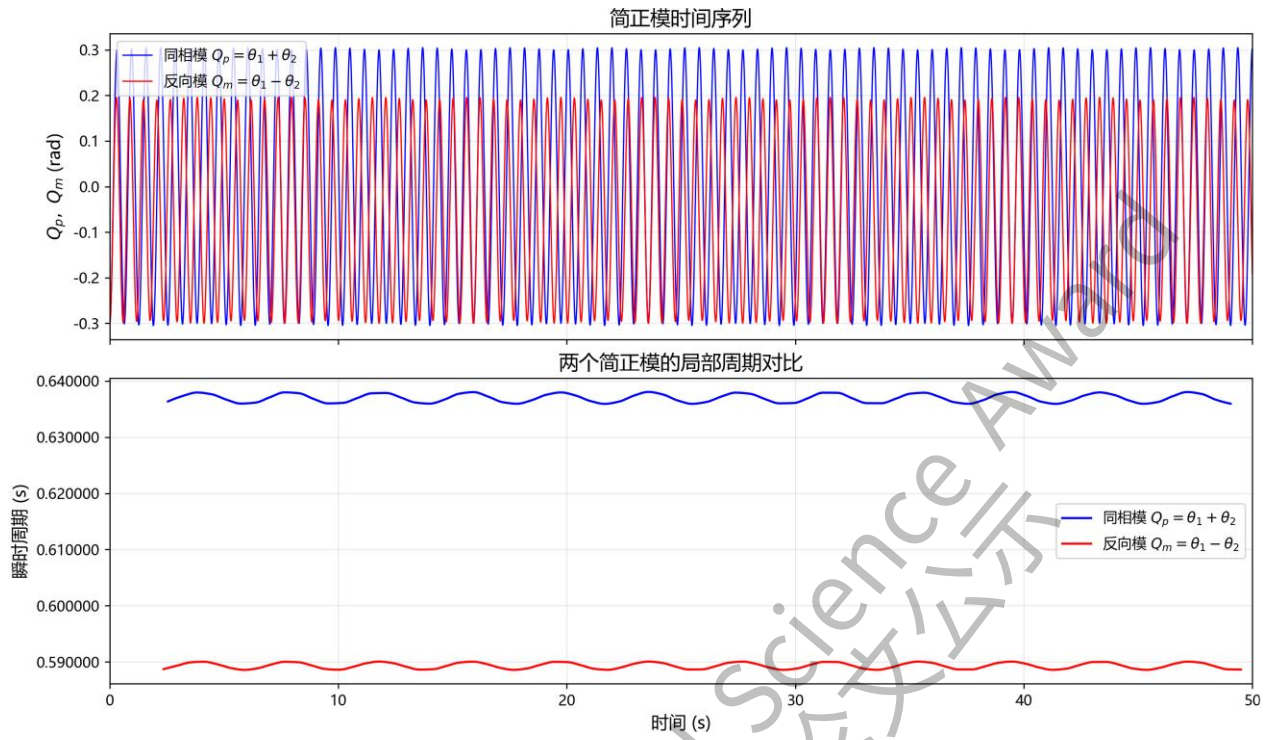
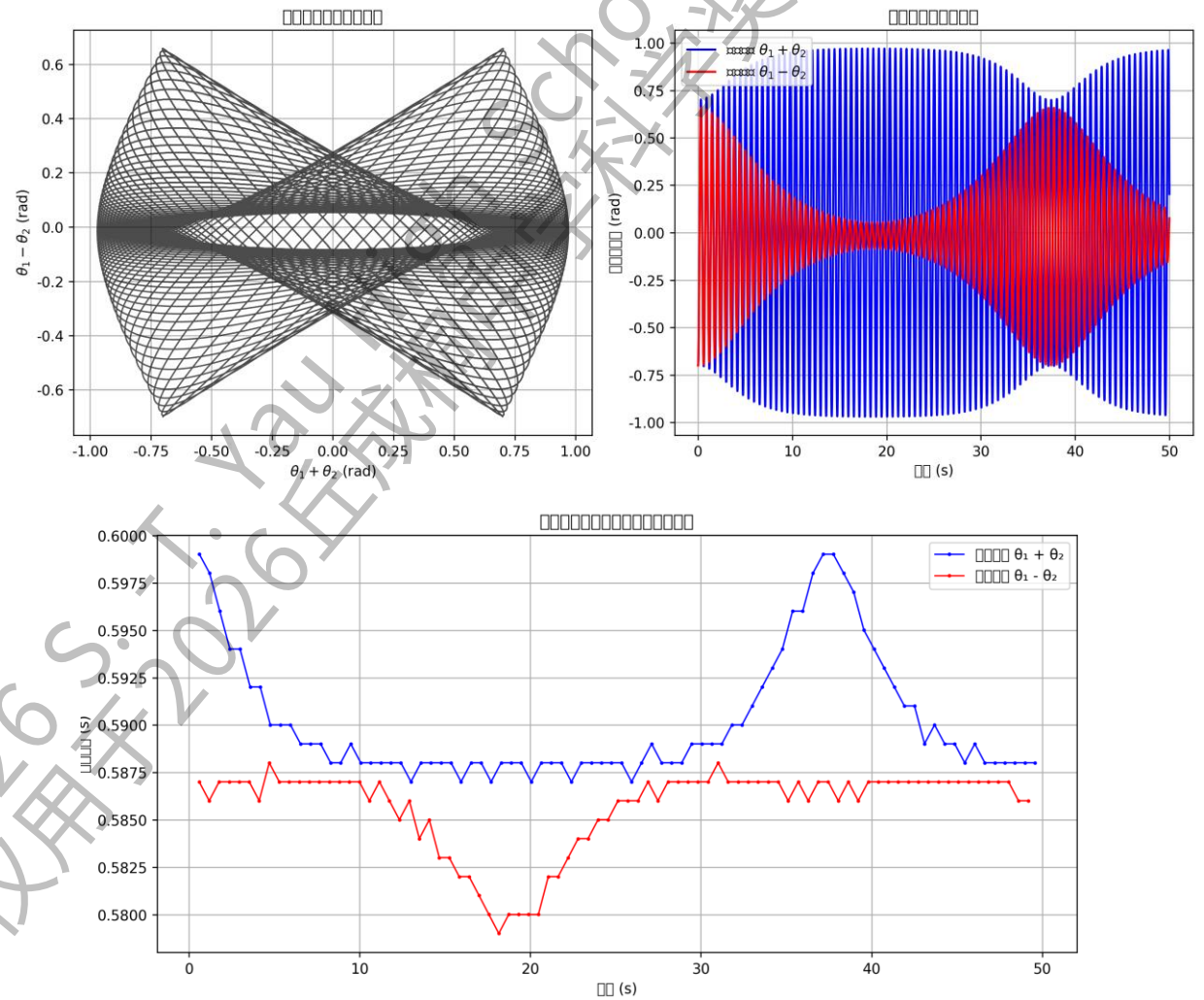

 图 E.4 $d = 0.12 \text{ m}$, $\theta_{10} = -0.3$ 时的局部周期与时间序列。


图 E.5 接近局域化转变（还未局域化）时的轨迹、时间序列和局部周期。局部周期还未交叉

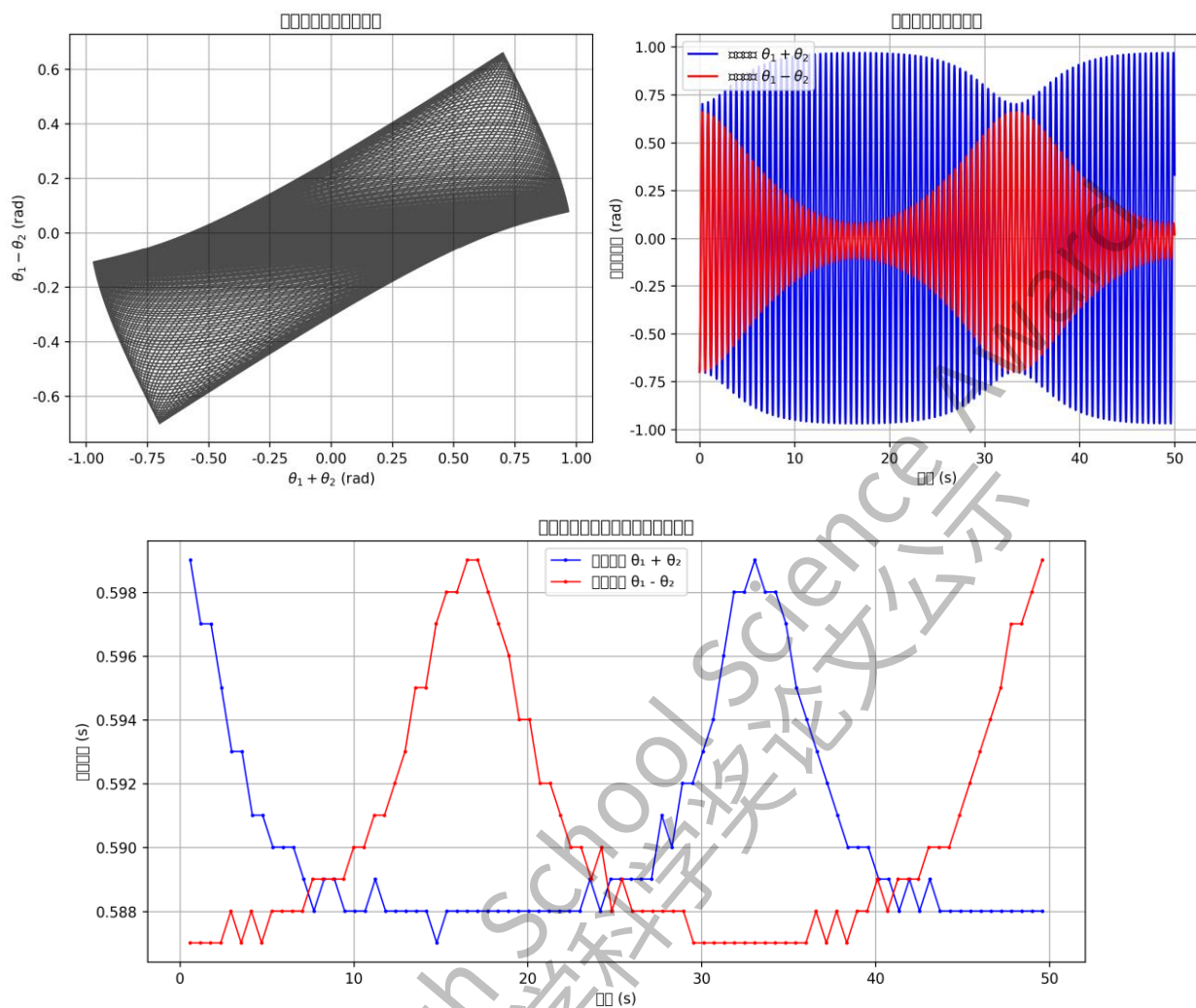


图 E.6 已经产生局域化的对应结果。与图 E.5 比较，局部周期发生交叉。

E.2 接近 2:1 内共振的结果

除正文讨论的 1:1 内共振外，我们还改变参数，使两个简正模的频率接近 2:1。此时，一个模态完成约两次振动，另一个模态完成约一次振动，轨迹和模态时间序列出现不同于前述 1:1 情形的结构。图 E.7 和图 E.8 保留这两组补充计算。

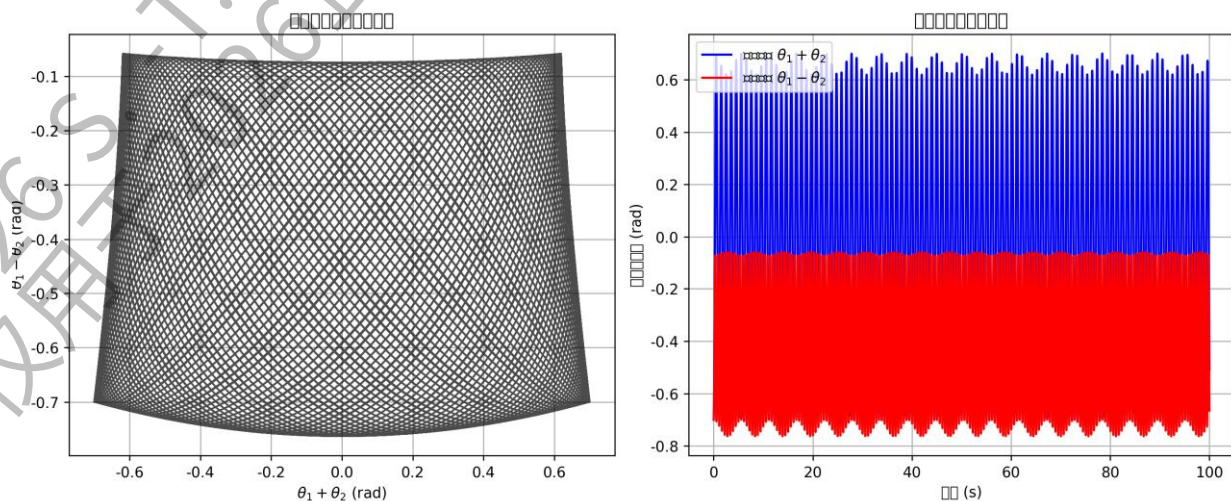


图 E.7 两个简正模频率接近 2:1 时的轨迹与模态时间序列。

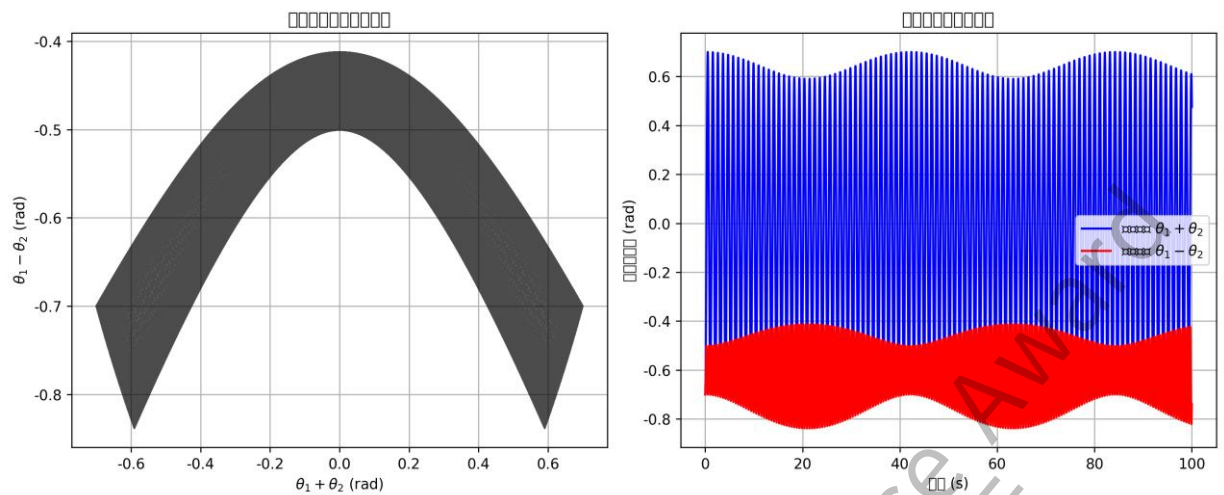


图 E.8 另一组更接近 2:1 内共振的结果。在 2: 1 共振产生时, 同 1: 1 共振时, 轨迹也会发生相变。我们预测这个现象来源于三阶势能 (二阶动力学) 项。

第一组计算所附的参数为 $l = 0.24332$ m, $d = 0.06$ m, $m = 0.0021$ kg, $R = 0.005$ m, $h = 0.015$ m, $M = 3.5 \times 10^6$ A/m, $b = 0$ 。它们用于构造频率接近 2:1 的辅助算例, 与正文实验标定参数不同。

这两组图主要展示另一种内共振比例下的运动。它们与正文 1:1 锁相的对照说明, 讨论内共振时应先明确参与的模态及其频率比例, 再结合对应轨迹解释。

附录 F 符号计算记录

下面保留原补充材料中的 Mathematica 计算记录，供查阅势能展开与解析计算过程。正文采用整理后的标量公式，程序中的中间矩阵输出不作为正文推导步骤。

```

Clear["Global`*"]
清除
2 mag;
l2 = l1 + Δl;
x1 = l1 * Sin[t1]; y1 = -l1 * Cos[t1]; x2 = l2 * Sin[t2] + d; y2 = -l2 * Cos[t2];
正弦 余弦 正弦 余弦
dix12 = x2 - x1; diy12 = y2 - y1; r12 = Sqrt[dix12^2 + diy12^2];
平方根
Bx12 = (mu0 * M * (3 * dix12^2 - r12^2)) / (4 * Pi * r12^5);
圆周率
VB = -(-M) * Bx12; VG = y1 * m * g + y2 * m * g;
V = VB + VG; T = 0.5 * m * l1^2 * D[t1, t]^2 + 0.5 * m * l2^2 * D[t2, t]^2;
偏导 偏导
L = T - V;
exprV = FullSimplify[Normal[Series[V, {t2, 0, 2}, {t1, 0, 2}]]];
完全简化 转换... 级数
e1 = -D[exprV, t1];
偏导
e2 = -D[exprV, t2];
偏导
a11 = Coefficient[e1, t1, 1] / (m * l1^2); a12 = Coefficient[e1, t2, 1] / (m * l1^2);
系数 系数
a21 = Coefficient[e2, t1, 1] / (m * l2^2); a22 = Coefficient[e2, t2, 1] / (m * l2^2);
系数 系数

(*创建系数矩阵*)
coeffMatrix = {{a11, a12}, {a21, a22}};

(*将 t1=0, t2=0, t3=0 代入并化简*)
coeffMatrixSimplified = Simplify[coeffMatrix /. {t1 -> 0, t2 -> 0}];
化简
coeffMatrixFullSimplified = Simplify[coeffMatrix /. {t1 -> 0, t2 -> 0, Δl -> 0}];
化简

```

图 F.1 Mathematica 符号计算记录（1）。

(*对简化后的矩阵关于 Δl 进行泰勒展开*)

```
expanded1 = Simplify[Normal[Series[coeffMatrixSimplified, {Δl, 0, 1}]]];
|化简 |转换... |级数
expanded2 = Simplify[Normal[Series[coeffMatrixSimplified, {Δl, 0, 2}]]];
|化简 |转换... |级数
```

```
Print["Taylor expansion of simplified matrix to first order in Δl:"];
|打印
```

```
Print[MatrixForm[expanded1]]
|打印 |矩阵格式
```

```
Print["Taylor expansion of simplified matrix to second order in Δl:"];
|打印
```

```
Print[MatrixForm[expanded2]];
```

```
|打印 |矩阵格式
```

Taylor expansion of simplified matrix to first order in Δl :

$$\begin{pmatrix} -\frac{11(6 l_1 M^2 \mu_0 + d^4 \sqrt{d^2} g m \pi - 3 M^2 \mu_0 \Delta l)}{d^4 \sqrt{d^2} \pi} & \frac{6 l_1 M^2 \mu_0 (11 + \Delta l)}{d^4 \sqrt{d^2} \pi} \\ \frac{6 l_1 M^2 \mu_0 (11 + \Delta l)}{d^4 \sqrt{d^2} \pi} & -\frac{6 \sqrt{d^2} l_1^2 M^2 \mu_0 + d^6 g l_1 m \pi + 15 \sqrt{d^2} l_1 M^2 \mu_0 \Delta l + d^6 g m \pi \Delta l}{d^6 \pi} \end{pmatrix}$$

Taylor expansion of simplified matrix to second order in Δl :

$$\begin{pmatrix} \frac{11(-d^6 \sqrt{d^2} g m \pi + 45 l_1 M^2 \mu_0 \Delta l^2 + 3 d^2 M^2 \mu_0 (-2 l_1 + \Delta l))}{d^6 \sqrt{d^2} \pi} & \frac{3 l_1 M^2 \mu_0 (-15 l_1 \Delta l^2 + 2 d^2 (11 + \Delta l))}{d^6 \sqrt{d^2} \pi} \\ \frac{3 l_1 M^2 \mu_0 (-15 l_1 \Delta l^2 + 2 d^2 (11 + \Delta l))}{d^6 \sqrt{d^2} \pi} & \frac{45 l_1^2 M^2 \mu_0 \Delta l^2 - d^6 \sqrt{d^2} g m \pi (11 + \Delta l) - 3 d^2 M^2 \mu_0 (2 l_1^2 + 5 l_1 \Delta l + 3 \Delta l^2)}{d^6 \sqrt{d^2} \pi} \end{pmatrix}$$

图 F.2 Mathematica 符号计算记录 (2)。

```


$$\begin{pmatrix} \frac{-6 l_1 M^2 \mu_0 - d^4 \sqrt{d^2} g m \pi + 3 M^2 \mu_0 \Delta l}{d^4 \sqrt{d^2} l_1 m \pi} & \frac{6 M^2 \mu_0 (11 + \Delta l)}{d^4 \sqrt{d^2} l_1 m \pi} \\ \frac{6 M^2 \mu_0 (11 + \Delta l)}{d^4 \sqrt{d^2} l_1 m \pi} & \frac{-6 \sqrt{d^2} l_1^2 M^2 \mu_0 - d^6 g l_1 m \pi - 3 \sqrt{d^2} l_1 M^2 \mu_0 \Delta l + d^6 g m \pi \Delta l}{d^6 l_1^2 m \pi} \end{pmatrix};$$


$$\begin{pmatrix} -\frac{g}{l_1} - \frac{6 k_1}{m} \left(1 - \frac{\Delta l}{2 l_1}\right) & \frac{6 k_1}{m} \left(1 + \frac{\Delta l}{l_1}\right) \\ \frac{6 k_1}{m} \left(1 - \frac{\Delta l}{l_1}\right) & -\frac{g}{l_1} \left(1 - \frac{\Delta l}{l_1}\right) - \frac{6 k_1}{m} \left(1 + \frac{\Delta l}{2 l_1}\right) \end{pmatrix}$$

eq = Det[{{-g/l1 - 6 k1/m (1 - Δl/(2 l1)) + x, 6 k1/m (1 + Δl/l1)}, {6 k1/m (1 - Δl/l1), -g/l1 (1 - Δl/l1) - 6 k1/m (1 + Δl/(2 l1)) + x}}];
|行列式
Solve[eq == 0, x]
|解方程

```

图 F.3 Mathematica 符号计算记录 (3)。

$$\begin{aligned}
 x1 &= \frac{\frac{2(6k1l1^2 - 6\sqrt{k1^2l1^4 + g11m})}{m} - g\Delta1}{2l1^2}; \\
 x2 &= \frac{1}{2l1^3m} \left(12l1\sqrt{k1^2l1^4} + 2g11^2m + 12\sqrt{k1^2l1^4}\Delta1 + g11m\Delta1 + 12k1l1^2(l1 + \Delta1) \right); \frac{\frac{12(k1l1^2 + \sqrt{k1^2l1^4})}{m} + g(2l1 - \Delta1)}{2l1^2}; \\
 x1 &= \frac{g}{l1} - \frac{g}{2l1}m\frac{\Delta1}{l1}; \\
 x2 &= \frac{g}{l1} - \frac{g}{2l1}m\frac{\Delta1}{l1} + 12\frac{k1}{m}; \\
 x1 - x10 &= -\frac{g}{2l1}m\frac{\Delta1}{l1}; \\
 x2 - x20 &= -\frac{g}{2l1}m\frac{\Delta1}{l1};
 \end{aligned}$$

图 F.4 Mathematica 符号计算记录 (4)。

$$\begin{aligned}
 x1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2g}{l1} + \frac{12k1}{m} - \frac{g\Delta1}{l1^2} - \frac{1}{l1^2m} \left(\sqrt{(144k1^2l1^4 - 108k1^2l1^2\Delta1^2 - 12gk1l1m\Delta1^2 + g^2m^2\Delta1^2)} \right) \right); \\
 x2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2g}{l1} + \frac{12k1}{m} - \frac{g\Delta1}{l1^2} + \frac{1}{l1^2m} \left(\sqrt{(144k1^2l1^4 - 108k1^2l1^2\Delta1^2 - 12gk1l1m\Delta1^2 + g^2m^2\Delta1^2)} \right) \right); \\
 x10 &= \frac{g}{l1}; \\
 x20 &= \frac{12kl1 + gm}{l1m}; \\
 \text{expandedx1} &= \text{Simplify}[\text{Normal}[\text{Series}[x1, \{\Delta1, 0, 1\}]]]; \\
 \text{expandedx2} &= \text{Simplify}[\text{Normal}[\text{Series}[x2, \{\Delta1, 0, 1\}]]];
 \end{aligned}$$

图 F.5 Mathematica 符号计算记录 (5)。

```

Clear["Global`*"]
清除

3 mag;
x1 = 1 * Sin[t1] - d;
正弦
y1 = -1 * Cos[t1];
余弦
x2 = 1 * Sin[t2];
正弦
y2 = -1 * Cos[t2];
余弦
x3 = 1 * Sin[t3] + d;
正弦
y3 = -1 * Cos[t3];
余弦

dix12 = x2 - x1;
diy12 = y2 - y1;
dix13 = x3 - x1;
diy13 = y3 - y1;
dix23 = x3 - x2;
diy23 = y3 - y2;

r12 = Sqrt[dix12^2 + diy12^2];
平方根
r13 = Sqrt[dix13^2 + diy13^2];
平方根
r23 = Sqrt[dix23^2 + diy23^2];
平方根

Bx12 = (mu0 * M * (3 * dix12^2 - r12^2)) / (4 * Pi * r12^5);
圆周率
Bx13 = (mu0 * M * (3 * dix13^2 - r13^2)) / (4 * Pi * r13^5);
圆周率

```

图 F.6 Mathematica 符号计算记录 (6)。

```

VB = - (-M) * Bx12 - M * Bx13 - M * Bx23;
VG = y1 * m * g + y2 * m * g + y3 * m * g;
V = VB + VG;
T = 0.5 * m * l^2 * D[t1, t]^2 + 0.5 * m * l^2 * D[t2, t]^2 + 0.5 * m * l^2 * D[t3, t]^2;
|偏导 |偏导 |偏导
L = T - V;
exprV = FullSimplify[Normal[Series[V, {t3, 0, 2}, {t2, 0, 2}, {t1, 0, 2}]]];
|完全简化 |转换... |级数
e1 = -D[exprV, t1]
|偏导
e2 = -D[exprV, t2];
|偏导
e3 = -D[exprV, t3];
|偏导
a11 = Coefficient[e1, t1, 1]; a12 = Coefficient[e1, t2, 1]; a13 = Coefficient[e1, t3, 1];
|系数 |系数 |系数
a21 = Coefficient[e2, t1, 1]; a22 = Coefficient[e2, t2, 1]; a23 = Coefficient[e2, t3, 1];
|系数 |系数 |系数
a31 = Coefficient[e3, t1, 1]; a32 = Coefficient[e3, t2, 1]; a33 = Coefficient[e3, t3, 1];
|系数 |系数 |系数

(*创建系数矩阵*)
coeffMatrix = {{a11, a12, a13}, {a21, a22, a23}, {a31, a32, a33}};

(*将 t1=0,t2=0,t3=0 代入并化简*)
coeffMatrixSimplified = Simplify[coeffMatrix /. {t1 -> 0, t2 -> 0, t3 -> 0}];
|化简
    
```

图 F.7 Mathematica 符号计算记录 (7)。

```

k
m = M^2 mu0
d^5 pi m;

( -g - k/m + x, k/m, 0 )
( k/m, -g - 2k/m + x, k/m )
( 0, k/m, -g - k/m + x )

( -g - 93k/16m + x, 6k/m, -3k/16m )
( 6k/m, -g - 12k/m + x, 6k/m )
( -3k/16m, 6k/m, -g - 93k/16m + x )

eq = Det[{{-g - 93k/16m + x, 6k/m, -3k/16m}, {6k/m, -g - 12k/m + x, 6k/m}, {-3k/16m, 6k/m, -g - 93k/16m + x}}];
|行列式
Solve[eq == 0, x]
|解方程
Set: k 中的标签 Times 被保护。
m

{{x -> g/l}, {x -> (18 k l + g m)/l m}, {x -> (45 k l + 8 g m)/8 l m}}
    
```

图 F.8 Mathematica 符号计算记录 (8)。