

参赛学生姓名：夏源蔚，姬国智

中学：中国人民大学附属中学

省份：北京市

国家/地区：中国

指导老师姓名：马宇翰，张永平

指导老师单位：北京师范大学，中国人民大学附属中学

论文题目：远发而先至：力学“姆潘巴”现象及其在耗散环境中的衰弱与消失

远发而先至：力学“姆潘巴”现象及其在耗散环境中的衰弱与消失

夏源蔚，姬国智

中国人民大学附属中学

摘要

姆潘巴效应指在热力学体系中，初始状态距离平衡态更远的系统反而更快到达平衡态的反常弛豫现象。前人针对经典宏观体系中姆潘巴效应的研究因实验复现困难、干扰因素较多等原因，尚未形成普适性解释；已有的针对力学系统的相关研究则较少考虑真实环境中的耗散机制，对反常弛豫现象的解释尚显空白。本文从动力学角度出发，分别研究了离散和连续的两类轨道模型中的力学姆潘巴效应，探讨其姆潘巴现象产生机制和耗散效应。在离散轨道模型中，本研究分析了单一质点在两段式直轨构成的离散轨道上的运动，给出了力学姆潘巴效应的数学判据，并结合此判据给出了姆潘巴效应的存在区间 $\Delta h = L_2(\sin \alpha - \sin \beta)^2 / (2 \sin \alpha - \sin \beta)$ 。实验上利用离散轨道装置进行控制变量实验，稳定复现了力学姆潘巴效应，并定量分析了效应区间宽度与轨道高度、倾角的关系，进一步探究了阻尼耗散对姆潘巴效应的抑制作用。研究在此之后进一步将离散轨道推广至连续模型。以幂函数势能 $U = kx^n$ 为例，从能量守恒的角度推导得到下落时间与初始位置之间的解析表达式，并给出了在无阻尼情况下姆潘巴效应的发生条件：在 $n > 2$ 时质点的初始状态离平衡态越远，弛豫时间就越短。本研究表明了轨道的形状直接决定弛豫过程中是否存在姆潘巴效应。进一步引入耗散项，给出了质点下落时间在阻尼强度-初始位置空间 (μ, x_0) 的相图，系统探讨了不同阻尼强度对姆潘巴效应特征的影响。实验上利用软管搭建对应轨道，在不同阻尼条件下进行定量实验，并与理论预测进行对照。本研究借助充分的理论分析、数值计算与实验结果，得出结论：力学姆潘巴效应的产生与势能曲线、轨道构造密切相关，而阻尼耗散的存在会与势能相互竞争，共同控制其反常弛豫行为。本文初步建立了力学姆潘巴效应从离散轨道到连续势能模型的分析框架，为理解姆潘巴效应等反常弛豫现象提供了新的动力学视角，也为力学姆潘巴效应提供了明确的实验证据。

关键词：姆潘巴效应；反常弛豫；非线性动力学；阻尼

目录

1 引言	3
2 离散轨道模型中的力学姆潘巴效应	4
2.1 模型设置与无阻尼动力学	4
2.2 无阻尼系统中的解析解	5
2.3 力学姆潘巴的严格定义与解析性质	6
2.4 能量耗散的影响	8
2.5 离散模型的实验检验	11
2.5.1 实验装置	11
2.5.2 无阻尼系统的实验检验	11
2.5.3 耗散系统的实验检验	15
3 平滑势能模型：从力学到热力学	15
3.1 无耗散情况下的理想模型	15
3.2 阻尼机制与弛豫过程动力学	19
3.2.1 线性阻尼的弛豫过程	19
3.2.2 不同阻尼弛豫过程的力学姆潘巴效应	22
3.2.3 耗散情况下力学姆潘巴的发生的机制汇总	23
3.3 连续轨道模型实验研究	24
3.3.1 无阻尼情况下的力学姆潘巴效应	26
3.3.2 耗散情况下的力学姆潘巴效应	26
4 总结与展望	27
A 补充理论推导	31
A.1 离散轨道 $H > h_2$ 高度释放的总下落时间求解	31
A.2 离散轨道力学姆潘巴区间的存在性推导	32
A.3 姆潘巴效应区间宽度 Δh 求解	32
A.4 线性阻尼动力学耗散修正	33
B 补充实验结果图像	34
B.1 变参数下滑时间-初始释放高度实验数据拟合曲线	34
B.2 变参数总下滑时间随初始释放高度变化理论实验对比	36
B.3 阻尼的验证与测量	38
C 补充实验数据	39

1 引言

在日常生活中，我们通常认为一杯初始温度较高的水需要比温度较低的水经历更长时间才能冷却到环境温度。Mpemba 和 Osborne [1] 于 1969 年报道的姆潘巴效应 (Mpemba effect) 则揭示了一种反常弛豫现象，即：不同初始温度的水降温到结冰的时间与其初始温度之间呈先增加后减小的非单调关系。众多研究尝试解释并复现这一现象，所提出的理论机制涉及了各种可能影响水降温 and 结冰过程的因素，如蒸发 [2]、过冷 [3]、对流 [4]、溶质 [5]、成核温度 [6] 等。但这些机制大多受到实验系统尺寸的限制，在流体的热扩散问题中，不同尺寸的系统里占主导地位的机制可能不同。此外，由于现象的定义不明确、影响因素繁多，使得在宏观体系里复现姆潘巴现象极其困难。Burridge 和 Linden 2016 年的文章 [7] 中提出，在控制全部边界条件和外部干扰的实验中，纯水并未观测到明显的姆潘巴效应。该研究不仅质疑了先前宏观实验可能是数据选择下的结果，也明确指出宏观水体系里缺乏能支持该效应的一般机制。尽管宏观体系里难以稳定复现姆潘巴效应，其特殊的反常传热性质吸引了广泛关注。越来越多的研究者开始转而关注小体系里的反常弛豫现象，姆潘巴效应被进一步推广为“初始远离平衡态的系统会比初始靠近平衡态的系统更早达到平衡”。颗粒流体 [8]、布朗粒子 [9, 10]、一维伊辛链 [9] 等随机和量子体系的姆潘巴现象引了相当的理论和实验研究兴趣。

然而，经典体系里的姆潘巴效应至今仍充满争议，这种初态依赖的反常弛豫现象依然没有广泛认可的普适理论机制。宏观的热耗散过程一般由傅里叶热传导方程 $u_t = k\Delta u$ 描述，表现出一阶动力学特征。从此方程可以看出，在系统演化过程中，系统下一刻的状态仅由此刻的状态决定，其温度演化将表现为向平衡态的指数衰减。这类过程不具有对初始状态的记忆效应和非马尔可夫性。相比之下，经典力学体系的动力学更为丰富：系统的运动由二阶微分方程 $m\ddot{x} = F$ 描述，其瞬时状态需要由位置和速度共同描述。即使两个系统处于相同位置，不同的速度仍可导致完全不同的后续演化。因此，从动力学结构上看，二阶牛顿力学系统具有比一阶热弛豫方程更丰富的状态空间，也为产生初态记忆和反常弛豫行为提供了可能。但是微观层面的二阶可逆牛顿动力学，如何在宏观或介观尺度上表现为一阶、不可逆的耗散动力学？这是数学物理领域长期以来的备受关注的核心问题之一。其中，一个范例是从硬球的牛顿碰撞动力学推导玻尔兹曼方程。Lanford [11] 早期证明了硬球系统的统计动力学能够在有限的短时区间内收敛到玻尔兹曼方程；最近，邓煜 [12] 等人将这一结果推广至任意长的有限时间区间：只要相应的玻尔兹曼方程正则解仍然存在，该收敛就成立，从而在严格数学意义上建立了微观硬球动力学与介观玻尔兹曼动力学之间更为完整的联系。这一从微观高维到宏观低维的粗粒化过程启发我们，宏观的一阶动力学并不一定需要作为基本规律预先引入，其还可以通过对大量微观自由度的统计粗粒化从牛顿动力学中涌现出来。也就是说，从二阶微观动力学到一阶宏观动力学的转变，本质上伴随着对部分动力学信息和自由度的约化。如果在一个宏观力学系统中有意识地保留这些通常在热力学描述中被消去的额外自由度，并通过适当的

势能结构和耗散机制调控其与可观测变量之间的耦合，那么系统便可能在整体趋于一阶耗散弛豫的同时，仍然保留对初始状态的动力学记忆。这在经典力学体系中研究并理解姆潘巴效应提供了一条自然的思路。

最近，Finkelstein [13] 在牛顿力学框架下提出了一个质点下滑模型来类比姆潘巴这一反常弛豫现象。这一研究构建了一个由两条直线以一定夹角构成的无阻尼轨道，在轨道更高位置释放的质点由于其初始能量更大，到轨道拐点的速度更大，从而可能更早地到达轨道终点。然而此模型存在两大局限：首先，现有理论模型仅考虑非连续轨道，缺乏向连续势能曲线及更一般构型的推广；同时，此研究未系统讨论模型参数对反常弛豫特征及其产生条件的影响，也缺少相应的实验验证。其次，该模型属于无阻尼保守体系，机械能始终守恒，因此无法考察耗散对初态动力学记忆的影响。在真实环境下的宏观反常弛豫必然伴随能量的不可逆耗散，无阻尼保守系统只能证明该模型中存在这种时间反转的运动学可能，只有引入阻尼并探讨系统耗散与初始动能之间的竞争机制，才能真正回答“系统动力学记忆是如何被环境耗散抹除的”这一核心物理问题。针对上述局限，本研究将在非连续轨道的基础上引入阻尼耗散，进而探讨阻尼强度与初态记忆效应之间的竞争关系，并在实验装置中探究系统参数和阻尼强度对姆潘巴效应强度的影响。此外，通过进一步发展连续轨道模型，讨论不同势能曲线对现象的影响，给出更一般的结论与分析。

本研究将从动力学角度出发，对质点沿轨道下落过程进行理论分析，进而对影响姆潘巴效应的参数空间进行分析并开展控制变量实验检验，通过实验及理论研究探讨姆潘巴效应在耗散机制中的弛豫情况。本文的主要内容分为 4 节。在第 2 节中，我们首先在 Finkelstein 的研究基础上分析离散轨道模型。通过推导质点总运动时间对释放高度的导数，得出姆潘巴效应存在的判据。此外我们将在方程中分别引入斯托克斯线性阻尼项和流体二次阻尼项，提供真实热力学系统中存在的耗散修正。在实验方面，我们将验证两段式折线轨道系统中的力学姆潘巴效应，并对轨道夹角、长度和阻尼等参数进行定量研究。第 3 节中，我们将以幂函数势能为例讨论连续轨道模型中的动力学过程，分析阻尼强度和初始位置在姆潘巴效应中的竞争行为，给出下落时间的相图。并通过不同阻尼条件下的理论与实验对比分析力学姆潘巴效应的影响因素。第 4 节为总结与展望。

2 离散轨道模型中的力学姆潘巴效应

2.1 模型设置与无阻尼动力学

我们把离散轨道建模为一条无摩擦的刚性分段轨道，这条轨道由两条直轨道在交汇点相接构成，交汇点上方的上段斜坡相对于水平面的倾角为 α ，下方的下段斜坡相对于水平面的倾角为 β ，满足 $\alpha > \beta$ 。轨道的交汇点距离底部水平面 $h_0 = 0$ 的高度为 h_2 ，轨道整体几何形状如图 1a 所示

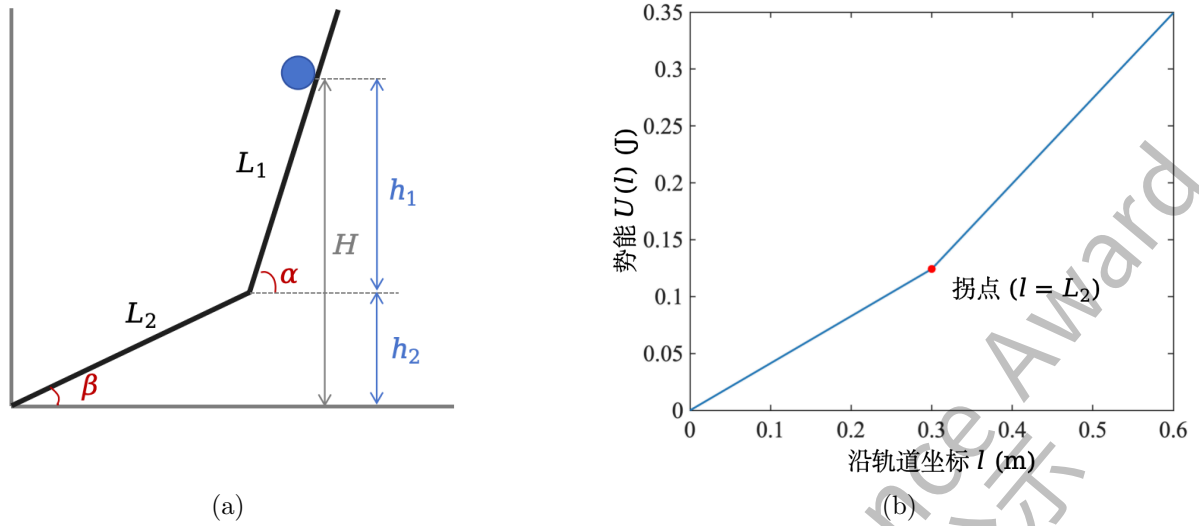


图 1 离散轨道模型 (a) 双直分段轨道示意图. (b) 分段轨道势能分布图.

我们将下段轨道的长度记为 L_2 , 则 $h_2 = L_2 \sin \beta$ 。考虑一个质量为 m 的质点在距离底面高度 H 处下滑, 质点位置到轨道交汇点的沿斜面长度为 L_2 , 垂直高度为 h_1 。我们以轨道底端为原点, 沿轨道坐标 l 建立势能分布函数 $U(l)$:

$$U(l) = \begin{cases} mgl \sin \beta, & 0 \leq l \leq L_2 \\ mgL_2 \sin \beta + mg(l - L_2) \sin \alpha, & l > L_2 \end{cases} \quad (1)$$

该势能分布在轨道交汇点 $l = L_2$ 处连续, 但是一阶导数跳跃间断, 存在离散转折的几何特征。

2.2 无阻尼系统中的解析解

因为质点在上段和下段轨道所处的势能区间不同, 我们根据释放时质点所在的轨道位置分别计算它到达底部 $h_0 = 0$ 所需的总下落时间 t_{tot} 。当质点从 $H \leq h_2$ 的高度释放时, 其沿斜坡方向的运动方程遵循牛顿动力学公式 $\ddot{x} = g \sin \beta$, 因此我们代入初始边界条件积分可得总下滑时间

$$t_{\text{tot}}(H) = \frac{\sqrt{2H}}{\sqrt{g} \sin \beta} \quad (2)$$

对 H 求一阶导数

$$\frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} = \frac{1}{\sqrt{2gH} \sin \beta} > 0 \quad (3)$$

H 的一阶导数为正, 说明在该区域内质点的下滑时间随释放高度呈单调递增。

而质点从 $H > h_2$ 的高度释放时, 质点会通过轨道交汇点, 经历两个连续的动力学阶段。分别求质点在上段轨道和下段轨道的运动耗时, 得到 $H > h_2$ 时总下落时间函数

$t_{\text{tot}}(H)$ 的表达式

$$t_{\text{tot}}(H) = \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{\sqrt{H-h_2}}{\sin \alpha} + \frac{L_2}{\sqrt{H} + \sqrt{H-h_2}} \right] \quad (4)$$

绘制质点在轨道上的总下滑时间随初始释放高度变化的关系曲线，图像如图 2 所示。发现该曲线存在以下特征：从原点开始，先单调递增，到达临界点后骤然下降一段距离，再单调递增。临界点前的曲线代表质点在上段轨道滑行的动力学特征，而当质点进入下段轨道时该动力学规律被打破，曲线产生一个负梯度区间，也就是我们在下文主要探究的力学姆潘巴效应区间。初始释放高度高度轨道交汇点一定距离后总下滑时间才会与抵达交汇点前持平，而在这之间的一段区域都能够观测到宏观上“初始释放高度更高的质点先到达底部”的力学姆潘巴现象。

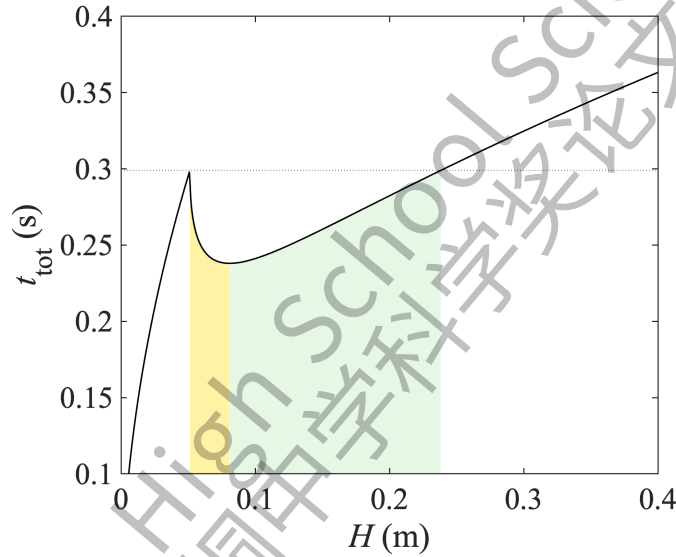


图 2 总下滑时间随初始释放高度变化曲线。黄色区域为力学姆潘巴效应的理论定义区间，即曲线局部负梯度区域；绿色部分为能观测到“释放高度更高却更早抵达终点”反常现象的其余区间

2.3 力学姆潘巴的严格定义与解析性质

我们将力学姆潘巴效应数学定义为：质点下滑总时间关于释放高度的导数满足 $\frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} < 0$ 的区间，即局部负梯度区间，称为姆潘巴效应区域。

由于该负梯度的边界在 h_2 处，接下来我们重点分析质点在 h_2 附近下滑总时间相对释放高度的偏导数特征。当质点恰好在 $H \rightarrow h_2^+$ 的边界上方释放时，由于此时 $(H-h_2) \rightarrow 0$ 且 $h_2 = L_2 \sin \beta$ ，则

$$\lim_{H \rightarrow h_2^+} \left[1 - \frac{L_2 \sin \alpha}{\left(\sqrt{H(H-h_2)} + H \right)} \right] = 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (5)$$

因为离散轨道的几何定义满足 $\alpha > \beta$ ，所以 $1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < 0$ 。因此在紧邻 h_2 上方的区域内，

总时间梯度的一阶导数为负值

$$\frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} < 0 \quad (6)$$

我们将时间梯度的控制因子 $\mathcal{C}(H)$ 定义为

$$\mathcal{C}(H) = 1 - \frac{L_2 \sin \alpha}{H + \sqrt{H(H - h_2)}} \quad (7)$$

$\mathcal{C}(H) < 0$ 时力学姆潘巴效应才可以发生。因此，效应存在的临界点对应 $\mathcal{C}(H) = 0$ ，得到边界控制方程

$$\sqrt{H(H - h_2)} = L_2 \sin \alpha - H \quad (8)$$

由于等号左侧为非负实数，则最高边界必须满足 $H \leq L_2 \sin \alpha$ ，计算可求得姆潘巴效应区间的理论最大释放高度

$$H_{\text{max}} = \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha - \sin \beta} \quad (9)$$

则姆潘巴区效应区间宽度为

$$\Delta h = H_{\text{max}} - h_2 = L_2 \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2}{2 \sin \alpha - \sin \beta} \quad (10)$$

通过该式发现姆潘巴区间宽度和轨道的上段倾角 α 、下段倾角 β 和下段轨道长度 L_2 密切相关，因此我们分别画出区间宽度和这三个参数的关系图像。如图 3a 所示，当固定 β 和 L_2 时，随着 α 增大， Δh 单调递增，这说明了上段轨道的倾斜程度越大，质点在到达交汇点前获得的初速度优势越大，所以姆潘巴效应区间就越宽。如图 3b，我们固定了 α 和 L_2 ，并发现随着 $\beta \rightarrow \alpha^-$ ，上下两段轨道的倾角差异逐渐减小，导致 Δh 减小。反之 β 越小，质点在上段轨道获得的初速度在下段长距离滑行中的时间补偿优势越显著， Δh 越宽。再如图 3c 所示，当固定 α 和 β 时， Δh 和 L_2 呈线性正比关系，也就代表增加下段轨道的长度能够线性放大初始动能优势积累的时间提前量。

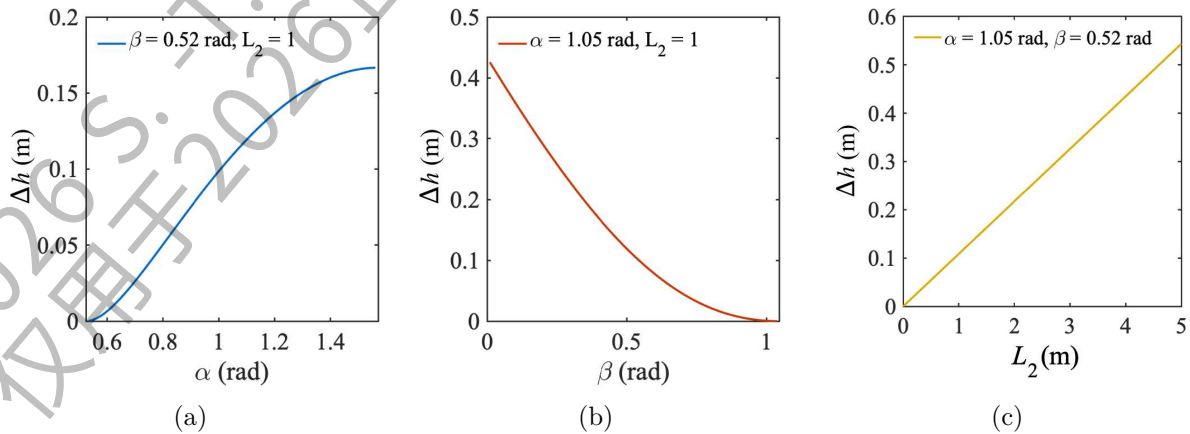


图 3 姆潘巴区域宽度 Δh 的敏感性分析. (a) Δh 随 α 变化. (b) Δh 随 β 变化. (c) Δh 随 L_2 变化

根据本节对 $H \rightarrow h_2^+$ 的极限分析可知, 下滑时间-释放高度的负导数区间以 h_2 为起点, 因此力学姆潘巴效应在物理上能够被实验观测到的最高边界高度 $H_{\max}$ 必须大于转折点高度 h_2

$$H_{\max} > h_2 \quad (11)$$

代入前面推导出的 $H_{\max}$, 下段轨道高度 $h_2 = L_2 \sin \beta$, 以及轨道几何特征 $\alpha > \beta$, 整理后得到

$$(\sin \alpha - \sin \beta)^2 > 0 \quad (12)$$

在实数域内, 这个式子成立的充要条件为 $\sin \alpha \neq \sin \beta$, 即 $\alpha \neq \beta$; 结合建立离散轨道时提出的 $\alpha > \beta$ 的前提, 我们得到了以下的理论定理: 在理想无摩擦系统中, 系统只要满足 $\alpha > \beta$ 就必然在高度 h_2 上方的紧邻区域内存在反常力学姆潘巴效应区间。

2.4 能量耗散的影响

本节将讨论耗散对力学姆潘巴效应的影响。我们根据耗散机制的不同分两种阻尼形式展开分析: 先通过推导低雷诺数下的线性阻尼极限来揭示耗散体系中产生力学姆潘巴效应的机制, 随后我们用 RK4 数值求解真实高雷诺数水环境下的二次阻尼特征, 以研究实验条件下的耗散对姆潘巴效应的影响。我们由此得出的结论是耗散体系能否产生力学姆潘巴行为并不依赖于阻尼的具体形式, 但姆潘巴效应出现的参数区间会随阻尼形式发生改变。

我们首先引入一个与速度成正比的线性阻尼项以贴近实际热学系统中的耗散。在一个有任意倾角 $\theta \in \{\alpha, \beta\}$ 的轨道上, 质点受到重力沿斜面方向上的分力和与其方向相反的线性阻尼力作用。我们定义单位阻尼系数 $\kappa = \frac{\gamma}{m}$, 质点的运动方程为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = mg \sin \theta \quad (13)$$

当质点以初速度 v_0 从斜面释放时, 通过求解此一阶线性常微分方程可以得到速度 $\dot{x}(t)$ 与位移 $x(t)$ 的解析表达式

$$x(t) = \frac{g \sin \theta}{\kappa} t + \frac{1}{\kappa} \left(v_0 - \frac{g \sin \theta}{\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa t}) \quad (14)$$

为了证明在轨道交汇点 h_2 上方始终存在姆潘巴效应区间, 我们计算了质点总下滑时间的全微分微元变化量。在质点的释放高度无限接近轨道交汇点高度的时候, 也就是 $H \rightarrow h_2^+$ 时, 质点在上段斜坡的下滑时间和进入下段轨道的初速度都趋近于零, 而且两段轨道滑行的时间微元变化量具有线性对应关系, 所以我们可以推出总下滑时间微元变

化量的表达式

$$dt = dt_1 + dt_2 = \left(-\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) dt_2 = \left(-\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 \right) dt_2 \quad (15)$$

在建立离散轨道模型时我们定义两段轨道的倾角满足 $\alpha > \beta$ ，则必然有 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，所以 $-\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 < 0$ 。因此得到重要结论

$$dt < 0 \quad (16)$$

当 $H \rightarrow h_2^+$ 时，质点初始释放高度的微小增量使质点进入下段轨道时具有初速度优势，从而使质点在下段轨道的滑行时间的缩短量 $|dt_2|$ 严格大于在上段轨道滑行时的时间增加量 dt_1 ，进而导致总下滑时间增量 $dt < 0$ ，即一阶梯度 $\frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} < 0$ 。所以，只要离散轨道具有 $\alpha > \beta$ 的特征，无论系统的阻尼系数 κ 多大，系统在紧邻转折高度 h_2 上方始终存在反常力学姆潘巴效应区间。

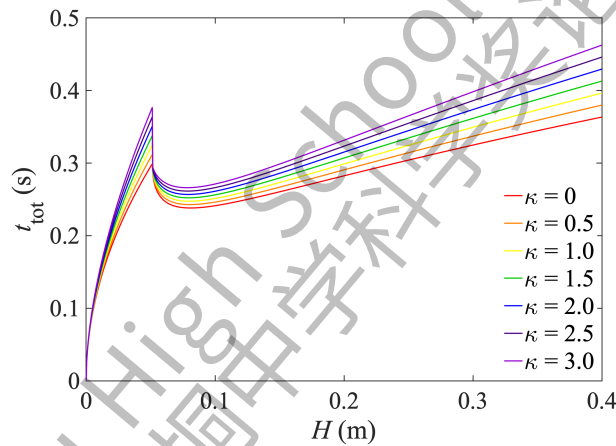


图 4 不同线性阻尼下总下滑时间随初始释放高度变化曲线. 随着线性阻尼增强，负梯度宽度逐渐被压缩，但接近 $H \rightarrow h_2^+$ 区域内负梯度始终存在

在上述分析中，体系存在的耗散被假定为线性耗散，这一般仅在低雷诺数环境下成立。对于雷诺数较高的情况，如研究后续实验所使用的流体环境中（球体运动所对应的雷诺数满足 $Re = \frac{\rho_w v d}{\eta} \sim \mathcal{O}(10^3) \gg 1$ ），此时物体在流体中的阻力以压差阻力为主导，体系的耗散力遵从牛顿二次阻尼定律

$$F_d = -\frac{1}{2} C_d \rho_w A \dot{x}^2 \quad (\dot{x} \geq 0) \quad (17)$$

其中 C_d 为流体阻力系数， ρ_w 为流体密度， $A = \pi r^2$ 为迎面截面积。考虑到浮力与流体附加质量 ($m_{\text{add}} = \frac{1}{2} \rho_w V$) 修正，小球的有效惯性质量为 $m_{\text{eff}} = m + \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_w$ 。小球沿轨

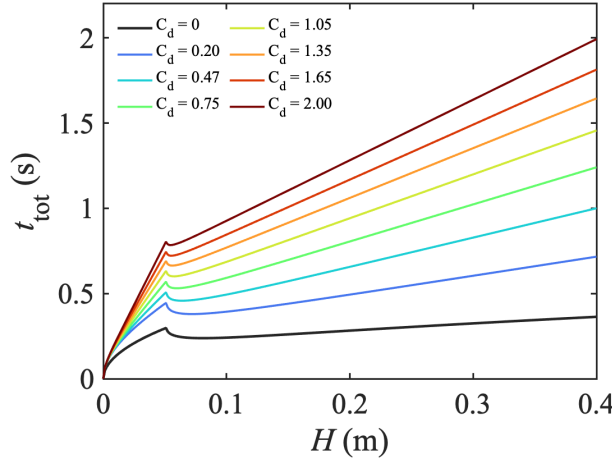


图 5 不同二次阻尼下总下滑时间随初始释放高度变化曲线. 随着阻尼增强, 总下滑时间增大, 姆潘巴效应区间宽度缩小, 但 $H \rightarrow h_2^+$ 附近始终存在负梯度区间

道下滑的切向运动控制微分方程为

$$\ddot{x} = g_{\text{drive}} \sin \theta - k_{\text{drag}} \dot{x}^2 \quad (18)$$

其中, 水中等效重力加速度 $g_{\text{drive}} = \frac{m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w}{m_{\text{eff}}} g$, 阻尼衰减系数 $k_{\text{drag}} = \frac{C_d \rho_w \pi r^2}{2m_{\text{eff}}}$. 在 $C_d = 0$ 情况下, 体系退化为 2.2 节中推导的无阻尼解析模型。

本文采用四阶龙格-库塔法 (RK4) 进行全时域数值求解, 积分步长 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}$. 我们把小球抵达上段轨道末端时的速度用作进入下段轨道的初始条件, 然后再通过连续积分得到总下滑时间 $t_{\text{tot}}(H)$. 图 5 展示了当系统存在的阻尼从无阻尼 ($C_d = 0$) 增长至强阻尼 ($C_d = 2.00$) 时总下滑时间 t_{tot} 相对于初始释放高度 H 的变化曲线, 我们通过分析该变化曲线的特征得到了耗散系统中的两个核心规律: 小球的初始释放高度趋近于 h_2^+ 时其在下段起步时的初速度 $v \rightarrow 0$, 因此流体二次阻力 ($F_d \propto v^2$) 的衰减速度远快于重力加速度项, 导数仍满足

$$\lim_{H \rightarrow h_2^+} \frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} = -\infty \quad (19)$$

计算表明, 在考察的所有阻尼范围内 ($C_d \in [0, 2.00]$), 总下滑时间相对初始释放高度的变化曲线在 $H = h_2$ 右侧都存在负导数区间, 这在理论上证明了力学姆潘巴效应的产生主要依赖于上段轨道位置的势能, 而强二次耗散依旧无法消除力学姆潘巴效应。其次, 我们对比不同阻尼产生的曲线能够观察到姆潘巴效应区间宽度 Δh 随系统阻尼增大而减小。这是因为随着阻尼增加, 小球在下滑时损耗的动能越来越多, 导致在上段轨道消耗的时间更长, 所以 H_{max} 右侧上升曲线的斜率显著增大, 可以观测到力学姆潘巴的区间被压缩。

2.5 离散模型的实验检验

2.5.1 实验装置

本文所搭建的离散模型实验装置如图 6 所示。我们使用两段长度为 15cm，内径 30mm，外径 35mm 的圆柱形亚克力轨道进行实验，并用相同曲率的软橡胶连接两段轨道，以改变两段轨道倾角。阻尼实验中使用了长 45cm，宽 22cm，高 24cm 的长方形亚克力水缸，在水缸内灌满水提供阻尼。无阻尼实验里使用了半径 5mm，质量 0.7g 的塑料小球，有阻尼实验则使用了半径均为 5mm，质量分别为 0.7g, 1.4g, 1.5g 的不同材质小球以改变下滑时受到的阻力大小。在小球下落过程中，我们同时使用平板自带秒表以记录全过程时间，录制小球运动过程的视频并导入 tracker 软件读取其初始释放高度和总下滑时间。



图 6 离散轨道实验装置. (a) 无阻尼离散轨道实验装置 (b) 有阻尼离散轨道实验装置

2.5.2 无阻尼系统的实验检验

我们使用细木杆夹取小球，将小球紧贴轨道放置，释放使小球无初速度自由下落。首先调整轨道倾角为 $\alpha = 0.6981rad$, $\beta = 0.3491rad$ ，验证 2.2 中总下滑时间随释放高度的变化曲线。实验结果如图 7 所示，红色圆点为实验数据，蓝色曲线为理论曲线。

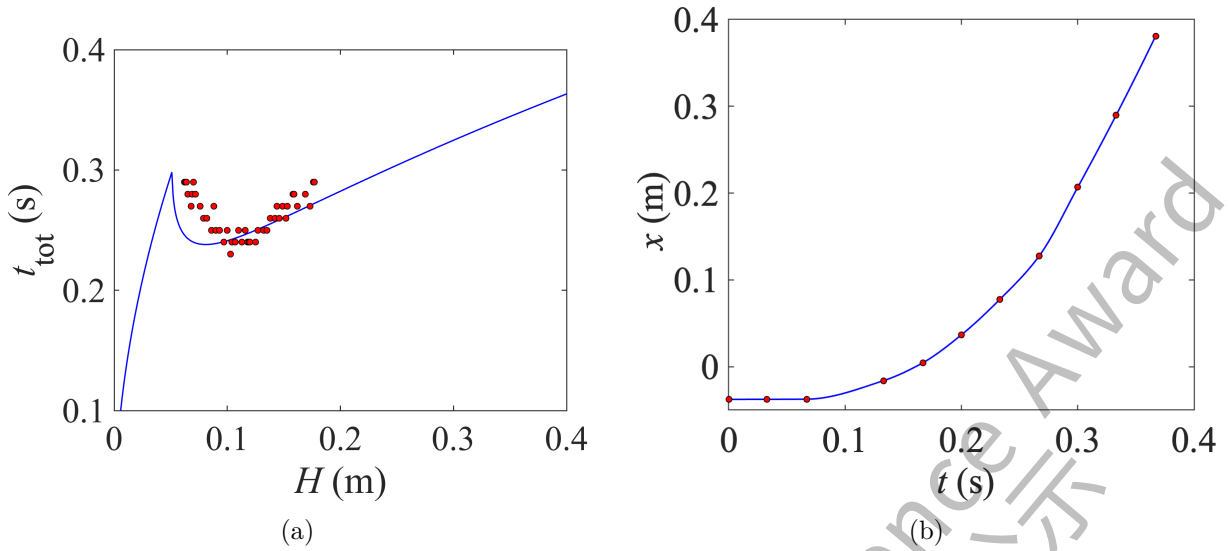


图 7 分段斜坡系统理论预测与实验数据对比, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为理论曲线. (a) 小球总下滑时间随初始释放高度的变化曲线 ($\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$) (b) 小球横向运动距离实验数据 ($\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.52 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$)

在 $H \in [h_2, H_{\max}]$ 范围内, 随着释放高度 H 增加, 总下滑时间 t_{tot} 下降, 存在明显的反常行为。这是因为当小球在上段轨道较高处释放时, 其势能转化动能, 提供了进入下段轨道时的初速度, 进而极大缩短了小球在下段轨道的滑行时间。随着质点的下落高度增大, 小球在上段轨道滑行的时间增加量逐渐超过了到达交汇点初速度带来的时间缩减, 实验数据点在 $H \approx 0.10 \text{ m} \sim 0.12 \text{ m}$ 附近达到局部极小值并恢复单调递增, 数据的整体趋势与理论曲线高度一致。观察全高度范围的数据分布发现实验中测量的小球下落总时间略高于理想无阻尼曲线, 这个偏差主要来源于系统存在的耗散。在轨道交汇点 $l = L_2$ 处, 质点速度在极短时间内发生方向偏转, 小球与轨道的法向碰撞导致部分动能耗散, 使实际进入下段轨道的速度略小于理论预测值。另外, 微弱的空气阻尼以及小球和接触面之间的阻力对小球做负功, 使运动时间正向平移。

在 2.3 中我们推导出了力学姆潘巴效应区间的宽度, 并且给出了该区间随上段轨道倾角 α 、下段轨道倾角 β 和下段轨道长度 L_2 的敏感性。我们使用了控制变量法验证理论的准确性, 分别对 α 、 β 和 L_2 进行多组参数实验并根据实验数据拟合出小球总下滑时间曲线随释放高度的变化曲线, 正文里展示了其中一部分实验图像, 其余变参数得到的完整实验数据图像见附录 B。接下来我们根据拟合曲线提取出每次实验中总时间曲线呈现负梯度的实际区间宽度, 以此得到姆潘巴效应区间宽度在各参数组下的实验数据, 数据点如图 11 中的蓝色圆点所示, 每个参数组的总下滑时间随初始释放高度变化的实验数据拟合曲线详见附录 B。如图 8, 9, 10 所示, 实验数据点围绕理论曲线紧密分布, 展现出了清晰的非单调趋势及局部负梯度区间。

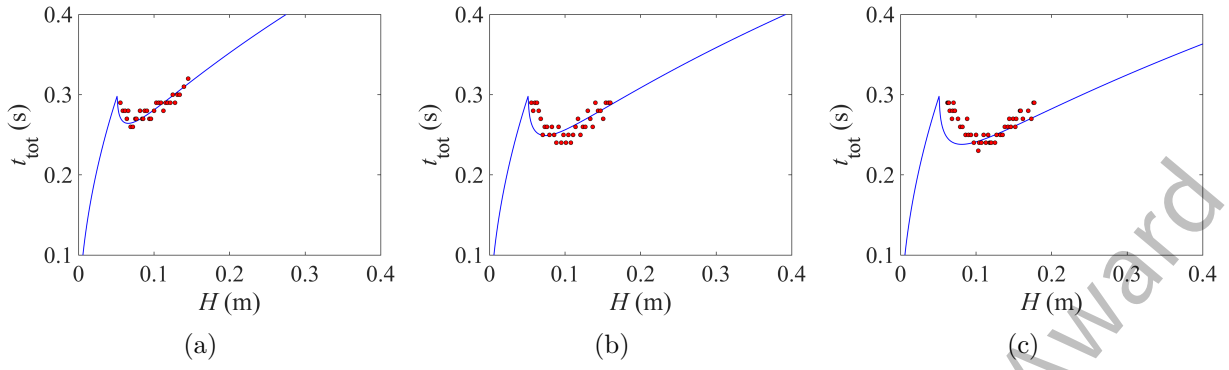


图 8 变 α 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据和理论曲线对比, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为理论曲线. 实验参数 (a) $\alpha = 0.70 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (b) $\alpha = 0.87 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

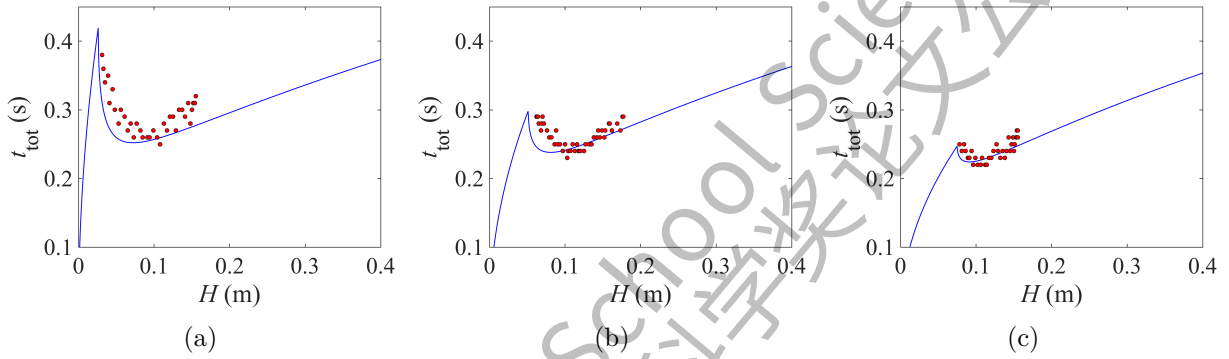


图 9 变 β 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据和理论曲线对比, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为理论曲线. 实验参数 (a) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.17 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (b) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.52 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

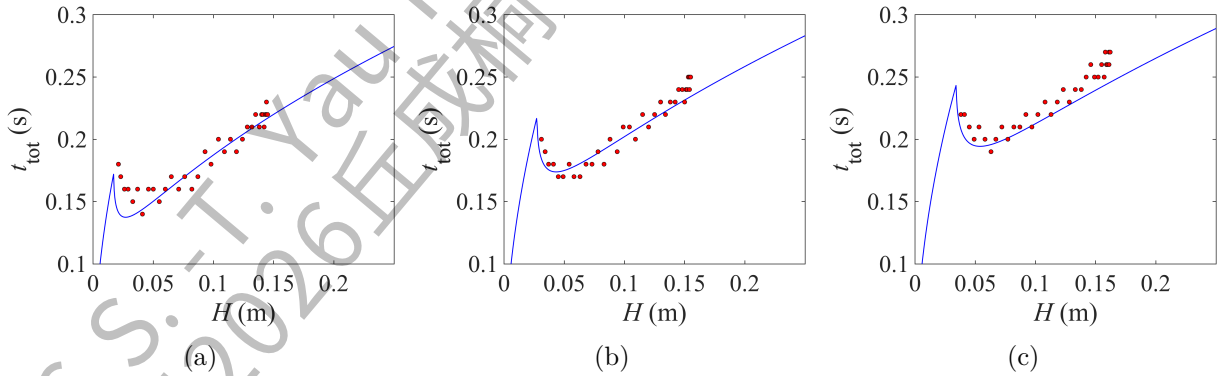


图 10 变 L_2 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据和理论曲线对比, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为理论曲线. 实验参数 (a) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.05 \text{ m}$ (b) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.08 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.10 \text{ m}$

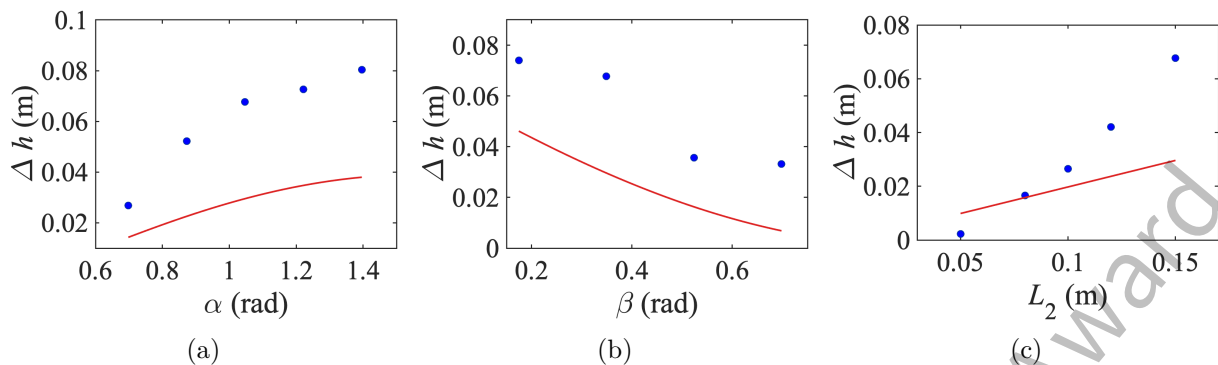


图 11 姆潘巴效应区间宽度随参数值变化. 红色曲线为理论曲线, 蓝色圆点为实验数据拟合曲线得到的效应区间宽度. (a) 区间宽度随 α 变化. (b) 区间宽度随 β 变化. (c) 区间宽度随 L_2 变化.

如同图 11 所示, 我们在实验里测得的效应区间宽度 Δh 与图 3 的预测趋势一致: 当 α 和 L_2 增大时 Δh 单调递增; 而当 β 向 α 靠近时 Δh 单调递减; 姆潘巴区间宽度 Δh 在固定 β 与 L_2 的条件下随 α 增大而单调递增并逐渐趋向饱和, 和理论曲线 3a 所呈现的特征是一致的. 这一规律说明倾斜程度更大的上段轨道为进入下段轨道时的小球提供了极高的初速度, 使小球在比较平缓的下段轨道需要更长时间来抵消动能优势, 所以姆潘巴反常区间被拓宽了. 实验拟合曲线在固定 α 与 L_2 的时候复现了理论图像 3b 预测的单调递减行为, 在 $\beta \rightarrow \alpha^-$ 时趋近于零. 曲线呈现出的这一趋势说明小球在两段轨道倾角差异减小时在上段轨道积累的动能优势减少, 从而使姆潘巴效应在斜面逐渐靠近无倾角的直斜面时逐步消失. 而在我们固定 α 和 β 并改变 L_2 时曲线呈单调递增趋势, 这表明下段轨道长度 L_2 直接决定了小球初始动能优势的作用距离, 所以增加下段轨道长度能够拓宽姆潘巴效应区间.

需要注意的是, 图 11 中实验测得的姆潘巴效应区间宽度普遍大于理论模型的预测值, 这个偏差主要来源于实验装置中轨道转折处的结构差异. 理论中我们假设两条直轨道在交汇点处呈尖锐相交, 但是实际实验里搭建的轨道因为用橡胶连接而形成了具有有限曲率半径的圆弧段. 小球在进入下段轨道前已经提前切入圆弧段, 质点在该区域的运动路径和加速度变化受其几何曲率影响与理论存在差异, 导致其在这段区域的运动时间被压缩. 这种额外的时间缩减抵消了初始高度增加带来的时间延长, 使下滑时间曲线的负梯度区间能够维持至更高的释放高度, 所以我们在实验里测量到的负梯度区间宽度 Δh 比理论预测值更大.

2.5.3 耗散系统的实验检验

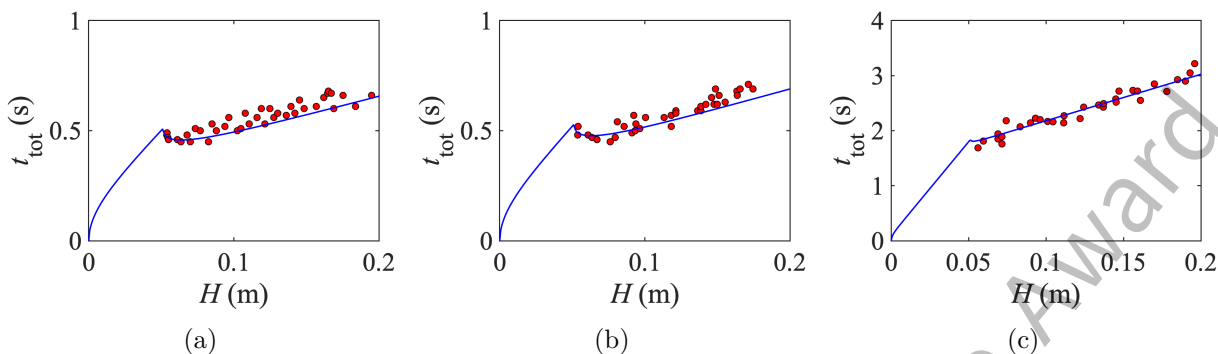


图 12 变阻尼下滑时间随释放高度变化实验数据和理论曲线对比，红色圆点为实验数据，蓝色曲线为理论曲线。固定轨道几何 $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ ，各组实验参数 (a) $m=1.5 \text{ g}$ (b) $m=1.4 \text{ g}$ (c) $m=0.7 \text{ g}$

验证变阻尼情况下小球总下落时间随初始释放高度的变化时，我们把亚克力轨道放置在灌满水的水缸里并固定轨道的几何形状。我们将体积相同，半径均为 0.5 mm ，质量分别为 0.7 g ， 1.4 g ， 1.5 g 的小球沿轨道边缘由静止释放，记录小球下滑总时间并绘制图像。我们在数值求解时针对不同密度的小球修正了阿基米德浮力和等效惯性质量，通过分别计算对应的等效驱动加速度和二次阻尼系数得到各组准确的理论曲线。

图 12 为在存在阻尼耗散的系统中小球下落时间-释放高度曲线。对于 $m = 1.5 \text{ g}$ 和 $m = 1.4 \text{ g}$ 的小球，尽管流体阻力使小球总体下落时间增加，但是在接近交汇点高度 $h_2 \approx 0.051 \text{ m}$ 上方的区域内实验数据能够展现出一定的局部负梯度特征。实验的极小值出现在 $H \approx 0.065 \text{ m} \sim 0.075 \text{ m}$ 区间，这和我们在有阻尼动力学方程里预测的理论极小点符合良好。小球质量减少到 $m = 0.7 \text{ g}$ 时有效阻尼 κ 极高，此时小球下滑所需的总时间增长到 $1.69 \sim 3.2 \text{ s}$ (图 12c)。虽然理论上有阻尼的下落时间曲线始终存在负导数区间 $\lim_{H \rightarrow h_2^+} \partial t_{\text{tot}}^{(\gamma)} / \partial H = -\infty$ ，但负梯度区间在实验强耗散极限下的相对深度被明显压缩，小球的下滑时间随释放高度变化曲线退化到接近单调递增，在实验里几乎观察不到姆潘巴反常效应。这是因为小球质量减小时有效阻尼项急剧增大，此时系统的特征耗散时间非常短，小球在上段轨道获得的初速度优势在进入下段轨道后被强流体耗散快速抹平，所以小球在极短时间内就趋近收尾速度。此时原本依赖速度记忆的二阶动力学系统退化为仅由局部受力决定的一阶受控系统，更高释放带来的速度优势无法传递到轨道末端，因此宏观上力学姆潘巴效应消失。

3 平滑势能模型：从力学到热力学

3.1 无耗散情况下的理想模型

我们在前面的讨论中复现了 [13] 的结果并更详细地阐述了参数依赖，同时加入了阻尼耗散以展现真实系统中力学姆潘巴效应可能出现的衰弱。尽管如此，离散模型里依然存在真实系统中不应存在的现象，例如总下滑时间随初始释放高度变化的曲线中的奇异

点（图 2）。这种非连续行为来源于离散模型中运动路径的突变，而实际的连续力学系统中轨道及其对应的运动时间通常应随初始条件连续变化。为了使我们的讨论更具一般性，在本节中我们将首次引入力学姆潘巴效应的平滑势能模型，并建立连续轨道类比以扩展学界在此领域研究的空白。为方便后续分析，在 3.1 节和 3.2 节中，除非特别说明，所有未标注单位的物理量均采用国际单位制（SI）。

我们首先考虑一维保守力学系统，其拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x). \quad (20)$$

由于系统不显含时间，满足机械能守恒

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x). \quad (21)$$

若粒子从 x_0 处由静止释放，则 $E = U(x_0)$. 对于向 x 减小方向的运动，有

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m} [U(x_0) - U(x)]}. \quad (22)$$

因此，从 x_0 运动至 $x = 0$ 所需的时间为

$$t(x_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{U(x_0) - U(x)}}. \quad (23)$$

式(23)表明，增大初始位置 x_0 会产生两种相互竞争的效应：一方面运动路径变长会增加下滑时间，另一方面初始势能 $U(x_0)$ 增大使粒子在相同位置具有更高的速度，因此运动时间被缩短，所以 $t(x_0)$ 的变化取决于势能函数 $U(x)$ 的具体形式。当能量增加带来的加速效应超过路径增长的影响时，便可能出现初始位置更高的粒子反而更早到达终点的现象，即力学姆潘巴效应。对(23)式两边同时求导，得到姆潘巴效应的判据为

$$\frac{dt}{dx_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\int_0^{x_0} \frac{U'(x) - U'(x_0)}{2(U(x_0) - U(x))^{3/2}} dx + \frac{1}{\sqrt{U(x_0) - U(0)}} \right). \quad (24)$$

当式(24)为负数时姆潘巴效应存在。实际上上述推导不要求势能函数连续，因此同样适用于前述离散模型。对于连续势能函数，因为不需要进行分段处理，该方法在分析上的便利性也更加明显。

为了简化问题，我们以幂函数为例，并给出具体的结果。假设势能的形式为

$$U = kx^n \quad (25)$$

其中 $n \geq 1$ 。代入式 (24) 得到

$$\frac{dt}{dx_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\int_0^{x_0} \frac{kn(x^{n-1} - x_0^{n-1})}{2(k(x_0^n - x^n))^{3/2}} dx + \frac{1}{\sqrt{kx_0^n}} \right) \quad (26)$$

容易检验

$$\frac{dt}{dx_0} \begin{cases} > 0 & (1 \leq n < 2) \\ = 0 & (n = 2) \\ < 0 & (n > 2) \end{cases} \quad (27)$$

即力学姆潘巴在无阻尼幂函数势能下是否发生的判据，如图 13 所示。

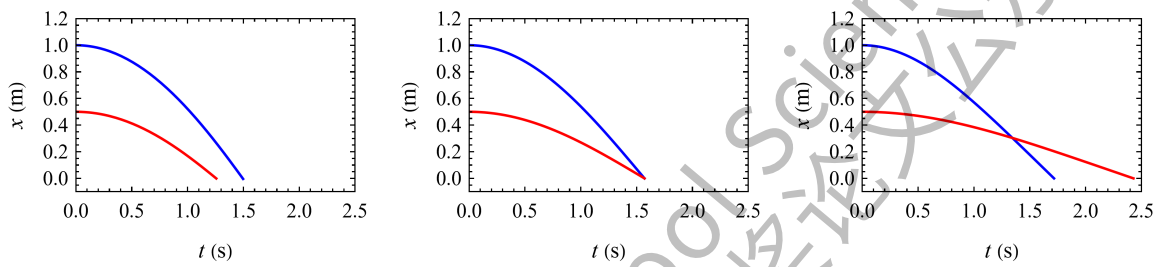


图 13 力学姆潘巴在无阻尼幂函数势能下是否发生的图像：左图展示 $n < 2$ 时初始高度更大到达更晚，中图展示 $n = 2$ 时对于不同高度到达时间具有等时性，右图展示 $n > 2$ 时初始高度更大到达更早，即发生力学姆潘巴效应

上述分析表明，在无阻尼情况下，姆潘巴效应能否出现取决于势能函数 $U(x)$ 的具体形式。接下来，我们将这一势能模型对应到实际的几何轨道上并对无摩擦轨道上的小球受力分析，如图 14 和 28 所示。

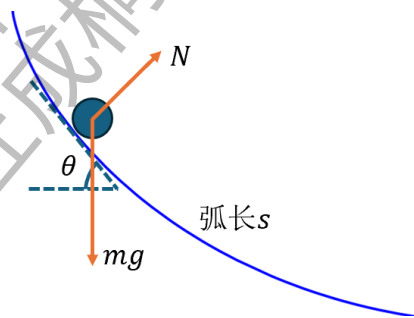


图 14 斜面上小球的受力分析图

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg\sin\theta \\ \dot{s} = -v \end{cases} \quad (28)$$

化简得到 $\ddot{s} = -g\sin\theta$ ，与幂函数势能的标准拉格朗日方程得到的运动方程

$$m\ddot{x} = -nkx^{n-1} \quad (29)$$

进行对比，得到类比约束

$$mg\sin\theta = nks^{n-1} \quad (30)$$

带入 $\sin\theta$ 和 s 的表达式，可以得到曲线方程

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \left(\int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^{n-1} \quad (31)$$

其中 $C = nk/mg$, 边界条件取 $y(0) = 0$ 。对于不同的 n , 可以求解积分方程得到不同类型的轨道的参数方程表达式 (式 (32)) 以及图像 (图 15)。

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{(n-1)C^{\frac{1}{n-1}}} \int_0^\theta \sin^{\frac{2-n}{n-1}} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \\ y(\theta) = \frac{C}{n} \left(\frac{\sin \theta}{C} \right)^{\frac{n}{n-1}} \end{cases} \quad (32)$$

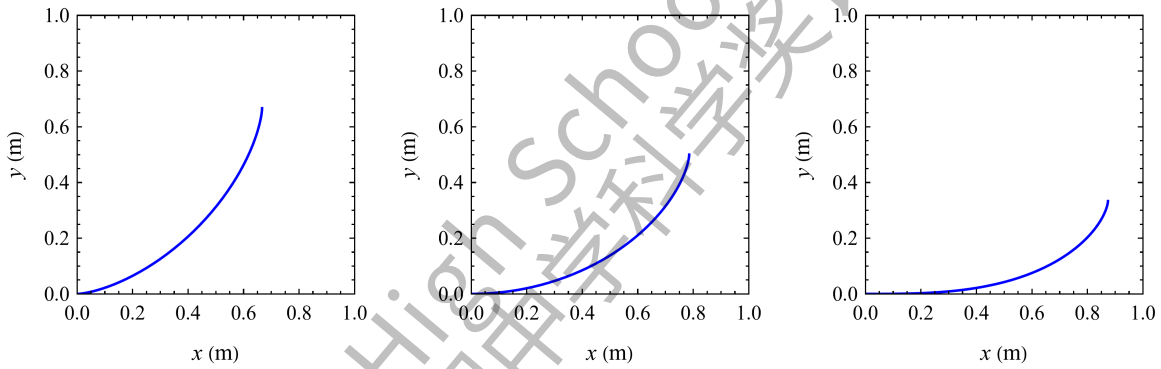


图 15 不同形式等效势能下的轨道曲线：左图展示 $n = 1.5$, $C = 1$ 时的轨道曲线，中图展示 $n = 2$, $C = 1$ 时的轨道曲线，右图展示 $n = 3$, $C = 1$ 时的轨道曲线

如图 16 所示，我们也可以看出参数 C 对于实际实验的影响，即轨道仅表现出相似的放大和缩小，参数 g , k 起到的作用仅会影响轨道的尺度，并不影响轨道形状。

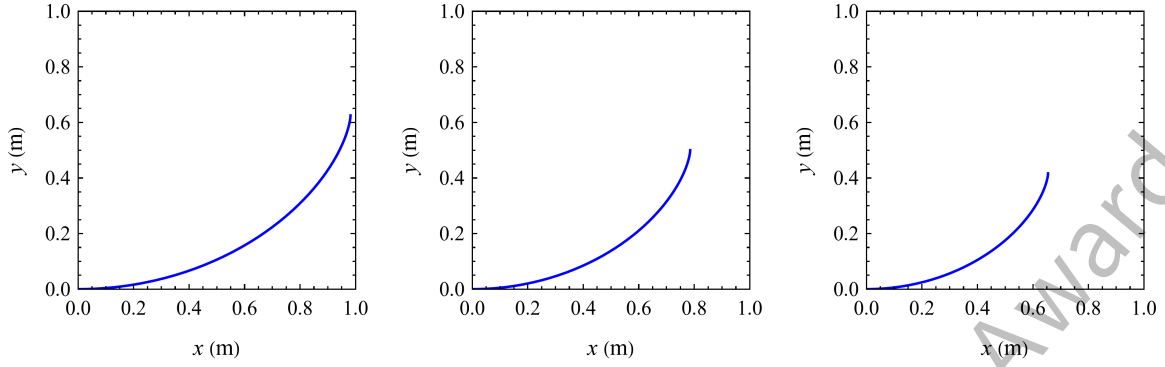


图 16 不同参数 C 下的轨道曲线：左图展示 $n = 2, C = 0.8$ 时的轨道曲线，中图展示 $n = 2, C = 1$ 时的轨道曲线，右图展示 $n = 2, C = 1.2$ 时的轨道曲线

这时，我们可以对力学体系下的轨道的物理意义进行解释：轨道的形状直接决定弛豫过程中是否存在姆潘巴效应，而轨道的大小仅仅影响运动的尺度，不会对弛豫过程造成影响。

3.2 阻尼机制与弛豫过程动力学

尽管我们可以通过调节曲线形状而模拟各种运动并分析是否会产生力学姆潘巴效应，但根据(28)式，系统始终为二阶微分系统，速度始终递增，这与经典热力学输运过程的一阶性质并不相符。故我们将在这一节加入阻尼从而讨论弛豫过程的动力学性质。此外，由牛顿方程可以直接得到轨道阻尼项的类比完全成立，后面不再赘述。

3.2.1 线性阻尼的弛豫过程

首先定性分析阻尼所导致的作用，对于阻尼趋于无穷情形的运动学，舍去方程惯性项得到

$$-nkx^{n-1} - \mu\dot{x} = 0 \quad (33)$$

对上式积分得到到达时间的表达式

$$t = \frac{\mu}{nk} \int_0^x \frac{dx}{x^{n-1}} \quad (34)$$

到达时间 t 是随着初始高度递增的。因此，在过阻尼情形下系统中不再出现力学姆潘巴效应。

对于一般的欠阻尼情形，保留惯性项，得到

$$\ddot{x} = -\frac{nk}{m}x^{n-1} - \frac{\mu}{m}\dot{x} \quad (35)$$

为了进一步简化问题，我们取 $nk = 1, m = 1$ ，仅将 μ 保留为衡量系统阻尼的参数，通过数值求解微分方程研究在不同势能情况下 $t - x$ 曲线的性质。

当势能形式中 $1 \leq n < 2$ 时，无论是无阻尼还是过阻尼都不存在力学姆潘巴效应，且到达时间永远收敛。研究发现 $t-x$ 曲线会从无阻尼形式较为平滑地过渡到无穷阻尼形式，如图 17 所示。

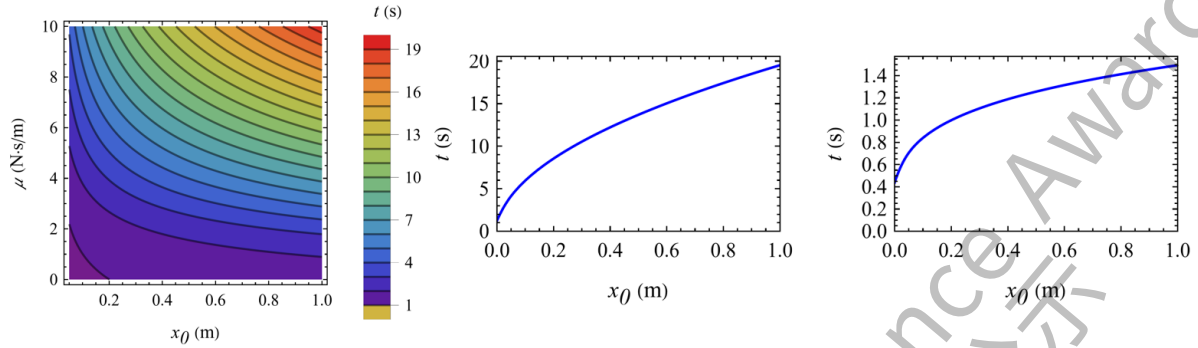


图 17 $n = 1.5$ 时的参数空间：左图为弛豫时间在不同 μ 和 x_0 下的等高线图，中图为 $\mu = 10$ 下的 $t-x_0$ 曲线，右图为 $\mu = 0$ 下的 $t-x_0$ 曲线。这里展示 $t-x$ 曲线会从无阻尼形式较为平滑地过渡到无穷阻尼形式。

势能形式中 $n = 2$ 时回归到最经典的阻尼震荡情形，即在欠阻尼时（即 $\mu < 2$ 时）保持等时性，但在临界阻尼后逐渐趋于无穷阻尼曲线，如图 18 所示。特别地，注意到这里无阻尼对应等时摆，无穷阻尼对应牛顿冷却（指数衰减）。

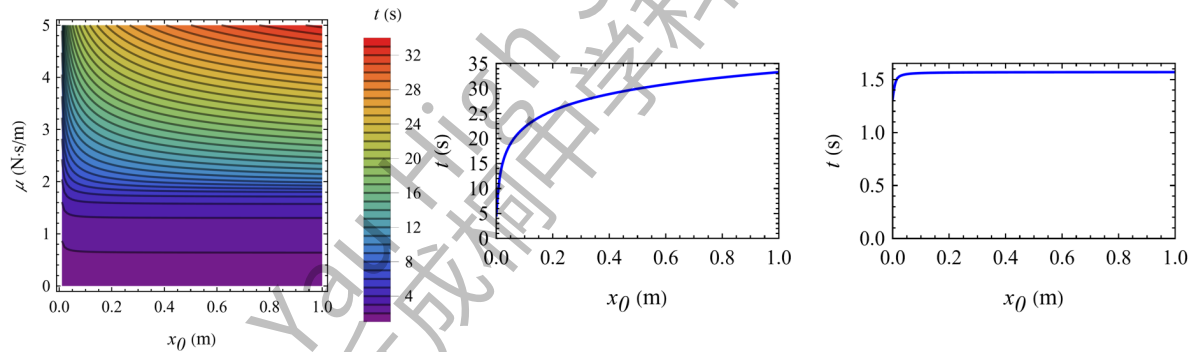


图 18 $n = 2$ 时的参数空间：左图为弛豫时间在不同 μ 和 x_0 下的等高线图，中图为 $\mu = 5$ 下的 $t-x_0$ 曲线，右图为 $\mu = 0$ 下的 $t-x_0$ 曲线。这里展示系统在欠阻尼时（即 $\mu < 2$ 时）保持等时性，而在临界阻尼后逐渐趋于无穷阻尼曲线。

当势能形式满足 $n > 2$ 时，研究发现系统仍然会出现时间发散现象，且存在非单调曲线：无阻尼条件下恒有力学姆潘巴效应；小阻尼条件下，力学姆潘巴效应在小高度区间消失，在大高度区间仍然存在；随着阻尼增大，曲线最终趋近于无穷阻尼曲线，如图 19 所示。

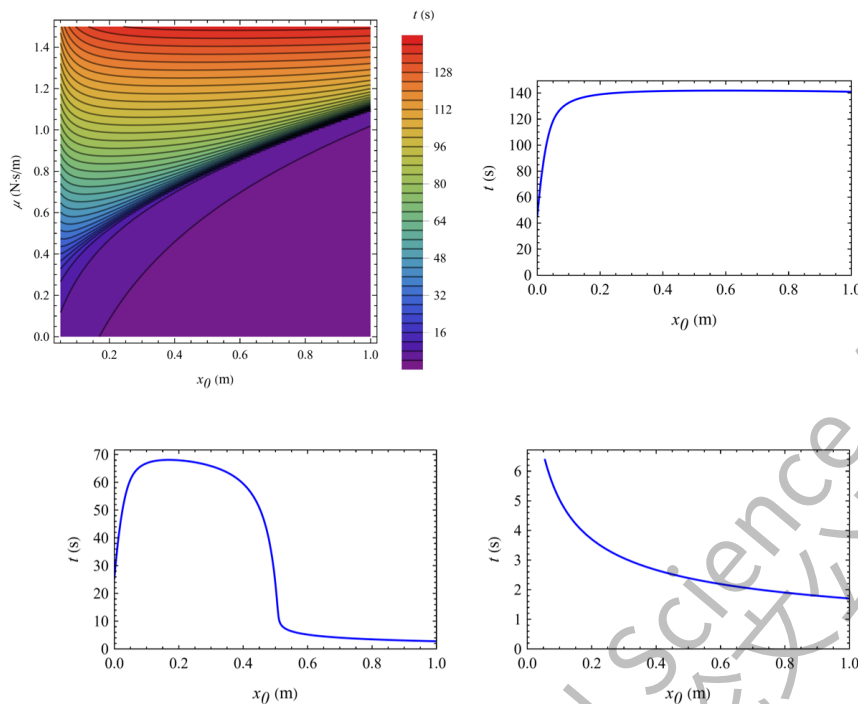


图 19 $n = 3$ 时的参数空间：左上图为弛豫时间在不同 μ 和 x_0 下的等高线图，右上图为 $\mu = 1.5$ 下的 $t - x_0$ 曲线，左下图为 $\mu = 0.8$ 下的 $t - x_0$ 曲线，右下图为 $\mu = 0$ 下的 $t - x_0$ 曲线。这里展示无阻尼恒定力学姆潘巴效应；小阻尼力学姆潘巴效应在小高度消失，在大高度仍然存在；而随着阻尼增大最终趋近于无穷阻尼曲线

注意到，对于实际方程中到达时间发散的情况，弛豫时间需要重新定义。在本研究中， $n = 2$ 时取物体移动到 $x = 0.001$ m 所需要的时间为弛豫时间； $n = 3$ 时取物体移动到 $x = 0.01$ m 所需要的时间为弛豫时间。

我们将在下面的部分定量讨论过阻尼区域与欠阻尼区域的转变，从而定量判别力学系统中姆潘巴效应的发生。对方程 $\ddot{x} + \mu x + x^{n-1} = 0$ 作局部线性化估计，即

$$\ddot{x} + \mu x + (x^{n-2})x = 0 \quad (36)$$

这时的过阻尼条件为

$$\mu > 2x^{\frac{n-2}{2}} \quad (37)$$

但是，这种估计没有考虑到下降过程中等效刚度会发生衰减，因此会高估临界值。尽管如此，由此得到的标度率实际上是成立的。以 $n = 3$ 为例，通过数值求解我们可以得到临界方程，相关验证如图 20 所示。

$$\mu \approx 1.079\sqrt{x_0} \quad (38)$$

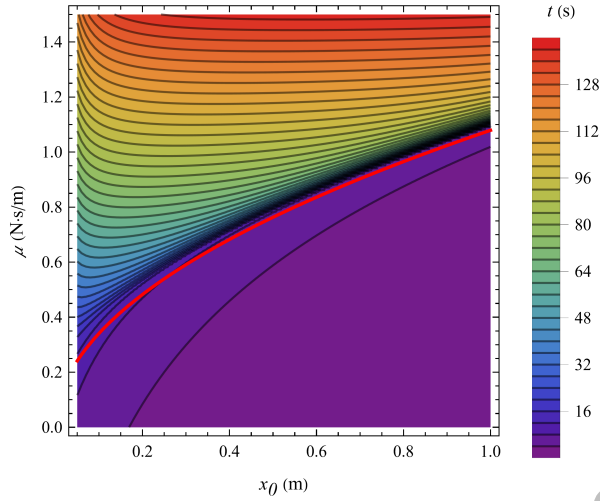


图 20 临界阻尼定量模型验证：图为 $n = 3$ 时的弛豫时间在不同 μ 和 x_0 下的等高线图，红线为计算出的理论临界曲线。可以看到临界曲线能够很好地描述两相的转变

理论上，我们总可以应用(37)式给出的标度率进行计算，从而求出线性阻尼情况下任意幂函数势能的过阻尼-欠阻尼分界，进一步帮助判断力学姆潘巴效应发生的区间。

3.2.2 不同阻尼弛豫过程的力学姆潘巴效应

我们已经对于连续幂函数势能的线性阻尼弛豫过程进行了较为系统的分析，其中对于 $n > 2$ 势能形式的分析最为重要，即在一定初始高度范围内，随着阻尼增加，系统会从完全存在姆潘巴效应逐渐转变为完全不存在姆潘巴效应（图 19）。具体而言，在过渡状态中，小初始高度范围内阻尼效应占主导，而大初始高度区间则由势能形式带来的姆潘巴效应为主。但是如果不限定线性阻尼，这种主导机制则有可能会发生变化。

因此，我们在这里讨论二次方阻尼在 $n > 2$ 幂函数势能下的性质作为范例。通过动力学变换可以得到

$$\frac{dv^2}{dx} - 2\mu v^2 + 2x^{n-1} = 0 \quad (39)$$

解该微分方程并带入初始条件可以得到（这里展示的是 n 为整数的情况，非整数情况则直接保留积分式，但是不影响结论）

$$v^2(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \frac{x^{n-k}}{2^{k-1}\mu^k} - \exp(2\mu(x-x_0)) \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \frac{x_0^{n-k}}{2^{k-1}\mu^k} \quad (40)$$

(40)式有两个重要结论：一是可以直接写出 t 关于 x_0 的积分表达式并仿照(23)和(24)给出力学姆潘巴效应在二次方阻尼下的判据；二是我们令 $x = 0$ 可以发现无论 n 取何值，最终都有 $v > 0$ 。这表明二次方阻尼系统永远不会出现过阻尼情况。

通过结论二我们可以推测，二次方阻尼的力学姆潘巴效应区间与一次方阻尼不一致。如图 21 所示，研究得到的结论印证了这个推测：过渡状态中，在小初始高度区间内，势能形式带来的姆潘巴效应占主导，而在大初始高度区间内反而由阻尼占主导。

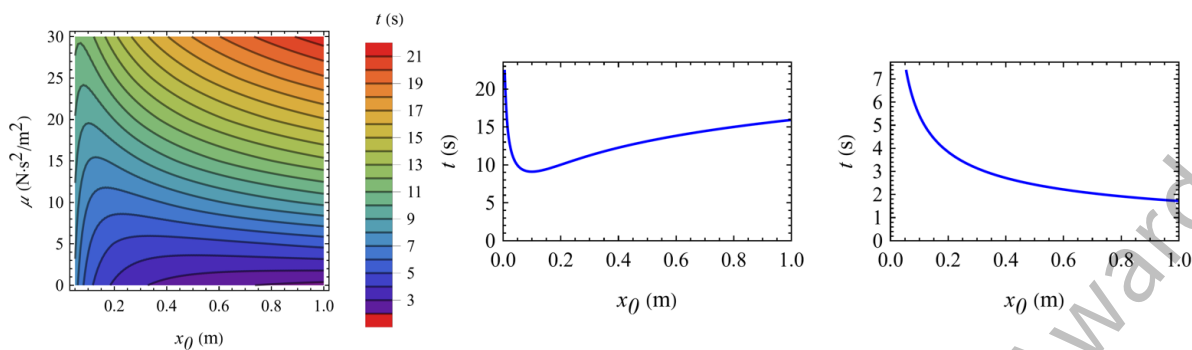


图 21 二次方阻尼 $n = 3$ 时的参数空间：左图为弛豫时间在不同 μ 和 x_0 下的等高线图，中图为 $\mu = 20$ 下的 $t - x_0$ 曲线，右图为 $\mu = 0$ 下的 $t - x_0$ 曲线。这里展示过渡状态中小初始高度势能形式导致的姆潘巴效应占主导，而大初始高度反而由阻尼占主导

实际上这种差异可以用弛豫时间解释：一次方阻尼的弛豫时间是常数，不依赖速度，因此当等效刚度变大时便会到达欠阻尼情形，从而使姆潘巴效应区间出现在初始位置较高处；而二次方阻尼弛豫时间反比于速度，所以速度大时阻尼会急剧增大，速度小时阻尼相对小，势能形式占主导。因此只有当势能平缓时，即初始位置较低处，才会出现姆潘巴效应区间。

总而言之，我们可以发现随着耗散类型变化，力学姆潘巴效应的呈现方式也会发生变化。因此，确定一个系统的具体耗散形式是确定姆潘巴效应的关键。

3.2.3 耗散情况下力学姆潘巴的发生的机制汇总

前面所述的研究内容的核心论点有两个：一是力学姆潘巴效应是由势能形式直接导致的，二是阻尼的形式会影响姆潘巴效应随着阻尼增加而消失的模式。

然而，除了势能形式和阻尼形式这两个机制外，初始速度也是使力学姆潘巴效应发生的重要因素。这个机制定性上很容易理解：初始速度增大则时间变短。因此即使势能形式并不满足自由释放时出现姆潘巴效应的条件，力学姆潘巴也可以因速度的补偿机制产生。实际上，通过时滞动力学解释热力学姆潘巴效应的思路正是利用了泰勒展开中先前条件导致的初速度差异。这里我们以牛顿冷却对应的势能 ($n = 2$) 进行简单分析，固定动力学方程为

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + x = 0 \quad (41)$$

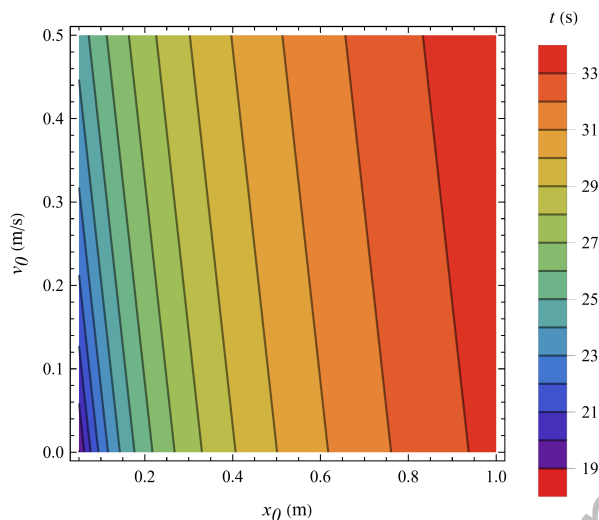


图 22 $n = 2$ 时的参数空间，即弛豫时间在不同 v_0 和 x_0 下的等高线图。这里展示初始速度也可以作为姆潘巴效应的机制

如图 22 所示，我们选取 x_0 较小， v_0 很大的初始状态点，通过使其弛豫时间超过 x_0 较大， v_0 很小的初始状态点来实现姆潘巴效应。

最后我们介绍一种力学姆潘巴效应的标准化处理方法。首先动力学方程总可以表示为

$$m\ddot{x} = -f(x, \dot{x})\dot{x} - U'(x) \quad (42)$$

因此可以化为

$$m \frac{d\dot{x}^2}{dx} = f(x, \dot{x}^2)\sqrt{\dot{x}^2} - U'(x) \quad (43)$$

带入初值条件可以解出 t 关于 x 的关系，再对其求导就可以定量判断姆潘巴效应能否出现了。

3.3 连续轨道模型实验研究

在正式引入实验装置前，我们先测定装置的基本参数，并验证基本假设，从而保证实验的严谨性。根据实验器材订购信息和资料查询以及不确定度传递，我们得到以下数据

参数	标准值	不确定度
小铁球直径 d	4.00 mm	0.04 mm
铁的密度 ρ	7874 kg/m ³	—
小铁球质量 m	0.264 g	0.008 g
重力加速度 g	9.80 m/s ²	—

表 1 通过订购和查询得到的参数表

我们用钕磁铁隔着内径 1 mm 的玻璃管释放实验所用小球，用刻度尺画一条 5 cm 的直线用作定标，使用 Tracker 软件分析记录小球的运动，从而达到分析阻尼形式的目的。在这里我们对小球在水中的阻尼为进行分析，有

$$ma = m\left(\frac{\rho - \rho_w}{\rho}\right)g - f(v) \quad (44)$$

实验估测的雷诺数 $Re < 2000$ ，系统处于混合阻尼区，并不可以用单一阻尼描述。为了保证理论的简洁性，我们进行线性近似并进行假设检验。我们以 $g(\rho - \rho_w)/\rho - a$ 为因变量， v 为自变量进行线性拟合。得到拟合结果 $y = (13.5 \pm 1.4)x + (0.9 \pm 0.7)$ ， $R^2 = 0.91$ 。经过 t 检验，我们认定斜率项显著异于 0 ($p < 10^{-5}$) 而截距项并不显著异于 0 ($p = 0.2500$)，因此我们可以接受线性阻尼模型为可行的阻尼模型。此外我们以 $g(\rho - \rho_w)/\rho - a$ 为因变量， v 为自变量进行过原点线性拟合，得到拟合结果 $y = (15.3 \pm 0.2)x$ ， $R^2 = 0.998$ ，最终求得阻尼系数 $\mu = (4.03 \pm 0.13) \text{ g/s}$ 以便后续轨道设计。

根据 3.1 节和 3.2 节的内容以及本节中得到的该实验系统中阻尼为线性的结论，我们可以限定轨道尺度。在国际单位制下，我们通过给定 C 直接给出运动方程

$$m\ddot{s} = -mgCs^{n-1} - \mu\dot{s} \quad (45)$$

方程的解给出了轨道长度上限 s_0 ，因此我们可以取无量纲变换 $u = s/s_0$ 得到无量纲方程

$$\ddot{u} + \tilde{\mu}\dot{u} + \tilde{k}u^{n-1} = 0 \quad (46)$$

其中 $\tilde{\mu} = \mu/m$ ， $\tilde{k} = gCx_0^{n-2}$ ，分别代表系统无量纲化的特征耗散率和特征势能大小。后续动力学实验中都将记录横坐标 x 并对应为 s ，并将其化为无量纲形式来和理论进行对比。

有了 C 的限定后我们将其带入(32)的表达式，通过程序均匀选取五到六个点，利用分度值为 1 mm 的刻度尺在硬纸板上标记点的坐标，随后用 1 mm × 2 cm 的亚克力双面胶带将内部直径 1 cm 塑料软管固定在这些点上以达到多点拟合的效果。在无阻尼实验中软管内部中空，而在耗散情景下软管内部填充不同液体。实验过程中，我们仍然采取隔着塑料软管用钕磁铁释放小铁球的释放方式。期间使用 120 FPS 的手机录制视频。在无阻尼实验时，用刻度尺画一条长 10 cm 的直线进行定标，在有阻尼实验时则利用长度为 2 cm 的胶带进行定标。录制好视频后将其导入 Tracker 软件，通过测量和计时得到 u_0 和 t 的值。实验装置的示意图和处理方法如图 23 所示。

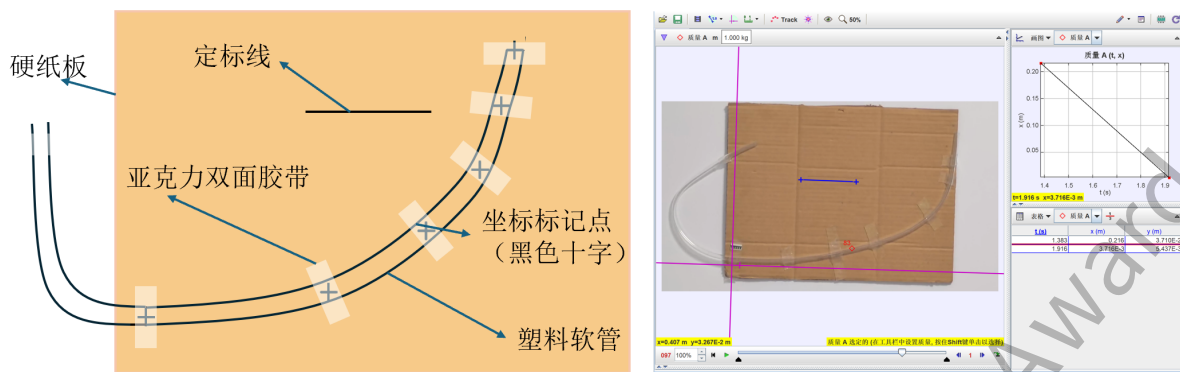


图 23 实验装置示意图及数据处理方法图：左图为实验装置示意图，利用数值求解的标记点使塑料软管多点拟合轨道曲线；右图展示数据处理方法，通过 Tracker 数帧数记录时间 t ，通过定标杆定标测定横向距离 x ，从而通过程序得到弧长坐标 s

3.3.1 无阻尼情况下的力学姆潘巴效应

我们选取三组轨道参数设置： $n = 1.5, C = 1.5$, $n = 2, C = 2$, $n = 3, C = 5$ (C 单位均为国际单位制)，得到相应的无量纲常量： $\tilde{k} = 22.1$, $\tilde{k} = 19.6$, $\tilde{k} = 21.9$ 。运用前面提到的实验装置可以得到以下三组理论-实验 $t - u_0$ 曲线对比图（注意这里我们采取纯滚假设来对方程 $\ddot{u}$ 项增加 $7/5$ 的修正系数）。

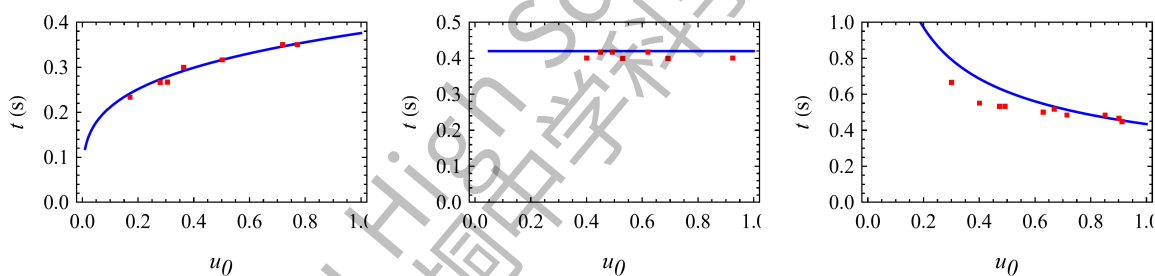


图 24 无阻尼 $t - u_0$ 理论与实验对比：左图为 $n = 1.5$ 时的 $t - x_0$ 曲线，中图为 $n = 2$ 时的 $t - x_0$ 曲线，右图为 $n = 3$ 时的 $t - x_0$ 曲线。这里展示出的理论与实验符合良好，验证了无阻尼幂函数势能的 $n = 2$ 临界

可以看到，尽管由于实验器材精度不足， $n = 3$ 势能组在 u_0 较小时存在一定偏离，但总体而言理论与实验符合良好，符合我们 3.1 节中给出的判据(27)。

3.3.2 耗散情况下的力学姆潘巴效应

这个时候我们并不关心 $n \leq 2$ 的情形，因为在这两种情况下无论如何都不可能出现姆潘巴效应区间，所以我们只保留 $n = 3$ 的轨道进行后续实验。但是要想看到过渡形态，在我们能达到的最小非零阻力里面， $\tilde{\mu} = 15.3$ 的水必须 C 达到 10^2 m^{-2} 量级。因此我们不得不舍弃一部分系统精度来观测力学姆潘巴随阻尼增加的消失模式。在这里我们选取 $C = 200 \text{ m}^{-2}$ ，对应常量 $\tilde{k} = 139$ 。装置细节如图 25 所示，实验结果如图 26 所示。



图 25 有阻尼实验轨道设置：轨道参数均为 $n = 3, C = 200 \text{ m}^{-2}$ ；左图管内为蜂蜜水，测得系数 $\tilde{\mu} = 64.4$ ；中图管内为水，测得系数 $\tilde{\mu} = 15.3$ ，右图管内无填充，即 $\tilde{\mu} = 0$

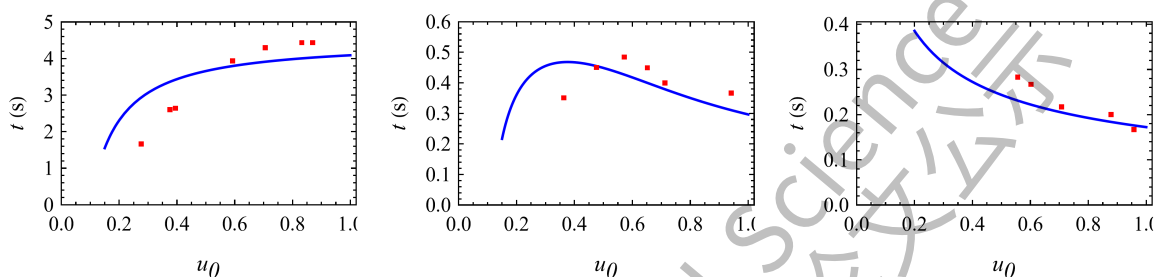


图 26 $n = 3, C = 100$ 时的 $t - u_0$ 曲线理论与实验对比：左图为 $\tilde{\mu} = 64.4$ 下的 $t - x_0$ 曲线，中图为 $\tilde{\mu} = 15.2$ 下的 $t - x_0$ 曲线，右图为 $\tilde{\mu} = 0$ 下的 $t - x_0$ 曲线。这里理论与实验趋势符合良好，具有“无阻尼时恒有姆潘巴效应；小阻尼时姆潘巴效应在小高度消失，在大高度仍然存在；随着阻尼增大最终趋近于无穷阻尼曲线”的特性

阻尼存在时系统偏差较大，这是因系统尺度缩小导致势能模拟性能变差所导致：在势能本应十分平缓处无法进行精确模拟，所以随着 u_0 减小，到达时间 t 会小于理论预测。尽管如此，实验结果表明了理论计算量级正确、定性趋势符合良好，并且复现了线性阻尼对于力学姆潘巴效应消失模式的预言。

由于流体的性质，我们暂时无法复现出二次方阻尼导致的不同转变现象，特别是其特殊转变区间发生在小速度区——这在流体上通常被认为是阻尼处于关于速度呈线性的区间。因此，非线性阻尼下的姆潘巴效应变化模式或许只能在其他系统中验证。

4 总结与展望

本文从弛豫时间对初始状态的依赖出发，围绕力学系统中的姆潘巴效应建立了从离散轨道模型向连续势能模型推广的理论框架，并进一步研究了耗散机制对该反常弛豫行为的影响。我们首先建立了质点在由两直轨构成的离散轨道上运动的模型，将满足下落总时间对于初始远离平衡位置的距离的偏导数小于零的区域定义为力学姆潘巴效应区间，通过计算质点总下滑时间对初始释放高度偏导数的负区间判定姆潘巴效应范围，并定量研究了轨道几何参数对该区间的影响。结果表明，效应来源于初始释放高度增加带来的速度优势与运动距离增加之间的竞争。在此基础上，本文首次提出了姆潘巴效应的平滑势能力学唯象模型。首先推导了无阻尼情况下任意平滑势能下的力学姆潘巴判据，(26)式小于零，并建立了连续轨道类比。同时以幂函数势能为例定性和定量的讨论了不

同耗散形式对于力学姆潘巴效应减弱和消失模式的影响,还进行了实验验证。最后给出了机制汇总和标准化解法。特别地,本文在两类轨道模型中引入线性阻尼和二次方阻尼,以研究在真实耗散环境中的力学姆潘巴效应。结果表明,阻尼不仅会影响系统的运动时间,也会影响力学姆潘巴效应的消失模式。本质上,这是轨道形状导致的势能特征和阻尼的耗散特征的竞争结果。对于离散轨道,两种阻尼都导致了力学姆潘巴区间的缩短。对于连续轨道,一次方阻尼展现出近处阻尼主导的特性(图 19)而二次方阻尼展现出远处阻尼主导的特性(图 21)。

本文采用了确定性动力学描述耗散过程,而在真实环境中不可避免地存在热涨落和随机扰动。未来可以在现有的运动方程中引入随机噪声,进一步建立相应的 Langevin 动力学模型并研究随机涨落对力学姆潘巴效应的影响。近年来,一些研究已经证明 Mpemba 效应存在于 Markov 动力学 [9] 和随机热力学中,因此可以将本文的机械模型与随机动力学结合,并进一步研究确定性机械姆潘巴效应和随机热力学中的姆潘巴效应是否存在共同的作用机制。另外,可以引入更多不同的势能和阻尼模型,并运用本文中提供的方法论进行系统性的分析和研究。同时,也可以将模型推广从而能解决非平滑势能甚至非连续势能的情景。通过这些进一步研究,本文建立的轨道模型可以进一步寻找与介观系统或活性物质的深层次类比。除此之外,近年来的姆潘巴效应研究还出现在颗粒流体 [8]、活性胶体 [10] 以及具有非平衡驱动的体系中,说明这种反常弛豫现象并不局限于热力学体系。未来还可以研究本文所揭示的效应产生机制和影响因素是否能够推广到具有自驱动、随机涨落或非平衡稳态的介观体系中,从而探究力学姆潘巴效应和更广泛的非平衡弛豫现象之间的联系。

参考文献

- [1] E. B. Mpemba and D. G. Osborne, [Physics Education](#) **4**, 172 (1969).
- [2] M. Vynnycky and S. Mitchell, [Heat and Mass Transfer](#) **46**, 881 (2010).
- [3] D. Auerbach, [American Journal of Physics](#) **63**, 882 (1995).
- [4] E. Deeson, [Physics Education](#) **6**, 42 (1971).
- [5] J. I. Katz, [American Journal of Physics](#) **77**, 27 (2009).
- [6] J. D. Brownridge, [American Journal of Physics](#) **79**, 78 (2011).
- [7] H. C. Burridge and P. F. Linden, [Scientific Reports](#) **6**, 37665 (2016).
- [8] A. Lasanta, F. Vega Reyes, A. Prados, and A. Santos, [Physical Review Letters](#) **119**, 148001 (2017).
- [9] Z. Lu and O. Raz, [Proceedings of the National Academy of Sciences](#) **114**, 5083 (2017).
- [10] A. Kumar and J. Bechhoefer, [Nature](#) **584**, 64 (2020).
- [11] O. E. Lanford III, in *Dynamical Systems, Theory and Applications: Battelle Seattle 1974 Rencontres* (Springer, 2005) pp. 1–111.
- [12] Y. Deng, Z. Hani, and X. Ma, arXiv preprint arXiv:2408.07818 10.48550/arXiv.2408.07818 (2024).
- [13] Finkelstein, [Physical Science Biophysics Journal](#) **9**, 1–4 (2025).

致谢

以终为始，谨此谢忱。写下这段文字时正值高三忙碌的初秋，也正是在两年前这样的一个秋天里，我们第一次开始了对迟滞现象的研究。本文最初的研究兴趣源于 2025 年青年物理学家“弹簧迟滞”一题，我们在了解滞回现象后逐渐被其背后蕴藏的物理机制吸引。因此青年物理学家竞赛的经历 (IYPT/CYPT)，我们加入北京师范大学马宇翰老师课题组进行进一步的科研训练。在马老师课题组的学习过程中，我们接触到姆潘巴效应这一经典的反常弛豫现象。

在研读 Finkelstein 提出的力学姆潘巴模型后 [13]，我们产生了在原体系中增加耗散项、推广至连续轨道模型的想法，并于 2026 年 4 月与马宇翰老师沟通后确定将此问题作为本年度丘成桐科学奖研究选题。两位作者在研究过程中充分配合，夏源蔚主要负责离散轨道模型的理论研究、离散轨道装置搭建和实验工作，完成该部分实验数据采集和分析，并撰写论文一、二节内容，同时完成了摘要和总结展望的初稿写作。姬国智主要负责平滑势能模型的构建分析、连续轨道实验装置搭建和实验、该部分实验数据采集和分析、论文第三节写作和总结展望部分的修改。论文完成后的格式检查及修改由两人共同完成。

离散轨道模型的研究过程中遇到的主要困难源于实验部分。使用和理论建模完全一致的纯直轨装置实验时，小球在下落到交汇点处时会产生剧烈碰撞，引发显著的能量耗散。在换用如 PVC 软管、吸尘管、橡胶片等多种材料后，我们最终选用了一种曲率和厚度最贴合亚克力管的橡胶连接轨道。

连续轨道模型的研究理论和实验都进行了多次迭代。最开始推导理论时承接上文思路，选取高度为类比的动力学参量。然而，带入动力学方程时，即使是无阻尼情况下，由于轨道特性也会产生等效的阻尼项，因此在实际操作中选取了弧长作为类比参量。实验方面，轨道用硬质物体难以定制，操作困难。因此使用了塑料软管多点拟合的方式进行了实验，在保障精确性的同时增加了可以改变的自由度，方便了实验器材的准备过程。

在此，我们衷心感谢指导老师马宇翰在研究过程中的充分指导。从理论部分引入的耗散形式、效应产生的物理机制讨论，到实验装置搭建和论文撰写，马老师均给予了细致耐心的指导，帮助我们克服了科研过程中的许多困难。本研究中，马老师主要负责选题确定、研究思路梳理、两类模型的实验数据的分析指导及论文写作指导等工作。感谢人大附中张永平老师的帮助。从高一对迟滞现象的初步理解到本研究的完成，张老师在理论分析和实验探究方面悉心指导我们，是科研途中不可或缺的引路人。张老师主要参与本研究理论和实验环节的讨论指导，并针对论文提出修改意见。两位指导老师均为无偿提供指导。感谢马老师课题组博士生林蕴芊学姐在画图软件使用和论文写作规范上的帮助与支持，在研究过程中对图像绘制和论文写作的规范性提供了宝贵的指导意见。同时，感谢人大附中在科研方面的培养，让我们在文献阅读、实验设计和论文撰写等方面打下良好基础。最后，感谢所有在科研过程中给予指导的老师和学长。初入科研之路困

难常有，如今的成果离不开前人的帮助，感激在心。

本文使用 Gemini 3.6 Flash 辅助部分文献调研，摘要和引言部分的语言优化以及离散轨道部分的代码调试，用豆包进行平滑势能模型部分的代码优化，时间在 6 月中旬至下旬，7 月中旬至 9 月，频率约一周 2 至 3 次。全文的核心部分，理论推导、数值模拟、实验过程与数据分析，均为本小组组员人工完成，我们对数据的真实性和学术规范性负责。

本研究时间历程如下：于 2026 年 4 月开题，5、6、7 月阅读相关文献并对姆潘巴现象进行理论分析，8 月进行实验研究。两类轨道模型的实验均于 8 月完成，同月开始论文撰写，实验结束后的两周完成初稿，9 月份进行进一步修改完善。

很荣幸能有机会进行科研探究，感怀物理，大道至简，恒昭前路。

附录

A 补充理论推导

A.1 离散轨道 $H > h_2$ 高度释放的总下落时间求解

质点经历两阶段运动。在上段斜坡，垂直下落高度 $h_1 = H - h_2$ ，加速度 $a_1 = g \sin \alpha$ ，位移 $s_1 = (H - h_2) / \sin \alpha$ 。运动时间 t_1 与到达交汇点时的速度 v_H 分别为

$$t_1 = \frac{\sqrt{2g(H - h_2)}}{g \sin \alpha} = \sqrt{\frac{2(H - h_2)}{g \sin^2 \alpha}} \quad (47)$$

$$v_H = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2g(H - h_2)} \quad (48)$$

质点以初速度 v_H 进入下段斜坡，加速度 $a_2 = g \sin \beta$ 。由位移公式 $L_2 = v_H t_2 + \frac{1}{2} g \sin \beta t_2^2$ ，利用求根公式得到正根

$$t_2 = \frac{\sqrt{v_H^2 + 2g L_2 \sin \beta} - v_H}{g \sin \beta} \quad (49)$$

代入 $v_H = \sqrt{2g(H - h_2)}$ 与 $L_2 \sin \beta = h_2$

$$\sqrt{v_H^2 + 2g L_2 \sin \beta} = \sqrt{2g(H - h_2) + 2gh_2} = \sqrt{2gH} \quad (50)$$

t_2 化简为

$$t_2 = \frac{\sqrt{2gH} - \sqrt{2g(H - h_2)}}{g \sin \beta} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{H} - \sqrt{H - h_2})}{\sqrt{g} \sin \beta} \quad (51)$$

得到 $H > h_2$ 时总下滑时间 $t_{\text{tot}}(H)$ 的解析式

$$t_{\text{tot}}(H) = \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{\sqrt{H - h_2}}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{H} - \sqrt{H - h_2}}{\sin \beta} \right] \quad (52)$$

对分子分母同乘以 $(\sqrt{H} + \sqrt{H - h_2})$

$$t_{\text{tot}}(H) = \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{\sqrt{H - h_2}}{\sin \alpha} + \frac{L_2}{\sqrt{H} + \sqrt{H - h_2}} \right] \quad (53)$$

A.2 离散轨道力学姆潘巴区间的存在性推导

对 $t_{\text{tot}}(H)$ 关于释放高度 H 求一阶导数:

$$\frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} = \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{1}{2 \sin \alpha \sqrt{H - h_2}} + \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{1}{2\sqrt{H}} - \frac{1}{2\sqrt{H - h_2}} \right) \right] \quad (54)$$

提取公因式 $\frac{1}{\sin \alpha \sqrt{2g(H - h_2)}}$:

$$\frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} = \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{2g(H - h_2)}} \left[1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left(1 - \frac{\sqrt{H - h_2}}{\sqrt{H}} \right) \right] \quad (55)$$

当 $H \rightarrow h_2^+$ 时

$$\lim_{H \rightarrow h_2^+} \left[1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left(1 - \frac{\sqrt{H - h_2}}{\sqrt{H}} \right) \right] = 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (56)$$

轨道几何条件满足 $\alpha > \beta$, 可知 $\sin \alpha > \sin \beta$, 即 $1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < 0$ 。由于 $\frac{1}{\sqrt{H - h_2}} \rightarrow +\infty$, 所以得到

$$\lim_{H \rightarrow h_2^+} \frac{\partial t_{\text{tot}}}{\partial H} = -\infty \quad (57)$$

只要两段轨道满足几何倾角关系 $\alpha > \beta$, 在交汇点 h_2 上方必然存在导数为负的力学姆潘巴效应区间。

A.3 姆潘巴效应区间宽度 Δh 求解

令时间梯度等于零, 求出临界高度 H_{max}

$$1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \left(1 - \frac{\sqrt{H - h_2}}{\sqrt{H}} \right) = 0 \implies 1 - \frac{\sqrt{H - h_2}}{\sqrt{H}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (58)$$

移项整理得

$$\frac{\sqrt{H - h_2}}{\sqrt{H}} = 1 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha} \quad (59)$$

两边平方

$$\frac{H - h_2}{H} = 1 - \frac{h_2}{H} = \left(\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (60)$$

解出 H_{max}

$$\frac{h_2}{H_{\text{max}}} = 1 - \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin \beta (2 \sin \alpha - \sin \beta)}{\sin^2 \alpha} \quad (61)$$

代入 $h_2 = L_2 \sin \beta$:

$$H_{\max} = \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha - \sin \beta} \quad (62)$$

因此, 力学姆潘巴效应的区间宽度 $\Delta h = H_{\max} - h_2$ 为

$$\Delta h = \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha - \sin \beta} - L_2 \sin \beta = L_2 \left[\frac{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta}{2 \sin \alpha - \sin \beta} \right] \quad (63)$$

$$\Delta h = L_2 \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2}{2 \sin \alpha - \sin \beta} \quad (64)$$

A.4 线性阻尼动力学耗散修正

引入一个与速度成正比的线性阻尼项。定义单位阻尼系数 $\kappa = \frac{\gamma}{m}$, 质点的运动方程为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = mg \sin \theta \quad (65)$$

质点以初速度 v_0 从斜面释放时, 通过求解此一阶线性常微分方程得到速度 $\dot{x}(t)$ 与位移 $x(t)$ 的解析表达式

$$x(t) = \frac{g \sin \theta}{\kappa} t + \frac{1}{\kappa} \left(v_0 - \frac{g \sin \theta}{\kappa} \right) (1 - e^{-\kappa t}) \quad (66)$$

固定轨道长度对此位移公式求微元全微分

$$\frac{g \sin \theta}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t_1}) dt_1 + v_0 e^{-\kappa t_1} dt_1 = -\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t_1}) dv_0 \quad (67)$$

总下滑时间的全微分微元变化量为

$$dt = dt_1 + dt_2 \quad (68)$$

当 $H \rightarrow h_2^+$ 时, 质点在上段斜坡的下滑时间趋近于零, 质点进入下段轨道的初速度趋近于零。并且质点进入下段轨道时初速度的微元变化量由第一阶段的加速决定, 关系满足

$$dv_0 = a_1 dt_1 = g \sin \alpha dt_1 \quad (69)$$

将 $v_0 \rightarrow 0$ 和 $dv_0 = a_1 dt_1$ 的代入质点在轨道交汇点的微元方程

$$dv_0 = a_2 dt_2 = g \sin \beta dt_2 \quad (70)$$

因此在极限 $H \rightarrow h_2^+$ 下

$$dt_1 = -\frac{g \sin \beta}{g \sin \alpha} dt_2 \quad (71)$$

推出总下滑时间微元变化量表达式

$$dt = dt_1 + dt_2 = \left(-\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) dt_2 = \left(-\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 \right) dt_2 \quad (72)$$

在建立离散轨道模型时我们定义两段轨道的倾角满足 $\alpha > \beta$ ，则必然有 $\sin \alpha > \sin \beta$ ，所以 $-\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 < 0$ 。因此得到重要结论

$$dt < 0 \quad (73)$$

B 补充实验结果图像

B.1 变参数下滑时间-初始释放高度实验数据拟合曲线

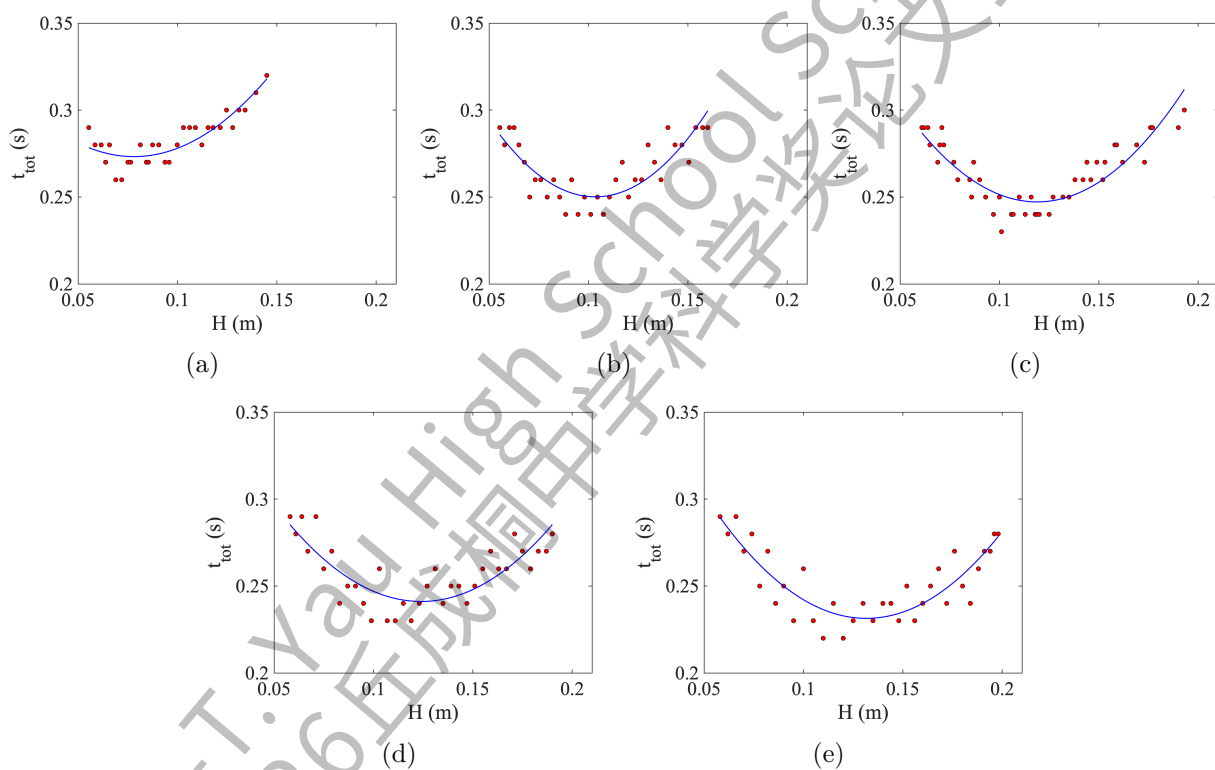


图 27 变 α 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据拟合曲线, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为实验拟合曲线. (a) $\alpha = 0.70 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (b) $\alpha = 0.87 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$. (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$. (d) $\alpha = 1.22 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$. (e) $\alpha = 1.40 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

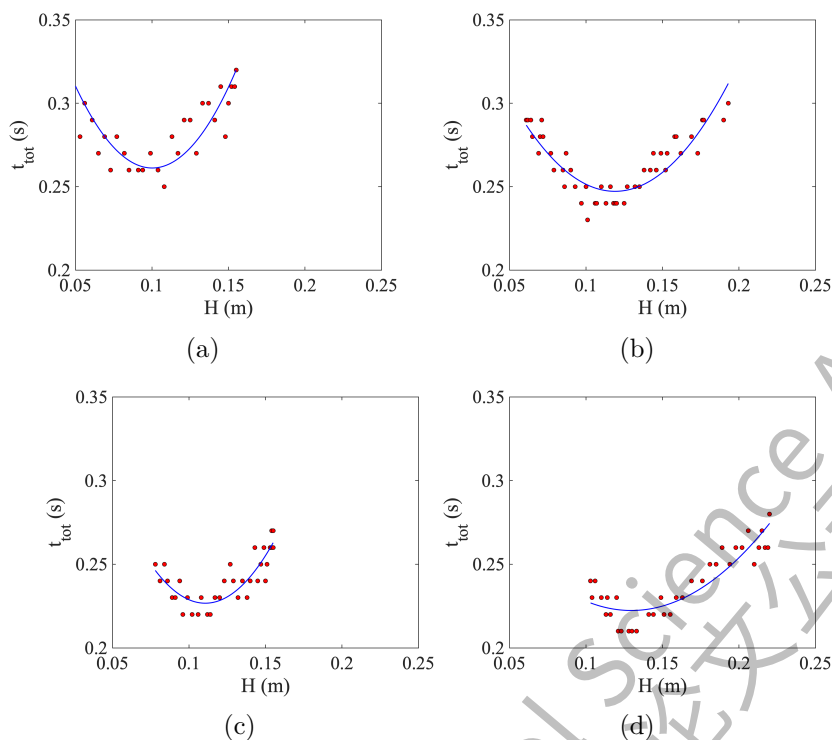


图 28 变 β 总下滑时间随释放高度变化实验数据拟合曲线, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为实验拟合曲线. (a) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.17 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$. (b) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$. (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.52 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$. (d) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.70 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$.

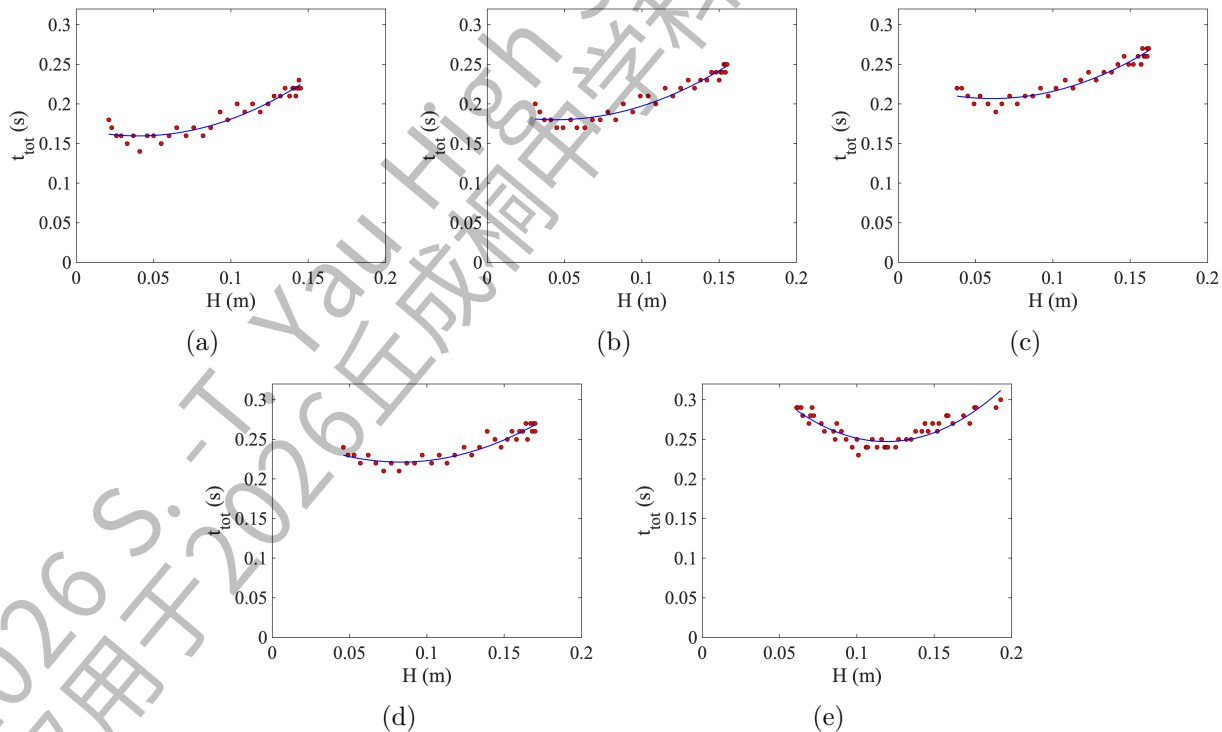


图 29 变 L_2 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据拟合曲线, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为实验拟合曲线. (a) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.05 \text{ m}$ (b) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.08 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.10 \text{ m}$ (d) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.12 \text{ m}$ (e) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

B.2 变参数总下滑时间随初始释放高度变化理论实验对比

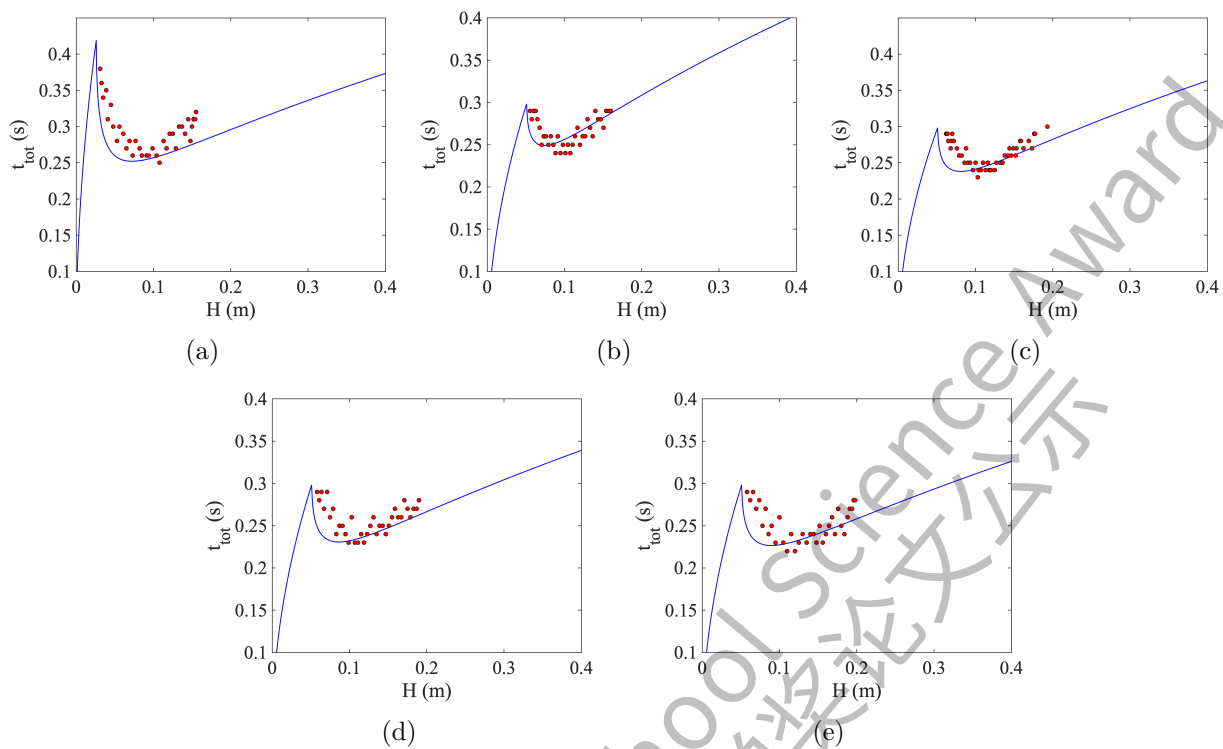


图 30 变 α 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据和理论曲线对比，红色圆点为实验数据，蓝色曲线为理论曲线。实验参数 (a) $\alpha = 0.70 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (b) $\alpha = 0.87 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (d) $\alpha = 1.22 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (e) $\alpha = 1.40 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

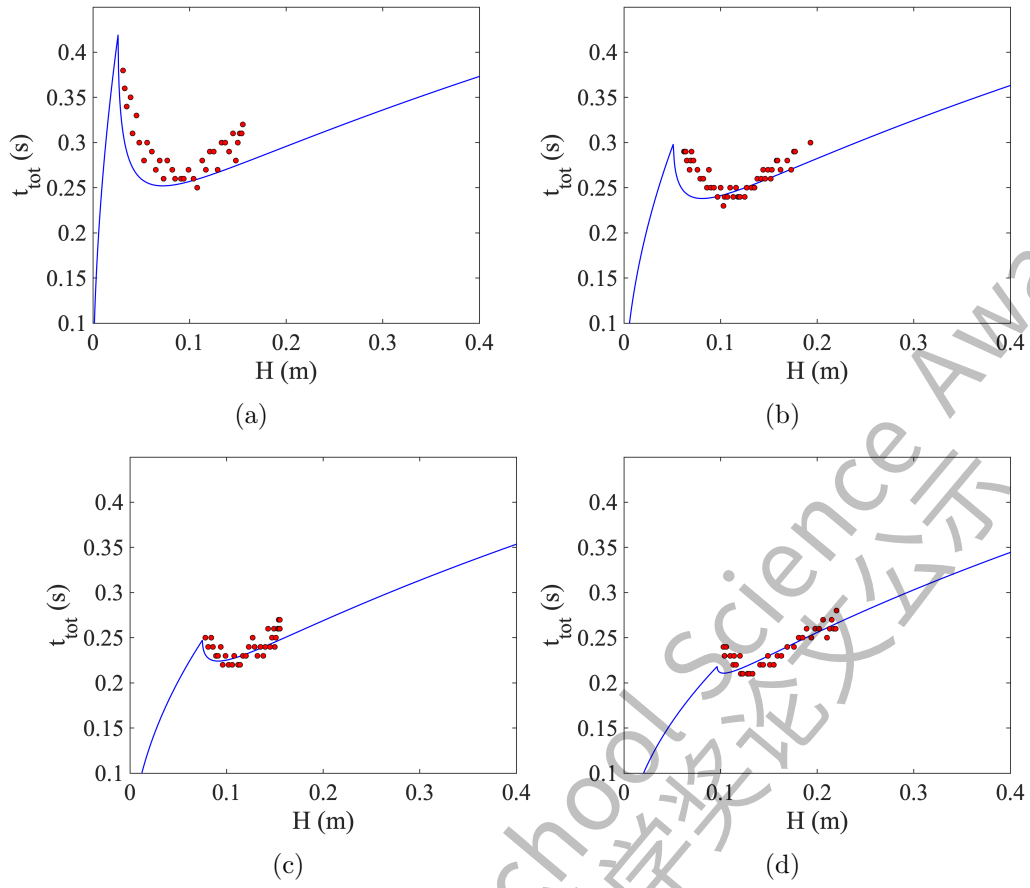


图 31 变 β 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据和理论曲线对比, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为理论曲线. 实验参数 (a) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.17 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (b) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.52 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$ (d) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.70 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

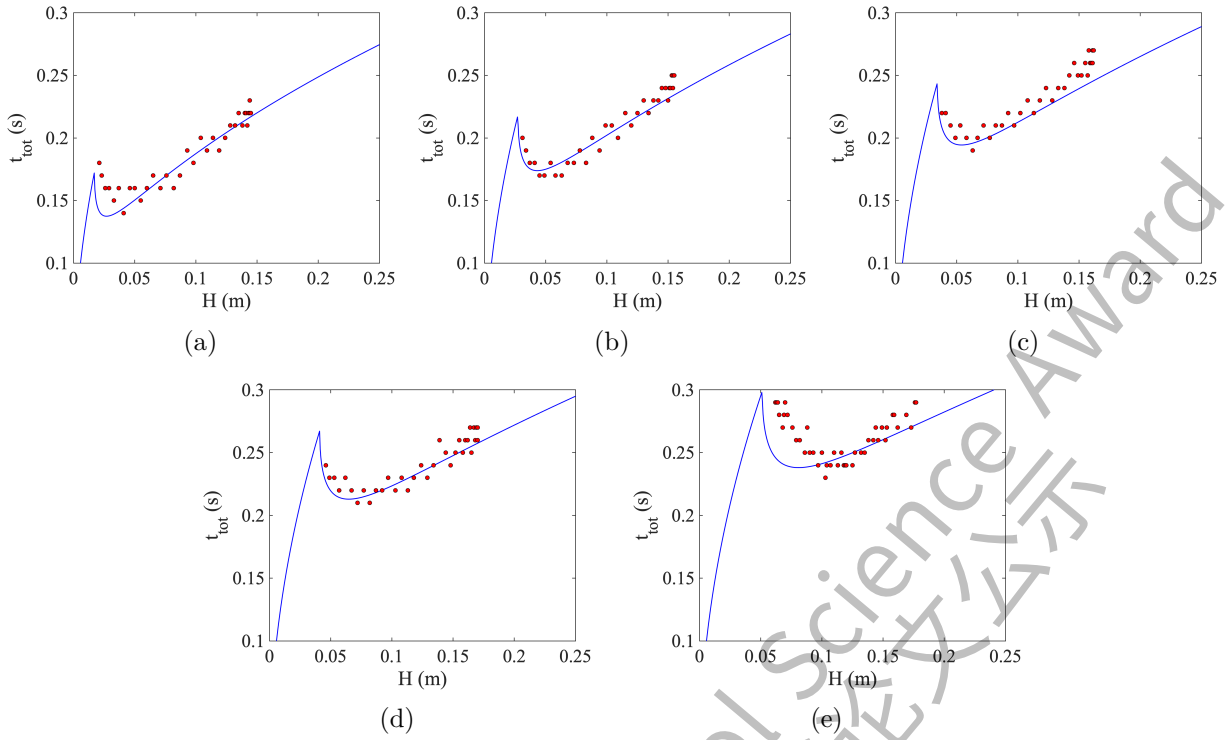


图 32 变 L_2 总下滑时间随初始释放高度变化实验数据和理论曲线对比, 红色圆点为实验数据, 蓝色曲线为理论曲线. 实验参数 (a) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.05 \text{ m}$ (b) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.08 \text{ m}$ (c) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.10 \text{ m}$ (d) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.12 \text{ m}$ (e) $\alpha = 1.05 \text{ rad}$, $\beta = 0.35 \text{ rad}$, $L = 0.15 \text{ m}$

B.3 阻尼的验证与测量

我们可以以 $g(\rho - \rho_w)/\rho - a$ 为因变量, v 为自变量进行线性拟合。得到拟合结果 $y = (13.5 \pm 1.4)x + (0.9 \pm 0.7)$ $R^2 = 0.91$ 。经过 t 检验, 我们可以认定斜率项显著异于 0 ($p < 10^{-5}$) 而截距项并不显著异于 0 ($p = 0.2500$)。此外, 非线性拟合截距项都显著异于 0。因此, 我们可以认为线性阻尼模型是适合的阻尼模型。我们可以以 $g(\rho - \rho_w)/\rho - a$ 为因变量, v 为自变量进行过原点线性拟合, 得到拟合结果 $y = (15.3 \pm 0.2)x$ $R^2 = 0.998$ 。最终求得阻尼系数 $\mu = (4.03 \pm 0.13) \text{ g/s}$ 。

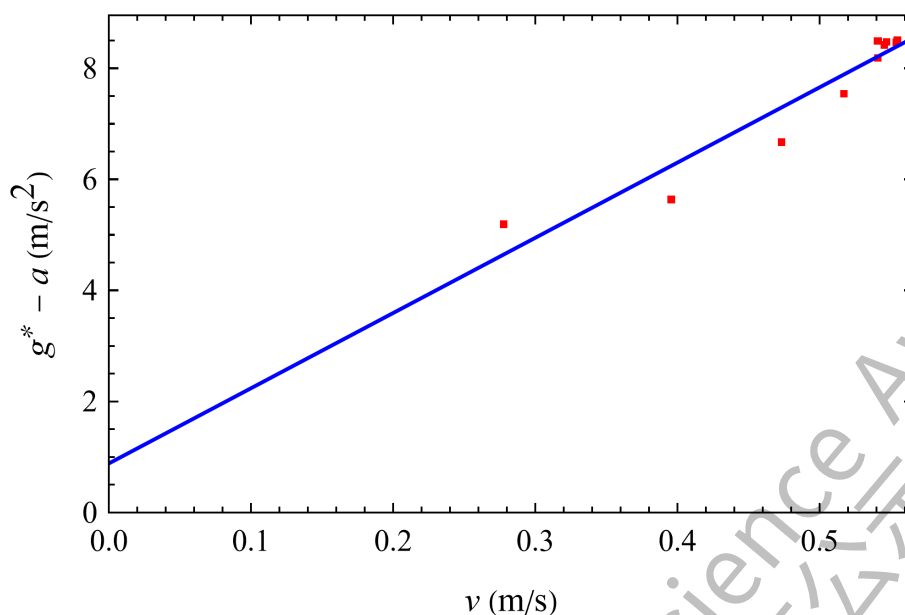


图 33 实验中运用线性阻尼的合理性验证

验证了阻尼的线性模型的合理性，基于落球法的阻尼的具体测量主要有三种办法，一种是过原点回归，另外一种是对其运动速度随时间变化进行拟合，除此之外还有稳定速度推断。在真实测量实验中，对于水我们运用三种进行了交叉验证。而对于蜂蜜，由于蠕动的性质，导致速度并不单调变化，因此我们仅仅采用了稳定速度推断法。

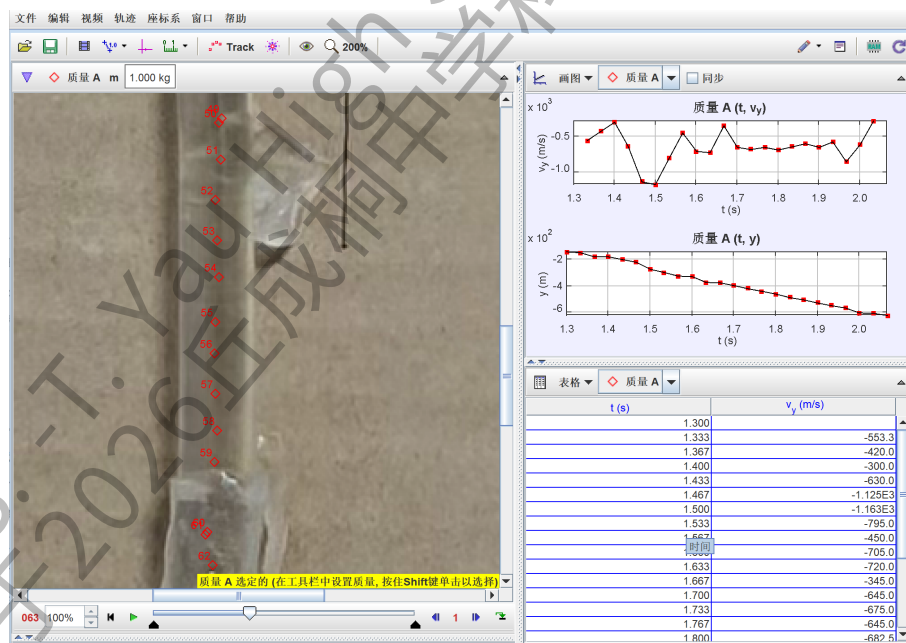


图 34 对于蜂蜜水阻尼系数的测定：稳定速度推断

C 补充实验数据

离散轨道实验数据如下：

表 2 离散轨道 ($\alpha = 1.05rad, \beta = 0.35rad$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.0610	0.290	0.1180	0.240
0.0620	0.290	0.1190	0.240
0.0640	0.290	0.1200	0.240
0.0650	0.280	0.1250	0.240
0.0690	0.270	0.1270	0.250
0.0700	0.280	0.1320	0.250
0.0710	0.290	0.1350	0.250
0.0720	0.280	0.1380	0.260
0.0770	0.270	0.1420	0.260
0.0790	0.260	0.1440	0.270
0.0850	0.260	0.1460	0.260
0.0860	0.250	0.1490	0.270
0.0870	0.270	0.1520	0.260
0.0900	0.260	0.1530	0.270
0.0930	0.250	0.1580	0.280
0.0970	0.240	0.1590	0.280
0.1000	0.250	0.1620	0.270
0.1010	0.230	0.1690	0.280
0.1060	0.240	0.1730	0.270
0.1070	0.240	0.1760	0.290
0.1100	0.250	0.1770	0.290
0.1130	0.240	0.1900	0.290
0.1160	0.250	0.1930	0.300

表 3 离散轨道 ($\alpha = 0.70rad, \beta = 0.35rad$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.055	0.29	0.095	0.27
0.059	0.28	0.099	0.28
0.061	0.28	0.103	0.29
0.063	0.27	0.106	0.29
0.064	0.28	0.110	0.29
0.068	0.26	0.112	0.28
0.072	0.26	0.114	0.29
0.075	0.27	0.117	0.29
0.076	0.27	0.121	0.29
0.081	0.28	0.123	0.30
0.084	0.27	0.127	0.29
0.085	0.27	0.130	0.30
0.088	0.28	0.134	0.30
0.090	0.28	0.139	0.31
0.093	0.27	0.145	0.32

表 4 离散轨道 ($\alpha = 0.87rad, \beta = 0.35rad$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.054	0.290	0.104	0.250
0.057	0.280	0.107	0.240
0.060	0.290	0.111	0.250
0.062	0.290	0.113	0.260
0.064	0.280	0.118	0.270
0.067	0.270	0.121	0.250
0.070	0.250	0.124	0.260
0.073	0.260	0.126	0.260
0.077	0.260	0.130	0.280
0.078	0.250	0.132	0.270
0.082	0.260	0.136	0.260
0.085	0.250	0.140	0.290
0.087	0.240	0.143	0.280
0.092	0.260	0.147	0.280
0.094	0.240	0.150	0.270
0.098	0.250	0.155	0.290
0.101	0.240	0.157	0.290
—	—	0.160	0.290

表 5 离散轨道 ($\alpha = 1.22rad, \beta = 0.35rad$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.0580	0.290	0.1230	0.240
0.0610	0.280	0.1270	0.250
0.0630	0.290	0.1300	0.260
0.0670	0.270	0.1350	0.240
0.0710	0.290	0.1390	0.250
0.0750	0.260	0.1430	0.250
0.0780	0.270	0.1480	0.240
0.0830	0.240	0.1510	0.250
0.0870	0.250	0.1550	0.260
0.0910	0.250	0.1580	0.270
0.0960	0.240	0.1630	0.260
0.0990	0.230	0.1670	0.260
0.1030	0.260	0.1710	0.280
0.1070	0.230	0.1740	0.270
0.1110	0.230	0.1790	0.260
0.1160	0.240	0.1830	0.270
0.1190	0.230	0.1870	0.270
—	—	0.1900	0.280

表 6 离散轨道 ($\alpha = 1.05rad, \beta = 0.52rad$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.078	0.250	0.127	0.250
0.081	0.240	0.129	0.240
0.084	0.250	0.132	0.230
0.086	0.240	0.136	0.240
0.088	0.230	0.138	0.230
0.091	0.230	0.140	0.240
0.095	0.240	0.143	0.260
0.096	0.220	0.145	0.240
0.099	0.230	0.147	0.250
0.103	0.220	0.149	0.260
0.106	0.220	0.150	0.240
0.108	0.230	0.151	0.250
0.112	0.220	0.153	0.260
0.115	0.220	0.154	0.270
0.117	0.230	0.154	0.260
0.120	0.230	0.155	0.260
0.123	0.240	0.155	0.260
—	—	0.155	0.270

表 7 离散轨道 ($\alpha = 1.05rad, \beta = 0.70rad$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.103	0.240	0.159	0.230
0.104	0.230	0.163	0.230
0.106	0.240	0.169	0.240
0.110	0.230	0.176	0.240
0.113	0.220	0.181	0.250
0.114	0.230	0.185	0.250
0.116	0.220	0.189	0.260
0.120	0.230	0.194	0.250
0.121	0.210	0.198	0.260
0.123	0.210	0.202	0.260
0.128	0.210	0.207	0.270
0.130	0.210	0.210	0.250
0.133	0.210	0.213	0.260
0.141	0.220	0.215	0.270
0.144	0.220	0.217	0.260
0.149	0.230	0.219	0.260
0.151	0.220	0.220	0.280
0.155	0.220	—	—

表 8 分段斜坡系统 ($\alpha = 1.05rad, \beta = 0.35rad, L_2 = 0.05 \text{ m}$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

$H \text{ (m)}$	$t \text{ (s)}$	$H \text{ (m)}$	$t \text{ (s)}$
0.021	0.180	0.098	0.180
0.023	0.170	0.104	0.200
0.026	0.160	0.109	0.190
0.028	0.160	0.114	0.200
0.033	0.150	0.118	0.190
0.037	0.160	0.124	0.200
0.041	0.140	0.128	0.210
0.046	0.160	0.132	0.210
0.051	0.160	0.135	0.220
0.055	0.150	0.138	0.210
0.060	0.160	0.140	0.220
0.065	0.170	0.141	0.220
0.071	0.160	0.142	0.210
0.076	0.170	0.143	0.220
0.082	0.160	0.144	0.230
0.087	0.170	0.144	0.220
0.093	0.190	0.145	0.220

表 9 离散轨道 ($\alpha = 1.05\text{rad}$, $\beta = 0.35\text{rad}$, $L_2 = 0.08\text{ m}$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.031	0.200	0.109	0.200
0.034	0.190	0.115	0.220
0.037	0.180	0.120	0.210
0.041	0.180	0.125	0.220
0.045	0.170	0.130	0.230
0.048	0.170	0.134	0.220
0.054	0.180	0.137	0.230
0.058	0.170	0.142	0.230
0.063	0.170	0.145	0.240
0.067	0.180	0.148	0.240
0.073	0.180	0.150	0.230
0.078	0.190	0.151	0.240
0.083	0.180	0.152	0.240
0.089	0.200	0.153	0.250
0.094	0.190	0.154	0.240
0.098	0.210	0.154	0.250
0.104	0.210	0.155	0.250
—	—	0.155	0.250

表 10 离散轨道 ($\alpha = 1.05\text{rad}$, $\beta = 0.35\text{rad}$, $L_2 = 0.12\text{ m}$) 初始释放高度 H 与总下滑时间 t 实验测量数据

H (m)	t (s)	H (m)	t (s)
0.046	0.240	0.129	0.230
0.049	0.230	0.134	0.240
0.053	0.230	0.138	0.260
0.057	0.220	0.145	0.250
0.062	0.230	0.148	0.240
0.066	0.220	0.152	0.250
0.072	0.210	0.155	0.260
0.078	0.220	0.157	0.250
0.082	0.210	0.160	0.260
0.087	0.220	0.162	0.260
0.091	0.220	0.164	0.270
0.097	0.230	0.165	0.250
0.102	0.220	0.167	0.270
0.109	0.230	0.168	0.260
0.113	0.220	0.169	0.270
0.118	0.230	0.169	0.270
0.124	0.240	0.170	0.260
—	—	0.170	0.270

表 11 不同倾角 α 下的姆潘巴区间宽度 Δh 实验测量值

α ($^\circ$)	α (rad)	Δh_{exp} (m)
40	0.6981	0.0268
50	0.8727	0.0522
60	1.0472	0.0677
70	1.2217	0.0727
80	1.3963	0.0804

表 12 不同下段倾角 β 下的姆潘巴区间宽度 Δh 实验测量值

$\beta (^{\circ})$	$\beta (\text{rad})$	$\Delta h_{\text{exp}} (\text{m})$
10	0.1745	0.0741
20	0.3491	0.0677
30	0.5236	0.0356
40	0.6981	0.0332

表 13 不同下段轨道长度 L_2 与姆潘巴区间宽度 Δh 实验测量值

$L_2 (\text{cm})$	$L_2 (\text{m})$	$\Delta h_{\text{exp}} (\text{m})$
5.0	0.05	0.00229
8.0	0.08	0.01660
10.0	0.10	0.02650
12.0	0.12	0.04200
15.0	0.15	0.06770

连续轨道实验数据如下：

表 14 水的线性阻尼验证和阻尼系数拟合数据

$v (\text{m/s})$	$a (\text{m/s}^2)$
0.277 791 2	3.354 842
0.395 587 7	2.904 15
0.473 217 9	1.869 784
0.517 084 4	1.005 322
0.541 145 4	0.359 910 5
0.540 719 8	0.054 809 25
0.541 456 9	0.055 486 88
0.547 202 2	0.074 576 57
0.545 424 1	0.121 752 4
0.553 783 3	0.076 350 2
0.554 563 2	0.034 216 56

表 15 无阻尼 $n = 1.5$ 时的 $t - u_0$ 实验数据

u_0	t
0.772	0.350
0.718	0.350
0.279	0.266
0.306	0.267
0.364	0.300
0.501	0.316
0.172	0.233

表 16 无阻尼 $n = 2$ 时的 $t - u_0$ 实验数据

u_0	t
0.924	0.4
0.401	0.4
0.620	0.417
0.493	0.417
0.450	0.417
0.530	0.399
0.692	0.399

表 17 无阻尼 $n = 3$ 时的 $t - u_0$ 实验数据

u_0	t
0.493	0.533
0.912	0.448
0.630	0.500
0.852	0.483
0.715	0.483
0.669	0.517
0.472	0.533
0.300	0.666
0.401	0.550
0.900	0.466

表 18 $n = 3, C = 200, \mu = 0$ 时的 $t - u_0$ 实验数据

u_0	t
0.878	0.200
0.557	0.283
0.958	0.167
0.602	0.267
0.707	0.217

表 19 $n = 3, C = 200, \mu = 15.2$ 时的 $t - u_0$ 实验数据

u_0	t
0.572	0.484
0.652	0.449
0.363	0.350
0.476	0.450
0.941	0.367
0.712	0.400

表 20 $n = 3, C = 200, \mu = 64.4$ 时的 $t - u_0$ 实验数据

u_0	t
0.375	2.600
0.395	2.633
0.592	3.933
0.705	4.300
0.276	1.667
0.832	4.433
0.870	4.434