

参赛学生姓名：祝乙可

中学：重庆市育才中学校

省份：重庆市

国家 / 地区：中国

指导老师姓名：张程鑫、王田丽

指导老师单位：重庆市育才中学校

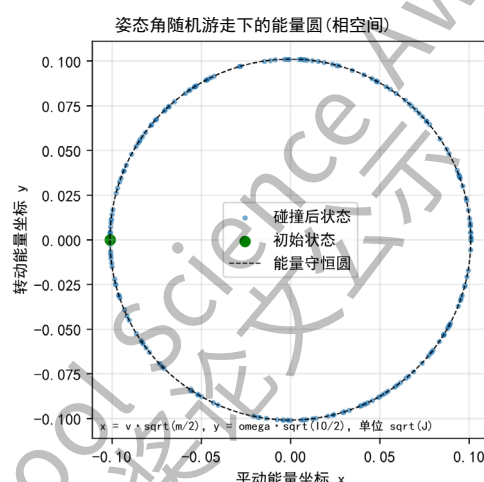
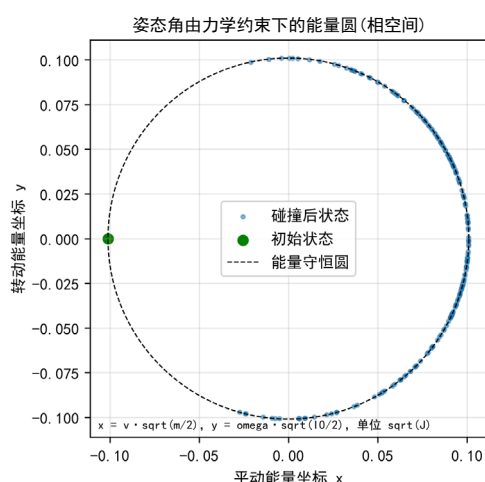
论文题目：胶囊弹跳中的平动和转动能量分配：

对能均分的趋近与系统偏离

胶囊弹跳中的平动和转动能量分配：

对能均分的趋近与系统偏离

祝乙可



摘要

能均分是热力学与统计物理的基础原理，其本质是哈密顿量中的平方项每个自由度有 $\frac{1}{2}kT$ 的能量。多数研究聚焦大量微观粒子的统计学规律，难以直观的展示不同自由度尤其是平动和转动自由度的相互转化和能均分特征。这给中学生和本科生对于基础物理机制的理解带来挑战，也限制了能均分原理在教学和应用中的推广。为解决这一问题，本研究以两端实心半球、中间实心圆柱构成的胶囊形刚体为研究对象，将抽象的能均分现象转化为可观测的宏观力学行为，旨在直观揭示能均分的普适特征与物理根源。本研究中，二自由度分别为竖直平面内的转动自由度和竖直方向上的平动自由度，当出现下一次弹跳高度超过上一次时，就可以得知在二自由度之间发生了转动能量向平动能量的转化。

理论上，我们建立胶囊刚体的理想和有恢复系数两种碰撞动力学模型，引入长径比无量纲参数，推导能量坐标下碰撞反射关系。通过数值模拟，研究表明能均分需要满足碰撞次数充分多、碰撞姿态角独立分布两个条件；首次发现物理仿真中受动力学关联与弹跳约束影响，系统长期平均能量会偏离能均分，偏离程度由几何体参数决定，细长构型更趋近能均分。揭示物理仿真偏离能均分的内在机制，该偏差是反射轴几何约束、角速度-姿态角动力学耦合、质心向上弹跳约束共同作用的稳态动力学结果，不依赖释放的初始条件。为检验理论预测，我们设计并搭建了胶囊刚体旋转释放系统，追踪连续碰撞下反弹速度、角速度和高度演化，每次碰后用平动动能占总动能的百分比进行多次平均，验证单次碰撞一般无法实现能均分，多次随机碰撞平动动能才会渐近趋于 59.7% 的占比，与理论预测力学约束下会系统性偏离严格的能均分一致。本文设计的刚体旋转释放平台还可用于研究非球形刚体弹跳碰撞动力学、多体碰撞等更丰富的能均分现象，这一宏观力学类比为研究能均分提供了新的思路。

关键词：能均分；胶囊刚体；非对称弹跳；碰撞动力学；恢复系数

胶囊弹跳中的平动和转动能量分配：对能均分的趋近与系统偏离.....	2
摘要.....	2
目录.....	2
1 引言.....	4
2 胶囊动力学分析.....	5
2.1 胶囊碰撞模型建立.....	5
3 能均分现象.....	7
3.1 特殊初始条件：二自由度下的转动动能与平动动能相等.....	7
3.2 一般初始条件：碰撞映射与能量反射.....	10
3.3 多次碰撞与长期均分.....	11
3.4 数值模拟验证.....	12
4 实验系统设计与验证.....	21
4.1 实验装置.....	21
4.2 验证胶囊的最佳长径比.....	22
4.3 单次碰撞测量与规律.....	23
4.4 多个胶囊单次碰撞系统综平均验证.....	24
5 结论与展望.....	25
参考文献.....	26
致谢.....	27
附录 A 转动惯量计算.....	28
附录 B 含恢复系数的碰撞转移矩阵.....	29
B.1 含恢复系数转移矩阵的推导.....	29
B.2 能量坐标下的形式与特征值.....	29
B.3 恢复系数对方案 A、B 的影响.....	30
附录 C 接触角反演与恢复系数标定.....	30
C.1 固定恢复系数下的接触角反演.....	30
C.2 全局最优恢复系数.....	31
C.3 冲量式恢复系数处理的局限：赫兹接触模型.....	32
C.4 赫兹模型对本附录标定结果的修正意义.....	33

1 引言

球形刚体在水平面上反复弹跳时，若忽略空气阻力，由于碰撞过程中机械能的耗散，其弹跳高度随碰撞次数增加而单调递减。然而，胶囊形刚体的弹跳行为却呈现出截然不同的特征——在特定初始条件下，其反弹高度不仅不会下降，反而可能超过释放高度^[3,4,5,6]。这一源于第 34 届国际青年物理学家锦标赛（IYPT）的命题^[6]，打破了“反弹高度必低于释放高度”的直观认知，揭示了非球形状刚体在与地面碰撞过程中平动动能与转动动能之间的耦合转化机制。

针对该现象，近年来研究者已从实验观测、理论推导和数值模拟等多个层面展开了系统探索。Yao 等^[5]通过构建胶囊形刚体的碰撞动力学方程，系统分析了着陆速度、姿态角与角速度对反弹高度的影响，推导出反弹高度等于释放高度的临界条件，并给出了三维相图，指出在足够大的初始角速度下，胶囊总能找到合适的姿态角实现“超反弹”。Pang 等^[4]引入了串行恢复系数（包含质心速度恢复系数、接触点速度恢复系数及角速度恢复系数）与自旋参数，结合 ANSYS 仿真与 Tracker 实验追踪，发现碰撞后自旋方向的变化可由自旋参数的取值判定，并指出只有当三类恢复系数同时满足特定阈值时，才能稳定观测到反弹超高的现象。韩己宁等^[3]将胶囊简化为棒状模型，基于能量守恒与角动量定理推导了多次碰撞的递推公式，并通过 Mathematica 编程计算表明，初始角速度越大、碰撞前姿态角越小，冲量矩的力臂越大，转动能向平动能的转化越充分。Li 等^[7]则从力学建模的精度出发，系统比较了基于冲量定理的解析模型与基于赫兹接触理论的数值模型，发现冲量模型因假定碰撞全程单向滑动而难以处理摩擦的滑移-黏滞转变，导致角速度预测偏差较大；而赫兹模型因精细刻画了碰撞过程中法向力与切向摩擦的瞬态演化，与高速摄影实验数据吻合更好。

尽管上述研究已对胶囊弹跳的物理机制和临界条件有了较为深入的探讨，但其关注焦点多集中于单次碰撞或前两次碰撞的能量转化条件，侧重于回答“何种初始条件下反弹更高”这一问题，而对多次随机碰撞后能量在平动与转动两个自由度之间的长期统计分配规律尚缺乏系统研究。事实上，随着碰撞次数的增加，胶囊的姿态角与角速度不断演化，平动与转动之间的能量交换呈现复杂的非线性特征。

本研究旨在通过系统的实验研究对照数值模拟填补这一空白。我们设计并搭建了胶囊刚体旋转释放系统，利用 1920 帧的手机高速摄像，追踪连续碰撞下反弹速度、角速度和高度演化规律，我们验证了单次碰撞一般无法实现能均分，并首次发现在力学约束下，多次碰撞的平动动能占比会系统性偏离严格的能均分。经过数值模拟，发现平动和转动二自由度能均分需要满足碰撞次数充分多、碰撞姿态角独立分布两个条件。

本文结构如下：第 2 节建立胶囊碰撞动力学模型，包括几何关系、转动惯量与弹性碰撞守恒律；第 3 节研究能均分现象，先给出特殊初始条件下的平均平动动能公式，再证明一般初始条件下每次碰撞在能量坐标下等价于一次反射，进而论证姿态角独立同分布时多次碰撞的长期均分，最后用四种数值方案（时间平均与系综平均、单次与多次碰撞、姿态角独立与相关）检验该前提的适用性；第 4 节详细介绍实验系统设计与主要验证结果。最后，第 5 节总结全文并展望未来研究。

2 胶囊动力学分析

2.1 胶囊碰撞模型建立

2.1.1 几何建模与碰撞守恒律

将胶囊简化为由一个圆柱与两个相同半球组成的均匀几何体，其纵截面为矩形（长 L 、宽 $2R$ ）与两个半圆。设胶囊质心为 O ，长边与水平方向的夹角为 θ ，质心与接触点 P 的距离为 x ， OP 与水平方向的夹角为 α 。忽略空气阻力与界面摩擦，平动只有竖直速度，转动只在竖直平面内。

速度以竖直向上为正，角速度以逆时针为正。姿态角 θ 取带符号值，其大小 $|\theta| \in [0, \pi/2]$ 为长边与水平方向的夹角，其符号标定接触侧。为便于表述，定义取值函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad (2-1)$$

即按自变量 x 的正、零、负分别取 1、0、-1。于是 $f(\theta) = +1$ 表示 $\theta > 0$ （左端较低、接触点位于 $-x$ 侧）， $f(\theta) = -1$ 表示 $\theta < 0$ （接触点位于 $+x$ 侧）， $f(\theta) = 0$ 对应 $\theta = 0$ 的水平姿态。接触点相对质心的水平力臂记为 a （带符号），其幅值 $|a| = x \cos \alpha$ ，符号由接触侧决定： $a = s \frac{L}{2} \cos \theta$ ， $s = -f(\theta)$ 。

有效力臂定义为带符号量 $a(\theta) \equiv s x(\theta) \cos \alpha(\theta)$ ， $s = -f(\theta)$ 。由 2.1.1 的几何关系，令 $\phi = \arcsin(R \cos \theta / x)$ ，展开 $\cos \alpha = \cos(\phi + \theta)$ ，并利用 $x^2 - R^2 \cos^2 \theta = \left(\frac{L}{2} + R \sin \theta\right)^2$ ，得

$$x(\theta) \cos \alpha(\theta) = \frac{L}{2} \cos \theta \quad (2-2)$$

即有效力臂的幅值 $\frac{L}{2} \cos \theta$ 与 R 无关，仅由圆柱长度 L 决定，故

$$a(\theta) = s \frac{L}{2} \cos \theta = -f(\theta) \frac{L}{2} \cos \theta \quad (2-3)$$

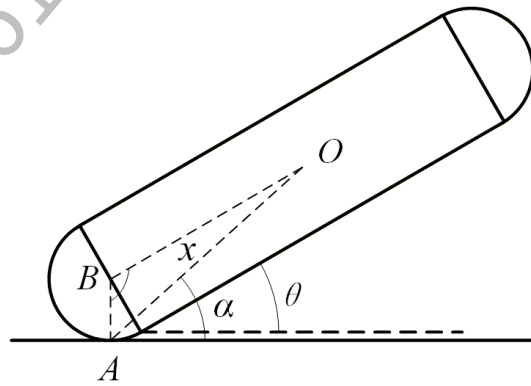


图 1 胶囊触地几何关系

由余弦定理得

$$x^2 = R^2 + \frac{L^2}{4} - 2RL\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = R^2 + \frac{L^2}{4} + 2RL\sin\theta \quad (2-4)$$

故

$$x = \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4} + 2RL\sin\theta} \quad (2-5)$$

几何关系给出

$$\alpha = \arcsin Rx \cos\theta + \theta \quad (2-6)$$

碰撞瞬间地面在接触点 P 施加竖直向上的法向冲量，水平方向无外力，故碰撞前后质心速度 v_0 、 v_1 均沿竖直方向。对弹性碰撞，由能量守恒与对 P 点的角动量守恒（ $L_P = L'_P$ ，标量形式 $I_0\omega_0 - mav_0 = I_0\omega_1 - mav_1$ ）：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_1^2 \\ I_0(\omega_1 - \omega_0) = ma(v_1 - v_0) \end{cases} \quad (2-7)$$

其中 a 为带符号的有效力臂。式 (1) 中能量方程为二次，一般存在两支解，分别为初态解和末态解。

2.1.2 转动惯量计算

圆柱长度 L ，半径 R ，两端半球半径 R ，总质量 m ，体密度 ρ 。转动轴为垂直于长轴（圆柱对称轴）、通过整体质心 O 的轴。

刚体绕固定轴旋转的转动惯量为

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \quad (2-8)$$

经过计算（见附录 A），胶囊的转动惯量为

$$I_0 = I_c + 2I_{h,\text{total}} = \frac{1}{12}m_c(3R^2 + L^2) + 2m_h\left[\frac{2}{5}R^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{3LR}{8}\right] \quad (2-9)$$

其中 $m_c = \frac{\pi R^2 L}{\pi R^2 L + \frac{4}{3}\pi R^3}m$ ， $m_h = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2 L + \frac{4}{3}\pi R^3}m$ 。上式可等价地写为

$$I_0 = \rho\pi\left(\frac{8}{15}R^5 + \frac{3}{4}LR^4 + \frac{1}{3}L^2R^3 + \frac{1}{12}L^3R^2\right) \quad (2-10)$$

3 能均分现象

3.1 特殊初始条件：二自由度下的转动动能与平动动能相等

记 m 为胶囊质量， I_0 为绕过质心 O 的转动惯量（见 2.1.2）， v_0, v_1 与 ω_0, ω_1 分别为碰撞前后的质心速度与角速度， θ 为姿态角（带符号，见 2.1.1）。假设模型为竖直平动和竖直平面转动的二自由度系统。

为了研究单次碰撞后平动动能与转动动能的相互转化，设碰撞前平动动能与转动动能相等， $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$ （ v_0 取正值）。引入无量纲常数

$$k \equiv \frac{L}{2} \sqrt{\frac{m}{I_0}} \quad (3-1)$$

由初始条件有 $|\omega_0| = \frac{2k}{L}v_0$ 。自旋方向与姿态角可同向或反向，用取值函数 f 定义

$$\chi \equiv f(\theta) \cdot f(\omega_0) = \pm 1 \quad (3-2)$$

$\chi = +1$ 表示同向， $\chi = -1$ 表示反向。结合 $|\omega_0| = \frac{2k}{L}v_0$ 与 χ 的定义，碰前状态满足

$$f(\theta) \cdot \frac{L}{2k} \omega_0 = \chi v_0 \quad (3-3)$$

由 (1) 第二式及 $a = s \frac{L}{2} \cos \theta$ （ $s = -f(\theta)$ ）：

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{ma}{I_0}(v_1 - v_0) = \omega_0 - f(\theta) \frac{2k^2 \cos \theta}{L}(v_1 - v_0) \quad (3-4)$$

利用 $I_0\omega_0^2 = mv_0^2$ ，并由上式及 $f(\theta) \frac{L}{2k} \omega_0 = \chi v_0$ 得 $f(\theta) \frac{L}{2k} \omega_1 = \chi v_0 - k \cos \theta (v_1 - v_0)$ ，能量方程化为

$$v_1^2 + [\chi v_0 - k \cos \theta (v_1 - v_0)]^2 = 2v_0^2 \quad (3-5)$$

展开并因式分解，得

$$(v_1 - v_0)[(1 + k^2 \cos^2 \theta)v_1 + (1 - 2\chi k \cos \theta - k^2 \cos^2 \theta)v_0] = 0 \quad (3-6)$$

因子 $(v_1 - v_0)$ 对应平凡解（碰撞前后状态不变），舍去后得

$$v_1(\theta) = -\frac{1 - 2\chi k \cos \theta - k^2 \cos^2 \theta}{1 + k^2 \cos^2 \theta} v_0 \quad (3-7)$$

记初始平动动能 $E_k^0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ ，它等于初始转动动能。由于碰前两自由度动能相等（ $E_k^0 = E_r^0$ ），碰后平动动能相对 E_k^0 的比值 E'_k/E_k^0 与转动动能相对值 E'_r/E_k^0 互补（二者之和恒为 2），能完整刻画碰撞后能量在两个自由度间的分配。本文将这一对互补量称为平动动能与转动动能之比，后文简称二自由度动能之比。由上式得平动动能之比为

$$\frac{E'_k(\theta)}{E_k^0} = \frac{(1 - 2\chi k \cos\theta - k^2 \cos^2\theta)^2}{(1 + k^2 \cos^2\theta)^2} \quad (3-8)$$

转动动能之比由能量守恒 $E_{\text{tot}} = 2E_k^0$ 直接给出：

$$\frac{E'_r(\theta)}{E_k^0} = 2 - \frac{E'_k(\theta)}{E_k^0} = \frac{(1 + 2\chi k \cos\theta - k^2 \cos^2\theta)^2}{(1 + k^2 \cos^2\theta)^2} \quad (3-9)$$

设姿态角的大小 $|\theta|$ 在 $[0, \pi/2]$ 内均匀分布，相对取向 χ 在一次平均中保持不变（自旋方向在弹跳过程中不变，接触侧由 θ 的符号标定），则平均二自由度动能之比为

$$\frac{\langle E'_k \rangle}{E_k^0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2\chi k \cos\theta - k^2 \cos^2\theta)^2}{(1 + k^2 \cos^2\theta)^2} d\theta \quad (3-10)$$

其中 $\cos\theta = \cos|\theta|$ ，被积函数只依赖 $|\theta|$ 。

将 k 的定义代入 2.1.2 的转动惯量结果

$$\frac{I_0}{m} = \frac{\frac{8}{15}R^3 + \frac{3}{4}LR^2 + \frac{1}{3}L^2R + \frac{1}{12}L^3}{L + \frac{4}{3}R} \quad (3-11)$$

代入 k 的定义，并引入长径比 $t \equiv L/R$ ，令 $L = tR$ ，得

$$k(t) = t \sqrt{\frac{5(3t+4)}{5t^3 + 20t^2 + 45t + 32}} \quad (3-12)$$

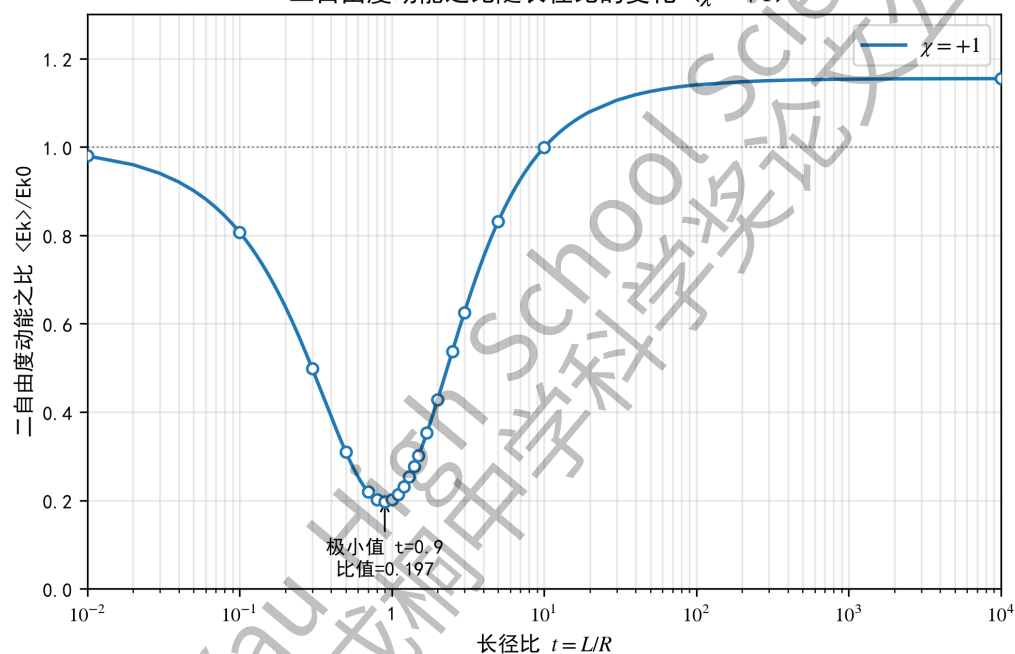
k 仅依赖 t ，与 m 、 R 无关。二自由度动能之比只含一个自由参数：

$$\frac{\langle E'_k \rangle}{E_k^0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2\chi k(t) \cos\theta - k(t)^2 \cos^2\theta)^2}{(1 + k(t)^2 \cos^2\theta)^2} d\theta \quad (3-13)$$

数值积分结果见表 1，对应 $\chi = +1$ （自旋与姿态角同向）。 $t \rightarrow 0$ 时 $k \rightarrow 0$ ，比值趋于 1，此时胶囊退化为球体，接触点法线通过质心，平动动能不发生变化。比值随 t 先减后增，在 $t \approx 0.9$ 处取极小值（约 0.197），表明碰撞后平动动能大部分转化为转动； t 较大时比值回升并超过 1（ $t \rightarrow \infty$ 时 $k \rightarrow \sqrt{3}$ ，比值约 1.15），此时转动动能向平动转化。 $\chi = -1$ 时平动与转动动能公式互换，相应比值表为 2 减去表 1 的对应值。需要说明的是，表 1 的比值以碰前平动动能 E_k^0 （此处 $E_k^0 = E_r^0 = E_{\text{tot}}/2$ ）为分母，取值范围可为 $[0, 2]$ ；若改以总能量 E_{tot} 为分母（平动动能占比，取值范围 $[0, 1]$ ），数值须减半，表 1 极小值 0.197 对应占比约 0.098。

表 1 二自由度动能之比数值积分

$t = L/R$	$\langle E'_k \rangle / E_k^0$	$t = L/R$	$\langle E'_k \rangle / E_k^0$
0	1.0000	1.3	0.2530
0.01	0.9799	1.4	0.2765
0.1	0.8074	1.5	0.3014
0.3	0.4990	1.7	0.3528
0.5	0.3095	2	0.4279
0.7	0.2194	2.5	0.5376
0.8	0.2015	3	0.6255
0.9	0.1968	5	0.8314
1	0.2018	10	0.9988
1.1	0.2142	10000	1.1548
1.2	0.2318		

二自由度动能之比随长径比的变化 ($\chi = +1$)图 2 二自由度动能之比随长径比的变化($\chi = +1$)

碰撞情形由自旋方向与姿态角的相对取向决定。按 2.1.1 的符号约定, $s = -f(\theta)$, 接触侧已由 θ 的符号标定, 故只需区分 χ 的符号, 共四种情形:

表 2 碰撞情形

情形	θ	ω_0	相对取向	s	χ	$E'_k(\theta)/E_k^0$
1	> 0	> 0	同向	-1	+1	$\frac{(1-2k\cos\theta-k^2\cos^2\theta)^2}{(1+k^2\cos^2\theta)^2}$
2	> 0	< 0	反向	-1	-1	$\frac{(1+2k\cos\theta-k^2\cos^2\theta)^2}{(1+k^2\cos^2\theta)^2}$
3	< 0	< 0	同向	+1	+1	同情形 1
4	< 0	> 0	反向	+1	-1	同情形 2

情形 1 与 3、情形 2 与 4 互为镜像 ($x \rightarrow -x$)，物理上等价，因此实际只有两类： $\chi = +1$ 时碰撞以平动动能向转动转化为主； $\chi = -1$ 时以转动动能向平动转化为主。

3.2 一般初始条件：碰撞映射与能量反射

多次碰撞中，碰撞前的平动动能与转动动能之间不存在显性关系，需要处理一般初始条件。设第 n 次碰撞前状态为 (v_n, ω_n) ，姿态角为 θ_n 。由冲量法联立质心动量定理、角冲量矩定理与接触点的弹性恢复条件（推导见附录 A.1，取 $e = 1$ 即得），碰撞后的状态为

$$\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \beta_n} \begin{pmatrix} \beta_n - 1 & -2a_n \\ -\frac{2\beta_n}{a_n} & 1 - \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ \omega_n \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

其中 $a_n = s \frac{L}{2} \cos \theta_n$ ， $s = -f(\theta_n)$ （见 2.1.1）， $\beta_n = k^2 \cos^2 \theta_n$ ， $k = \frac{L}{2} \sqrt{m/I_0}$ 。

将矩阵展开为分量形式：

$$v_{n+1} = \frac{(\beta_n - 1)v_n - 2a_n\omega_n}{1 + \beta_n}, \quad \omega_{n+1} = \frac{(1 - \beta_n)\omega_n - \frac{2\beta_n}{a_n}v_n}{1 + \beta_n} \quad (3-15)$$

速度方程的第一项 $(\beta_n - 1)v_n/(1 + \beta_n)$ 描述质心速度的镜像反弹：碰撞前质心向下运动 ($v_n < 0$)，而 $\beta_n < 1$ 使该项为正，将质心速度反转向后。第二项 $-2a_n\omega_n/(1 + \beta_n)$ 描述自旋与质心运动的耦合：自旋 ω_n 通过有效力臂 a_n 改变质心速度。当 a_n 与 ω_n 同号时该项为负，与第一项竞争；若自旋足够快，使 $|2a_n\omega_n|$ 超过 $|(\beta_n - 1)v_n|$ ，则 $v_{n+1} < 0$ ，质心速度在碰撞后仍向下。角速度方程的第一项 $(1 - \beta_n)\omega_n/(1 + \beta_n)$ 为自旋的保持项，第二项 $-\frac{2\beta_n}{a_n}v_n/(1 + \beta_n)$ 为平动向转动的转化项：向下运动的质心通过力臂产生角冲量，其符号由接触侧 (a_n 的符号) 决定，使自旋朝相应方向加速。

需要强调，碰撞后的质心速度并不总向上。弹性碰撞只保证接触点速度反转 ($v_{n+1} + a_n\omega_{n+1} = -(v_n + a_n\omega_n)$)，不保证质心速度 $v_{n+1} > 0$ 。当自旋与接触侧同号且足够快时， v_{n+1} 可为负，对应胶囊绕接触点翻转、质心碰后瞬间仍向下运动的翻转碰撞。数值统计中这种情形约占碰撞的 4%，其余约 96% 的碰撞质心速度向上。

为研究能量分配，定义能量坐标 $(x_n, y_n) = (v_n\sqrt{m/2}, \omega_n\sqrt{I_0/2})$ ，则平动动能与转动动能分别为 x_n^2 、 y_n^2 ，总能量 $E_{\text{tot}} = x_n^2 + y_n^2$ 。将 $v_n = x_n\sqrt{2/m}$ 、 $\omega_n = y_n\sqrt{2/I_0}$ 代入上式，并利用 $a_n\sqrt{m/I_0} = s k \cos \theta_n = -f(\theta_n)\sqrt{\beta_n}$ ，得

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \beta_n} \begin{pmatrix} \beta_n - 1 & 2f(\theta_n)\sqrt{\beta_n} \\ 2f(\theta_n)\sqrt{\beta_n} & 1 - \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

该矩阵为正交矩阵，其行列式为

$$\det = \frac{(\beta_n - 1)(1 - \beta_n) - 4\beta_n}{(1 + \beta_n)^2} = -1 \quad (3-17)$$

行列式为 -1 的正交矩阵是反射矩阵而非旋转矩阵： $\theta_n = \pm\pi/2$ 时退化为 $x \rightarrow -x$ 、 y 不变，对应竖直反弹。反射轴与 x 轴的夹角 ψ_n 满足

$$\tan\psi_n = \frac{f(\theta_n)}{\sqrt{\beta_n}} = \frac{f(\theta_n)}{k\cos\theta_n} \quad (3-18)$$

若记 $\phi_n = 2\arctan(k\cos\theta_n)$ ，则 $\tan\frac{\phi_n}{2} = \sqrt{\beta_n}$ ，反射轴可写为

$$\psi_n \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{f(\theta_n)\phi_n}{2} \pmod{\pi} \quad (3-19)$$

接触侧 (θ_n 的符号) 只改变反射轴的方向，即把反射轴换为其镜像，反射性质本身不变。因此，每次碰撞在能量坐标下等价于一次反射。反射与旋转同为保能量的正交变换，二者在能量统计层面等价 (见 3.3)。

3.3 多次碰撞与长期均分

3.3 的结论建立在碰撞姿态角序列的统计性质上。若各次碰撞的反射轴 $\psi_n \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{f(\theta_n)\phi_n}{2} \pmod{\pi}$ (等价旋转角 $\phi_n = 2\arctan(k\cos\theta_n)$) 满足独立同分布，则经过 N 次碰撞后，能量向量的方向由 N 次随机反射决定。两个反射的复合是一个旋转，旋转角为两反射轴夹角的两倍，因此随机反射序列等价于随机旋转游走。只要 ϕ_n 的分布不是格点分布，当 $N \rightarrow \infty$ 时累积角 $\Phi_N = \sum_{n=1}^N \phi_n$ 满足 $\Phi_N \pmod{2\pi}$ 在 $[0, 2\pi)$ 上趋于均匀分布。

于是无穷次碰撞后的状态可写为

$$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix} = \sqrt{E_{tot}} \begin{pmatrix} \cos(\phi_0 + \Phi) \\ \sin(\phi_0 + \Phi) \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

其中 ϕ_0 为初始状态在能量圆上的极角， $\Phi \sim U[0, 2\pi)$ 。平动动能与转动动能的长期平均分别为

$$\langle x_\infty^2 \rangle = \langle E_k^{(\infty)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{tot} \cos^2(\phi_0 + \Phi) d\Phi = \frac{E_{tot}}{2} \quad (3-21)$$

$$\langle y_\infty^2 \rangle = \langle E_r^{(\infty)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{tot} \sin^2(\phi_0 + \Phi) d\Phi = \frac{E_{tot}}{2} \quad (3-22)$$

两式分别利用倍角公式 $\cos^2(\phi_0 + \Phi) = \frac{1+\cos(2\phi_0+2\Phi)}{2}$ 与 $\sin^2(\phi_0 + \Phi) = \frac{1-\cos(2\phi_0+2\Phi)}{2}$ ，其中 $\cos(2\phi_0 + 2\Phi)$ 在一个完整周期上的积分为零。初始相位 ϕ_0 在积分中消失，即无论胶囊以纯平动、纯转动还是任意混合状态释放，只要反射轴序列独立同分布，无穷次碰撞后平动动能与转动动能均严格均分。

需要强调的是，3.3 的均分结论是条件命题：前提是反射轴 ψ_n (等价地，姿态角 θ_n) 独立同分布。姿态角独立同分布这一假设是否成立，取决于碰撞序列的产生方式，将在 3.4 中通过四种数值方案检验：方案 B 按假设直接随机抽取姿态角作多次碰撞的时间平均，方案 D 考察单次碰撞的平均转化率，方案 A、C 由动力学演化自然产生姿态角序列 (分别作时间平均与系综平均)。各方案的对比揭示了该假设在物理过程中的适用边界。

3.4 数值模拟验证

为检验 3.3 的均分结论及其前提（姿态角独立同分布）在物理过程中的适用性，进行四种数值模拟。参数取第 11 号胶囊（No.11，见 4.2）： $m = 0.52 \text{ g}$ ， $L = 5.0 \text{ mm}$ ， $R = 4.95 \text{ mm}$ ，相应 $t = L/R \approx 1.01$ 、 $k \approx 0.59$ 。胶囊自高度 $H = 2 \text{ m}$ 处静止释放（初始姿态角 $\theta_0 = 0.3 \text{ rad}$ ，无自旋），碰撞按弹性处理，总能量为 $E_{\text{tot}} = mgH = 0.0102 \text{ J}$ 。

方案 A：物理模拟（时间平均，姿态角由动力学演化）。 单个胶囊长时间碰撞多次，第 $n+1$ 次的质心速度 V_c 和姿态角 θ 由第 n 次碰撞结果动力学演化得来。对胶囊的完整运动作连续时间步进：自由飞行阶段受重力作用，姿态角随转动演化（ $\dot{\theta} = \omega$ ）；当最低点触地（ $y \leq h_c(\theta) = (L/2)|\sin\theta| + R$ ）且接触点向下运动时，碰撞瞬间采用 3.2 的物理映射求解碰后状态。碰撞时刻的姿态角由飞行旋转与触地条件共同决定，与当前速度、角速度相关，而非独立随机量。统计方式为沿单一胶囊连续多次碰撞序列作平均。

方案 B：随机矩阵法（时间平均，姿态角独立随机）。 每一次碰撞后结果保留 v_{n+1} 、 ω_{n+1} ，但姿态角 θ_{n+1} 从 $[-\pi/2, \pi/2]$ 均匀随机抽取，施加同一转移矩阵（3.2 式），状态在能量圆上作随机反射。该方案严格满足 3.3 的前提：反射轴序列独立同分布。统计方式与方案 A 相同，为时间平均。

方案 A、B 均记录每次碰撞后的平动动能与转动动能。碰撞后能量圆（相空间）、碰后质心最高高度与平动动能累积均值分别如下。

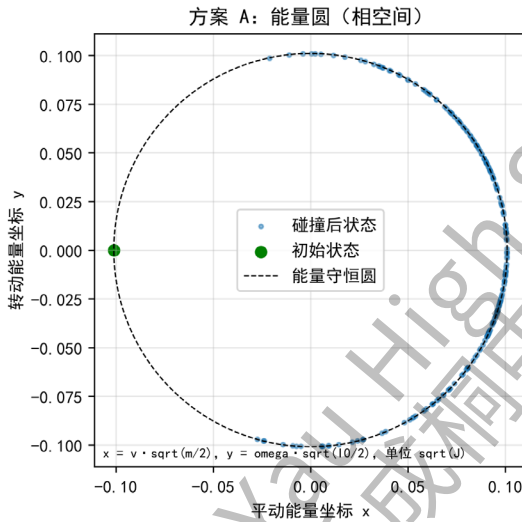


图 3 方案 A 能量圆

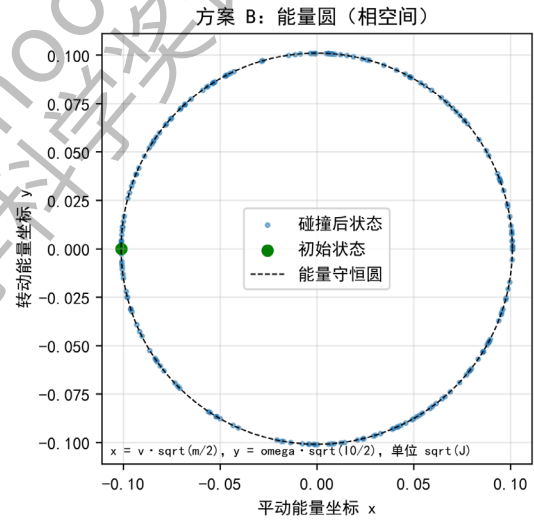


图 4 方案 B 能量圆

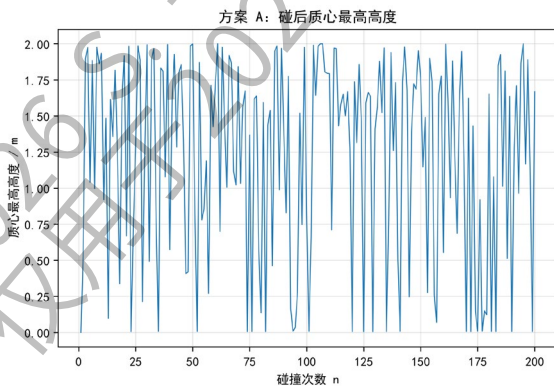


图 5 方案 A 碰后质心高度

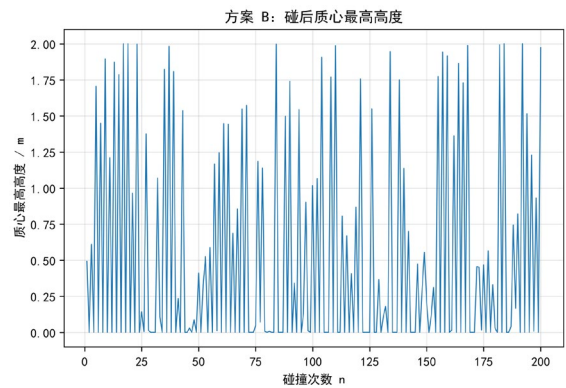


图 6 方案 B 碰后质心高度

碰撞时能量在平动与转动之间重新分配，使反弹高度不断变化。方案 A 中出现少量紧贴地面的连续小高度碰撞（占比约 4%），原因是胶囊转动速度较大，质心上升速度小于胶囊边缘下降速度，刚反弹便再次发生碰撞；方案 B 的高度由每次碰撞后的速度按抛体运动给出，为理想化情形。

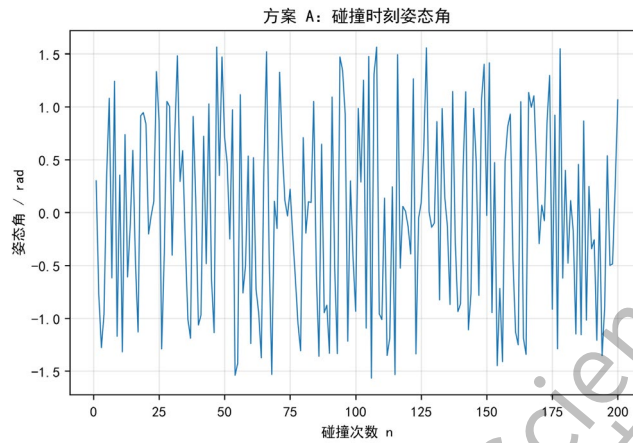


图 7 方案 A 碰撞时刻姿态角

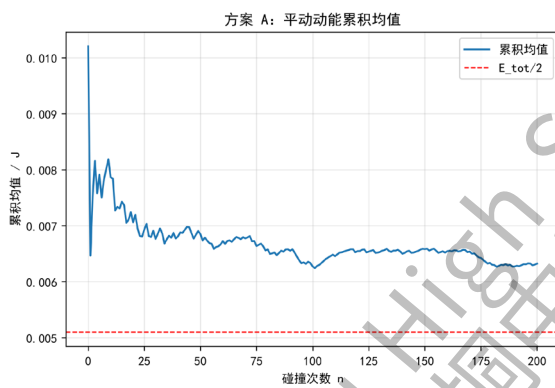


图 8 方案 A 平均平动动能累积均值

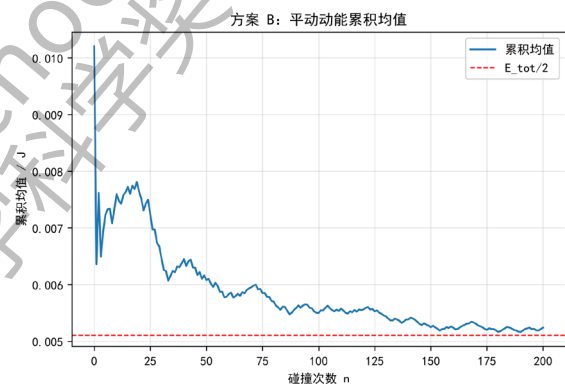


图 9 方案 B 平均平动动能累积均值

平动动能累积均值（含初始状态）见表 3，其中偏离量为相对 $E_{\text{tot}}/2 = 0.0051 \text{ J}$ 的偏差：

表 3 方案 A/B 平动动能累积均值

n	方案 A 累积均值	A 偏离	方案 B 累积均值	B 偏离
0	0.0102	0.0051	0.0102	0.0051
20	0.0071	0.0020	0.0076	0.0025
50	0.0069	0.0017	0.0061	0.0010
100	0.0063	0.0012	0.0055	0.0004
150	0.0066	0.0015	0.0052	0.0001
200	0.0063	0.0012	0.0052	0.0001

两种方案的行为存在明显差异。方案 B 的累积均值由初始值 0.0102 J 收敛至 $E_{\text{tot}}/2 = 0.0051 \text{ J}$ 附近，末次偏差 $1 \times 10^{-4} \text{ J}$ （约 2%），验证了 3.3 的结论：姿态角独立同分布时，能量在平动与转动间严格均分。方案 A 的累积均值同样由 0.0102 J 下降，但稳定在约 0.0062 J ，偏离均分值约 $1.2 \times 10^{-3} \text{ J}$ （约 24%），不再继续向 $E_{\text{tot}}/2$ 收敛。

方案 A 的偏离源于姿态角序列的统计性质。物理模拟中，碰撞时刻的姿态角由飞行旋转（ $\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n t_{\text{flight}}$ ）与触地条件（ $v + a\omega \leq 0$ ）决定，与状态 (v_n, ω_n) 相关，故 θ_n 并非独立同分布：相对取向 $\chi_n = f(\theta_n)f(\omega_n)$ 在碰撞前取 $+1$ 的比例约为 67%（独立情形应为 50%）。姿态角与状态的相关性使能量圆上的状态点分布不均匀（相空间集中于 $\pm 45^\circ$ 附近），平动动能长期均值因此偏离 $E_{\text{tot}}/2$ 。3.3 的均分结论是条件命题，其前提（姿态角独立同分布）在物理模拟中不能严格满足，均分只在近似意义下成立。

χ 取向的偏向性由角速度 ω 的大小决定。触地条件 $v_p = v + a\omega \leq 0$ 中，有效力臂 $a = -f(\theta)\frac{L}{2}\cos\theta$ ，故接触点因自旋产生的线速度为 $a\omega$ ，其符号为 $-f(\theta)f(\omega)\cdot\frac{L}{2}\cos\theta|\omega|$ 。当 $\chi = +1$ （ $f(\theta) = f(\omega)$ ）时 $a\omega < 0$ ，使 v_p 更负、更易满足触地条件；当 $\chi = -1$ 时 $a\omega > 0$ ， v_p 被抬高、更难触地。因此 χ 的偏向性随端点线速度 $|a\omega|$ 相对质心速度 $|v|$ 的比值单调增强：数值统计表明， $|a\omega|/|v| < 0.3$ 时 $\chi = +1$ 占比仅 55%， $0.7 \sim 1.5$ 时升至 93%， $|a\omega|/|v| > 1.5$ 时达到 100%——此时端点线速度超过质心速度， $\chi = -1$ 的状态接触点向上运动、完全无法触地。第 11 号胶囊碰撞序列中 $|a\omega|/|v|$ 典型值约 $1 \sim 8$ ，角速度普遍较大（数百至上千 rad/s），故 χ 偏置明显。

方案 A 的偏离幅度取决于胶囊几何参数 k （仅由长径比 $t = L/R$ 决定）。对 $R = 4.95 \text{ mm}$ 、不同 t 进行相同释放条件的模拟，结果如下：

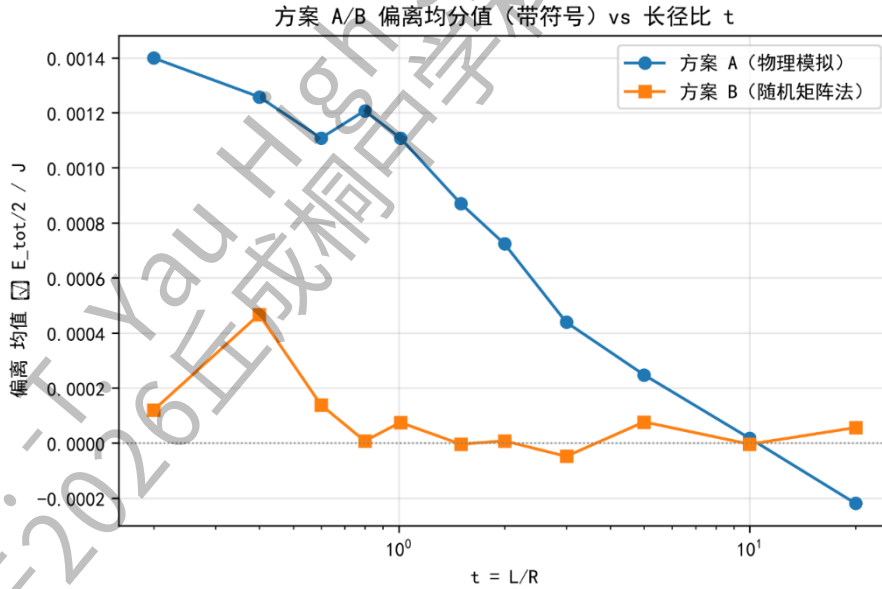


图 10 方案 A/B 偏离均分值随长径比变化

以偏离百分比 $\eta = \frac{\langle E_k \rangle - E_{\text{tot}}/2}{E_{\text{tot}}/2}$ 表示同一偏离（ $\langle E_k \rangle$ 为 2000 次碰撞的平均平动动能），其随 t 的变化见图： η 总体上随 t 增大而下降，在 $t \approx 10$ 附近趋近零， $t = 20$ 时转为负值（约 -4.3%），表明平动动能均值越过均分值、偏离方向反转；方案 B 的 η 在各 t 下均接近零。

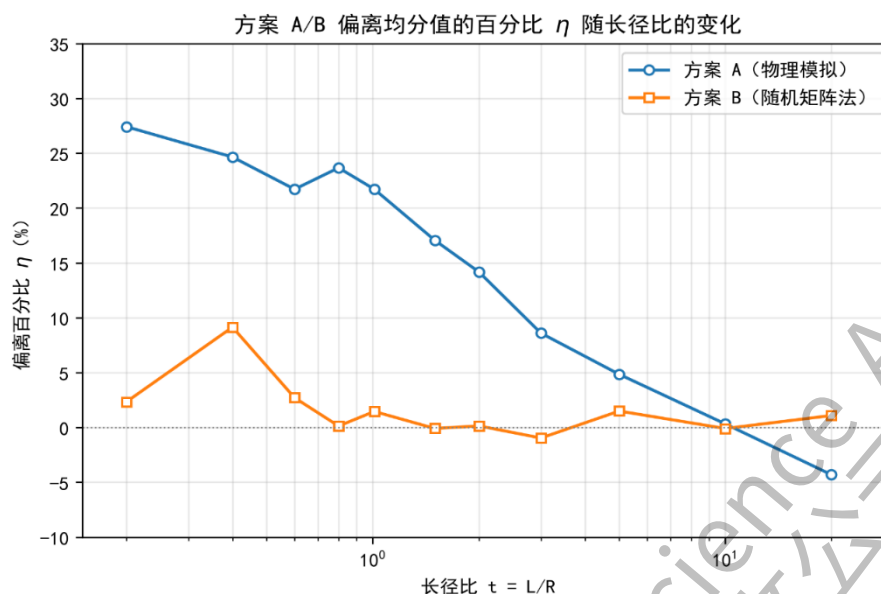


图 11 方案 A/B 偏离均分值百分比随长径比变化

表 4 方案 A/B 偏离均分值随长径比变化

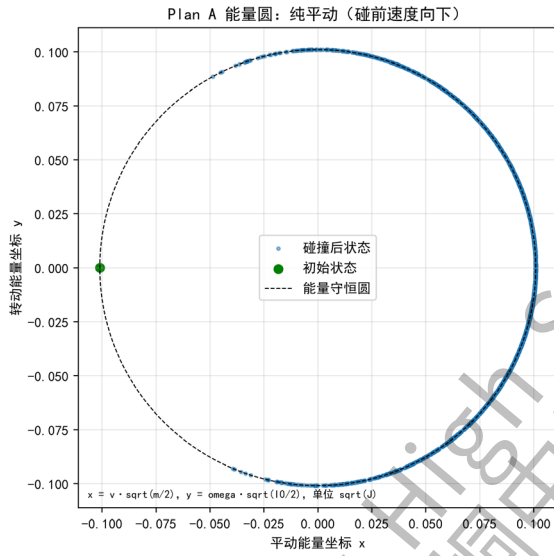
$t = L/R$	k	方案 A 偏离/ 10^{-3} J	方案 A 偏离百分比	方案 B 偏离/ 10^{-3} J
0.2	0.148	1.40	27.4%	1.06
0.4	0.279	1.26	24.7%	0.33
0.6	0.394	1.11	21.7%	0.01
0.8	0.496	1.21	23.7%	0.02
1.01	0.590	1.11	21.7%	0.02
1.5	0.770	0.87	17.1%	0.12
2.0	0.909	0.72	14.2%	0.00
3.0	1.102	0.44	8.6%	0.01
5.0	1.311	0.25	4.8%	0.00
10	1.507	0.02	0.3%	0.01
20	1.617	0.22	4.3%	0.01

方案 B 的偏离在所有 t 下均不超过 10^{-3} J ，与 t 无关；方案 A 的偏离随 t 增大而减小，在 $t = 10$ ($k \approx 1.5$) 附近趋于零。反射轴 ψ_n 的分布范围 $\pm[\arctan(1/k), \pi/2]$ 随 k 增大而展宽，姿态角与状态的相关性被更充分地抹平，能量圆上的状态点分布趋于均匀。第 11 号胶囊 ($t \approx 1.01$) 处于偏离较大的区域 (约 22%)，几何上偏“短粗”；细长胶囊 ($t \geq 5$) 的物理模拟与随机矩阵法结果一致。

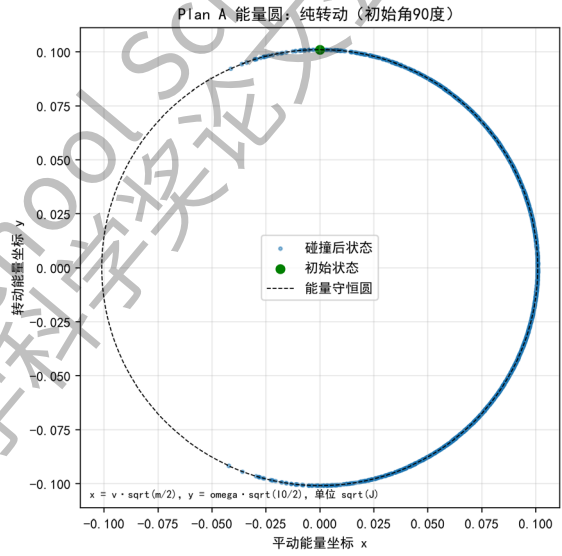
值得注意的是， χ 的偏向性随 t 的变化方向与偏离程度相反。随 t 增大，端点线速度与质心速度之比 $|a\omega|/|v|$ 增大， $\chi = +1$ 占比由 $t = 0.2$ 时的 54% 单调升至 $t = 10$ 时的 83%，但方案 A 的偏离却由 27% 降至 0.3%。这表明 χ 偏置并非偏离均分的主因：它随 ω 增大而增强，但偏离均分由反射轴覆盖范围（几何参数 k ）主导。 t 增大时反射轴展宽带来的遍历性改善，完全盖过了 χ 偏置增强的影响。

偏离均分与释放高度无关。碰撞映射（3.2 式）中 v 与 ω 均与碰前速度成正比，故端点线速度与质心速度之比 $|a\omega|/|v|$ 只由 k 与 θ 决定，与释放高度 H 无关。数值验证： H 由 0.3 m 增至 4 m，方案 A 的偏离恒为 21% ~ 23%， $\chi = +1$ 占比恒为 0.66 ~ 0.68。降低释放高度并不能削弱偏离，只有改变胶囊长径比 t （即改变 k ）才能调节偏离程度。

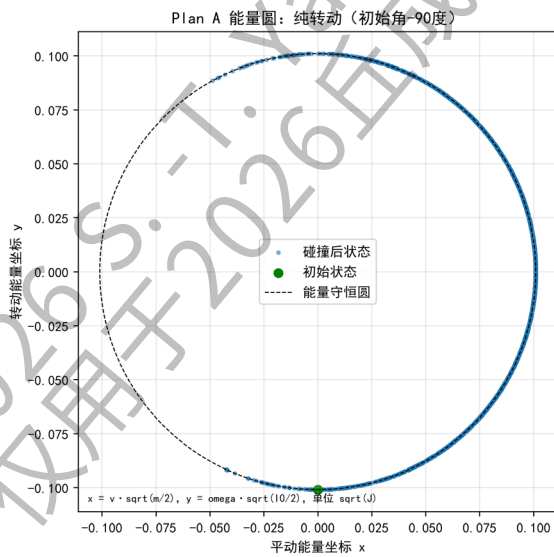
为确认状态点分布集中于 $\pm 45^\circ$ 附近是物理模拟的稳态特征还是初始状态的影响，保持总能量 $E_{\text{tot}} = mgH$ 不变，从不同初始能量状态启动方案 A：纯平动（初始 $\Phi = 180^\circ$ ，碰前速度向下）、纯转动（ $\Phi = \pm 90^\circ$ ）与两种混合状态（ $\Phi = 45^\circ$ 、 225° ）。各情况碰撞 2000 次后的能量圆如下：



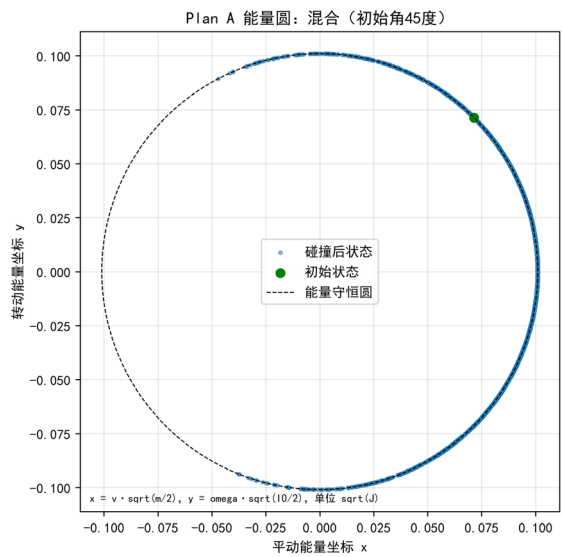
12-a 纯平动($\Phi = 180^\circ$)



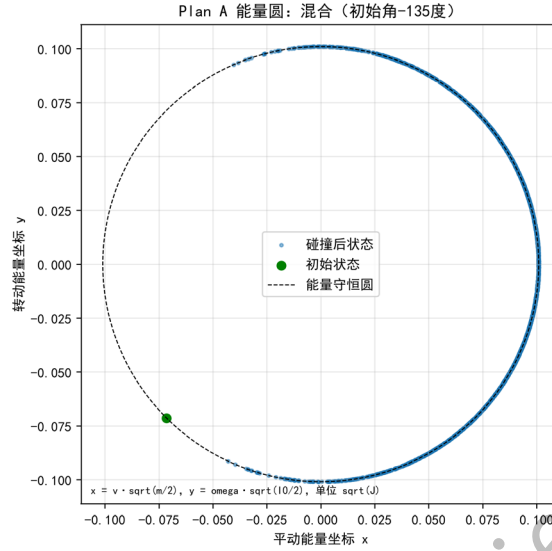
12-b 纯转动($\Phi = 90^\circ$)



12-c 纯转动($\Phi = -90^\circ$)



12-d 平动转动混合($\Phi = 45^\circ$)



12-e 平动转动混合($\Phi = 225^\circ$)

图 12 方案 A 不同初始条件能量圆

各情况的初始 Φ_0 与 2000 次碰撞后的状态角圆均值 $\bar{\Phi}$ 如下：

表 5 各初始状态 2000 次碰撞后的状态角均值

初始状态	Φ_0	$\bar{\Phi}$ (2000 次后)
纯平动 (碰前速度向下)	180°	1°
纯转动 ($\omega > 0$)	90°	356°
纯转动 ($\omega < 0$)	270°	359°
混合 ($\Phi = 45^\circ$)	45°	1°
混合 ($\Phi = 225^\circ$)	225°	358°

五种初始状态在 2000 次碰撞后，状态角分布均收敛至 0° 附近($\bar{\Phi} \in [356^\circ, 359^\circ]$)，能量圆上的点都集中于 $v > 0$ 且 $|\omega|$ 相对较小的弧段。状态点分布不随初始状态改变，是物理模拟动力学决定的稳态吸引子，而非初始条件的残留。该稳态的形成机制与 θ_n 和状态的相关性一致：碰撞映射 (3.2 式) 在接触点速度向下 ($v + a\omega \leq 0$) 的约束下，把状态推向 $v > 0$ 的区域，且每次碰撞后质心速度几乎总向上 ($v > 0$ 占比约 95%)，能量向量因此长期停留于能量圆的右半圆弧段。

方案 C：物理动力学的系综平均。 方案 A、B 均沿单一碰撞序列作时间平均。为考察时间平均与系综平均的关系，方案 C 在方案 A 的物理动力学 (姿态角由飞行演化、与状态相关) 基础上作系综平均： M 个胶囊保持总能量 $E_{\text{tot}} = mgH$ 不变，初始碰前状态 (v_0, ω_0) 在能量圆上均匀采样 (对应不同的平动、转动分配)，接触角均取 $\theta_0 = 0.3 \text{ rad}$ ；各胶囊用连续时间步进物理演化固定碰撞次数 n ，记录第 n 次碰撞后的平动动能，再对 M 个胶囊取平均。表 6 列出 $M = 200$ 时各碰撞次数的系综平均：

表 6 $M = 200$ 时各碰撞次数的系综平均

n	1	2	5	10	50	200
系综 $\langle E_k \rangle / 10^{-3} \text{ J}$	5.89	6.80	6.36	5.84	6.03	6.33
偏离	15.5%	33.3%	24.7%	14.5%	18.2%	24.0%

方案 C 的系综平均随碰撞次数稳定在约 $6.0 \times 10^{-3} \text{ J}$ 附近，偏离 $E_{\text{tot}}/2$ 约 15%–33%，并不向均分值收敛。其收敛值与方案 A 的时间平均（约 $6.3 \times 10^{-3} \text{ J}$ ）一致：在姿态角由动力学演化、与状态相关的条件下，时间平均与系综平均相等，但二者都偏离均分。这从统计力学角度说明，方案 A 的偏离并非单一初始条件的偶然结果，而是物理动力学在碰撞映射约束下的稳态性质。

方案 D：单次碰撞的平均转化率（理论对照）。 为进一步厘清“均分是多次碰撞的渐近结果”，考虑单次碰撞的解析平均。初始状态为纯平动（ $\omega_0 = 0$ ）、姿态角独立随机，由 3.2 的碰撞映射，碰后平动动能占比为

$$\frac{E'_k}{E_{\text{tot}}} = \frac{(\beta - 1)^2}{(1 + \beta)^2}, \quad \beta = k^2 \cos^2 \theta \quad (3-23)$$

对 $|\theta|$ 在 $[0, \pi/2]$ 内均匀平均，得单次碰撞的平均平动动能占比

$$\frac{\langle E'_k \rangle}{E_{\text{tot}}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \beta)^2}{(1 + \beta)^2} d\theta \quad (3-24)$$

对第 11 号胶囊（ $k = 0.59$ ）数值积分约 0.555：单次碰撞平均将约 44% 的平动动能转化为转动动能，平动动能占比 55.5%，尚未达到均分。

方案 A 与 B 的差异在于姿态角序列是否独立，方案 A 与 C 的差异在于统计方式（时间平均对系综平均），方案 B 与 D 的差异在于碰撞次数（多次对单次）。四种方案的结果归纳如下：

表 7 四种方案结果

方案	姿态角	碰撞次数	平均方式	平动动能占比	结论
A	动力学演化	多次	单个胶囊时间平均	62.9%	偏离均分
B	独立随机	多次	单个胶囊时间平均	50.9%	均分
C	动力学演化	多次	多个胶囊系综平均	~60%	偏离均分
D	独立随机	单次	多个胶囊系综平均	55.5%	偏离均分

能均分现象依赖两个相互独立的条件。其一是碰撞次数充分多：单次碰撞（方案 D）只给出平均转化率，平动动能占比 55.5%，距均分尚有偏差；多次碰撞使能量在平动与转动间反复交换，趋向稳态分布。其二是姿态角序列独立（或近似独立）：姿态角独立同分布时，多次碰撞的时间平均（方案 B）严格收敛至 $E_{\text{tot}}/2$ ；姿态角由动力学演化、与状态相关时，无论时间平均（方案 A）还是系综平均（方案 C）都偏离均分值约 20%。方案 A 与 C 的一致性

表明物理动力学在碰撞映射约束下满足遍历性，但遍历到的稳态本身偏离均分——这正是姿态角与状态相关性（ θ_n 不独立）的后果，而非初始条件或统计方式的选择所致。

综上，3.3 的均分结论在姿态角独立同分布时严格成立（方案 B）；物理动力学中姿态角与状态相关，均分近似成立（方案 A、C），偏离幅度由几何参数 k 控制、与初始条件及统计方式无关；均分的达成还要求碰撞次数充分多（方案 D 与 B 的对比）。这一区分明确了能均分现象的适用条件。

上述方案均按弹性碰撞（ $e = 1$ ）处理。为考察非弹性碰撞的影响，将附录 B 标定的恢复系数 $e = 0.87$ 代入碰撞映射（含 e 的广义矩阵），重新计算方案 A、B 的长期行为。恢复系数 e 严格作用于接触点法向速度（ $v_{p,1} = -e v_{p,0}$ ， $v_p = v + a\omega$ ），而接触点速度是质心速度与转动线速度的线性耦合，故碰撞后的能量保留率 E_1/E_0 并非 e^2 ，而是随接触角与碰前能量分配在 e^2 与 1 之间变化（数值上约 0.76 ~ 1.0，平均约 0.82）。总能量随碰撞次数指数衰减。均分改用平动动能占比 $p = E_k/(E_k + E_r)$ 衡量，并统一只统计能量高于初始值 1% 的有效碰撞（能量耗尽后的碰撞占比无意义）。方案 A 的胶囊经约 25 次有效碰撞后能量降至 1% 以下；方案 B 虽然无飞行阶段，但能量同样按固定比例耗散，有效碰撞仅约 20 次，并不能迭代更久。结果如下：

表 8 $e = 0.87$ 下方案 A/B 的平动动能占比与偏离

n	方案 A 占比均值	A 偏离	方案 B 占比均值	B 偏离
0	1.0000	0.5000	1.0000	0.5000
5	0.4698	0.0302	0.7058	0.2058
10	0.5748	0.0748	0.7460	0.2460
15	0.5713	0.0713	0.7205	0.2205
20	0.6123	0.1123	0.7246	0.2246
25	0.6095	0.1095	0.7246	0.2246

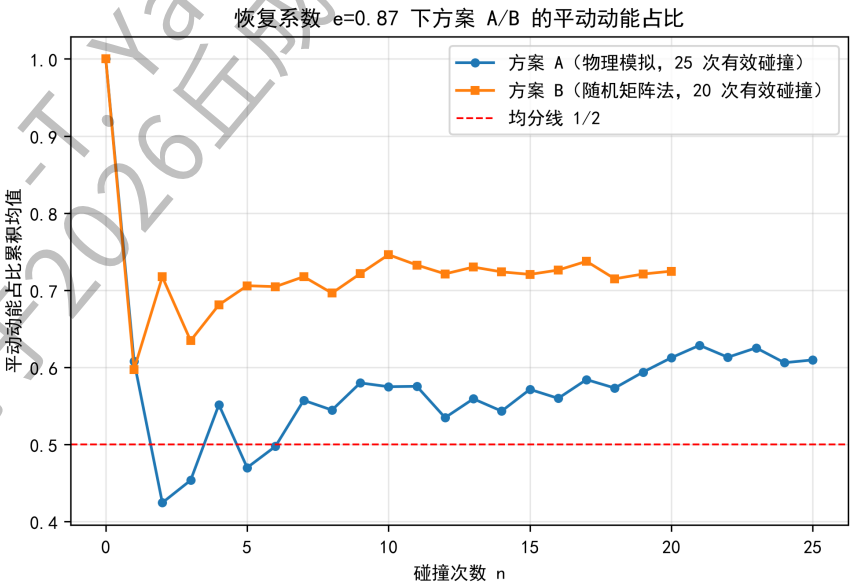


图 13 $e = 0.87$ 下方案 A/B 的平动动能占比

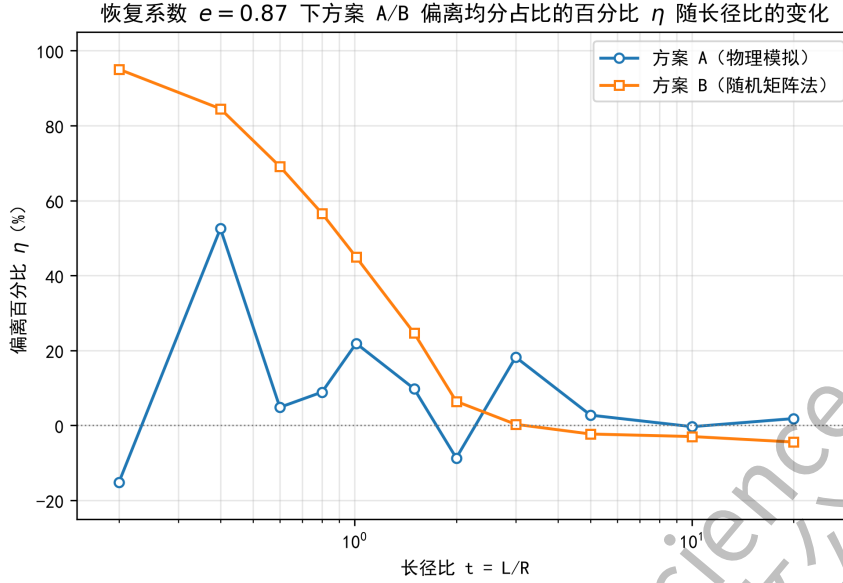


图 14 $e = 0.87$ 下方案 A/B 偏离均分占比百分比随长径比变化

将表 8 的占比累积均值对均分值 $1/2$ 归一化，定义偏差百分比 $\eta = \frac{\langle p \rangle - 1/2}{1/2}$ ($\langle p \rangle$ 为含初始状态的占比累积均值末值)，并像扫描长径比 t ($R = 4.95 \text{ mm}$ 固定)，其随 t 的变化见图：方案 B 的 η 在小 t 时远大于方案 A ($t = 0.2$ 时约 95%，因有效碰撞仅约 16 次、初始占比 1 的权重主导)，随 t 增大两者均向零衰减， $t \gtrsim 3$ 后 $|\eta| \lesssim 10\%$ ；第 11 号胶囊 ($t \approx 1.01$) 处方案 A 的 η 约 22%、方案 B 约 45%，与表 8 一致。

非弹性碰撞下，在低长径比时两方案的占比都不再趋于 $1/2$ ，且方案 B 的偏离反而更大。方案 A 在有效阶段占比累积均值约 0.61，偏离约 0.10；方案 B 有效阶段占比约 0.71，偏离约 0.21。这与弹性情形的结论不同：弹性碰撞时方案 B（姿态角独立）严格均分、方案 A 偏离；引入恢复系数后，能量在约 20 余次碰撞内迅速耗尽，两方案都未能经历足够多的碰撞使占比收敛至均分。均分是多次碰撞的渐近结果，恢复系数 $e = 0.87$ 导致的快速能量耗散，使“碰撞次数充分多”这一前提无法满足，两方案在能量有效阶段内都停留在偏离均分状态。方案 A 因姿态角与状态相关，其偏离与弹性情形同源；方案 B 的偏离则完全来自有效碰撞次数不足，并非均分趋势本身的破坏。

从物理上看，恢复系数破坏两方案收敛的机制有三点。第一点是碰撞映射不再保持能量。弹性碰撞 ($e = 1$) 在能量坐标下是正交反射矩阵（行列式 -1 ），保持 $x^2 + y^2 = E$ ，状态在固定半径的圆上游走，均分正是“状态在圆上均匀分布”的几何后果；引入 $e < 1$ 后矩阵的行列式变为 $-e$ ，状态点每次碰撞都向圆心收缩，不再在固定圆上游走。第二点，收缩是各向异性的。含 e 的矩阵在能量坐标下有两个本征方向：一个方向（特征值 $+1$ ）保持不变，另一个方向（特征值 $-e$ ）收缩。长期迭代下状态坍缩到不变方向，该方向对应的平动动能占比并非 $1/2$ ，故占比偏离均分。第三点，能量快速耗尽使有效碰撞次数有限。能量按平均 0.82 的比例指数衰减，约 20 余次碰撞后即降至初始值的 1% 以下，均分所需的渐近收敛过程被截断。三个机制中，前两者源于碰撞映射在非弹性情形下不再是保能量的正交变换，第三者源于有限的有效碰撞样本；二者共同使两方案在占比口径下均偏离均分，其中方案 B 因缺乏飞行阶段、能量纯由映射耗散，有效碰撞次数更少、偏离更大。

4 实验系统设计与验证

4.1 实验装置

实验装置由乐高工程套件搭建，核心是一个可旋转的夹持机构。夹持机构从水平方向夹持胶囊，使胶囊长轴位于竖直面内，并可驱动胶囊以设定的初始角速度预旋转。随后手动沿水平方向松开夹持，使胶囊在保留预旋转角速度的同时自由落体，释放高度约 40 cm。撞击平面选用高硬度钢化玻璃。碰撞过程用智能手机的慢动作模式以 1920 fps 拍摄，拍摄平面与胶囊的旋转平面平行。用 Tracker 软件逐帧分析视频，测量胶囊碰撞前后的线速度、角速度与接触角。



图 15 实验场景照片

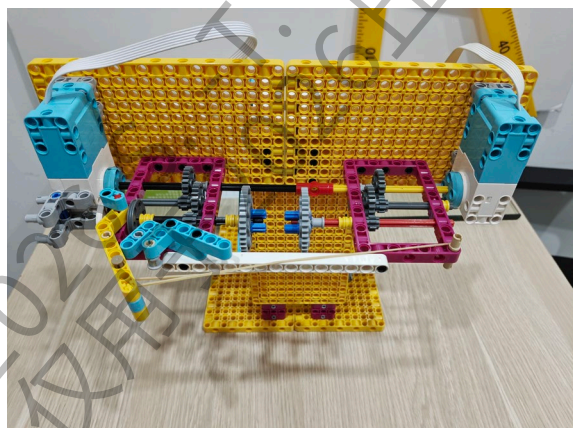


图 16 实验装置照片

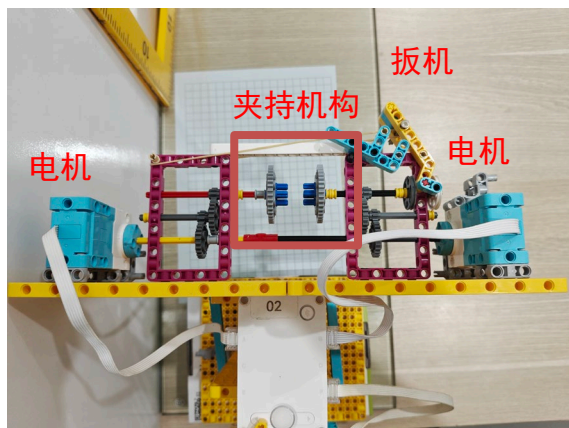


图 17 实验装置照片

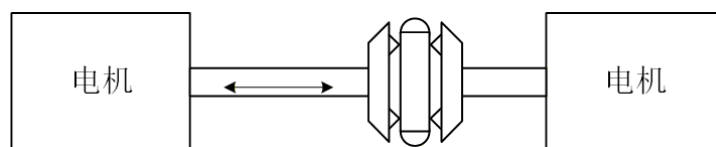


图 18 夹持机构示意图

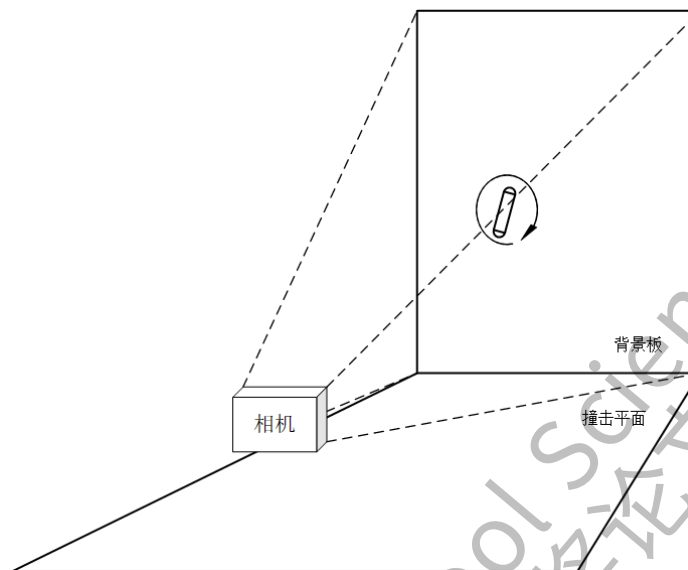


图 19 实验场景示意图

4.2 验证胶囊的最佳长径比

实验采用 3D 打印的系列胶囊，实测尺寸与质量如下：

表 9 胶囊实测尺寸与质量

序号	总长度 D/mm	直径 d/mm	质量 m/g
1	10.0	9.8	0.34
2	10.7	9.8	0.34
3	11.1	9.8	0.38
4	11.6	9.8	0.38
5	12.2	9.8	0.41
6	12.5	9.7	0.43
7	13.2	9.7	0.47
8	13.5	9.7	0.50
9	14.2	9.7	0.50
10	14.5	9.9	0.52
11	14.9	9.9	0.52

预实验对各号胶囊进行自由落体弹跳，逐次测量碰撞前后的质心速度并计算速度恢复系数 $e_c = |v_1/v_0|$ （质心速度之比，其定义与用途见 4.4；该量不同于附录 B 中按接触点法向速度标定的恢复系数 e ）。其中第 11 号胶囊最频繁出现反弹高度高于前一次下落高度的现象。因此后续实验采用第 11 号胶囊（下文简称 No.11）。

数值模拟与实验所用胶囊参数即为 No.11：总长 14.9 mm、直径 9.9 mm、质量 0.52 g，即圆柱段长度 $L = 14.9 - 9.9 = 5.0$ mm，半球半径 $R = 9.9/2 = 4.95$ mm。相应长径比 $t = L/R \approx 1.01$ ， $k \approx 0.59$ （见 3.1）。图 2 中最佳长径比为 $t = 0.9 \pm 0.2$ ，此长径比在此范围内，符合理论预测。

4.3 单次碰撞测量与规律

对第 11 号胶囊自固定高度静止释放后与水平面的连续碰撞过程进行追踪，用 Tracker 逐帧提取胶囊质心的竖直位置，得到多次碰撞中飞行高度随时间的变化。各组的飞行高度轨迹见图：

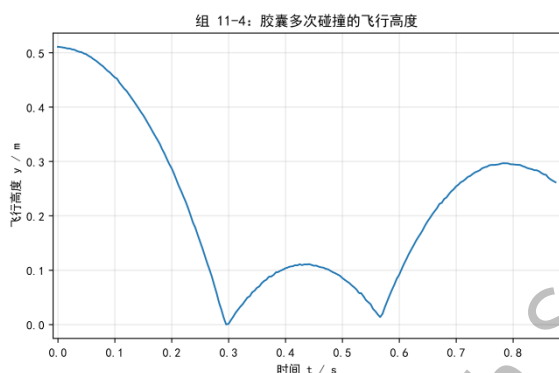


图 20-a 组 11-4 飞行高度

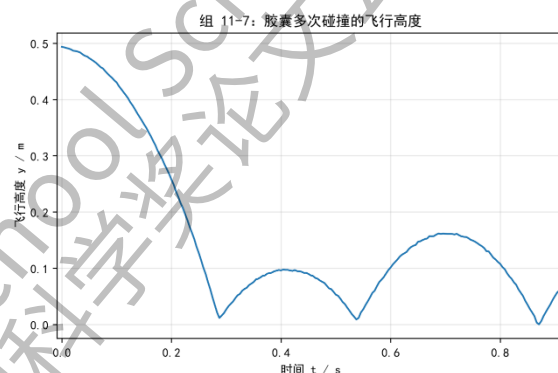


图 21-b 组 11-7 飞行高度

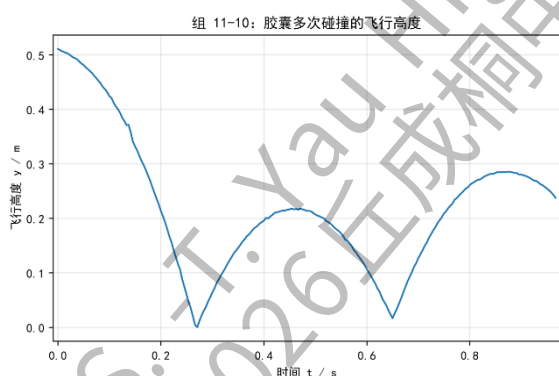


图 22-c 组 11-10 飞行高度

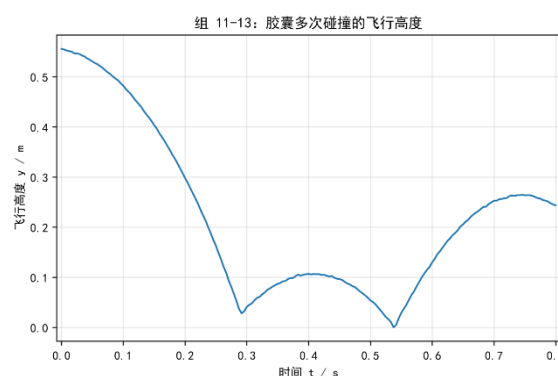


图 23-d 组 11-13 飞行高度

图 24 4 组胶囊飞行高度

轨迹呈现出“下落—碰撞—反弹—再下落”的起伏形态：每次碰撞后胶囊重新上升，达到本次碰撞后的最高飞行高度，随后再次下落触地。取每次碰撞后反弹弧的最高点（峰值）与该次碰撞触地瞬间的最低点（谷值）之差作为本次碰撞后的飞行高度 h （单位 m），结果见表 10：

表 10 碰撞后飞行高度

序号	碰撞序数	飞行高度 h/m
11-4	1	0.1110
11-4	2	0.2833
11-7	1	0.0859
11-7	2	0.1528
11-10	1	0.2178
11-10	2	0.2691
11-13	1	0.0788
11-13	2	0.2640

四组轨迹呈现出同一定性规律：碰撞后胶囊重新弹起，飞行高度出现“高一低一高一低”的交替起伏，且某些碰撞后的反弹高度明显高于前一次碰撞后的反弹高度（如 11-4 组第二次反弹高于第一次，11-13 组第二次反弹亦高于第一次），表现出飞行高度随碰撞并不单调衰减的异常现象。轨迹的峰值并不规则地递减，反而出现反弹增高的区段，这是球形刚体弹跳中不会出现的现象。其物理解释是：胶囊碰撞时能量在平动动能与转动动能之间重新分配，单次碰撞后质心速度并非只由恢复系数决定；碰撞姿态合适时，转动动能可部分转化为平动动能，使碰后质心竖直速度较碰前更大，从而出现碰后飞行高度高于碰前的反常现象。上述现象表明实际碰撞并非理想的纯弹性反射，需引入恢复系数 e 才能定量描述：含 e 的传递矩阵推导见附录 A， e 的接触角反演标定见附录 B，正文仅保留实验数据与相关结论。

4.4 多个胶囊单次碰撞系综平均验证

为实验验证 3.4 中方案 D 关于单次碰撞平均转化率的预测，采用同样的试验方案但不给予初始转速，随机给予初始角度，从同一高度释放胶囊；可认为胶囊第一次碰撞时接触角为随机值。多次实验测量碰前、碰后质心速度，结果见表 11：

表 11 多个胶囊单次碰撞

序号	碰前速度 $v_0/(m/s)$	碰后速度 $v_1/(m/s)$	$e_c = \ v_1/v_0\ $	E'_k/E_0	$p = E'_k/(E'_k + E'_r)$
1	-3.066	1.310	0.427	0.183	0.224
2	-3.153	2.648	0.840	0.705	0.927
3	-3.472	2.762	0.796	0.633	0.826
4	-3.697	2.119	0.573	0.329	0.413
5	-3.127	2.459	0.786	0.618	0.805
6	-3.137	2.349	0.749	0.561	0.726
7	-3.029	2.521	0.832	0.693	0.909
8	-4.105	2.019	0.492	0.242	0.300
9	-3.379	2.783	0.824	0.678	0.889
10	-3.476	2.387	0.687	0.472	0.604
11	-3.353	1.556	0.464	0.215	0.266
12	-3.339	2.573	0.771	0.594	0.771
13	-3.875	2.268	0.585	0.343	0.431
14	-3.744	1.988	0.531	0.282	0.352
15	-3.238	2.123	0.656	0.430	0.548
16	-3.099	1.401	0.452	0.204	0.252
17	-3.656	2.684	0.734	0.539	0.696
18	-3.416	2.678	0.784	0.615	0.800
平均	-	-	0.666	0.463	0.597

表中 $e_c = |v_1/v_0|$ 为质心速度恢复系数（它描述碰后质心速度的保留程度，不同于附录 B 中按接触点法向速度标定的 $e = 0.87$ ）； $E'_k = \frac{1}{2}mv_1^2$ ， $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ 。由于实验只测量了质心速度而未测角速度，碰后转动动能 $E'_r = \frac{1}{2}I_0\omega_1^2$ 由含恢复系数的碰撞映射反演得到：碰前为纯平动（ $\omega_0 = 0$ ），接触点法向恢复系数取附录 B 标定的 $e = 0.87$ ，由附录 A.1 的含 e 广义矩阵，碰后角速度满足 $\omega_1 = -\frac{\beta(1+e)}{a(1+\beta)}v_0$ ，其中 $\beta = k^2\cos^2\theta$ 、 $a = s\frac{L}{2}\cos\theta$ 。由实测 $r = |v_1/v_0| = \frac{e-\beta}{1+\beta}$ 反解 $\beta = \frac{e-r}{1+r}$ ，进而得转动动能占比

$$\frac{E'_r}{E_0} = \frac{\beta(1+e)^2}{(1+\beta)^2}, \quad p = \frac{E'_k}{E'_k + E'_r} = \frac{(e-\beta)^2}{(e-\beta)^2 + \beta(1+e)^2}. \quad (4-1)$$

反演所得接触角 $|\theta^*| = \arccos(\sqrt{\beta}/k)$ 介于 19° 与 78° 之间，覆盖姿态区间的大部分，且全部落在 $[0, \pi/2]$ 内。

18 次实验的碰后平动动能占比平均为 0.597 ± 0.057 （标准误差），在样本误差范围内与方案 D 的单次平均转化率理论值一致（弹性 $e = 1$ 情形 0.555；若在理论平均中计入同样的 $e = 0.87$ ，则为 0.516，仍落在误差范围内），且方向明确地大于 $1/2$ 。由于 p 强烈依赖碰撞姿态角（表中单次 p 从 0.22 到 0.93 大幅起伏），有限样本下平均值的统计不确定度较大；实验 p 的均值 $> 1/2$ 说明单次碰撞平均只把略多于一半的能量留在平动自由度，尚不足以达到均分，与多次碰撞（方案 B）收敛至 $1/2$ 形成对照，再次说明“均分是多次碰撞的渐近结果”这一结论。

5 结论与展望

结合之前对于胶囊形刚体在弹跳碰撞中的理论研究，本文进一步研究了胶囊形刚体在弹跳碰撞中的能量分配与能均分现象。我们建立了胶囊的碰撞动力学模型。将胶囊视为圆柱与两个半球组成的均匀刚体，由几何关系给出带符号有效力臂 $a = -f(\theta)\frac{L}{2}\cos\theta$ （ f 为取值函数，见 2.1.1）与转动惯量，并引入仅依赖长径比 $t = L/R$ 的无量纲常数 k 。在能量坐标下，单次碰撞等价于一次反射，反射轴 ψ_n 满足 $\tan\psi_n = f(\theta_n)/(k\cos\theta_n)$ 。

通过数值模拟，我们研究揭示了能均分现象的成立条件。在碰撞姿态角独立同分布的前提下，反射序列等价于随机旋转游走，能量向量在圆上趋于均匀分布，长期平动与转动动能严格均分。数值模拟表明，均分的达成依赖两个相互独立的条件：碰撞次数充分多，以及姿态角序列独立。随机矩阵法（方案 B）严格满足后一前提，其累积均值收敛至 $E_{\text{tot}}/2$ ；物理模拟（方案 A）中姿态角由飞行旋转与触地条件决定、与状态相关，长期均值偏离均分约 24%。

我们还找到了物理模拟偏离均分的机制。偏离来源于碰撞点被限制在两半球面上、碰撞姿态角决定碰撞角速度的正负（动力学关联），以及碰撞后质心必须向上（弹跳约束）三者的共同作用。偏离幅度由几何参数 k 决定： k 越小（胶囊越短粗）偏离越大， k 越大（越细长）越接近均分，且在 $k \approx 1.5$ 时趋于零；偏离与释放高度无关。系综平均（方案 C）与时间

平均（方案 A）的一致进一步表明，偏离是物理动力学的稳态性质，而非初始条件的偶然结果。

最后，实验验证了单次碰撞的能量分配与“均分是多次碰撞渐近结果”的判据。对 No.11 胶囊连续碰撞飞行高度的追踪表明，碰后反弹高度不随碰撞次数单调衰减、甚至逐次升高（4.3），源于碰撞中平动与转动动能的相互转化；而系综实验（4.4）在随机姿态下单次碰撞的平动动能占比平均为 0.597 ± 0.057 ，与方案 D 的理论值（ $e = 1$ 时 0.555，计入 $e = 0.87$ 后 0.516）一致且大于 $1/2$ ，说明单次碰撞平均尚不达到均分，只有多次碰撞才趋于均分（方案 B）。

我们的研究为探索和演示能均分在经典宏观力学系统中的现象开辟了新途径，特别是在动力学约束下的二自由度能量偏离均分对于我们理解宏观约束的重要性提高例证。同时我们大胆猜测，微观上气体分子的转动动能和平动动能的能均分可能与微观上力学约束复杂性或者量子力学有关。我们观察到二自由度碰撞若姿态角由上一次运动约束决定则偏离能均分，而若每次姿态角随机游走，则更靠近能均分，与量子力学中的波函数特征相似，波函数也是两次作用期间会重新进行概率分布。

未来我们可以通过实验和数值模拟更复杂的刚体多平动自由度和转动自由度碰撞，探索和检验在不同边界的复杂性、不同碰撞的复杂性以及自由度增多的条件下，复杂力学约束下是否还会系统性偏离能均分。这些拓展将进一步深化我们对于能均分原理普适性的理解，推进物理学能均分概念更直观的演示和更广阔领域内的应用。

参考文献

- [1] 舒幼生. 力学: 物理类[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2023.
- [2] 同济大学数学科学学院. 工程数学: 线性代数[M]. 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [3] 韩已宁, 魏蔚, 马晓栋. 反弹胶囊的实验研究和理论分析[J]. 新疆师范大学学报（自然科学版）, 2025, 44(2): 36-44.
- [4] Pang B W, Wang X K, Liu S, et al. Study on rebounding height of capsule-shaped object based on serial coefficient of restitution[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2022, 2282: 012007.
- [5] Yao X X, Wang Z W, Zhao L L, et al. The rebound height of a capsule-shaped object[J]. European Journal of Physics, 2023, 44(4): 045001.
- [6] IYPT 青年物理学家. IYPT2021 第 34 届国际青年物理学家竞赛中英文版赛题及图解、参考视频 [EB/OL]. <https://www.bilibili.com/read/cv6914438/2020-07-26/2024-01-20>.
- [7] X. Li, G. Chen, R. J. Tee, J. X. Liu, and C. Ong. Dynamics of a bouncing capsule: An impulse model vs a Hertzian model[J]. Am. J. Phys. 92(6), 424–433 (2024).

致谢

本课题“胶囊弹跳中的平动和转动能量分配：对能均分的趋近与系统偏离”是在重庆育才中学张程鑫老师和王田丽老师的悉心指导下完成的，张程鑫老师为本课题的选题提供了方向性建议，并在理论模型推导、实验方案设计、论文框架搭建与修改润色等各环节给予了细致的指导，王田丽老师在线性代数和概率积分中给予了指导，指导工作属于学校大中衔接教育的教学安排。在此谨向张程鑫老师和王田丽老师致以诚挚的感谢。

本研究为参赛学生祝乙可独立完成的科研实践，本人承担了研究的绝大部分具体工作。研究过程大致可划分为五个阶段，以下按环节作分工说明。

首先是选题与文献调研。最初在观察中发现胶囊形物体弹跳存在“反弹高度高于下落高度”的反常现象，与球形刚体的单调衰减行为明显不同，询问张程鑫老师后得知此为 IYPT 的小课题，在老师的建议下阅读文献、调研相关研究后确定以“碰撞中平动动能与转动动能之间的能量再分配”为核心问题，明确了以“能均分”作为理论主线。

关于理论建模与推导，本人独立完成了胶囊几何建模、带符号有效力臂与转动惯量的推导，以及能量坐标下碰撞等价于反射的证明；在多次碰撞极限下论证了姿态角独立同分布时平动与转动动能趋于均分。在张程鑫老师的指导下，我设计了方案 A-D 四类数值模拟（物理模拟、随机矩阵法、系综平均与单次碰撞平均转化率）来检验均分前提的适用边界。相关数学知识我寻求了王田丽老师的帮助。本人推导并编程实现了含恢复系数的碰撞转移矩阵、能量坐标特征值分析及接触角反演。

关于实验装置与数据采集，我设计并组装利用乐高套件搭建可旋转夹持释放机构，用智能手机慢动作模式拍摄胶囊自由落体与弹跳过程，并借助 Tracker 软件逐帧追踪质心位置、姿态角与速度。多次碰撞的飞行高度数据由多段高速视频整理得到；单次碰撞的碰前碰后速度数据按随机姿态逐次实验采集。张程鑫老师对于实验软件的使用做出了许多指导与帮助。

关于数据分析与计算，我在数据处理过程中经历了较多反复。主要困难之一是接触角的量角误差：视频中胶囊轴线角直接量取的精度不足，且相机视差使长度标定失真，导致基于接触角的碰撞映射反演结果不稳定。针对视差问题，本人用放置于碰撞平面上的方格纸进行长度标定，对像素尺度进行透视校正；对接触角则采用“视频量角—透视修正—映射反演”三步流程，将修正后的角度作为初值，再通过含恢复系数映射反演得到自洽的接触角与全局恢复系数 $e \approx 0.87$ 。另一处反复出现在能均分的验证环节：物理模拟与随机矩阵法对“姿态角序列是否独立”的依赖极强，需要反复调试时间步长、触地判定与统计口径，最终通过有效碰撞筛选与占比统计得到一致结论。此部分的多数纠错工作由本人独立完成，张程鑫老师在方法选择与结果合理性判断上给予了方向性把关。

最后是关于论文撰写与整理。论文初稿由本人撰写，张老师对论文结构、术语规范、公式呈现与图表编排提出了大量修改意见，本人据此完成了多轮修订，最终形成本文。

本次研究让本人系统经历了“观察现象——建立模型——数值验证——实验检验”的完整科研流程，在发现问题、动手推导、动手实验与数据处理方面收获颇丰。衷心感谢张程鑫和王田丽老师在研究全程的耐心指导与鼓励，也感谢学校为实验与拍摄提供的场地与器材支持。若研究存在不足之处，责任在本人，恳请各位评委老师批评指正。

附录 A 转动惯量计算

圆柱长度 L ，半径 R ，两端半球半径 R ，总质量 m ，体密度 ρ 。转动轴为垂直于长轴（圆柱对称轴）、通过整体质心 O 的轴。

刚体绕固定轴旋转的转动惯量为

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \quad (\text{A-1})$$

其中 r 为质点到轴的距离， ρ 为体密度。总体积与体密度为

$$V = \pi R^2 L + \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 L + \frac{4}{3} \pi R^3} \quad (\text{A-2})$$

圆柱部分质量 $m_c = \rho \pi R^2 L$ ，其绕自身质心（即点 O ）的转动惯量为

$$I_c = \frac{1}{12} m_c [3R^2 + L^2] \quad (\text{A-3})$$

一个半球部分质量 $m_h = \rho \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$ 。半球对其球心（位于圆柱端面圆心）的转动惯量为 $I_{h,\text{center}} = \frac{2}{5} m_h R^2$ ，质心到球心的距离为 $c = \frac{3}{8} R$ 。由平行轴定理，半球对自身质心的转动惯量为

$$I_{h,\text{cm}} = I_{h,\text{center}} - m_h c^2 = \frac{83}{320} m_h R^2 \quad (\text{A-4})$$

半球质心到整体质心（位于圆柱中心）的水平距离为 $d = \frac{L}{2} + c = \frac{L}{2} + \frac{3}{8} R$ ，故一个半球对整体质心的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_{h,\text{total}} &= I_{h,\text{cm}} + m_h d^2 = I_{h,\text{center}} + m_h \left(\frac{L^2}{4} + \frac{3LR}{8} \right) \\ &= \frac{2}{5} m_h R^2 + m_h \left(\frac{L^2}{4} + \frac{3LR}{8} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

两个半球对称，总转动惯量为

$$I_0 = I_c + 2I_{h,\text{total}} = \frac{1}{12} m_c (3R^2 + L^2) + 2m_h \left[\frac{2}{5} R^2 + \frac{L^2}{4} + \frac{3LR}{8} \right] \quad (\text{A-6})$$

其中 $m_c = \frac{\pi R^2 L}{\pi R^2 L + \frac{4}{3} \pi R^3} m$ ， $m_h = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3}{\pi R^2 L + \frac{4}{3} \pi R^3} m$ 。上式可等价地写为

$$I_0 = \rho \pi \left(\frac{8}{15} R^5 + \frac{3}{4} L R^4 + \frac{1}{3} L^2 R^3 + \frac{1}{12} L^3 R^2 \right) \quad (\text{A-7})$$

附录 B 含恢复系数的碰撞转移矩阵

B.1 含恢复系数转移矩阵的推导

碰撞瞬间地面在接触点 P 施加竖直向上的法向冲量 J 。设碰撞前状态为 (v_0, ω_0) ，碰撞后为 (v_1, ω_1) ，恢复系数为 e 。碰撞前后满足三个方程：质心动量定理、对质心的角动量定理，以及接触点法向速度的恢复条件

$$m(v_1 - v_0) = J, \quad I_0(\omega_1 - \omega_0) = aJ, \quad v_1 + a\omega_1 = -e(v_0 + a\omega_0)$$

其中 $a = -f(\theta)\frac{L}{2}\cos\theta$ 为带符号有效力臂。由前两式消去冲量 J ，得 $I_0(\omega_1 - \omega_0) = ma(v_1 - v_0)$ 。令 $\beta = \frac{ma^2}{I_0} = k^2\cos^2\theta$ ，代入恢复条件，整理得碰撞后的状态

$$\boxed{v_1 = \frac{(\beta - e)v_0 - a(1 + e)\omega_0}{1 + \beta}, \quad \omega_1 = \frac{(1 - \beta e)\omega_0 - \frac{\beta(1 + e)}{a}v_0}{1 + \beta}} \quad (\text{B-1})$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \beta} \begin{pmatrix} \beta - e & -a(1 + e) \\ -\frac{\beta(1 + e)}{a} & 1 - \beta e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-2})$$

当 $e = 1$ 时，该矩阵退化为 3.2 的弹性碰撞映射；当 $e < 1$ 时，接触点法向速度被削弱为 $-e v_p$ ，但质心速度与角速度仍通过耦合矩阵重新分配。

该矩阵的正确性可用冲量法独立验证：直接求解三方程构成的线性方程组，与矩阵法结果在 5000 组随机状态下最大偏差为 1.2×10^{-9} ，二者完全一致。

B.2 能量坐标下的形式与特征值

在能量坐标 $(x, y) = (v\sqrt{m/2}, \omega\sqrt{I_0/2})$ 下，利用 $a\sqrt{m/I_0} = sk\cos\theta = -f(\theta)\sqrt{\beta}$ ，含 e 的转移矩阵化为

$$\frac{1}{1 + \beta} \begin{pmatrix} \beta - e & f(\theta)(1 + e)\sqrt{\beta} \\ f(\theta)(1 + e)\sqrt{\beta} & 1 - \beta e \end{pmatrix} \quad (\text{B-3})$$

该矩阵为对称矩阵，其行列式与迹分别为

$$\det = -e, \quad \text{tr} = 1 - e \quad (\text{B-4})$$

故其特征值恒为 $+1$ 与 $-e$ ，与 θ 无关。 $e = 1$ 时特征值为 $+1$ 与 -1 ，对应保能量的正交反射； $e < 1$ 时，特征值 $+1$ 的方向保持不变，特征值 $-e$ 的方向每次碰撞收缩 e 倍，碰撞映射不再是保能量的正交变换，状态点向能量圆心各向异性收缩。

B.3 恢复系数对方案 A、B 的影响

取附录 C 标定的 $e = 0.87$ 代入含 e 的碰撞映射后，方案 A、B 的长期行为已由正文 3.4 末尾的数值模拟给出（见图与表 6：两方案占比均不再趋于 $1/2$ ，方案 A 约 0.59、方案 B 约 0.71，且能量在约 25 次、20 次有效碰撞内衰减至初始值的 1% 以下）。此处从映射本身说明偏离的根源，分三层。

其一，碰撞映射不再保能量。能量坐标下的含 e 矩阵行列式为 $-e$ （见 A.2），每次碰撞后状态点向能量圆心收缩， $x^2 + y^2$ 不再守恒，状态无法停留在固定半径的能量圆上。其二，收缩是各向异性的。矩阵特征值为 $+1$ 与 $-e$ ：特征值 $+1$ 方向的状态分量保持不变，特征值 $-e$ 方向的分量每次碰撞收缩 e 倍，长期迭代后状态坍缩到不变方向，而该方向对应的平动动能占比并非 $1/2$ ，故占比偏离均分。其三，能量快速耗尽使有效碰撞次数有限。能量按单次保留率（数值平均约 0.82）指数衰减，约 20 余次碰撞后即降至初始值的 1% 以下，均分所需的渐近收敛过程被截断。前两层源于碰撞映射不再是保能量的正交变换，第三层源于有限的有效碰撞样本；二者共同使两方案在占比口径下均偏离均分，其中方案 B 因缺乏飞行阶段、能量纯由映射耗散，有效碰撞次数更少、偏离更大（数值细节见 3.4 末尾）。

附录 C 接触角反演与恢复系数标定

正文实验（4.3、4.4）表明实际碰撞伴随能量耗散与平动-转动动能相互转化，弹性碰撞映射（3.2， $e = 1$ ）不能直接用于定量描述，需要含恢复系数 e 的碰撞映射及其参数取值。本节利用高速视频同时记录的碰前、碰后质心速度与角速度（单次碰撞， ω_0 接近零），用附录 A.1 的含 e 碰撞映射反演接触角并标定恢复系数 e ，验证模型对实验数据的重现能力。实验对象为第 11 号胶囊（ $L = 5.0 \text{ mm}$ 、 $R = 4.95 \text{ mm}$ 、 $m = 0.52 \text{ g}$ ）。碰撞前的速度 v_0 、角速度 ω_0 与碰撞后的 v_1 、 ω_1 由高速视频逐帧提取，碰撞时刻的轴线角 θ 由图像量得并经透视修正。恢复系数取固定值 $e = 0.847$ ，接触角不确定度取 $\Delta\theta = \pm 10^\circ$ 。

C.1 固定恢复系数下的接触角反演

固定 $e = 0.847$ ，在透视修正后的 θ 附近 $\pm 30^\circ$ 范围内扫描，找使 (v_1, ω_1) 归一化误差最小的接触角 θ^* 。5 组实验所需的反演修正量 $\Delta\theta = \theta^* - \theta_{\text{修正}}$ 见表 C1：

表 C1 反演修正量

组	$\Delta\theta/(^\circ)$	归一化误差
A-3	+12.5	0.107
A-4	-15.9	0.091
A-5	+3.9	0.043
A-17	+9.3	0.030
B-2	-11.6	0.029

所需 $|\Delta\theta|$ 平均约 10.6° ，与典型量角误差（约 10° ）相当。这表明单一恢复系数 $e = 0.847$ 与透视修正后的接触角大体自洽，残余偏差基本落在接触角测量精度范围内。

C.2 全局最优恢复系数

进一步允许恢复系数 e 自由变化，每组仅反演接触角（单参数），扫描 $e \in [0,1]$ 使 5 组总归一化误差最小，得全局最优 $e = 0.870$ 。该值下各组反演结果见表 C2：

表 C2 反演结果

组	$\theta^*/(^{\circ})$	v_1 残差	ω_1 残差
A-3	56.6	7.9%	0.00%
A-4	130.5	11.4%	0.07%
A-5	69.3	2.5%	0.00%
A-17	68.6	6.0%	0.03%
B-2	131.4	0.1%	0.37%

为检验反演接触角的物理一致性，将全局最优 $e = 0.870$ 下反演得到的接触角 θ^* 与透视修正后的测量角 $\theta_{\text{修正}}$ （理论上的真实接触角）对比，见表 C3。 θ 与 $\theta + \pi$ 为同一轴线，取最小循环差。

表 C3 反演结果与修正后测量角对比

组	θ^* (反演) $/(^{\circ})$	$\theta_{\text{修正}}/(^{\circ})$	$\Delta = \theta^* - \theta_{\text{修正}}/(^{\circ})$
A-3	56.6	43.6	+13.0
A-4	130.5	147.0	-16.5
A-5	69.3	65.1	+4.1
A-17	68.6	59.0	+9.6
B-2	131.4	143.6	-12.2

从数据可得到三点结论。其一，角速度的残差极小（全部不超过 0.4%），而速度的残差可达 11%。同一组反演参数下 ω_1 几乎被精确重现而 v_1 存在显著偏差，说明碰撞映射对角速度的预测远比对速度的预测可靠。其根源可追溯到 3.2 的分量式： ω_{n+1} 的第二项 $-\frac{2\beta_n}{a_n}v_n/(1+\beta_n)$ 含因子 $1/a_n$ ，在 a_n 较小（接触角接近 0 或 π ）时被放大，使角速度对模型参数的敏感度远高于速度；而速度方程的两项均不含 $1/a_n$ 奇异因子。因此角速度通道对接触角的微小变化响应强烈，反演时角速度主导了拟合，速度通道的残余偏差难以被同一接触角同时吸收。

其二，反演接触角与透视修正角的偏差（表 C3）介于 4° 与 17° 之间，其中 A-5（+4.1°）与 A-17（+9.6°）落在典型量角误差内，其余三组略超。偏差方向在 A 组与 B 组之间未见一致偏置，提示差异并非单一的测量系统误差，而可能来自接触角定义与几何模型之间的不一致（如接触点并非理想的半球最低点、碰撞瞬时姿态与逐帧提取姿态的时延等）。

其三，这里按接触点法向速度标定的 $e \approx 0.87$ 与 4.4 中按质心速度定义的 $e_c = |v_1/v_0|$ （平均约 0.666）明显不同：碰撞中平动与转动动能相互转化，质心速度保留率不能直接代表接触点法向的恢复程度，故能量保留率 E_1/E_0 与 e 呈非线性关系（见附录 B.3）。只有以接触点速度恢复条件标定的 e 才是碰撞映射（附录 B.1 式）所要求的正确参数。

综上，含恢复系数的碰撞映射能以一个全局 $e \approx 0.87$ 同时重现 5 组实验的角速度，但速度通道存在 0.1%–11% 的残余偏差，反演接触角与透视修正角存在约 4° – 17° 的差异。模型对转动自由度的描述可靠，对平动自由度的重现受接触角测量精度限制，此外摩擦等因素的影响仍有待进一步考察。

C.3 冲量式恢复系数处理的局限：赫兹接触模型

附录 B.1 的碰撞映射属于瞬时冲量模型：假设碰撞瞬时完成、碰撞期间接触角 θ 恒定、法向恢复条件 $v_{p,1} = -e v_{p,0}$ 由单一常数 e 描述，且第 2.1.1 节忽略界面摩擦。Li 等对胶囊弹跳的冲量模型与赫兹接触模型作了系统比较[1]，指出这类处理隐含两条强假设：

接触点全程单向滑动。冲量模型把切向冲量写为 $f = \mu_k N \text{sign}(\omega)$ ，即假定碰撞全程接触点相对地面滑动且摩擦方向不变。若碰撞中接触点水平速度 u_c 减速至零（stick）后反向（slip），摩擦方向将与假设相反，模型可给出违背能量守恒的非物理结果。该假设仅在 $|\theta| < \theta_c$ 、 $|\omega_1| < \omega_c$ 的区域内成立，其中 $\theta_c(\omega_1)$ 与 $\omega_c(\theta)$ 由接触点水平速度趋于零的过渡条件确定。

接触时长有限且接触角随形变变化。冲量模型不刻画碰撞历时，无法给出法向力随时间的变化，也无法反映形变过程中有效接触角的连续演化。本文表 C3 中“反演角与透视修正角偏差 4° – 17° 、方向无一致偏置”的观测，与该事实相容：反演所得 θ^* 是冲量模型在恒定角假设下对真实接触过程的等效平均，而非视频量得的瞬时轴线角。

赫兹模型以有限时长的接触过程替代瞬时冲量。设 ξ 为接触形变深度，胶囊质心高度 y 与接触点几何高度 $h(\theta)$ 满足 $\xi = h(\theta) - y$ ；接触发生时法向力取赫兹弹力与粘弹性阻尼之和

$$N = k \xi^{3/2} H(y) + \lambda \frac{d}{dt} (\xi^{3/2}) H(y) \quad (\text{C-1})$$

其中 k 为接触刚度， λ 为粘弹性阻尼系数， $H(y)$ 为接触指示函数（ $\xi > 0$ 时取 1，否则取 0）。指数 3/2 对应球–平面接触：本文胶囊接触端为半径 R 的半球，地面视为平面，满足赫兹假设（小形变、椭圆接触区）。阻尼项取 Kuwabara–Kono 形式，负责碰撞中的能量耗散。

切向摩擦按库仑模型分静、动两种状态处理。设接触点水平速度为 $u_c = \dot{x} - h\dot{\theta}$ ：当 $u_c = 0$ 且 $|f| \leq \mu_s N$ 时处于粘滞（stick），摩擦取约束力 $f = m(h\ddot{\theta} + \dot{h}\dot{\theta})$ ；当 $u_c \neq 0$ 或 $|f| > \mu_s N$ 时滑动（slip）， $f = -\mu_k N \text{sign}(u_c)$ 。数值积分中通过 $u_c = 0$ 与 $|f| \leq \mu_s N$ 两个条件自动切换两种状态，从而显式描述 slip–stick 转换。

Li 等的实验对比显示，赫兹模型对碰后角速度与竖直速度的预测均比冲量模型更接近测量值；差异在角速度通道尤为显著（如对碰前角速度 ω_1 扫描时，冲量模型 RMSD 约 $19.1 \pm 0.8 \text{ rad/s}$ ，赫兹模型约 $5.6 \pm 0.8 \text{ rad/s}$ ）。该差异主要来自赫兹模型对 slip–stick 摩擦的显式处理，而非恢复系数取值的不同。

C.4 赫兹模型对本附录标定结果的修正意义

对照赫兹模型，本附录的常数 e 处理可得到三点修正性认识。

其一，常数 e 是接触过程的涌现量而非本征常数。在赫兹 - 粘弹性框架中，能量耗散由阻尼 λ 与接触历时决定，等效恢复系数随碰前速度、接触刚度与阻尼变化；冲量模型把它压缩成单一常数 e ，使 e 实际上吸收了一部分形变与 slip-stick 效应。本文速度通道 0.1%–11% 的残余偏差，正是这些被 e 与反演接触角“吸收但不彻底”的效应所致。附录 C.3 指出 $e \approx 0.87$ 与质心速度恢复系数 $e_c \approx 0.666$ 的差异源于平动 - 转动耦合，与赫兹模型中“法向恢复只作用于接触点速度”的图像一致。

其二，角速度通道精确而速度通道残余，可由赫兹模型补充解释。角速度主要受接触点法向恢复与 slip-stick 摩擦的角冲量支配；在本文实验 ($\omega_0 \approx 0$ 、接触角随机) 中，部分碰撞落在单向滑动有效区内，冲量近似尚可，故角速度重现良好。竖直速度则对有限接触时长内法向力波形（含粘弹性阻尼）更敏感，冲量近似误差更大，表现为速度通道残余偏差。这与 Li 等“角速度差异大于竖直速度差异、赫兹模型更优”的实验图景一致。

其三，修正方向。若需定量消除残余偏差，可在碰撞子模型中引入赫兹法向力与库仑 slip-stick 摩擦，对接触过程做有限时长积分，并由积分结果提取“等效恢复系数”以替代常数 e ；也可在保持冲量框架下，先按单向滑动有效判据 ($|\theta| < \theta_c$ 、 $|\omega_1| < \omega_c$) 筛选碰撞样本，仅对有效区内的碰撞使用常数 e 映射，越过边界时改用赫兹数值修正。

综上，含恢复系数的碰撞映射能以一个全局 $e \approx 0.87$ 同时重现 5 组实验的角速度，但速度通道存在 0.1%–11% 的残余偏差，反演接触角与透视修正角存在约 4° – 17° 的差异。赫兹接触模型表明，这些残余源于瞬时冲量框架对有限接触时长、形变过程与 slip-stick 摩擦的压缩处理；该修正属于定量精度层面，不影响第 3 章能均分现象及本文结论中“含恢复系数的碰撞映射在占比口径下两方案均偏离均分”的定性结论。