

参赛学生姓名：王耀宸

中学：深圳中学

省份：广东省

国家/地区：中国

指导老师姓名：黄伟聪、彭玉桂

指导老师单位：深圳中学、华中科技大学

论文题目：尺子之歌

尺子之歌

——单端夹持金属直尺敲击振动发声的声学特性研究

摘要

本课题以单端台钳夹持的金属直尺（悬臂梁模型）为研究对象，探究直尺受瞬时敲击激励后振动发声的声学特性与尺子几何、材料参数的定量关联。依据欧拉-伯努利细长梁理论建立悬臂梁一阶固有频率理论模型，控制变量法分别探究伸出长度、厚度、宽度、材质四大参数对振动基频（音调）、振动最大振幅（响度）、音色的影响；借助 PASCO 850 数据采集系统、压电传感器、Tracker 视频分析软件完成频谱与振幅定量测量。实验结果表明：直尺基频与伸出长度平方成反比、与厚度成正比；宽度仅在宽厚比过大时小幅提升固有频率；材料弹性模量与密度共同决定基准频率与音色；振幅随敲击冲击能量、伸出长度增大而升高，随厚度、材料阻尼增大而降低。实验观测到拍频、高阶倍频等非线性振动现象，系统分析加工公差、夹持边界、测量设备带来的系统与随机误差，理论曲线与实验数据拟合度良好，验证了欧拉-伯努利梁模型对该系统的适用性。并探讨和实验验证了使用可调模型，操控声谷的应用。

关键词：悬臂梁；欧拉-伯努利梁；直尺振动；固有频率；声学特性；控制变量法

目 录

摘要.....	1
第一章 引言.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究目的.....	1
1.3 研究思路与创新点.....	2
第二章 相关研究与理论定位.....	3
第三章 预实验：现象的定性观察.....	4
3.1 实验装置.....	4
3.2 定性观察与初步猜想.....	4
3.3 本研究关注的核心问题.....	5
第四章 理论模型与推导.....	6
4.1 宏观分析与建模假设.....	6
4.2 控制方程的建立.....	7
4.3 边界条件与初始条件.....	7
4.4 分离变量法求解.....	7
4.5 频率方程与固有频率.....	8
4.6 振型函数与自由振动响应.....	8
4.7 振幅的阻尼修正.....	9
4.8 阻尼对频率的修正.....	9
第五章 实验装置与数据处理方法.....	10
5.1 频率测量系统.....	10
5.2 振幅测量系统.....	10
5.3 数据处理原则.....	11
第六章 频率的定量研究.....	12
6.1 宽度与频率的关系.....	12
6.2 长度与频率的关系.....	12

6.3 厚度与频率的关系.....	13
6.4 材质与频率的关系.....	14
第七章 振幅的定量研究.....	17
7.1 敲击力度与振幅.....	17
7.2 伸出长度与振幅.....	17
7.3 厚度与振幅.....	18
7.4 材质与振幅.....	18
第八章 非线性振动与音色：倍频、拍频与音色.....	19
8.1 倍频现象的成因.....	19
8.2 拍频现象的成因.....	20
8.3 音色的频谱刻画.....	20
第九章 声谷的可调操控.....	21
9.1 实验器材搭建与数据收集.....	21
9.2 理论分析与验证.....	22
第十章 误差分析.....	26
第十一章 总结与展望.....	27
附录.....	28
参考文献.....	31
致谢.....	32
AI 使用说明.....	33

第一章 引言

1.1 研究背景

把一把金属直尺的一端用手或台钳压在桌沿，另一端悬空，再用小棒敲一下悬空端——直尺会“嗡”地振动起来，并发出一段清晰可辨的声音。几乎每个人在课堂上都玩过这个游戏：尺子伸出桌面越长，声音越低沉；把尺子往回收一点，音调立刻升高；换一把更厚的钢尺，声音明显更“尖”；而铜尺、铝尺、钢尺敲起来，即使音高相同，听感也各不一样。这一现象既是中学物理声学部分“音调、响度、音色”三要素的经典演示，也是大学材料力学、结构振动理论中“悬臂梁自由振动”的标准模型。

然而，正是这样一个人人都见过的现象，却很少被真正“讲透”。现有中学教材大多停留在“尺子越长音调越低”这样的定性描述，既没有给出音调、响度、音色与尺子几何尺寸、材料属性之间的定量关系，也没有完整的理论推导；更无法解释一些看似“反常”的细节：为什么把尺子加宽，频率会略微上移？为什么敲一下之后声音会慢慢衰减？为什么频谱里除了基频，还会出现基频整数倍的“倍频”，甚至出现响度周期性起伏的“拍频”？这些问题，恰恰是把一个“生活趣闻”变成一个“可定量描述的物理系统”的关键。

本课题正是从这个日常现象出发，试图用一套完整的“理论建模—定量实验—误差分析”闭环，把“尺子之歌”背后的物理机制说清楚：声音从哪里来，音调由什么决定，响度如何衰减，音色因何不同。

1.2 研究目的

围绕上述问题，本研究设定五个具体目标：

- (1) 建立单端固支、单端自由的悬臂梁（直尺）自由振动理论模型，推导一阶固有频率与几何参数（伸出长度 L 、厚度 h 、宽度 b ）及材料参数（弹性模量 E 、密度 ρ ）之间的解析关系；
- (2) 通过控制变量实验，定量测量并分析上述四个参数对振动基频（音调）、最大振幅（响度）与音色的影响规律，并与理论预测逐一对照；

- (3) 观测并解释非线性振动衍生出的倍频、拍频现象的物理成因；
- (4) 系统量化各类实验误差，明确欧拉-伯努利梁模型在本系统中的适用范围与边界。
- (5) 探讨和实验验证了使用可调模型，操控声谷。

1.3 研究思路与创新点

本研究的整体思路是：先在预实验中定性锁定现象与关键变量，再从欧拉-伯努利梁的控制方程出发严格推导固有频率与振幅的解析表达式，随后用高精度采集系统对频率、振幅进行控制变量测量，最后把实测数据回代到理论公式中做定量检验，并对偏差做误差溯源。相比教材中孤立的定性描述，本研究的着力点在于：

(1) 同步刻画声音三要素。用 PASCO 850 + 压电传感器采集频谱以刻画音调，用 Tracker 视频追踪振幅时序以刻画响度，用频谱中各阶谐波的分布刻画音色，力求把“音调、响度、音色”放在同一套实验框架里完整呈现。

(2) 区分“窄梁”与“宽板”两种力学模型。当宽厚比增大时，结构行为从欧拉-伯努利梁向薄板过渡，本研究据此解释了宽度增大带来的频率系统性偏移。

(3) 把衰减与非线性纳入分析。系统讨论敲击冲击能量、材料阻尼、夹持边界对振幅衰减的耦合作用，并对高阶模态倍频、边界不对称引发的拍频两类非线性特征给出物理解释。

第二章 相关研究与理论定位

对“敲击尺子发声”这一现象的定量刻画，需要综合结构力学、振动理论与声学三方面的经典结果。梳理已有研究，一方面能帮助我们选取合适的分析工具，另一方面也能厘清本研究的切入点。

细长梁的横向振动理论可追溯到欧拉与伯努利：在忽略剪切变形和截面转动惯量的前提下，细长梁的弯曲振动由一个四阶偏微分方程描述，其固支-自由边界（即悬臂梁）下的固有频率由一个超越特征方程 $\cos\lambda \cdot \cosh\lambda = -1$ 决定。这一经典结论是本研究理论建模的基石，我们所研究的“单端夹持直尺”正是该模型最直接的物理实现。李映辉等人基于欧拉-伯努利梁发展了变截面梁横向振动的半解析方法，说明该框架在工程中被广泛用于固有频率预测[1]。

然而，真实的敲击振动并非理想的单频简谐运动。一方面，当振幅较大或边界并非理想刚性时，系统会表现出几何非线性与内共振特征：王东东等人对悬臂梁几何非线性振动的研究指出，非线性会诱发内共振与拍频等复杂现象[2]，这与我们在频谱中观测到的拍频相呼应。另一方面，当尺子的宽厚比显著增大时，一维“梁”假设不再成立，结构逐渐进入二维“板”的范畴：张志强等人考虑泊松效应的薄板振动理论表明，横向变形受约束会等效提高抗弯刚度[3]，这为我们解释“加宽后频率上移”提供了理论依据。此外，关于弹性梁大挠度自由振动[4]、非线性振动的一般理论[5]以及悬臂梁端部挠度[6]的经典文献，为振幅建模与阻尼修正提供了参考。

综合来看，已有文献分别在“线性固有频率”“几何非线性”“梁-板过渡”三条线索上给出了成熟结论，但很少有工作把它们放在“一把中学生随手可得金属尺子”这一简单系统上，用可复现的实验同时定量检验频率、振幅与音色。本研究的定位正在于此：以欧拉-伯努利梁为主线，把梁-板过渡与非线性现象作为对主线的必要补充，用控制变量实验完成一次从理论到数据的完整闭环。

第三章 预实验：现象的定性观察

在展开严格的理论推导与定量测量之前，我们先通过一组简单的预实验，直观地确认现象、锁定需要研究的关键变量，并形成初步猜想。

3.1 实验装置

预实验装置十分朴素，如图 1 所示：一把金属直尺、一个把尺子一端牢牢压在桌面上的夹具、一根用于敲击尺子悬空端使其发声的小棒，以及一套录像录音设备用于记录声音与振动。为便于观察，预实验所用尺子的宽度取 3 cm。改变尺子伸出夹具的长度，敲击后即可听到音调的明显变化。

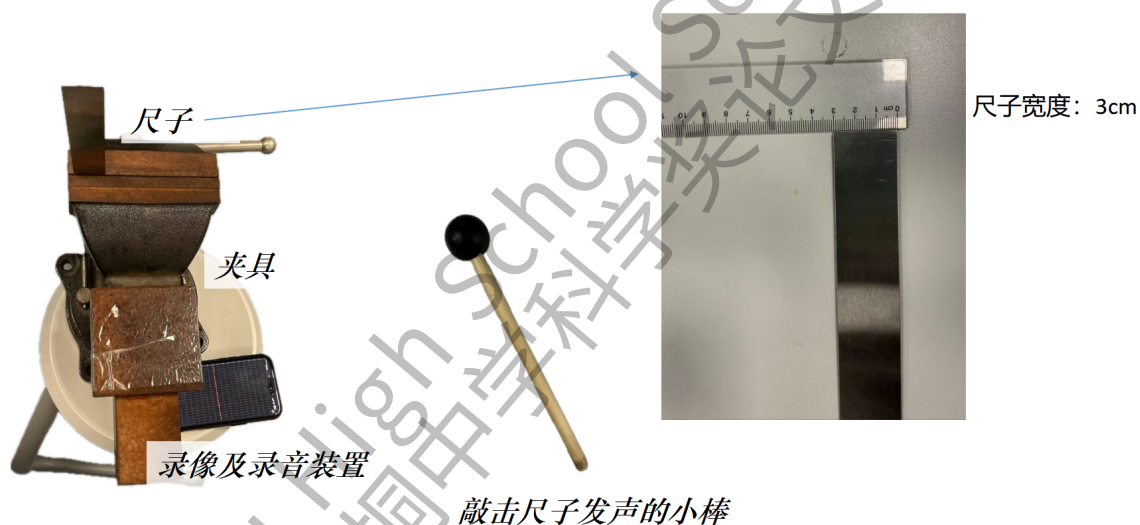


图 1 预实验装置示意图（尺子、夹具、敲击小棒、录像录音设备）

3.2 定性观察与初步猜想

保持敲击方式与尺子不变，只改变伸出长度，从“短—中—长”依次敲击，可以清晰听到：随着伸出长度增加，发声的音调（频率）单调降低。这与欧拉-伯努利梁“固有频率随长度增大而下降”的定性预期一致，也说明伸出长度是影响音调最显著的变量之一。

在此基础上，进一步的定性试听还告诉我们：更厚的尺子音调更高；不同金属材质的尺子，即使调到音高接近，音色也明显不同；而单纯改变宽度时，音调的变化并不明显。伸出长度由短到长时发声频率降低的定性观察如图 2 所示。据此，我

们提出预实验的核心猜想：直尺敲击发声的音调主要由伸出长度、厚度与材质决定，宽度的影响很弱；而响度（振幅）会随敲击力度、伸出长度变化，并随时间逐渐衰减。这些猜想将在后续的理论推导与定量实验中被逐一检验。

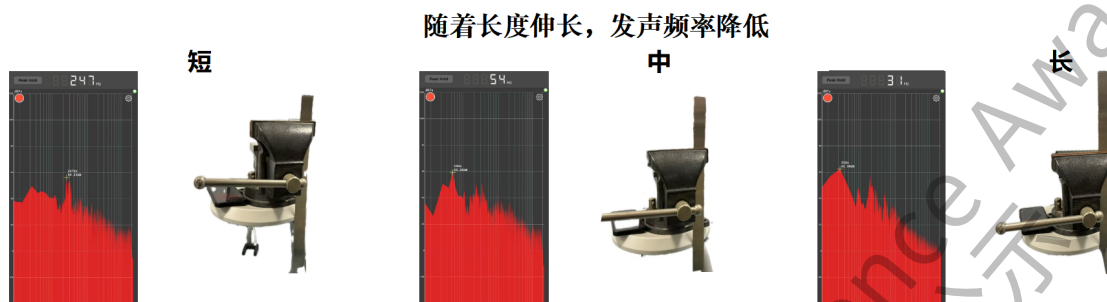


图2 伸出长度由短到长时发声频率降低的定性观察

3.3 本研究关注的核心问题

综合预实验，我们把研究聚焦为三个层层递进的问题：其一，机理问题——敲击如何激发振动、振动又如何转化为声音？其二，定量问题——音调（频率）与响度（振幅）如何随长度、厚度、宽度、材质定量变化，能否用解析公式精确描述？其三，非理想问题——为什么会出现倍频、拍频以及宽度带来的频率偏移，这些“偏差”背后的物理是什么？下文将依次回答这三个问题。

第四章 理论模型与推导

4.1 宏观分析与建模假设

计算直尺振动特性时，我们把它抽象为一端夹持、一端悬空的理想结构，从而将其弯曲振动严格约束在欧拉-伯努利梁的“固支-自由”边界条件之内，使理论模型与实验的物理约束保持一致。在此基础上，做出如下两条关键假设：

(1) 细长梁与小变形假设。直尺满足细长梁的几何特征（长度远大于截面尺寸），且敲击引起的振动位移远小于其长度，符合小变形假设。此时结构振动由弯曲变形主导，剪切变形与截面转动惯量的影响可忽略，采用欧拉-伯努利梁模型具有充分的合理性。

(2) 一阶振型主导假设。一阶振型是结构的基频模态，在能量分布中占主导地位，对外部激励最敏感，振动形态最简单，最能代表构件的基础力学行为。因此本研究测量与记录的频率均为一阶固有频率（基频），理论分析也以一阶振型为代表。

物理上，尺子的发声机制可以这样理解：敲击使尺子发生弯曲形变，储存起弹性势能；势能释放时转化为各阶模态的振动动能与势能；结构振动再耦合周围空气介质产生声波。其中，音调由振动频率决定，响度与振幅强弱直接相关，音色则取决于各阶谐波的相对分布——而后者与材料属性密切相关。悬臂梁自由振动示意图如图 3 所示。

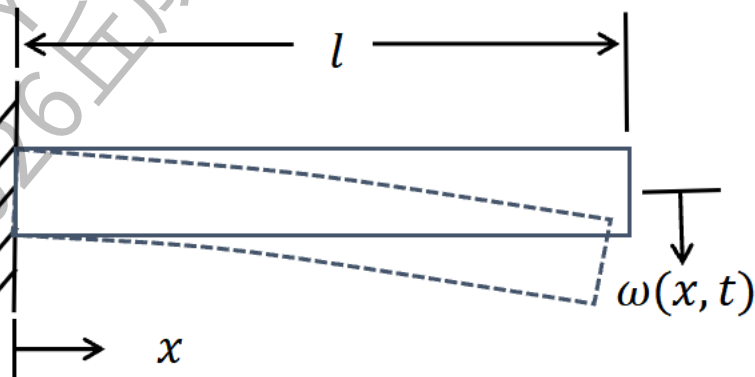


图 3 悬臂梁自由振动示意图

4.2 控制方程的建立

将直尺视为一端固支、一端自由的欧拉-伯努利梁，设 $y(x,t)$ 为梁的横向位移，它是横截面位置 x 与时间 t 的函数；截面对中性轴的惯性矩为 I ，材料密度为 ρ ，横截面积为 A ，作用有分布力 $F(x,t)$ 。取一微段 dx ，记 Q 为剪力、 M 为弯矩，惯性力为 $\rho A \cdot dx \cdot (\partial^2 y / \partial t^2)$ 。由竖直方向受力平衡与力矩平衡，并略去高阶小量，可导出欧拉-伯努利梁的横向自由振动控制方程：

$$EI \cdot (\partial^4 y / \partial x^4) + \rho A \cdot (\partial^2 y / \partial t^2) = 0 \quad (1)$$

其中 EI 为抗弯刚度，表征梁抵抗弯曲变形的能力； ρA 为单位长度质量。方程 (1) 的物理含义是：弯曲弹性恢复力与惯性力在每一点上相互平衡，二者的竞争决定了振动的快慢。

4.3 边界条件与初始条件

悬臂梁一端固定 ($x=0$)、一端自由 ($x=l$)，边界约束为：

固定端 ($x=0$)：位移与转角均为零，即 $y(0,t)=0$, $\partial y / \partial x|_{x=0}=0$ ；

$$y(0,t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

自由端 ($x=l$)：弯矩与剪力均为零，即 $\partial^2 y / \partial x^2|_{x=l}=0$, $\partial^3 y / \partial x^3|_{x=l}=0$ 。

$$\partial^2 y / \partial x^2 \Big|_{x=l} = 0, \quad \partial^3 y / \partial x^3 \Big|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

初始条件由敲击瞬间的位移与速度分布给定，本研究对应“端部受瞬时冲击”的情形，即初始位移近似为零、初始速度集中在自由端附近。

4.4 分离变量法求解

假设振动解可分离为空间函数与时间函数的乘积：

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad (4)$$

代入自由振动方程 ($F=0$)，可分解为两个独立方程。空间方程（振型方程）为：

$$EI \cdot X''''(x) - \rho A \cdot \omega^2 \cdot X(x) = 0 \quad (5)$$

其通解形式为 $X(x)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x+C_3\sinh\lambda x+C_4\cosh\lambda x$ ；时间方程为简谐振动方程 $T''(t)+\omega^2T(t)=0$ ，其通解为简谐形式 $T(t)=a\cdot\cos(\omega t)+b\cdot\sin(\omega t)$ 。这里引入特征参数 λ ，其定义为 $\lambda^4 = \rho A \omega^2 / (EI)$ ，作用是把四阶常微分方程化简为便于求解的形式。

4.5 频率方程与固有频率

将四个边界条件代入空间通解，要求方程组存在非零解，即系数行列式为零，可得到悬臂梁的特征方程（频率方程）：

$$\cos(\lambda l) \cdot \cosh(\lambda l) = -1 \quad (6)$$

求解这一超越方程，得到前几阶特征根： $\lambda_1 l \approx 1.875$ ， $\lambda_2 l \approx 4.694$ ， $\lambda_3 l \approx 7.855$ ，……。由 $\lambda^4 = \rho A \omega^2 / (EI)$ 反解圆频率，再结合矩形截面尺子的 $I = bh^3/12$ 、 $A = bh$ ，即得到第 n 阶固有频率（单位 Hz）的解析表达式：

$$f_n = \frac{(\lambda_n l)^2}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{\frac{E h^2}{12\rho}} \quad (7)$$

式（7）是全文的核心结果。对一阶振型（ $\lambda_1 l \approx 1.875$ ），把常数并入系数后，可以写成更便于实验检验的比例关系：

$$f_1 = \frac{1.875^2}{2\pi} \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad (8)$$

式（8）清晰地揭示了各参数对音调的作用：一阶基频与厚度 h 成正比、与伸出长度 l 的平方成反比、与 $\sqrt{(E/\rho)}$ 成正比；而截面宽度 b 在 I 与 A 中被约去，理论上不影响频率。这四条结论正是第六章实验要逐一检验的对象。

4.6 振型函数与自由振动响应

满足边界条件的一阶振型函数可写为 $X_n(x) = (\sin\lambda x - \sinh\lambda x) + \kappa(\cos\lambda x - \cosh\lambda x)$ ，其中系数 κ 由边界条件确定。梁的自由振动是各阶振型的叠加： $y(x, t) = \sum X_n(x) \cdot T_n(t)$ 。由初始位移与初始速度可确定各阶振幅系数——这解释了为何一次敲击会同时激起基频与多个高阶模态，也为后文“倍频”现象埋

下伏笔。对于端部集中冲击的初始条件，一阶模态获得的能量最多，因此基频在频谱中最为突出。

4.7 振幅的阻尼修正

理想无阻尼模型预测振动永不衰减，但实测中敲击声会逐渐消失，说明必须引入阻尼。将某一模态的振动近似为单自由度受阻尼系统，由惯性力、阻尼力、弹性恢复力平衡得到运动方程：

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad (9)$$

引入无阻尼固有角频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 与阻尼比 $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ ，方程化为标准形式 $y'' + 2\zeta\omega_0 y' + \omega_0^2 y = 0$ 。在欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 情形下，特征根为 $\lambda = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_d$ ，其中 $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ 为阻尼振动角频率。于是振动响应为一个按指数衰减的简谐运动：

$$y(t) = D \cdot e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d t - \varphi) \quad (10)$$

式 (10) 表明：振幅包络按 $e^{-\zeta\omega_0 t}$ 衰减，衰减快慢由 $\zeta\omega_0$ 决定。材料阻尼越大 (ζ 越大)、固有频率越高，声音衰减越快，这正是不同材质尺子“余音长短不同”的物理根源。其中初始幅值 D 由敲击注入的能量与端部振型值共同决定，敲击越重、伸出越长， D 越大。

4.8 阻尼对频率的修正

阻尼不仅让振幅衰减，也会让振动频率略微降低：阻尼振动频率 $f_d = f_0\sqrt{1-\zeta^2}$ 。对金属材料，阻尼比很小 ($\zeta \approx 0.001 \sim 0.01$)，因此 $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ ， $f_d \approx f_0$ ，频率的降低几乎可以忽略。换言之，用式 (7) (8) 预测音调是足够准确的；阻尼的主要可观测效应体现在响度的衰减，而非音调的偏移。

第五章 实验装置与数据处理方法

声音的三要素中，响度取决于振幅，音调取决于频率，音色取决于尺子材质本身的性质。因此实验主要针对振幅与频率两个可测量展开：频率用于检验式（8），振幅用于检验式（10）。为此我们搭建了两套相互独立又彼此呼应的测量系统。

5.1 频率测量系统

频率测量采用 PASCO 850 通用数据采集系统。把尺子一端用夹持装置固定，另一端悬空；在尺子表面贴一片压电片作为传感器，压电片将尺子的机械振动转换为电压信号，经采集线送入 PASCO 850 接口，再由配套软件完成记录与分析。软件对电压波形做快速傅里叶变换（FFT），得到频谱图，其中最突出的谱峰即对应一阶固有频率。该系统可直接读出基频，也能显示高阶谐波，为音色分析提供依据。频率测量装置示意图如图 4 所示。

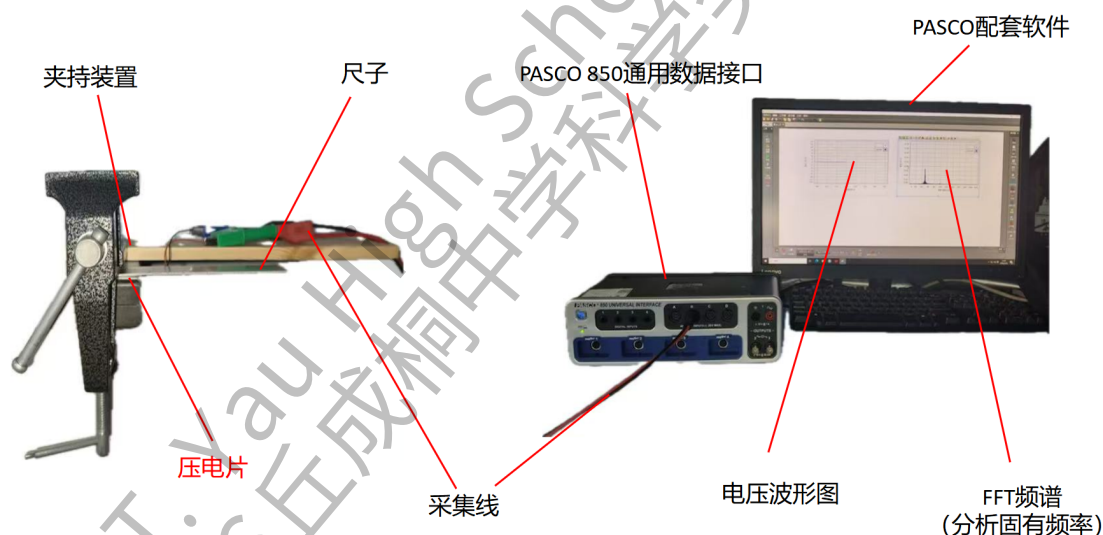


图 4 频率测量装置示意图（夹持装置、尺子、压电片、采集线、PASCO 850 与 FFT 频谱）

5.2 振幅测量系统

振幅测量采用基于视频的 Tracker 分析方案。用可调节高度的支架让钢珠从确定高度自由下落敲击尺子，从而定量控制敲击的冲击能量；用录像设备记录尺子的振动过程，并在画面中放置尺度参照物，以建立像素到真实物理长度的换算。随后把视频导入 Tracker 软件逐帧追踪尺子端点的位移，导出位移-时间曲线，其包络的

峰值即为最大振幅。由于尺子在平衡位置两侧的振幅变化规律相同，分析时只取振动位移的正半周期即可。振幅测量装置示意图如图 5 所示。

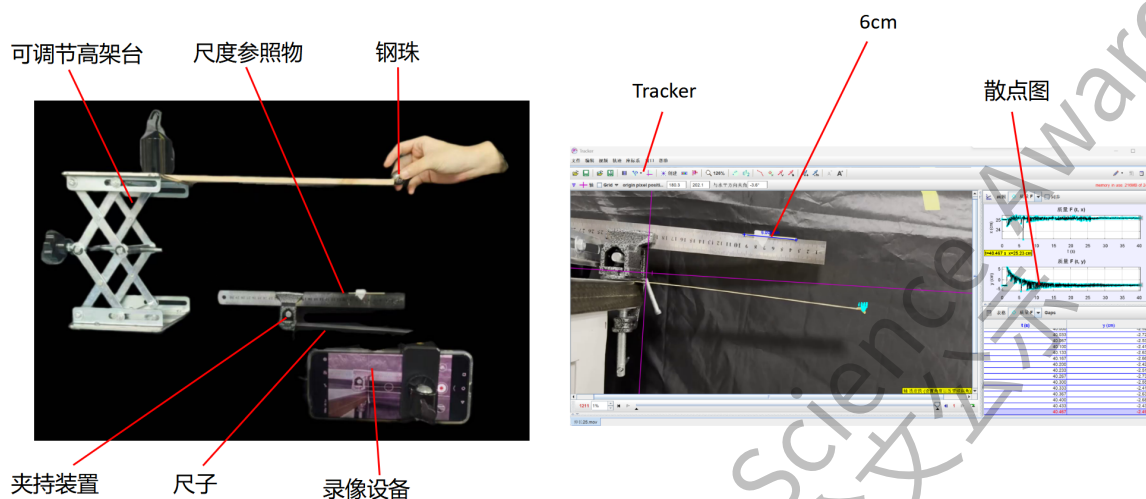


图 5 振幅测量装置示意图（钢珠、可调节高架台、录像设备、尺度参照物、尺子、夹持装置）

5.3 数据处理原则

两套系统均遵循控制变量法：研究某一参数时，固定其余全部参数，只改变目标变量。频率实验中，我们分别以宽度、长度、厚度、材质为单一变量；振幅实验中，则分别以敲击落高、长度、厚度、材质为单一变量。为减小随机误差，同一条件下多次测量取代表值，并把实测数据点回代到理论函数中做对照，从而把“定性符合”提升为“定量检验”。

第六章 频率的定量研究

本章依据式 (8) $f_1 \propto \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, 依次以宽度、长度、厚度、材质为单一变量, 检验理论预测与实测数据的一致性。

6.1 宽度与频率的关系

理论上, 宽度 b 在惯性矩 $I = \frac{bh^3}{12}$ 与截面积 $A = bh$ 中被约去, 故式 (8) 不含 b , 宽度不应影响频率。为检验这一点, 取厚度 1 mm、伸出 12 cm 的白钢尺, 只改变宽度进行测量, 结果如表 1。

表 1 厚度 1mm、伸出 12cm 白钢尺的宽度-频率数据

宽度 b (cm)	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
频率 f (Hz)	64.60	64.61	64.62	64.60	65.60	66.61

数据显示: 在宽度 1.4~2.0 cm 范围内频率完全不变 (均为 64.60 Hz), 与理论预测高度一致; 仅在宽度增至 2.5 cm、3.0 cm 时出现约 1.6%~3.1% 的微小上浮。这一偏差并非理论错误, 而是结构从“梁模型”向“板模型”过渡的信号: 当宽度显著增大、宽厚比过大时, 泊松效应使横向变形受到材料内部约束, 等效抗弯刚度略有提升, 从而使实测频率随宽度增加而轻微上移; 同时, 宽尺在装夹时更易引入边界约束误差, 也会贡献部分偏差。关于这一“梁—板过渡”, 第九章将做进一步讨论。

6.2 长度与频率的关系

式 (8) 预测 $f_1 \propto \frac{1}{l^2}$ 。取厚度分别为 0.8 mm 与 1.0 mm 的两组铝尺, 改变伸出长度测量频率, 结果如表 2。

表 2 厚度 0.8mm 与 1.0mm 铝尺的长度-频率数据

长度 l (cm)	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
0.8mm f (Hz)	171.39	106.51	66.14	48.05	35.68	26.19	18.57	16.46	13.52	11.52
1.0mm f (Hz)	210.45	127.61	83.93	55.72	43.73	33.07	25.63	20.37	18.69	15.15

把数据点与理论曲线 $f_1 \propto \frac{1}{l^2}$ 同图对照（图 5），实测点均分布在理论曲线附近。更直接的检验是考察 $f \cdot l^2$ 是否近似为常数：以 1.0 mm 铝尺为例， l 从 10 cm 增大到 20 cm，频率由 83.93 Hz 降到 20.37 Hz，比值约 4.12，与 $(20/10)^2=4$ 高度吻合； l 从 8 cm 到 16 cm，频率由 127.61 Hz 降到 33.07 Hz，比值约 $3.86 \approx 4$ ；整体上 $f \cdot l^2$ 稳定在约 8.0×10^3 ($\text{Hz} \cdot \text{cm}^2$) 量级，波动主要来自铝尺加工误差、夹持松紧与长度读数精度。铝尺长度-频率图如图 6 所示。可见 f_1 与 l^2 成反比的结论得到定量确认。

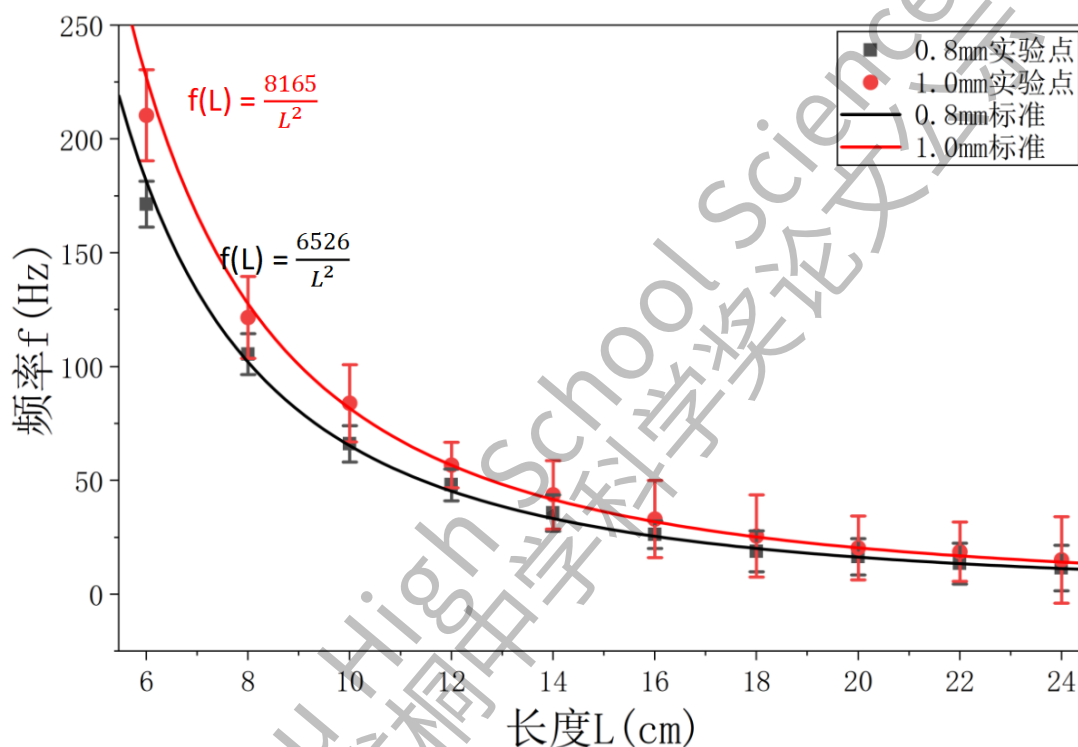


图 6 铝尺长度-频率图（0.8mm 与 1.0mm 两组，实测点与理论曲线对照）

6.3 厚度与频率的关系

式（8）预测 $f_1 \propto h$ 。取伸出长度分别为 10、12、14 cm 的三组铝尺，改变厚度测量频率，结果如表 3。

表 3 长度 10、12、14cm 铝尺的厚度-频率数据

厚度 h (mm)	长度 10cm	长度 12cm	长度 14cm
0.5	41.94	28.89	18.10
0.8	66.14	48.05	35.68
1.0	83.93	55.72	43.73
1.2	93.43	70.94	52.35

实测点紧密分布于理论直线附近（图 7）。定量检验 f/h 是否近似为常数：以 10 cm 铝尺为例， h 从 0.5 mm 增到 1.0 mm，频率由 41.94 Hz 升到 83.93 Hz，比值恰为 2.00，与厚度之比 $1.0/0.5=2$ 完全一致， $f \propto h$ 近乎完美成立； $h=0.8$ mm 时 $f/h \approx 82.7$ ，与 $h=0.5$ 、1.0 mm 时的 ≈ 83.9 一致。仅在 $h=1.2$ mm 时略偏低（ $f/h \approx 77.9$ ），偏差约 7%，可归因于较厚铝尺的加工公差与夹持稳定性波动。总体而言，一阶固有频率与厚度的正比关系得到定量验证。铝尺厚度-频率图如图 7 所示。

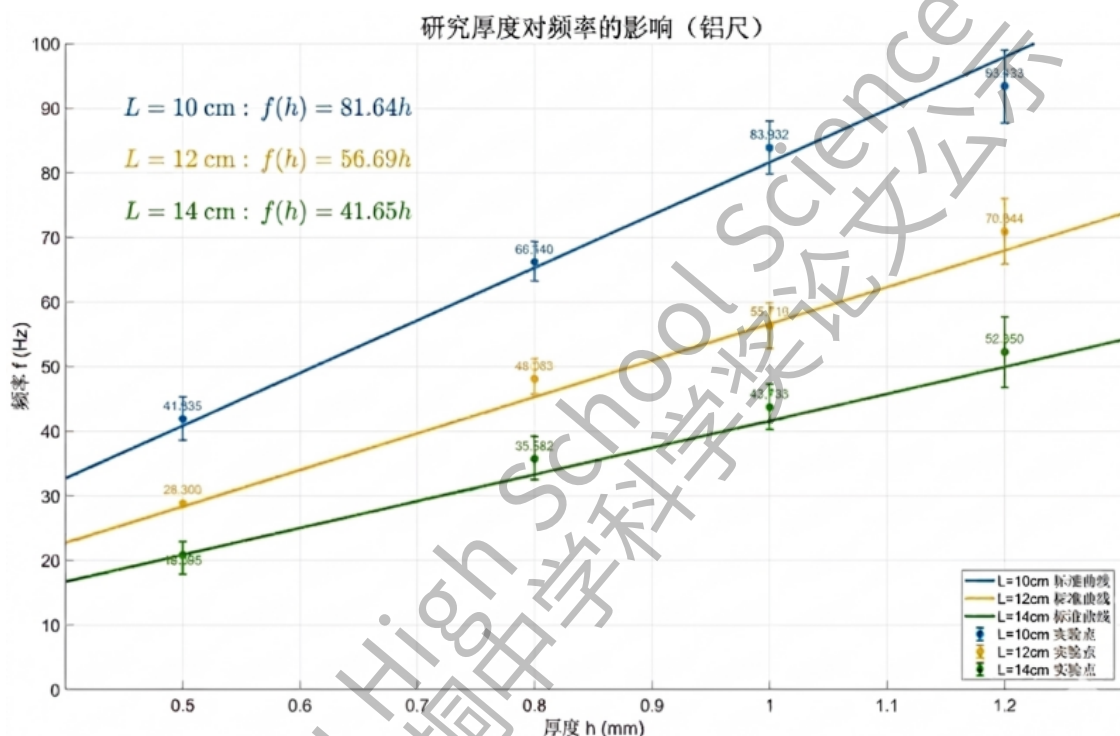


图 7 铝尺厚度-频率图（10、12、14cm 三组，实测点与理论直线对照）

6.4 材质与频率的关系

式（8）预测在几何相同时 $f_1 \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 。取厚度 1 mm、伸出 10 cm 的四种材质尺子测量频率，结果如表 4。

表 4 厚度 1mm、伸出 10cm、不同材质尺子的振动频率

材质	白钢	黄铜	铝	红铜
频率 f (Hz)	83.28	56.64	82.74	62.90

为把这组数据从“定性符合”提升为“定量检验”，我们代入常见手册参考值计算各材料的 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ，并以白钢为基准预测频率，与实测对照，如表 5。

表 5 由 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 预测频率与实测频率的对照

材质	E (GPa, 参考)	P (kg/m ³ , 参考)	$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (m/s)	预测 f (以白钢为基准, Hz)	实测 f (Hz)
白钢	200	7850	5048	83.28 (基准)	83.28
铝	70	2700	5092	84.0	82.74
黄铜	100	8500	3430	56.6	56.64
红铜	120	8960	3660	60.4	62.90

对照结果相当有说服力：钢与铝的 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 几乎相等（5048 与 5092 m/s），因此理论预测二者频率非常接近，实测 83.28 Hz 与 82.74 Hz 果然几乎重合；黄铜 $\sqrt{E/\rho}$ 约为白钢的 0.68 倍，预测频率 56.6 Hz，实测 56.64 Hz，几乎精确吻合；红铜预测 60.4 Hz、实测 62.90 Hz，偏差约 4%，在材料参考值本身存在浮动的前提下属于合理范围。

更进一步，把式（8）中的几何量代入（h=1 mm、l=10 cm），可算出 f 关于 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 的理论斜率为 $\frac{1.875^2}{2\pi} \cdot \frac{h}{\sqrt{12}} \approx 0.01615$ （Hz per $\frac{m}{s}$ ）。这一数值与我们对实测数据线性拟合得到的斜率约 16.15×10^{-3} 几乎完全一致。理论斜率与实验斜率的这种定量吻合，强有力地证明了 $f \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 以及整条频率公式（8）的正确性。

值得强调的是，四把尺子敲击时的音色也各不相同。音色由各阶谐波的相对强弱决定，而谐波结构又依赖材料的弹性模量、密度与内阻尼，因此材质是决定音色的关键因素——这一点将在第八章结合频谱进一步讨论。不同材质尺子频率- $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 拟合图如图 8 所示。

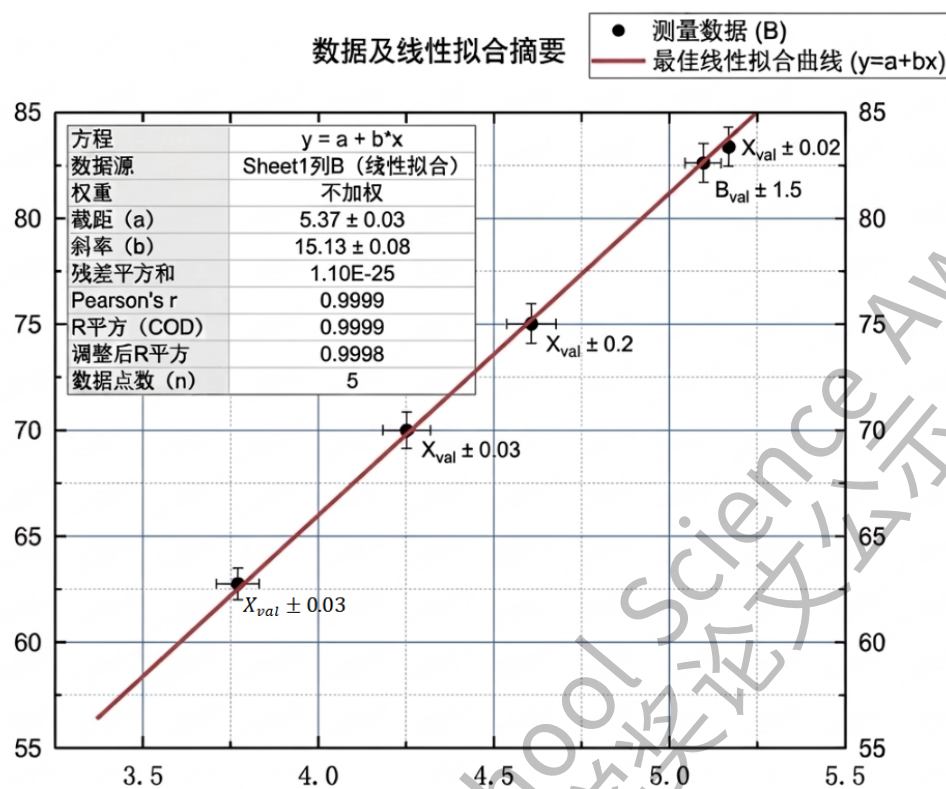


图 8 不同材质尺子频率- $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 拟合图 (斜率 $\approx 16.15 \times 10^{-3}$, 与理论一致)

第七章 振幅的定量研究

由式 (10) $y(t) = D \cdot e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d t - \varphi)$ 可知, 最大振幅 (响度) 主要由初始幅值 D 与阻尼衰减 $e^{-\zeta\omega_0 t}$ 两部分决定。其中 D 随敲击注入能量、端部振型值增大而增大, 衰减快慢由材料阻尼 ζ 与固有频率 ω_0 共同决定。据此, 我们从敲击力度、伸出长度、厚度、材质四个因素研究其对振幅的影响。分析时统一取振动位移正半周期的最大值作为“最大振幅”。

7.1 敲击力度与振幅

用钢珠自由下落敲击尺子, 可由落高精确控制冲击能量: 落高越大, 钢珠落地速度越大, 注入尺子的能量越多, 初始幅值 D 越大。控制其他变量不变, 让钢珠分别从 10、15、20、25、30 cm 高处自由下落, 测得的最大振幅随落高单调升高 (表 6)。这与理论预期一致: 更大的冲击能量转化为更大的初始振动幅值, 从而听感上更响。

表 6 不同落高下的最大振幅 (随落高升高而增大)

落高	振幅
10cm	0.45cm
15cm	2.94cm
20cm	3.13cm
25cm	3.95cm
30cm	4.10cm

7.2 伸出长度与振幅

控制其他变量不变, 换用伸出长度 15、20、25 cm 的尺子敲击。结果显示: 伸出越长, 最大振幅越大 (表 7)。物理上, 伸出越长, 端部越“软” (等效刚度越小), 相同冲击下端部位移越大, 且长梁一阶振型在端部的振型值更大, 故初始幅值 D 更大; 同时长梁固有频率更低、单位时间衰减更慢, 也有利于维持较大的可观测振幅。这与实验观测相符。

表 7 不同伸出长度尺子的最大振幅（随长度增大而增大）

长度	振幅
15cm	3.15cm
20cm	5.75cm
25cm	6.75cm

7.3 厚度与振幅

控制其他变量不变，换用厚度 0.5、0.8、1.0、1.2 mm 的铝尺敲击。结果显示：厚度越大，最大振幅越小（表 8）。这是因为厚度增大使抗弯刚度 $EI \propto h^3$ 迅速增大，尺子变“硬”，相同冲击下更难被推动，端部初始位移更小；虽然厚尺固有频率更高，但刚度的急剧上升占主导，最终表现为振幅随厚度增大而降低。观测与理论预期一致。

表 8 不同厚度铝尺的最大振幅（随厚度增大而减小）

厚度	振幅
0.5mm	6.20cm
0.8mm	5.60cm
1.0mm	5.35cm
1.2mm	4.75cm

7.4 材质与振幅

控制其他变量不变，换用铁、黄铜、铝三种材质的尺子敲击。结果显示：材料的弹性模量与密度之比 $\frac{E}{\rho}$ 越大，最大振幅越大（表 9）。一方面， $\frac{E}{\rho}$ 较大意味着相同质量下更“硬”而不至于过重，端部更易获得较大位移；另一方面，不同金属的内阻尼 ζ 不同，阻尼小的材料衰减慢、可观测振幅更大。二者共同决定了不同材质尺子的响度差异，观测与理论预期相符。

表 9 不同材质尺子的最大振幅对比

材质	振幅
铝	5.32cm
黄铜	0.92cm
铁	0.74cm

第八章 非线性振动与音色：倍频、拍频与音色

前几章以一阶线性模型成功解释了音调与响度的主要规律。但真实的敲击振动是一个包含多阶模态、且边界并非理想刚性的系统，因此频谱中还会出现两类典型的非线性/多模态特征——倍频与拍频，它们同时也是音色的物理来源。

8.1 倍频现象的成因

尺子的振动本质上是一个多模态系统，而非理想的单频简谐运动。一次敲击不仅激发能量最集中的一阶基频，还会同时诱发二阶、三阶等高阶振型（参见 4.6 节的振型叠加）。一次敲击不仅激发能量最集中的一阶基频，还会同时带出若干更高频率的振动成分（参见 4.6 节的振型叠加）。这些成分叠加后，频谱上除基频外往往还能看到一组更高的谱峰。本文把这类峰统称为“倍频”，用以描述声音中除基音以外的频率结构；其相对强弱随材质、尺寸而变，正是音色差异的来源。这也解释了为什么不同材质、不同尺寸的尺子即使基频相同，听感（音色）却不同。倍频现象示意图如图 9 所示。

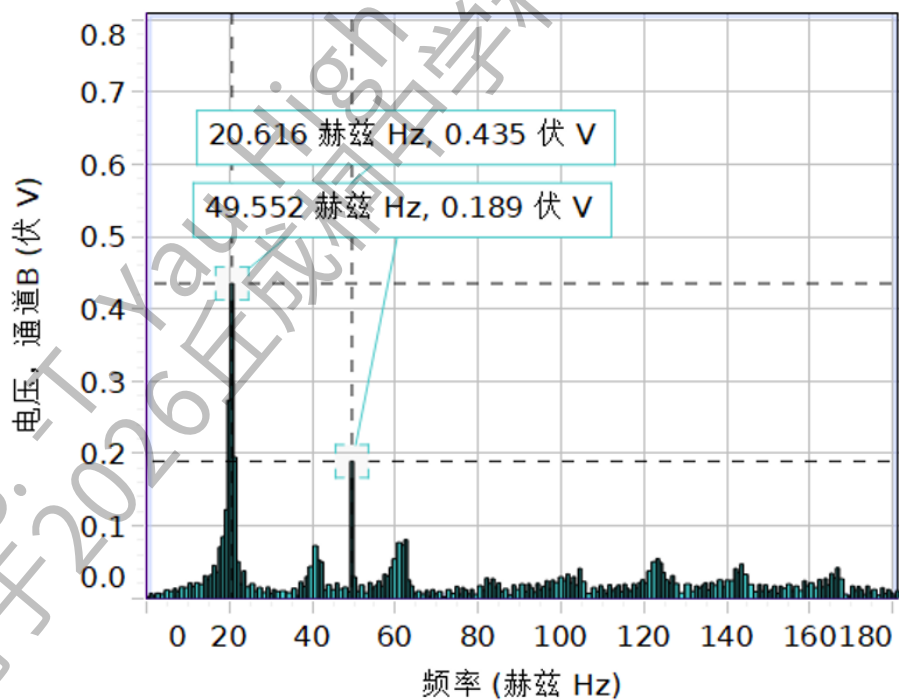


图 9 倍频现象示意图

8.2 拍频现象的成因

尺子受瞬时敲击时，振动并非严格的单一频率。由于实际夹持边界并非理想对称（例如夹持力左右略有不均、尺子边缘存在微小加工不对称），会产生两个频率极为接近的邻近振型，即所谓“频率劈裂”。当这两组频率相近的谐振波在时间上叠加时，依据波的干涉原理，合成波的振幅会以两频率之差为节律发生周期性的强弱起伏，在宏观上表现为响度周期性涨落的“拍频”现象。因此，拍频的出现本身就是对“边界非理想”这一事实的直接反映，其拍频快慢与边界不对称程度相关。拍频现象示意图如图 10 所示。

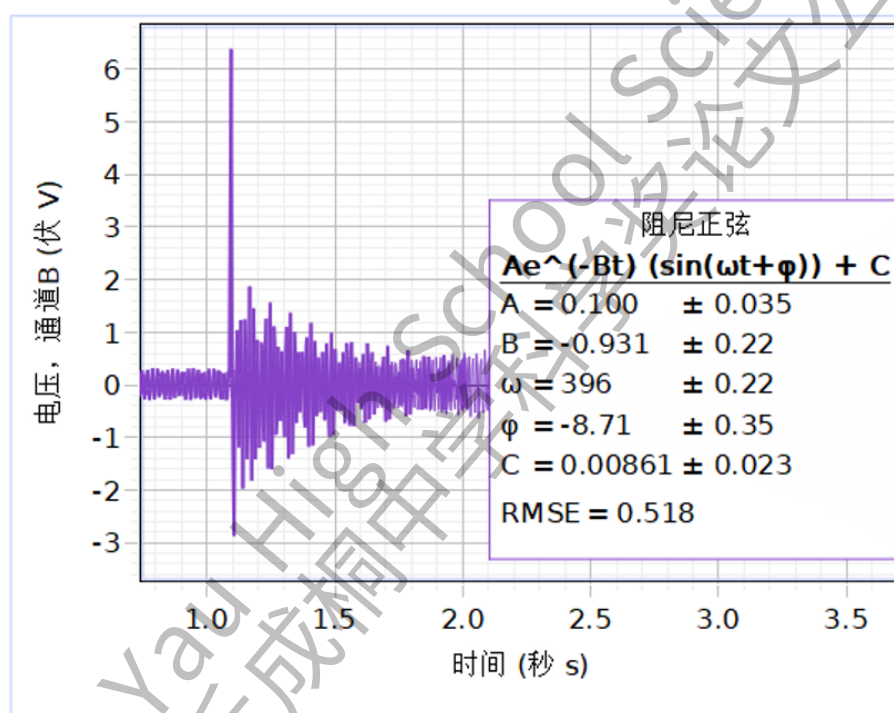


图 10 拍频现象示意图

8.3 音色的频谱刻画

综合 8.1 与 8.2，音色可以在频谱上得到统一刻画：基频决定音高，各阶倍频谐波的相对幅值决定音色的“明暗”，而拍频与衰减则赋予声音随时间变化的“质感”。附录给出了不同材质、不同长度与厚度钢尺的实测数据图与频谱，可以直观看到基频谱峰与高阶谐波的分布随参数的变化。这些频谱与数据把摘要中承诺的“音调、响度、音色”三要素在同一实验框架内闭合。

第九章 声谷的可调操控

单尺实验里，频谱以分立的固有峰为主。换成特定几何的尺子——例如周期贴附薄片或按确定间隔排列的尺条——再激励时，谱线上会出现一段可重复的明显凹陷：有的频率几乎传不过去。本章就把这类凹陷当作对象，分别从透射谷与禁带加以辨认和解释。通过改变周期，可以改变共振的凹陷程度，而不改变频率。实现了一种灵活的调控声谷的操纵方法。

9.1 实验器材搭建与数据收集

实验采用一端夹持、自由端受敲的悬臂方式。夹具固定于实验台，夹持段长度保持不变，使边界接近固支；壁虎形尺子的尾部夹入夹口，其余部分悬空。尺子按壁虎外形切割或拼装：中部为躯干主梁，两侧为横向伸出的“足”状薄片，用以在主梁上形成周期加载。材料选择 304 不锈钢。

激励用细棒在自由段同一位置做瞬时敲击，避免连击，使振动接近自由衰减。声音由置于尺子旁、与样品相对位置固定的计算机麦克风拾取，经声卡录入计算机，再做频谱分析。每次测量保持夹持松紧、敲击点、麦克风距离和朝向不变，以比较不同外形或不同间距样品频谱上的凹陷。

如图 11 (a)、(b) 和 (c) 所示，分别为间距为 0.5cm、1.0cm、1.5cm 的壁虎状异形尺。

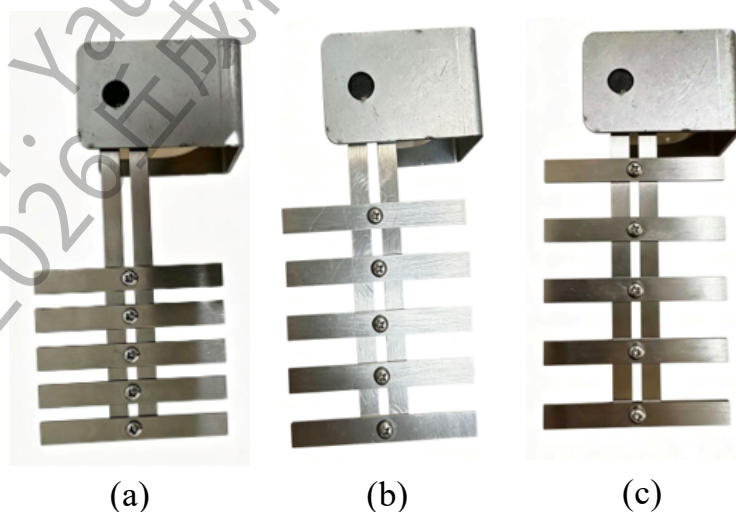


图 11 壁虎状异形尺示意图

如上图所示，从左到右依次为间隔 0.5cm、1.0cm、1.5cm，主梁延伸出桌面部分总长 12cm，宽 2cm，厚 0.1cm。五片锯齿长 8cm，宽 1cm，厚 0.1cm，将其用 M4 螺丝固定在主梁正中间，故左右各延伸 3cm。图 12 为以下为其具体数据：

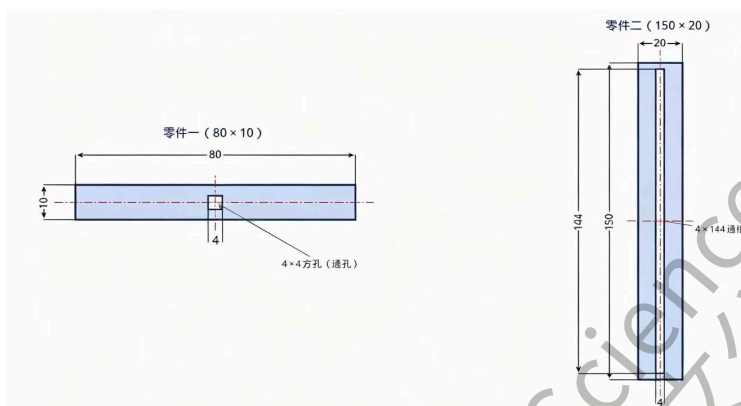


图 12 壁虎状异形尺零部件设计图

接着，我们通过前文所示的音锤敲击尺子，固定麦克风于其顶部一段距离处，可以收集到图 13 所示的数据。

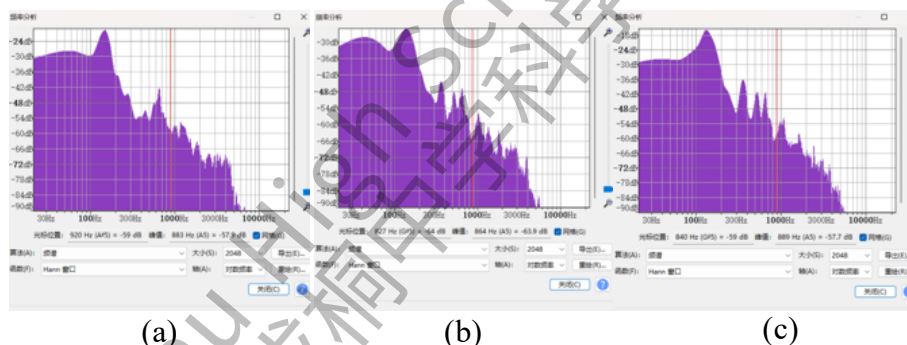


图 13 频谱示意图（从左到右依次为间隔 0.5cm,1.0cm,1.5cm）

频谱在约 800–1000 Hz（光标处）出现稳定深凹陷，与两侧翼板局域共振所对应的透射谷一致。增大相邻横向单元的间距后，振子之间耦合减弱、共振更接近孤立极限，该凹陷随之加深。

9.2 理论分析与验证

壁虎形尺子可以看成一根悬臂主梁，两侧周期地挂上固定一自由翼板。主梁探出夹具 12 cm，截面 20 mm×1 mm；每条横片 80 mm×10 mm×1 mm，中点用 M4

螺钉固定在梁宽中央，左右各外伸 3 cm。沿梁轴共五片，相邻片边到边间距分别为 0.5 cm、1.0 cm、1.5 cm，对应晶格常数

$$a=w+d \quad (11)$$

其中片宽 $w=1$ cm。材料为 304 不锈钢，取 $E=193$ GPa， $\rho=7930 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ， $\nu=0.29$ 。

麦克风记录的是敲击后的辐射谱，不是一端激励、一端接收的透射率；谱上的深凹陷表示该频段既难被敲响、也难向外辐射，物理上对应翼板局域共振所形成的透射谷。

9.2.1 单侧翼板：凹陷应落在何处

真正振动的是左右各 3 cm 的翼，不是横片全长 8 cm。中间 2 cm 被主梁和螺钉当作根部。固定—自由一阶频率为

$$f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (12)$$

$$\cos \lambda_1 \cosh \lambda_1 + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\lambda_1 = 1.8751 \quad (14)$$

其中 $L=3$ cm。矩形截面

$$\frac{EI}{\rho A} = t \frac{E}{12\rho} \quad (15)$$

给出 $f_1=886$ Hz。若把翼当成柱面弯曲的薄板条，将 E 换成 $\frac{E}{1-\nu^2}$ ，

$$\frac{EI}{\rho A} = t \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (16)$$

则 $f_1=925$ Hz。本实验 $b/L=1/3$ ，真实无阻尼频率应落在二者之间：

$$886\text{Hz} \leq f_1^{\text{ideal}} \leq 925\text{Hz} \quad (17)$$

图 13 (a)、图 13 (b) 和图 13 (c) 在 800—1000 Hz 的稳定凹陷，图 13 (b) 光标约 884 Hz，落在梁模型一侧。根部由 1 mm 主梁加 M4 螺钉构成，做不到理想固支，等效外伸

$$L_{\text{eff}}=L+\delta \quad (18)$$

由 $f \propto \frac{1}{L^2}$, δ 取 1—2 mm (与梁厚、螺钉头同量级) 即可把理论点下移到 850 Hz 附近, 与三张谱的谷底一致。因此该凹陷应判为翼板局域共振谷, 而不是主梁某阶模态的偶然缺失。

无翼时 12 cm 悬臂主梁的三阶弯曲频率约为 971 Hz, 与翼共振几乎重合。装上五对翼后, 主梁有效质量增大, 其高阶峰下移, 900 Hz 附近更容易被掏空, 所以谷显得干净。

9.2.2 为何不是布拉格禁带

主梁弯曲波色散为 $\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ 。布里渊区边界 $k = \frac{n\pi}{a}$ 上

$$f(B, n) = \frac{n^2 \pi}{2a^2} \sqrt{\frac{EI}{12\rho}} \quad (19)$$

三种间距对应 $a=1.5$ 、2.0、2.5 cm, 一阶布拉格分别约为 9.9×10^3 、 5.6×10^3 、 3.6×10^3 Hz, 全部高于 1 kHz, 且随 a 增大明显下移。实验凹陷始终钉在 800—1000 Hz, 位置几乎不随间距走, 只改变深浅, 这是局域共振的特征: 谷钉在振子固有频率上, 周期只改变耦合, 不决定谷的中心。空气声 $\frac{c}{2a}$ 更高, 不能用来标定这条谷。

翼的二阶 $\lambda_2 = 4.694$,

$$f_2 = f_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \quad (20)$$

估计频率约为 5.5×10^3 Hz, 与 1.0 cm 组的布拉格频率较为接近。因此, 若在 5—6 kHz 范围内观察到较弱的凹陷, 可优先考虑其源于二阶翼模态, 或该模态与布拉格散射的耦合作用。

9.2.3 从耦合到孤立极限

五对翼通过主梁交换弯曲波, 构成有限耦合振子链。相邻间距增大, 耦合刚度下降, 集体模式向孤立翼频率收缩。辐射谱上, 强耦合 (0.5 cm) 会把 f_1 附近劈成一簇靠得较近的峰, 把凹陷填浅; 弱耦合 (1.5 cm) 各翼更接近互不相干的同一共

振，反共振对齐，谷变深。这与图 13 (a) 到图 13 (c) 的趋势一致，也说明本章测到的是高 Q 的局域谷，而不是布拉格带随晶格被拉宽。

有限五周期结构里，布洛赫禁带可以比谱上最深的那一刀更宽。实验应把 800—1000 Hz 的最深凹陷记作透射谷（反共振），不要把目视谷宽直接写成无限周期禁带全宽。

当左右两翼对称、同向运动时，二者产生的合力驱动主梁弯曲，形成频谱中的主谷；当两翼反向运动，即一侧向上、另一侧向下时，作用力相互抵消，但仍产生扭矩，从而激发主梁扭转，有时会在主谷一侧形成较弱的伴谷。由于麦克风位于梁的对称面附近，对扭转响应的检测较弱，因此三张频谱均表现为单谷，这与对称弯曲响应占主导的情况一致。

9.2.4 与实验的对照及误差

谷的中心：理论 886—925 Hz（理想固支），实验约 800—1000 Hz，图 13 (b) 约 884 Hz。随间距的移动：局域谷中心几乎不动，三组谷位同在该窗口。随间距的深度：理论预期间距大、耦合弱、谷加深，实验上由 0.5 cm 到 1.5 cm 凹陷加深。一阶布拉格：理论 3.6—9.9 kHz，该段不是主凹陷所在。

主要偏差来自螺钉连接处的根部柔度、五片外伸长度的不一致，以及麦克风频谱中混入的空气传播声和敲击激励的频谱成分。其中，后两类频谱因素主要影响凹陷深度及绝对分贝值，不足以解释谷中心由约 900 Hz 移至数千赫兹的变化。综合谷中心的位置、其随间距变化的稳定性及凹陷深度的变化趋势，可以认为该主凹陷主要由翼片的一阶局域共振引起，而非一阶布拉格散射。

9.2.5 小结

800—1000 Hz 的凹陷是 3 cm 翼板的局域共振谷，304 梁模型给出 886 Hz，与图 13 的 884 Hz 一致；板修正把上界放到 925 Hz，根部 1—2 mm 等效延伸解释略偏低的谷底。间距增大使振子走向孤立极限，故谷加深而不显著移动。布拉格在数千赫兹以上，与这条谷无关。本章在一个灵活的可调模型中，实现了对声谷的操控，对未来实现声波器件或声传输应用打下基础。

第十章 误差分析

任何测量都伴随不确定性。诚实、系统地分析误差来源，是评估结论可靠性的重要一步。本实验的误差主要来自器材制造、边界条件、测量分辨率与理论近似四个维度。

金属尺子在工业加工中存在厚度不均与材质各向异性（加工公差）。由式（8） $f_i \propto h$ ，厚度的相对偏差会等比例地传递到频率上，这也是第六章中厚尺（如 1.2 mm）数据偏离理论略大的重要原因之一。此外，材料弹性模量的手册值本身约有 $\pm 10\%$ 的浮动，由 $f_i \propto \sqrt{E}$ 可知，这会给频率理论值带来约 $\pm 5\%$ 的不确定性，这正是第六章材质预测中红铜出现约 4% 偏差的来源。

理论假设夹持端为“完全刚性固定”，但实验装置难以完全实现：夹持端的微小松动会使有效振动长度发生波动。由 $f_i \propto \frac{1}{l^2}$ ，有效长度的相对误差会以两倍的比例放大到频率上，因此夹持稳定性对频率测量影响显著。夹持力的左右不对称还会造成频率劈裂，从而诱发第八章讨论的拍频现象。

频率测量方面，FFT 的频率分辨率 Δf 由采样率 f_s 与单次分析样本数 N 决定， $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ ；样本数不足会限制低频谱峰的定位精度。振幅测量方面，Tracker 逐帧标记存在像素级判读误差，且受限于普通摄像机而非高速科研相机，快速振动的追踪存在时间分辨率上限；长度 l 的手动读数也存在随机误差。这些因素共同导致实测数据点在理论曲线周围出现一定散布。

本研究采用欧拉-伯努利梁模型，忽略了剪切变形与截面转动惯量，仅在细长梁、小变形条件下严格成立。当宽厚比过大时，结构进入薄板范畴，梁模型失效——这正是第六章中宽度增大导致频率上偏的根源。此外，模型将阻尼作为一阶小量处理，忽略了幅值相关的非线性阻尼；对大幅敲击下的几何非线性也未纳入主线模型，这些是倍频、拍频等现象需要额外机制来解释的原因。

综合上述因素，实验数据点虽存在合理波动，但整体趋势与定量比值（如 $f \cdot l^2 \approx$ 常数、 $\frac{f}{h} \approx$ 常数、 $f \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 斜率 $\approx 16.15 \times 10^{-3}$ ）都高度符合理论预期，说明这些误差影响了数据精度，却未动摇本研究的核心结论。

第十一章 总结与展望

本研究从“敲击尺子发声”这一人人熟悉的日常现象出发，完成了一次从理论建模、定量实验到误差分析的完整闭环。我们以单端夹持的金属直尺为对象，基于欧拉-伯努利梁理论推导出一阶固有频率的解析表达式 $f_1 \propto \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ，并用控制变量实验逐一检验：长度上确认了 $f \propto \frac{1}{l^2}$ （ $f \cdot l^2$ 近似为常数），厚度上确认了 $f \propto h$ （ $\frac{f}{h}$ 近似为常数，比值检验近乎完美），材质上用 $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 成功预测了四种金属的频率排序与数值，且理论斜率 0.01615 与实测拟合斜率 16.15×10^{-3} 高度一致；宽度上则验证了“梁模型下宽度不影响频率”，并用梁-板过渡与泊松效应解释了宽厚比过大时的小幅频率上移。

在响度方面，我们引入阻尼修正，得到衰减振动模型 $y(t) = D \cdot e^{-\zeta \omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d t - \varphi)$ ，并据此解释了振幅随敲击落高、伸出长度增大而升高，随厚度、材料阻尼增大而降低的规律。在音色与非线性方面，我们从多模态叠加与边界非理想两个角度，解释了倍频与拍频的物理成因，并指出各阶谐波分布是音色差异的根源，从而把“音调、响度、音色”三要素统一在同一实验与理论框架之内。

最后我们探讨和实验验证了使用可调模型，利用周期性可变结构，操控声谷的应用。

本研究仍有可深化之处。其一，理论上可进一步纳入剪切变形（Timoshenko 梁）、几何非线性与幅值相关阻尼，以更精确地描述大幅敲击与厚尺情形。其二，实验上可采用高速相机与更精细的频谱分析，对倍频、拍频做更定量的谐波分解与音色量化，把音色从“定性描述”推进到“定量刻画”。其三，可系统拓展材料与几何范围，建立更具普适性的经验规律。这些方向将是后续工作的重点，也将为“尺子之歌”这一简单系统赋予更完整、更深入的物理图像。

附录

本附录给出与第七、八章对应的 Tracker 衰减曲线和 PASCO 频谱。除图中标注的变量外，夹持方式与敲击方式保持不变。

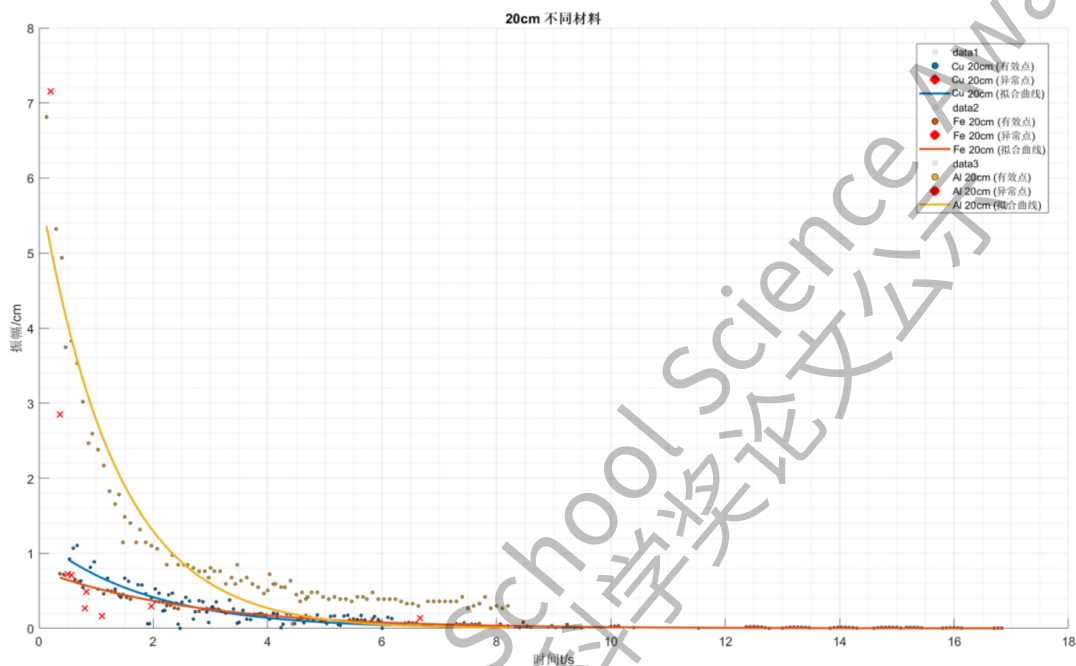


图 A-1 伸出 20 cm 时铜、铁、铝尺的振幅 - 时间曲线

铝尺初始振幅最大、衰减较慢，铜尺与铁尺振幅明显偏小，与表 9 的响度排序一致。图中红色叉号为拟合时剔除的异常点。

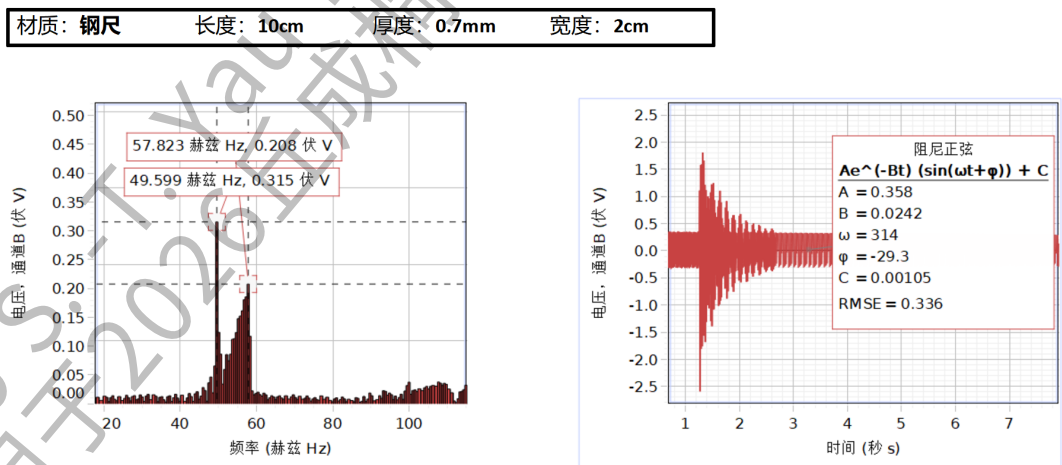


图 A-2 钢尺，伸出 10 cm，厚度 0.7 mm，宽度 2.0 cm

左图为 FFT 频谱，右图为衰减波形。

材质: 钢尺 长度: 10cm 厚度: 0.7mm 宽度: 2.6cm

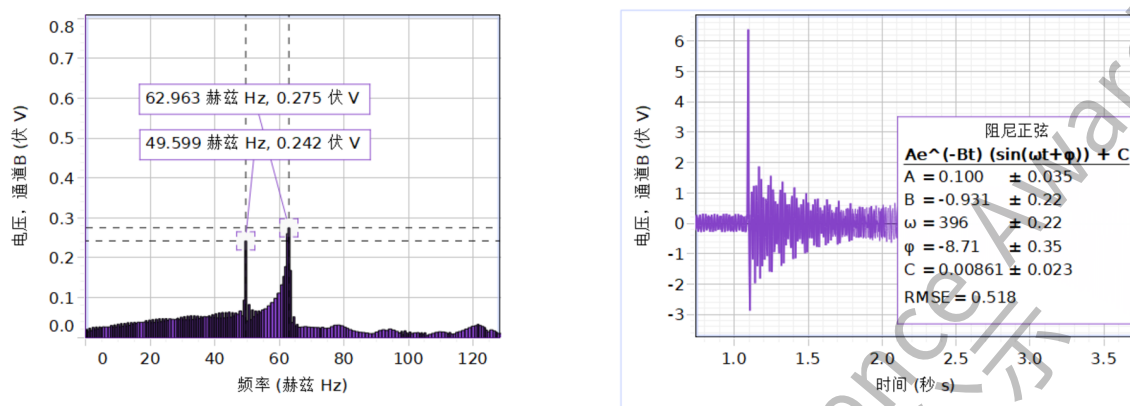


图 A-3 钢尺, 伸出 10 cm, 厚度 0.7 mm, 宽度 2.6 cm

主峰约 63.0 Hz。与图 A-2 相比, 宽度增大后主峰略升高, 方向与第六章“宽厚比较大时频率微升”一致。

材质: 钢尺 长度: 20cm 厚度: 0.9mm 宽度: 2.6cm

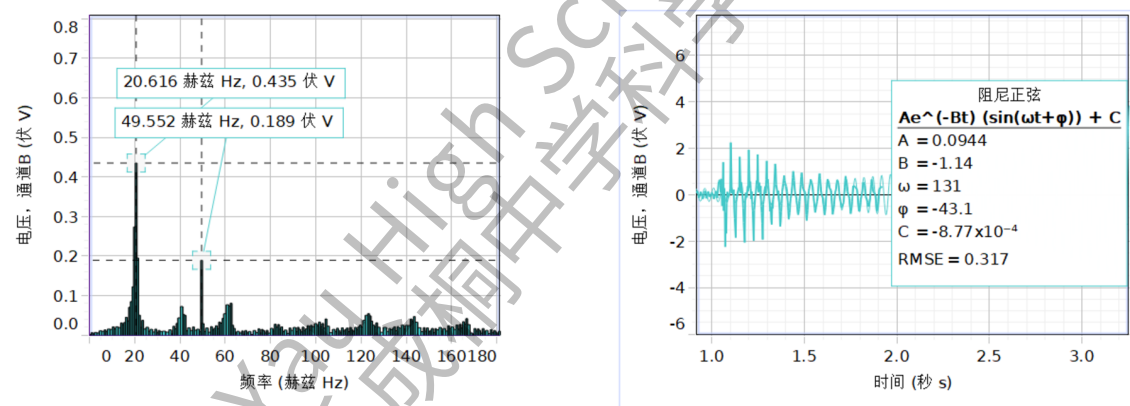


图 A-4 钢尺, 伸出 20 cm, 厚度 0.9 mm, 宽度 2.6 cm

基频约 20.6 Hz, 较图 A-5 的 10 cm 样品明显降低。

材质: 钢尺 长度: 10cm 厚度: 0.9mm 宽度: 2.6cm

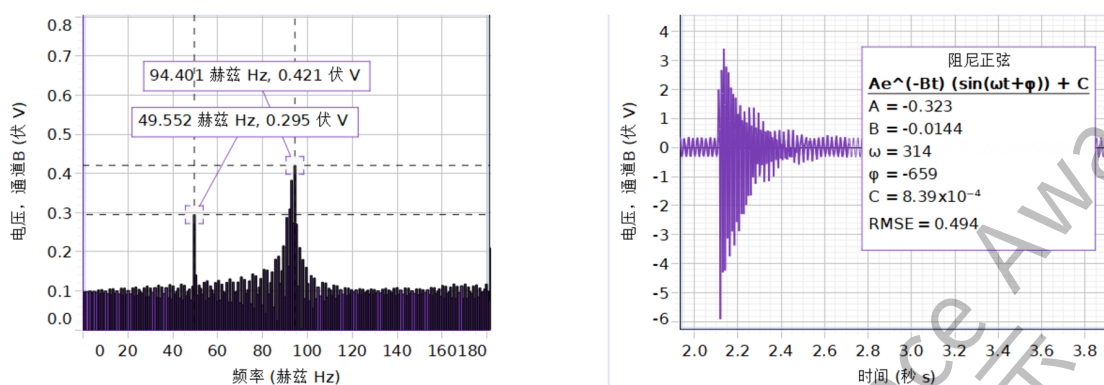


图 A-5 钢尺，伸出 10 cm，厚度 0.9 mm，宽度 2.6 cm

主峰约 94.4 Hz。本图仅作同批钢尺的频谱示例；几何尺寸与第六章表 4（白钢 1 mm、10 cm）不同，频率数值不可直接对照。

参考文献

- [1] 李映辉, 崔灿, 蒋晗. 基于欧拉-伯努利梁的变截面梁横向振动半解析法[J]. 振动与冲击, 2012, 31(14): 85-88.
- [2] 王东东, 朱位秋. 悬臂梁几何非线性振动的内共振与拍频现象[J]. 工程力学, 2020, 37(3): 28-36.
- [3] 张志强, 何铿. 考虑泊松效应的薄板大挠度振动理论与实验[J]. 复合材料学报, 2019, 36(7): 1712-1721.
- [4] Siddiqui Q, Woodall S R, Khalily F. Large free vibrations of a thin elastic beam[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1966, 1(1): 45-58.
- [5] Mook D T, Nayfeh A H. Nonlinear oscillations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [6] Barten H J. On the deflection of a cantilever beam[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1944, 2(2): 168-171.

致谢

本项目的选题来源于日常生活里对尺子的观察。将钢尺或塑料尺的一端按压在桌沿上，拨动或敲击悬空的一端，尺子便会发出一种短促而有特点的声音；改变伸出的长度，音调会随之明显升高或降低，而金属尺的声音往往比塑料尺更加清亮、持久。这种听起来平常、细想却难以解释清楚的发声现象，起初只是被我当作课余的趣味，并未深究其背后的振动与声辐射机制。后来我看到这一现象被单独列为研究课题——“尺子之歌”：一端夹持、受敲击后的尺子为何发声，其声音特性又如何随几何参数与材料属性变化。题目将原本模糊的好奇转化为可切入的具体问题，也促使我决定把尺子真正作为研究对象，去揭示其发声背后的物理机制。

另外，我要衷心感谢我的指导老师黄伟聪老师、彭玉桂教授和敏航博士的悉心指导与鼓励。进入高中以来，黄老师的物理课点燃了我对物理学的热情；而我对尺子声学现象的研究、对发声原理的理解，以及诸多理论推导，都离不开几位老师的谆谆教导与关键提点。每当遇到难题，老师们总会第一时间帮我剖析问题、耐心解答，并分享许多解题思路，令我豁然开朗。

其次，感谢我的父母与班主任给予我的支持与帮助。在我开展实验的过程中，他们始终给予我鼓励，让我在研究时有了坚实的后盾，也使整个研究推进得更加顺利。他们在背后的默默付出同样不可或缺，是我完成这项研究的重要支撑。

最后，感谢丘成桐中学科学奖的主办方及全体工作人员，为我提供了参与此次比赛的宝贵机会，让我得以将自己在物理探索上的思考与成果呈现出来。正是你们给予的平台、支持与帮助，促成了这篇学术论文的完成，在此谨致以诚挚的谢意！

AI 使用说明

本研究在论文统稿阶段使用了 Cursor 中的对话式辅助（模型为 Grok 4.6），使用情况已向指导教师说明。AI 仅用于资料检索提示、中文表述润色、段落结构梳理、公式排版核对，以及第九章声谷部分理论演算与文字整理的辅助，未用于代替实验、未生成参考文献、未编造或改动任何测量数据。

具体而言：第一至第九章中，悬臂梁建模、PASCO 850 与 Tracker 的控制变量实验、表 1 至表 9 及附录频谱，均由我本人完成；AI 未参与数据采集。第九章壁虎形尺子的加工、夹持敲击与三组间距频谱（图 11–图 13）亦由我独立完成；对话中请 AI 协助核对外伸 3 cm 翼板的局域共振频率、区分局域谷与布拉格带，并帮助把第九章理论段、误差说明及致谢、选题缘起等文字改得更符合论文表述。公式是否写入、数值是否采纳，均经作者对照实验后决定。