

参赛学生姓名: Michael Jia Dong Ho

中学: 武汉爱莎文华高级中学

省份: 湖北省

国家/地区: 中国

指导老师姓名: 王小亚、阮锦龙

指导老师单位: 武汉爱莎文华高级中学

论文题目: 一种基于实测有限尺寸磁相互作用
的非接触磁摆链动力学与模态研究

一种基于实测有限尺寸磁相互作用的非接触磁摆链动力学与模态研究

摘要

本文研究由有限尺寸轴向磁化圆柱永磁体构成的非接触磁摆链，考察实测磁相互作用如何决定有限链的平衡构型、正常模态及端点释放后的瞬态动力学。实验对七块同规格磁体分别在 $h = 0, 5, 10, 15$ 和 20 mm 五个高度进行径向扫描，测量范围为 $r = 0\text{--}50\text{ mm}$ ，获得空间磁场分量 $B_r(r, h)$ 和 $B_z(r, h)$ 。在 $h = 0$ 测量层，七块磁体的 B_z 与 B_r 平均峰值分别为 92.112 mT 和 37.879 mT 。以一号磁体为基准，点磁偶极模型在完整测量域内得到 $R^2 = 0.6789$ 、 $\text{RMSE} = 7.023\text{ mT}$ ，均匀磁化有限圆柱模型得到 $R^2 = 0.9833$ 、 $\text{RMSE} = 1.602\text{ mT}$ 。当取 $\rho \geq 2R = 25\text{ mm}$ 的数据时，点磁偶极模型的 R^2 提高至 0.9592 ，反映出点偶极近似随观测距离增加而逐渐接近实测磁场。

由有限圆柱模型分别确定七块磁体的磁化强度，并将逐块磁参数依次传递到随摆角变化的两体磁势、全磁体对总势能、稳定平衡构型及其 Hessian。由此建立的有限链模型同时保留磁体有限半径和厚度、摆动过程中磁体中心与磁轴的几何变化、磁体间磁强差异以及非相邻磁体的长程作用。单摆自由衰减实验得到 $\beta = 0.059979/\text{s}$ 和 $T_d = 0.754297\text{ s}$ ，相应耗散参数用于模态与时域动力学计算。

本文的主要创新体现在三个方面：由逐块实测二维空间磁场建立有限尺寸多摆磁耦合参数链；在实际摆动几何下构造保留全部磁体对长程作用的有限尺寸多体模型；在一次基准校准后保持模型参数固定，完成跨链长、跨悬点间距的参数迁移检验。

在 $N = 3$ 、 $a = 60\text{ mm}$ 的基准链中，第二和第三实验模态共同确定有效磁势尺度 $\lambda_m = 0.473305$ 。第一模态主要表现为近同相低阶振动，格点间相对运动较小，其频率对磁耦合强度变化不敏感，因此保留用于独立频率比较。随后保持 λ_m 不变并迁移至更长有限链。对于 $N = 5$ 和 $N = 7$ ，模态频率平均绝对相对误差分别为 2.62% 和 4.10% ；七摆链理论与实验空间振型的平均复模态保证准则为 0.919 。固定 $N = 5$ 并将悬点间距由 40 mm 增加至 80 mm 时，实验五阶模态带宽由 1.9232 Hz 减小至 0.2606 Hz 。四种间距共 20 个模态频率的平均绝对相对误差为 2.85% ，最大绝对相对误差为 5.42% 。

本文实验比较覆盖 $N = 3, 5, 7$ 的双线悬挂有限链，间距实验覆盖 $a = 40\text{--}80\text{ mm}$ ，磁体在运动过程中保持非接触和无重叠。正常模态对应稳定平衡附近的小振幅线性化，端点释放过程则采用完整有限圆柱磁势进行非线性时间积分。在上述条件下，实验与理论均显示：随悬点间距增加，长程磁耦合减弱，有限链离散模态的频率分裂和整体频带宽度随之收缩。

关键词：非接触磁摆链；有限尺寸磁相互作用；均匀磁化有限圆柱；长程耦合；模态；色散关系

Dynamics and Modes of a Non-Contact Magnetic Pendulum Chain with Experimentally Characterized Finite-Size Magnetic Interactions

Abstract

This work investigates a non-contact magnetic pendulum chain composed of finite-sized, axially magnetized cylindrical permanent magnets, focusing on small-amplitude normal modes near stable equilibria and finite-amplitude transients following endpoint release. Seven nominally identical magnets were scanned at $h = 0, 5, 10, 15, 20$ mm over $r = 0\text{--}50$ mm to obtain $B_r(r, h)$ and $B_z(r, h)$. At $h = 0$, the mean peak values of B_z and B_r were 92.112 mT and 37.879 mT. For magnet 1, the point-dipole model gives $R^2 = 0.6789$ and RMSE = 7.023 mT over the full measured domain, while the uniformly magnetized finite-cylinder model gives $R^2 = 0.9833$ and RMSE = 1.602 mT. For $\rho \geq 2R = 25$ mm, the point-dipole model reaches $R^2 = 0.9592$.

The magnetization of each magnet is determined from the finite-cylinder model and transferred to the angle-dependent pair potentials, the all-pair chain potential, stable equilibria, and the corresponding Hessian. The model retains finite magnet geometry, pendulum-induced translation and rotation, magnet-to-magnet variation, and non-nearest-neighbour interactions. Free-decay measurements give $\beta = 0.059\,979/\text{s}$ and $T_d = 0.754\,297\text{ s}$, which are used in the subsequent dynamical calculations.

The main contributions are threefold: a finite-size magnetic-coupling parameter chain is established from individually measured two-dimensional magnetic fields; an all-pair finite-size many-body model is constructed in the actual pendulum geometry to retain long-range magnetic interactions; and, after a single baseline calibration, the model parameters are kept fixed and tested across different chain lengths and pivot spacings.

For the baseline chain with $N = 3$ and $a = 60$ mm, the second and third experimental modes determine $\lambda_m = 0.473305$. The first mode is a low-order near-in-phase motion with small relative motion between pendulums and is therefore weakly sensitive to the magnetic coupling strength; it is retained as an independent frequency check. With λ_m fixed, the mean absolute relative modal-frequency errors are 2.62% for $N = 5$ and 4.10% for $N = 7$, and the seven-pendulum chain gives a mean complex modal assurance criterion of 0.919. For fixed $N = 5$, increasing the pivot spacing from 40 mm to 80 mm reduces the measured five-mode bandwidth from 1.9232 Hz to 0.2606 Hz. Across the 20 modal frequencies measured at four spacings, the mean and maximum absolute relative errors are 2.85% and 5.42%, respectively.

The experimental comparisons cover bifilar finite chains with $N = 3, 5, 7$, pivot spacings of 40–80 mm, and non-contact magnet configurations. Normal modes are obtained from linearization about stable equilibria, while endpoint-release trajectories are calculated with the full nonlinear finite-cylinder potential. Within this range, increasing the pivot spacing weakens the long-range magnetic coupling and reduces both modal splitting and spectral bandwidth.

Keywords: non-contact magnetic pendulum chain; finite-size magnetic interaction; uniformly magnetized finite cylinder; long-range coupling; normal modes; dispersion relation

目录

摘要	I
Abstract	II
第一章 引言	1
第二章 国内外研究现状与相关工作	4
2.1 磁摆与磁耦合振子的动力学研究	4
2.2 磁晶格、长程耦合与频谱调控	4
2.3 有限尺寸永磁体的磁场与相互作用建模	5
2.4 现有研究缺口与本文研究路径	5
第三章 实验系统与测量方法	6
3.1 非接触磁摆装置	6
3.2 磁场测量	7
3.3 单磁摆自由衰减	8
3.4 链长与悬点间距	9
第四章 从实测磁场到两体磁相互作用	11
4.1 点磁偶极近似	12
4.2 均匀磁化有限圆柱	12
4.3 近场与远场的模型比较	13
4.4 七块磁体的磁参数	14
4.5 两体磁相互作用	14
第五章 磁摆链动力学模型	16
5.1 实验几何与广义坐标	16
5.2 旋转有限圆柱的两体磁势	17
5.3 势能核的数值表示	18
5.4 两体势能地形	21
5.5 有限链的拉格朗日方程	22
5.6 链长与悬点间距对静止构型的影响	23
5.7 线性化与有限链正常模态	24
5.8 长程角向耦合与色散关系	26
5.9 非线性初值与能量输运量	27
第六章 实验检验	29
6.1 $N = 3$ 有限链的端点释放动力学	29
6.1.1 端点释放与实验观测量	29
6.1.2 非线性瞬态响应与理论实验对照	30
6.1.3 实验本征频率与模态动力学	31
6.1.4 三格点有限链的时空响应	33

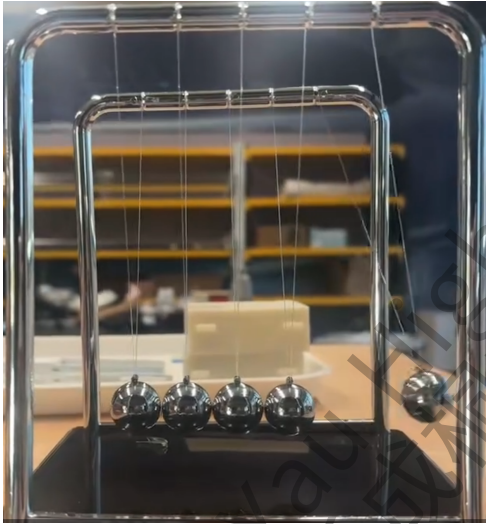
6.2	链长对有限链动力学的影响	34
6.2.1	$N = 5$ 的固定参数迁移	34
6.2.2	$N = 7$ 的固定参数迁移	36
6.3	$N = 7$ 下相互作用模型比较	38
6.4	悬点间距	40
6.4.1	间距与线性化频谱	41
6.4.2	实验响应与模态演化	42
第七章	误差分析与不确定度量化	45
7.1	不确定度评定方法	45
7.2	磁场测量不确定度与磁体间离散性	46
7.2.1	特斯拉计 B 类不确定度	46
7.2.2	位置误差的传播	46
7.2.3	七块磁体的磁场离散性	47
7.3	阻尼参数的不确定度	47
7.4	Tracker 角度测量不确定度	49
7.5	模态频率识别稳定性	50
7.6	理论模态频率的不确定度传播	51
7.7	误差与不确定度汇总	51
第八章	总结与展望	53
8.1	主要结论	53
8.2	局限性与模型适用边界	53
8.3	展望	54
参考文献		55
致谢		57
附录说明		59
附录 A	均匀磁化有限圆柱的轴向磁场	60
A.1	等效束缚电流表示	60
A.2	单个电流环的轴向磁场	60
A.3	实验高度坐标与轴向解析式	61
A.4	远场极限与点磁偶极模型	61
附录 B	有限圆柱离轴磁场与两体相互作用能	63
B.1	圆电流环的离轴磁场	63
B.2	有限圆柱离轴场	64
B.3	理论磁场与实验测量坐标	64
B.4	摆链中的磁体位置与磁化方向	65
B.5	有限圆柱两体相互作用能	65
B.6	四维曲面积分的离散求积	67
B.7	角度查表与连续插值	67
附录 C	动力学导数、Hessian 与数值验证	69
C.1	总势能与广义磁力矩	69
C.2	几何导数	70
C.3	固定取向中心势的特殊极限	70
C.4	非线性动力学方程	71

C.5	静态平衡、Hessian 与正常模态	71
C.6	势能梯度的有限差分核验	72
C.7	Hessian 的双重核验	73
C.8	有限圆柱求积收敛性	73
C.9	无阻尼能量守恒	74
C.10	含阻尼系统的能量闭合	74
C.11	数值计算流程	75
C.12	计算流程伪代码	76
附录 D 七块磁铁的逐点拟合		79
附录 E 补充图像与扩展分析		81
E.1	统一频率基准与观测坐标	81
E.2	链长增加时的物理相空间结构	83
E.3	统一模态基下的时间演化	85
E.4	实验模态识别与空间振型一致性	87
E.5	线性化模态成分与完整非线性能量	90
E.6	链长增加时的时频结构	94
E.7	参数敏感性、数据质量与频率识别稳定性	96
E.8	时间域残差与跨链长模型误差结构	97
E.9	链长变化下的模态与误差特征	99
附录 F 悬点间距实验的模态识别与频谱检验		100
F.1	频谱与数据处理检验	100
附录 G 悬点间距实验的观测空间振型		103

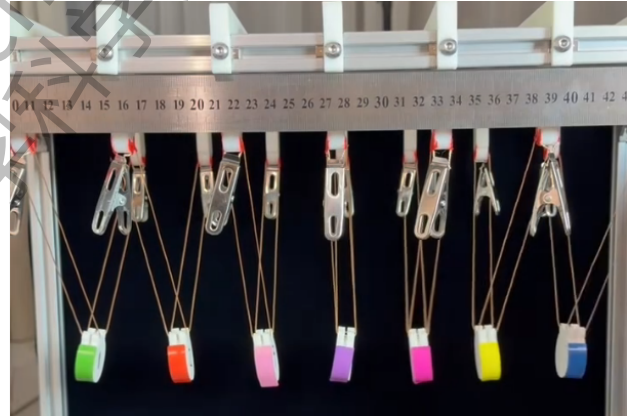
第 1 章 引言

离散振子链是研究多自由度耦合、正常模态、色散、非线性、局域化与能量输运的典型物理体系。有限个振子在现场回复作用和单元间耦合作用下形成空间离散结构，其动力学同时受到边界条件、耦合范围和机械耗散的影响。机械晶格将这些过程放在可直接观测的宏观尺度上，为离散多体动力学提供了兼具可测量性、可建模性和可验证性的实验对象。

传统牛顿摆通过相邻摆球之间的接触碰撞传递动量和能量。磁性牛顿摆采用非接触磁耦合，各摆之间持续通过磁场相互作用，系统的耦合强度随磁体间相对位置连续变化。IYPT 2026 第 15 题 *Magnetic Newton's Cradle* 即以这一体系为背景 [1]。在端点释放条件下，有限链中的运动由重力回复、磁耦合、机械耗散和边界共同决定，因此既适合研究有限链正常模态，也适合讨论局域能量交换与传播。



(a)



(b)

图 1.1: 传统牛顿摆与非接触磁性牛顿摆的实验构型。

Experimental configurations of a conventional Newton's cradle and a non-contact magnetic Newton's cradle.

磁性振子链及相关磁机械晶格已经用于研究多种离散动力学现象。Russell 等研究了磁摆链中的移动离散呼吸子，并讨论了磁耦合对有限链动力学的影响 [2]。Molerón 等通过排斥磁体链研究了孤立波传播及其幅值依赖特征 [3]。Mehrem 等进一步讨论了磁排斥晶格中的非线性色散和谐波传播 [4]。针对长程相互作用情形，Molerón 等又分析了磁晶格中的长程耦合对非线性激发和空间结构的作用 [5]。在磁静力学方面，Vokoun 等给出了均匀轴向磁化有限圆柱之间的相互作用模型，为实际圆柱磁体的有限尺寸描述提供了基础 [6]。

已有研究表明，磁机械系统兼具清晰的离散结构和连续的非接触相互作用，适合研究正常模态、色散与能量传递。然而，对于由实际圆柱永磁体组成的有限磁摆链，还存在几个彼此关联的问题。其一，实验中使用的磁体具有有限半径和厚度，工作距离又与磁体尺寸处于相近尺度，此时单磁体外场保留明显的有限尺寸空间结构。其二，同规格磁体之间仍存在逐块磁强差异，这些差异会进一步影响多体耦合强度。其三，有限链中非相邻磁体之间仍可直接相互作用，长程磁耦合需要在模型中整体保留。其

四，摆动过程会改变磁体的中心位置和相对构型，因此单磁体空间磁场、两体磁势、有限链模态与时域能量交换之间需要建立统一的参数联系。

基于上述问题，本文从单磁体二维空间磁场测量出发，依次建立有限尺寸磁相互作用模型、有限链动力学模型以及跨条件验证框架。实验分别测量七块轴向磁化圆柱磁体的二维空间磁场分布 $B_r(r, z)$ 和 $B_z(r, z)$ ，并利用均匀轴向磁化有限圆柱模型确定各磁体的磁化强度 M_i 。在此基础上，将逐块标定得到的磁学参数引入实际摆动几何下的两体磁势 $U_{ij}^{cyl}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij})$ ，进一步构造包含全部磁体对的有限链总势能 $V(\theta)$ ，并由平衡构型附近的 Hessian 矩阵 $\mathbf{H}$ 确定小振幅正常模态。

为使实验参数能够稳定传递至不同链长和不同几何条件，本文首先在基准链 $N = 3$ 、 $a = 60$ mm 下确定统一的有效磁相互作用尺度 λ_m ，随后保持磁学和机械参数固定，分别研究 $N = 5$ 、 $N = 7$ 以及 $N = 5$ 时 $a = 40$ 、 60 、 70 、 80 mm 条件下的模态频率和空间振型。除频域比较外，本文还进一步由实验轨迹重构局域能量 $E_i(t)$ 与磁体对瞬时能流 $J_{i \rightarrow j}(t)$ ，并与相同参数下的理论结果进行比较，从而将有限链正常模态与时域能量输运联系起来。相同的有限圆柱磁相互作用还用于构造周期长链的色散关系 $\omega = \omega(q)$ ，以讨论有限链模态分裂、频带宽度与周期链色散结构之间的对应关系。

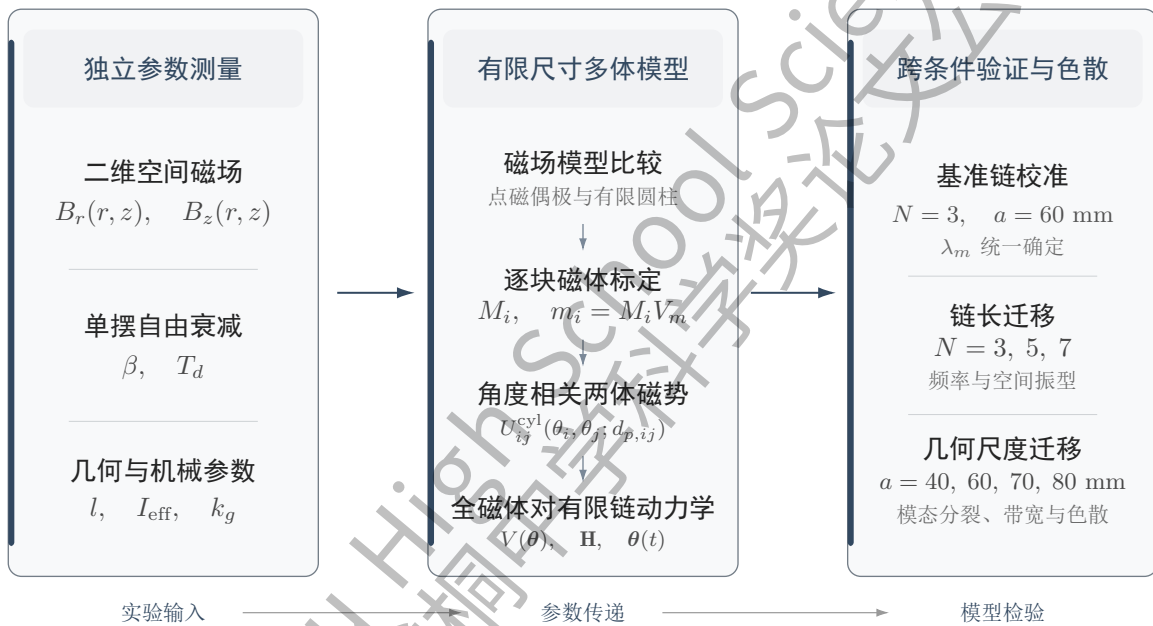


图 1.2: 二维磁场和机械参数经有限圆柱磁静力模型传递至有限链动力学，并在不同链长和悬点间距下进行跨条件验证。

Workflow from two-dimensional magnetic-field and mechanical measurements through the finite-cylinder magnetostatic model to finite-chain dynamics and cross-condition validation.

图 1.2 概括了本文的实验、建模与验证流程。首先，由二维空间磁场测量和单摆自由衰减实验分别确定磁学参数与机械参数，包括 M_i 、 β 、 T_d 、 l 、 I_{eff} 和 k_g 。随后，这些参数进入有限圆柱两体磁势和全磁体对有限链模型，从而得到有限链的平衡构型、Hessian 矩阵和正常模态。

在验证阶段，本文以基准链 $N = 3$ 、 $a = 60$ mm 统一确定有效磁相互作用尺度 λ_m ，并将该参数迁移到不同链长和不同悬点间距条件。理论与实验同时比较本征频率、空间振型以及由实验轨迹重构得到的局域能量 $E_i(t)$ 与磁体对瞬时能流 $J_{i \rightarrow j}(t)$ 。在此基础上，再利用相同的有限圆柱磁相互作用构造周期磁摆链的色散关系 $\omega = \omega(q)$ ，从而将有限链模态、频带宽度与长链色散结构联系起来。

本文的主要创新体现在以下三个方面。

第一，建立了由逐块实测二维空间磁场驱动的有限尺寸多摆磁耦合参数链。本文对七块实际圆柱磁体分别测量 $B_r(r, z)$ 和 $B_z(r, z)$ ，并由有限圆柱模型确定各磁体的磁化强度 M_i 。由此形成从 B_r, B_z 到 M_i ，再到 U_{ij}^{cyl} 、 $V(\theta)$ 、 $\mathbf{H}$ 以及 $\{\omega_k, \phi_k\}$ 的连续参数传递关系，使有限尺寸效应和逐块磁强差异直接进入有限链动力学。

第二，建立了保留全部磁体对长程作用的有限尺寸多体模型。在实际摆动几何下，两体磁势写为 $U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij})$ ，有限链中保留全部 $1 \leq i < j \leq N$ 磁体对，从而将有限尺寸效应、逐块磁强差异和长程磁耦合统一纳入总势能、平衡构型、Hessian 和正常模态计算。同时，本文进一步由实验和理论轨迹构造 $E_i(t)$ 与 $J_{i \rightarrow j}(t)$ ，用于描述有限链中的局域能量交换过程。

第三，完成了统一基准校准下的跨链长、跨间距参数迁移验证。本文在 $N = 3$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 条件下统一确定 λ_m ，随后保持模型参数固定，用于预测 $N = 5$ 、 $N = 7$ 以及 $N = 5$ 时 $a = 40$ 、 60 、 70 、 80 mm 条件下的动力学。实验比较同时覆盖本征频率、空间振型和瞬时能流；相同的有限圆柱磁相互作用还用于构造周期链色散关系 $\omega = \omega(q)$ ，从而把有限链模态、模态带宽与周期链色散结构统一到同一框架中。

综上，本文建立了从单磁体二维空间磁场测量、有限尺寸两体磁势到全磁体对有限链动力学、局域能量交换和周期链色散的统一研究路径，并在不同链长和不同悬点间距下检验了该模型的参数迁移能力。

第 2 章 国内外研究现状与相关工作

非接触磁摆链同时涉及离散振子、永磁体近场相互作用、有限链正常模态和非线性能量交换。与这一问题直接完全对应的研究数量相对有限，但其相邻领域已经形成几条较清晰的研究路线：一类关注磁摆和磁耦合振子的非线性响应与能量交换；一类关注磁晶格、长程耦合和可调频谱；另一类关注有限尺寸永磁体的磁场与力学相互作用建模。本文的研究路径需要把这些原本相对分散的工作连接到同一实验参数链中。

2.1 磁摆与磁耦合振子的动力学研究

Russell 等较早构造了重力回复下的磁摆链，并研究移动离散呼吸子及其频谱特征，建立了磁摆体系与离散非线性晶格之间的联系 [2]。随后，磁摆研究更多扩展到受迫振动、非线性共振、混沌和模态结构。Polczyński 等对受外部磁激励的双摆系统开展实验、数值和解析研究，并通过实验磁力矩近似建立动力学模型 [7]。Pilipchuk 等进一步研究两个磁摆之间的共振能量交换及其方向控制，说明磁场可以直接改变耦合振子之间的能量流 [8]。Surganova 和 Mikhlin 在双摆磁场系统中研究局域与非局域非线性正常模态，并在后续工作中讨论这些模态的稳定性 [9, 10]。

近年的实验工作也继续采用磁耦合摆作为可直接观测的多自由度体系。Pathak 等使用两个摆动磁体和磁强计测量磁矩与振动周期，并将实验与数值模型比较 [11]。国内相关研究更多集中在磁耦合振动与能量采集：阚君武等通过实验和有限元分析研究磁体间距对磁耦合压电振动系统两个共振频率及输出特性的影响 [12]；石慧荣等在含摆锤的压电磁耦合系统中分析磁体间距和摆臂参数对组合共振与有效频带的影响 [13]。这些研究说明磁耦合强度、几何间距和多自由度结构会共同改变频谱与能量交换，但研究对象多为单摆或双自由度系统，磁相互作用也常以实验拟合力、磁力矩或有限元结果进入动力学方程。

2.2 磁晶格、长程耦合与频谱调控

在一维排斥磁体晶格中，Molerón 等直接测量磁体排斥力并研究孤立波传播，指出当工作距离与磁体尺度可比时，实际相互作用不能简单等同于理想点偶极极限 [3]。Mehrem 等进一步研究排斥磁晶格中的非线性色散与高次谐波传播，并将弱非线性极限与 α -FPU 型晶格联系起来 [4]。针对非相邻单元仍具有直接作用的情形，Molerón 等建立长程磁晶格模型，系统分析不同邻居阶数对色散关系、局域激发和空间结构的影响 [5]。

更广泛的磁机械超材料研究表明，磁作用可以用于连续调节结构刚度和带隙。Montgomery 等利用磁机械耦合实现可调机械性质和声学带隙，说明磁相互作用不仅影响单个共振频率，也能够重构离散结构的整体频谱 [14]。这类工作与本文在“耦合强度—模态分裂—频带宽度”上的物理图像相通，但其重点通常是人工结构的带隙设计和外场调控，而本文关注由实际永久磁体直接耦合形成的有限摆链，并需要同时处理有限边界、逐块磁参数差异和全磁体对相互作用。

2.3 有限尺寸永磁体的磁场与相互作用建模

对于轴向磁化圆柱永磁体, Vokoun 等给出了保留磁体半径和厚度的磁静力相互作用模型, 并讨论有限距离作用与远距离磁偶极极限之间的联系 [6]。这一类有限尺寸模型为近距离永久磁体相互作用提供了比点磁偶极更完整的几何描述。

近五年的研究继续关注永磁体场与相互作用的高效计算。Nguyen 等以磁荷模型建立半解析永久磁体相互作用力, 并在此基础上构造数据驱动代理模型, 用于降低动力学和参数优化中的重复计算成本 [15]; 其后又给出多种永久磁体空间磁场分量的半解析表示, 并用于快速预测磁场分布 [16]。Nana 等在磁摆实验中直接比较磁荷相互作用模型与实验拟合相互作用模型, 表明磁相互作用模型的选择会显著影响非线性动力学预测 [17]。这些工作强化了两个认识: 其一, 近距离永磁体作用需要保留实际几何或通过实验标定; 其二, 动力学计算需要在磁静力精度和重复求解效率之间取得平衡。

现有有限磁体研究多集中于给定几何下的场、力或力矩计算, 而磁摆动力学研究又常直接采用拟合后的力或力矩函数。对于多块实际磁体组成的有限摆链, 仍需要进一步解决“单磁体实测空间场如何进入多体广义坐标动力学”的参数传递问题, 尤其是磁体在摆动中同时发生中心位移和磁轴转动时, 两体势不再只是中心距的单变量函数。

2.4 现有研究缺口与本文研究路径

综合上述工作, 本文所采用的研究链条可写为: 单磁体空间磁场测量与模型比较, 逐块确定磁化参数; 由这些参数构造实际摆动几何下的有限尺寸两体磁势; 将全部磁体对叠加为有限链总势能; 在稳定平衡附近计算 Hessian、正常模态和长程色散; 最后用同一组参数检验不同链长与不同悬点间距下的实验结果。对应这条链条, 现有工作的主要空缺集中在以下四个环节。

第一, 已有磁摆和磁耦合振子研究常以整体实验力或磁力矩拟合动力学参数, 而逐块测量实际磁体二维空间场并把磁体间个体差异继续传递到多体模型的工作较少。本文因此从七块磁体的 $B_r(r, h)$ 、 $B_z(r, h)$ 测量出发, 分别确定 M_i , 避免把所有磁体预先视为完全相同的理想单元。

第二, 已有排斥磁晶格研究已经认识到有限距离和长程作用的重要性, 但在实际摆链中, 磁体的中心位置与磁化方向都会随摆角变化。本文采用随 θ_i 、 θ_j 变化的有限圆柱两体磁势, 并在有限链中保留全部 $1 \leq i < j \leq N$ 的磁体对, 使有限尺寸、取向变化和长程耦合进入同一个总势函数。

第三, 已有研究分别讨论了磁摆正常模态、非线性运动、能量交换或周期晶格色散, 但较少在同一组实验参数下同时比较有限链本征频率、空间振型、端点释放轨迹和局域能流。本文由同一总势能同时得到平衡构型、Hessian、正常模态和非线性时域演化, 再利用实验轨迹进行多层次检验。

第四, 许多磁耦合动力学模型针对单一装置或单一工况确定参数。本文只在 $N = 3$ 、 $a = 60$ mm 的基准链中确定一次有效磁势尺度 λ_m , 随后保持该参数固定, 并迁移到 $N = 5$ 、 $N = 7$ 以及 $N = 5$ 时 $a = 40$ 、 60 、 70 、 80 mm 的条件。因而, 本文的重点不仅是某一工况下的拟合精度, 还包括参数在链长和几何尺度变化后的可迁移程度。

由此, 本文的研究定位可概括为: 以实测单磁体空间场作为磁学起点, 以有限尺寸全磁体对势能作为多体建模核心, 以有限链正常模态和端点释放动力学作为实验检验对象, 并通过跨链长、跨间距迁移检验参数链的适用范围。

第 3 章 实验系统与测量方法

3.1 非接触磁摆装置

实验装置如图 3.1 所示。磁摆链安装在由广州祥远机械有限公司定制的铝型材支架上，各悬点沿水平方向排列，相邻悬点间距记为 a 。每个摆体采用双线悬挂，使主要运动限制在同一竖直平面内，并减小绕竖直轴转动的影响。第 i 个磁摆的摆角记为 θ_i ，以竖直向下方向为 $\theta_i = 0$ 。

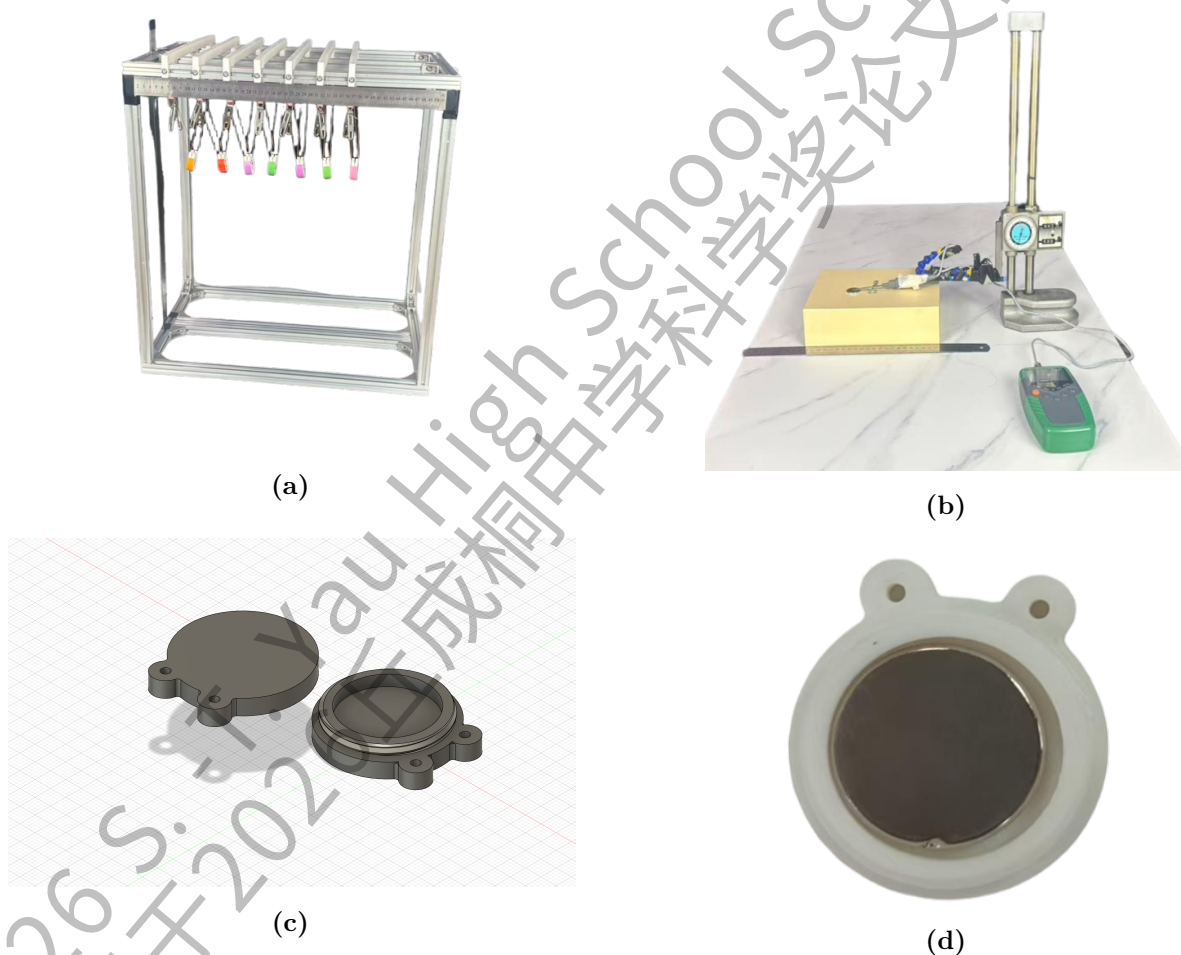


图 3.1: 非接触磁摆链实验装置及磁体参数测量。(a) 磁摆链整体装置；(b) 磁场空间分布测量装置；(c) 磁体及其非磁性安装外壳；(d) 实验所用轴向磁化圆柱永磁体。

Experimental apparatus and magnet characterization. (a) Complete magnetic-pendulum chain; (b) setup for spatial magnetic-field measurement; (c) magnet and nonmagnetic housing; (d) axially magnetized cylindrical permanent magnet.

图 3.1(a) 中，各磁摆安装在可调水平导轨上，通过改变悬点位置调节相邻间距 a ；实验过程中保持支架与悬点固定，以统一不同工况的几何基准。

图 3.1(b) 为单磁体空间磁场测量装置。磁场采用 TUNKIA 天恒测控 TD8620 型特斯拉计测量, 精度等级为 1 级, 标称测量精度为 $\pm 1\%$; 探头的径向位置和轴向高度采用三和牌双柱带表高度尺调节和读取, 生产厂家为温州三和量具仪器有限公司。这些仪器参数用于后续测量不确定度估计。

图 3.1(c) 为非磁性磁体安装外壳, 用于固定磁体位置与磁化方向并连接双线悬挂。图 3.1(d) 为橙桔磁业定制的轴向磁化圆柱永磁体。七块磁体具有相同的标称几何尺寸, 装配时采用交替极性排列, 使相邻磁体在平衡位置附近保持同极相对的排斥构型。各磁体的几何尺寸、质量及空间磁场分别测量, 并作为后续磁静力和动力学模型的实验输入。

端点释放实验中, 待磁摆链静止后, 将最左端磁摆相对平衡位置偏转 $\Delta\theta$ 并由静止释放, 其余磁摆从各自平衡位置开始运动。摄像机记录摆动过程, 并由视频提取各磁摆的角位移 $\theta_i(t)$ 。

3.2 磁场测量

实验使用七块同规格轴向磁化圆柱磁体, 依次编号为 1-7。测量时单独固定一块磁体, 以磁体轴线为 $r = 0$, 以上表面为名义高度 $h = 0$, 建立柱坐标系 (r, φ, h) 。其中 B_z 和 B_r 分别表示轴向与径向磁场分量。

Hall 探头在

$$h = 0, 5, 10, 15, 20 \text{ mm} \quad (3.1)$$

五个高度进行径向扫描, 每个高度的测量位置为

$$r = 0, 5, 10, \dots, 50 \text{ mm}, \quad (3.2)$$

径向步长为 5 mm。

七块磁体均采用相同的坐标定义和扫描流程, 分别记录 B_z 与 B_r , 原始磁场数据以 mT 为单位。由此得到每块磁体的空间磁场剖面

$$B_z(r, h), \quad B_r(r, h). \quad (3.3)$$

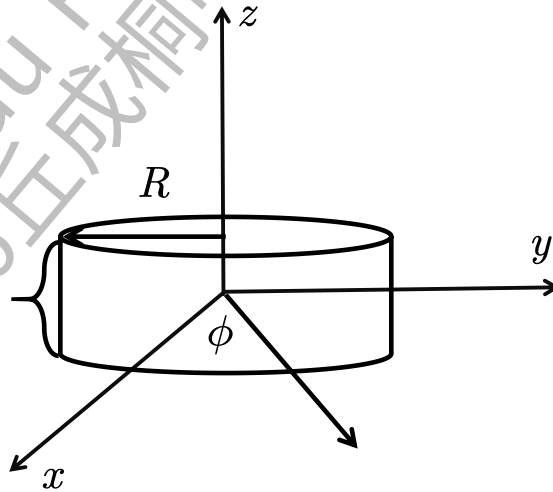


图 3.2: 圆柱磁体的几何参数与坐标系定义。圆柱几何中心取为原点 O , 轴向取为 z 方向, 半径和厚度分别记为 R 和 t , 方位角记为 ϕ 。

Geometry and coordinate-system definition of the cylindrical magnet. The geometric center of the cylinder is taken as the origin O ; the cylinder axis is along the z -direction, with radius R , thickness t , and azimuthal angle ϕ .

图 3.2 给出了有限圆柱磁体的几何参数与坐标系定义。磁体几何中心取为原点 O , 圆柱轴线沿 z 方向, 半径与厚度分别记为 R 和 t 。后续有限圆柱磁场模型均在该坐标系下建立, 实验测得的径向和

轴向磁场分量分别记为 B_r 和 B_z 。

3.3 单磁摆自由衰减

为确定磁摆运动中的机械耗散，将单个磁摆与其余磁体充分分离，在小振幅条件下记录自由衰减过程。定义相对于静态平衡位置的角位移

$$\xi(t) = \theta(t) - \theta^*. \quad (3.4)$$

小振幅范围内，单磁摆满足

$$I_{\text{eff}}\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k_g\xi = 0, \quad (3.5)$$

其中 I_{eff} 为关于等效悬点的有效转动惯量， c 为等效转动阻尼系数， k_g 为平衡位置附近的重力角向刚度。

定义衰减率

$$\beta = \frac{c}{2I_{\text{eff}}}, \quad (3.6)$$

则欠阻尼振幅包络为

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (3.7)$$

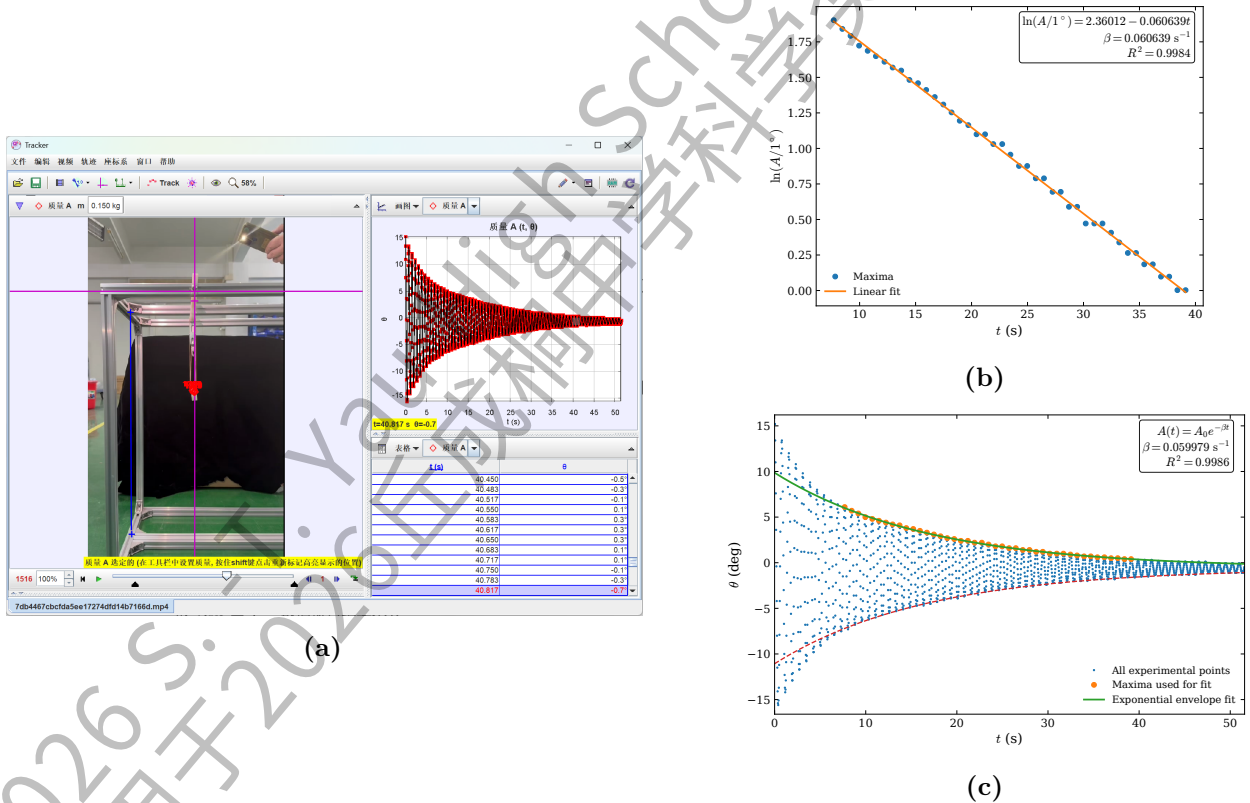


图 3.3: 单磁摆自由衰减过程及峰值振幅的对数线性拟合与指数包络拟合。

Free decay of a single magnetic pendulum with log-linear fitting of peak amplitudes and exponential-envelope fitting.

图 3.3(a) 显示自由振动振幅随时间近似指数衰减。对式 (3.7) 取对数可得

$$\ln\left(\frac{A(t)}{1^\circ}\right) = \ln\left(\frac{A_0}{1^\circ}\right) - \beta t, \quad (3.8)$$

因此图 3.3(b) 的斜率直接给出衰减率；图 3.3(c) 则直接对峰值包络进行指数拟合。

从角位移序列中提取局部极值，并以

$$A_n = |\theta_{\text{ext},n} - \theta^*| \quad (3.9)$$

表示第 n 个峰值振幅。

两种方法给出一致的衰减尺度，后续动力学统一采用指数拟合结果

$$\beta = 0.059\,979/\text{s}, \quad R^2 \simeq 0.9986. \quad (3.10)$$

实测阻尼振动周期为

$$T_d = 0.754\,297\,\text{s}, \quad (3.11)$$

对应

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \beta^2}. \quad (3.12)$$

因此

$$k_g = I_{\text{eff}}\omega_0^2, \quad c = 2I_{\text{eff}}\beta. \quad (3.13)$$

本实验测得

$$I_{\text{eff}} = 4.1889 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2, \quad k_g = 2.90669 \times 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1}. \quad (3.14)$$

相应阻尼比和品质因数为

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0}, \quad Q = \frac{1}{2\zeta}, \quad (3.15)$$

数值约为

$$\zeta \simeq 0.00720, \quad Q \simeq 69.4.$$

对于具有不同有效惯量的第 i 个磁摆，若采用相同实验衰减率，则

$$c_i = 2I_i\beta. \quad (3.16)$$

3.4 链长与悬点间距

整链实验分别改变链长 N 和相邻悬点间距 a 。实验装置实物如图 3.4 所示。磁摆通过上方悬挂结构安装在铝型材框架上，各悬点位置可沿横向调节，从而改变参与运动的磁摆数量以及相邻悬点间距。



图 3.4: 磁摆链实验装置实物图

链长实验固定

$$a = 60 \text{ mm}, \quad N = 3, 5, 7, \quad (3.17)$$

用于比较有限链自由度增加后离散模态、频率分裂和端点释放响应的变化。

悬点间距实验固定

$$N = 5, \quad a = 40, 60, 70, 80 \text{ mm}, \quad (3.18)$$

通过改变磁体之间的几何分离调节磁耦合强度，用于比较模态频率和频带宽度随间距的变化。

第 4 章 从实测磁场到两体磁相互作用

实验磁体为轴向磁化圆柱，几何尺寸为

$$D = 25.0 \text{ mm}, \quad t_m = 3.0 \text{ mm}, \quad R = 12.5 \text{ mm}. \quad (4.1)$$

取磁体轴线为 z 轴、径向坐标为 r ，测量网格为

$$h = 0, 5, 10, 15, 20 \text{ mm}, \quad r = 0, 5, \dots, 50 \text{ mm}.$$

实验同时记录 B_r 与 B_z 。近场中可观察到明显的有限尺寸效应，包括边缘附近的 B_z 结构以及随高度外移的 B_r 峰位。

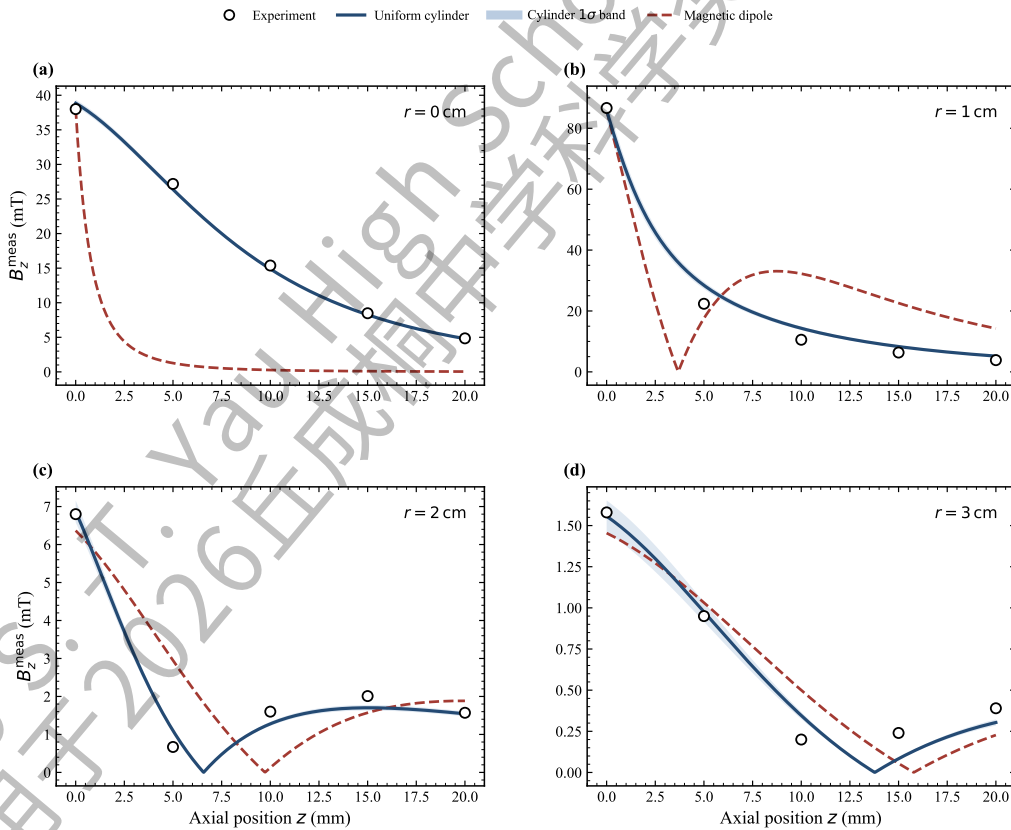


图 4.1: 一号磁体在 $r = 0, 10, 20, 30 \text{ mm}$ 处的实测 B_z 及均匀磁化有限圆柱与点磁偶极模型拟合。
Measured B_z of magnet 1 at $r = 0, 10, 20, 30 \text{ mm}$ and fits using the uniformly magnetized finite-cylinder and point-dipole models.

图 4.1 覆盖轴线、磁体边缘附近和较弱离轴场区域，用于比较两种模型在不同空间尺度上的适用

性。考虑 Hall 探头敏感轴的小角度偏差 ϑ_{eff} ，实验分量写为

$$B_r^{\text{meas}} = |B_r \cos \vartheta_{\text{eff}} - B_z \sin \vartheta_{\text{eff}}|, \quad (4.2)$$

$$B_z^{\text{meas}} = |B_z \cos \vartheta_{\text{eff}} + B_r \sin \vartheta_{\text{eff}}|. \quad (4.3)$$

若名义高度为 h ，高度零点修正为 z_0 ，则磁体中心坐标下

$$z_c = h + z_0 + \frac{t_m}{2}. \quad (4.4)$$

4.1 点磁偶极近似

当观测距离远大于磁体尺度时，外场最低阶非零项由总磁偶极矩决定 [18]。取

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{e}_z, \quad (4.5)$$

则

$$B_r^{\text{dip}} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{3rz_c}{(r^2 + z_c^2)^{5/2}}, \quad (4.6)$$

$$B_z^{\text{dip}} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2z_c^2 - r^2}{(r^2 + z_c^2)^{5/2}}. \quad (4.7)$$

其中 B_z^{dip} 在

$$r = \sqrt{2}|z_c| \quad (4.8)$$

处变号。

本文采用

$$\rho = \sqrt{r^2 + z_c^2} \geq 2R \quad (4.9)$$

作为点偶极远场比较的操作性子集，当前磁体有 $2R = 25 \text{ mm}$ 。该条件只用于本文数据分区。

4.2 均匀磁化有限圆柱

近场模型保留磁体实际半径和厚度。第 i 块磁体满足

$$\mathbf{M}_i = M_i \mathbf{e}_z, \quad \mu_i = M_i \pi R^2 t_m. \quad (4.10)$$

均匀磁化时体磁荷为零，等效表面磁荷密度为

$$\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.11)$$

因此磁荷只分布在上下端面，

$$\sigma_m = \begin{cases} +M, & z' = +t_m/2, \\ -M, & z' = -t_m/2. \end{cases} \quad (4.12)$$

圆柱外部磁场写为

$$\mathbf{B}_{\text{cyl}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{s=\pm 1} sM \int_{S_s} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'. \quad (4.13)$$

离轴场采用圆电流环解析表达并沿磁体厚度进行 Gauss–Legendre 求积，具体推导见附录 B。在轴线上，

$$B_{z,\text{cyl}}^{\text{axis}}(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z + t_m/2}{\sqrt{R^2 + (z + t_m/2)^2}} - \frac{z - t_m/2}{\sqrt{R^2 + (z - t_m/2)^2}} \right]. \quad (4.14)$$

各磁体的 M_i 由全部测点的 B_r 与 B_z 联合拟合得到， $z_{0,i}$ 和 $\vartheta_{\text{eff},i}$ 仅用于测量坐标修正。

4.3 近场与远场的模型比较

为比较有限尺寸模型与点偶极极限，使用一号磁体的拟合参数分别计算 $B_z^{\text{cyl}}(x, z)$ 和 $B_z^{\text{dip}}(x, z)$ 。

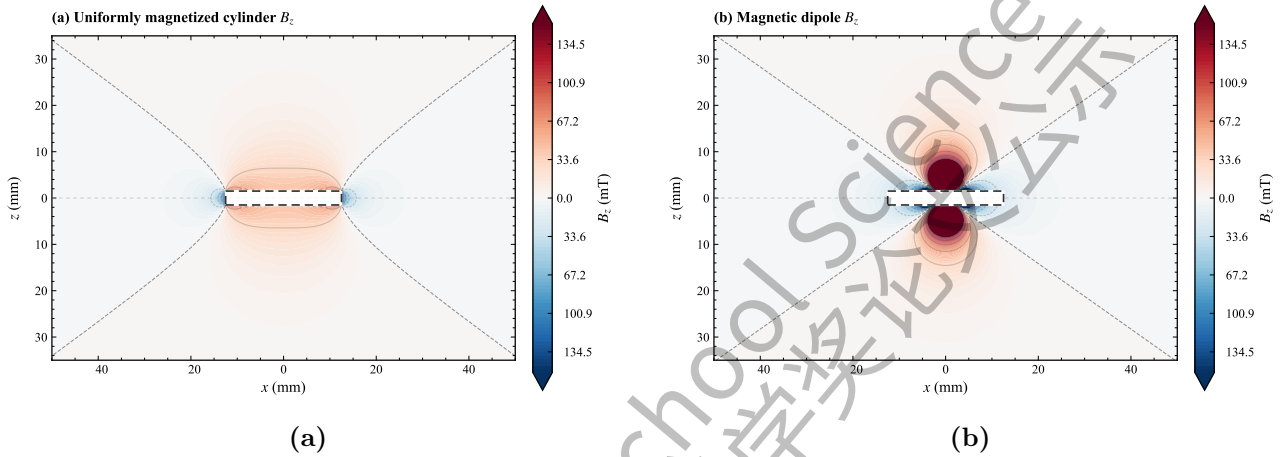


图 4.2: 一号磁体的均匀磁化有限圆柱轴向场与点磁偶极轴向场。

Axial-field maps of magnet 1 predicted by the uniformly magnetized finite-cylinder and point-dipole models: (a) finite cylinder; (b) point dipole.

有限圆柱模型保留端面和边缘附近的有限尺寸结构，点偶极模型则给出总磁矩对应的最低阶远场。定义两种模型的轴向场差

$$\Delta B_z = B_z^{\text{cyl}} - B_z^{\text{dip}}. \quad (4.15)$$

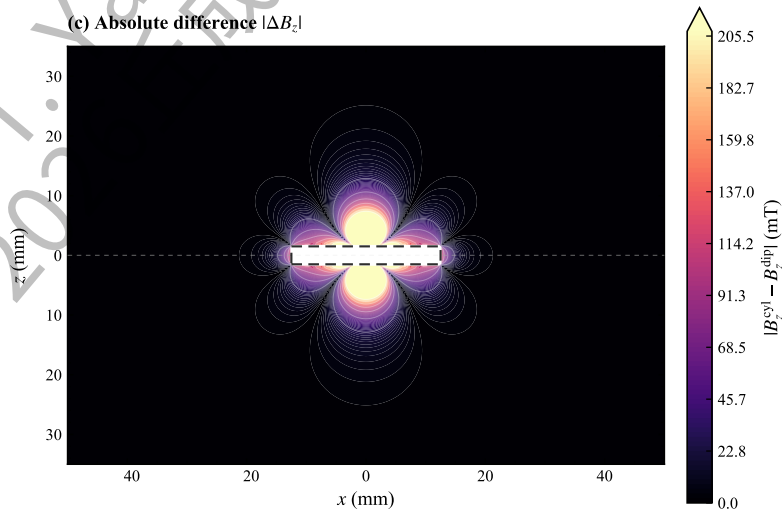


图 4.3: 一号磁体均匀磁化有限圆柱模型与点磁偶极模型的轴向磁场绝对差。

Absolute difference in axial magnetic field between the uniformly magnetized finite-cylinder and point-dipole models for magnet 1.

图 4.3 显示主要模型差异集中在磁体端面和边缘附近，并随距离增加而减小。

当

$$\frac{R}{\rho} \ll 1, \quad \frac{t_m}{\rho} \ll 1 \quad (4.16)$$

时，有限圆柱外场趋向总磁矩对应的点磁偶极项。因此后续近距离动力学采用有限圆柱模型，点偶极模型主要作为远场极限和标度检验。

4.4 七块磁体的磁参数

七块磁体具有相同几何尺寸，各自磁化强度 M_i 由空间磁场独立拟合，对应磁矩为

$$\mu_i = M_i \pi R^2 t_m. \quad (4.17)$$

表 4.1: 七块磁体由均匀磁化有限圆柱模型得到的磁化强度与总磁矩。

Magnetization and total magnetic moment of the seven magnets obtained from the uniformly magnetized finite-cylinder model.

磁体	M_i (kA m ⁻¹)	μ_i (A m ²)
1	376.0716	0.553 811
2	337.7114	0.497 321
3	447.5570	0.659 082
4	434.1561	0.639 348
5	451.2323	0.664 494
6	440.4404	0.648 602
7	410.1925	0.604 058

后续两体模型直接使用各磁体的 M_i 和圆柱几何参数，从而保留实际磁强差异。

4.5 两体磁相互作用

单磁体标定确定 M_i 及磁矩 μ_i 。对于两个点磁偶极，一般相互作用能为

$$U_{ij}^{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi\rho_{ij}^3} [\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j - 3(\boldsymbol{\mu}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_{ij})(\boldsymbol{\mu}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_{ij})]. \quad (4.18)$$

磁摆实验中，磁体轴线位于摆动平面内并随摆角转动，因此磁矩写为

$$\boldsymbol{\mu}_i = \varepsilon_i \mu_i \mathbf{e}_i^\perp. \quad (4.19)$$

故一般运动过程中的点偶极势应保留

$$U_{ij}^{\text{dip}} = U_{ij}^{\text{dip}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}). \quad (4.20)$$

在竖直构型 $\theta_i = \theta_j = 0$ 且磁轴与中心连线共线时，定义

$$\Gamma_{ij} = \frac{\mu_0 \mu_i \mu_j}{4\pi}, \quad (4.21)$$

则

$$U_{ij}^{\text{dip}} = -2\varepsilon_i\varepsilon_j \frac{\Gamma_{ij}}{d^3}, \quad (4.22)$$

$$F_{d,ij}^{\text{dip}} = -6\varepsilon_i\varepsilon_j \frac{\Gamma_{ij}}{d^4}, \quad (4.23)$$

$$K_{d,ij}^{\text{dip}} = -24\varepsilon_i\varepsilon_j \frac{\Gamma_{ij}}{d^5}. \quad (4.24)$$

相邻磁体满足

$$\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = -1,$$

因此该特殊构型对应排斥作用。以上公式只用于检验远场标度，实际动力学不采用单变量 $U(d)$ 近似。

在实验工作距离内，采用与单磁体磁场标定一致的均匀磁化有限圆柱模型。

第 i 块磁体两个端面的等效磁荷密度为

$$\sigma_{i,\eta} = \eta\varepsilon_i M_i, \quad \eta = \pm 1. \quad (4.25)$$

两个互不重叠有限圆柱之间的磁相互作用能写为

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = \frac{\mu_0 M_i M_j \varepsilon_i \varepsilon_j}{4\pi} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{\zeta=\pm 1} \eta \zeta \times \iint_{S_{i,\eta}} \iint_{S_{j,\zeta}} \frac{dS_i dS_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}. \quad (4.26)$$

由于磁体中心和磁轴均随摆角变化，完整两体势为

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}). \quad (4.27)$$

其角度梯度给出磁广义力矩，

$$\tau_i^{(m)} = -\frac{\partial U_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i}, \quad (4.28)$$

平衡点处的角度 Hessian 则给出线性化磁耦合。

因此后续动力学的基本磁学输入为

$$U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}),$$

而点偶极 $U(d)$ 、 $F_d(d)$ 与 $K_d(d)$ 仅承担远场极限检验。

下一章进一步定义

$$U_{ij}^{(\lambda)} = \lambda_m U_{ij}^{\text{cyl}}, \quad (4.29)$$

其中 λ_m 作为统一的动力学磁势尺度，与本章独立磁场拟合得到的 M_i 和 μ_i 保持参数层级上的区分。

第 5 章 磁摆链动力学模型

5.1 实验几何与广义坐标

考虑由 N 个磁摆组成的有限链。实验中每个摆体采用对称双线悬挂，在主要平面摆动模态下，以两根悬线中线定义等效摆线，并以摆角 θ_i 描述第 i 个磁摆的运动。

第 i 个等效悬点记为

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_i = (i-1)a, \quad (5.1)$$

其中 a 为相邻悬点间距。

取竖直向下为 $\theta_i = 0$ ，磁体中心到等效悬点的距离记为 l_i ，则第 i 块磁体中心位置为

$$\mathbf{q}_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} X_i + l_i \sin \theta_i \\ -l_i \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

定义沿等效摆线方向的单位矢量

$$\mathbf{e}_i^{\parallel} = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

以及摆动平面内与其正交的单位矢量

$$\mathbf{e}_i^{\perp} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

二者满足

$$\mathbf{e}_i^{\parallel} \cdot \mathbf{e}_i^{\perp} = 0. \quad (5.5)$$

圆柱磁体沿自身轴线磁化，其轴线在实验构型中与 $\mathbf{e}_i^{\perp}$ 平行。第 i 块磁体的磁化矢量写为

$$\mathbf{M}_i = \varepsilon_i M_i \mathbf{e}_i^{\perp}, \quad \varepsilon_i \in \{+1, -1\}, \quad (5.6)$$

其中 $M_i > 0$ 为上一章由实测磁场得到的磁化强度， ε_i 表示安装极性。

实验中相邻磁体采用同极相对的排斥构型，因此

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = -1. \quad (5.7)$$

对于规则交替排列,

$$\varepsilon_i = (-1)^{i-1} \varepsilon_1. \quad (5.8)$$

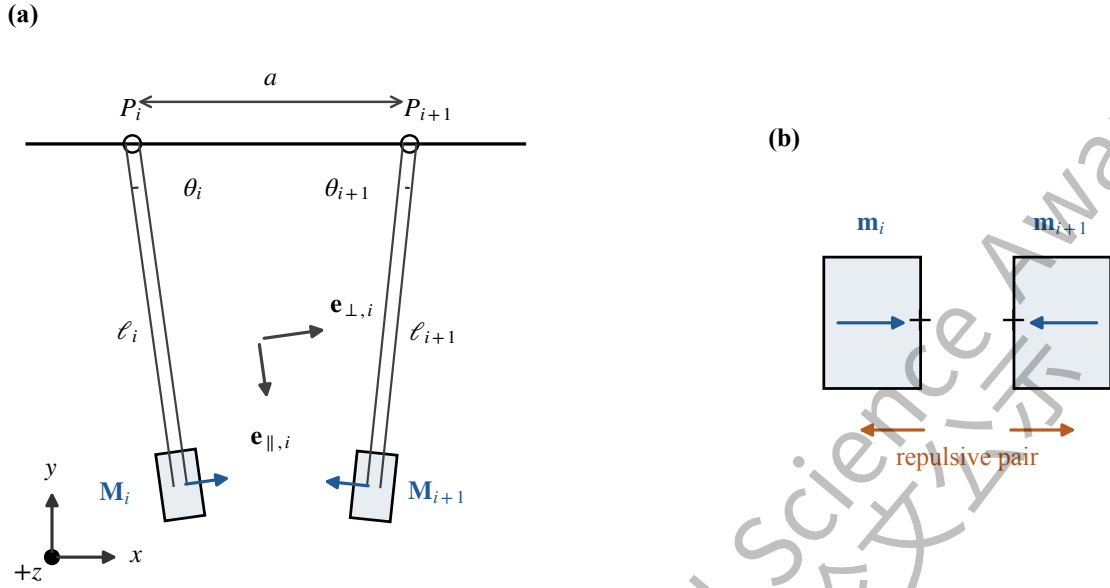


图 5.1: 磁摆链的等效平面几何、随摆角转动的磁化方向及相邻磁体的同极排斥构型。

Equivalent planar geometry of the magnetic pendulum chain, angle-dependent magnetization directions, and the repulsive like-pole configuration of adjacent magnets.

图 5.1(a) 给出了相邻两个磁摆的几何关系。第 i 块磁体中心沿以 $\mathbf{P}_i$ 为圆心、 l_i 为半径的圆弧运动, 磁轴 $\mathbf{e}_i^\perp$ 随 θ_i 同步转动, 并始终与 $\mathbf{e}_i^\parallel$ 正交。因此摆角变化同时改变磁体中心位置和磁化方向。

图 5.1(b) 给出相邻磁体的安装极性。交替磁化方向使相邻磁体的相向端面具有同号磁极, 与实验中的排斥构型一致。

磁体半径和厚度分别为

$$R = 12.5 \text{ mm}, \quad t_m = 3.0 \text{ mm}. \quad (5.9)$$

对于任意两块磁体 i 和 j , 定义中心分离矢量及中心距

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i, \quad \rho_{ij} = \|\mathbf{d}_{ij}\|. \quad (5.10)$$

由式 (5.2) 和式 (5.6) 可知, θ_i 和 θ_j 同时改变中心分离和磁轴相对于中心连线的方向。因此一般两体势写为

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}), \quad d_{p,ij} = |X_j - X_i|, \quad (5.11)$$

不能在一般运动过程中预先约化为只依赖 ρ_{ij} 的单变量中心势。

5.2 旋转有限圆柱的两体磁势

近场磁相互作用采用上一章建立的均匀磁化有限圆柱模型 [18, 6]。对于均匀磁化磁体, 内部等效体磁荷为零,

$$-\nabla \cdot \mathbf{M}_i = 0. \quad (5.12)$$

定义垂直于摆动平面的单位矢量

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

以 $\eta = \pm 1$ 区分圆柱两个端面，端面外法向为

$$\hat{\mathbf{n}}_{i,\eta} = \eta \mathbf{e}_i^\perp. \quad (5.14)$$

等效表面磁荷密度为

$$\sigma_{i,\eta} = \mathbf{M}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_{i,\eta} = \eta \varepsilon_i M_i. \quad (5.15)$$

第 i 块磁体第 η 个端面上的空间点表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,\eta}(u, \varphi) &= \mathbf{q}_i + \eta \frac{t_m}{2} \mathbf{e}_i^\perp \\ &\quad + u \left(\cos \varphi \mathbf{e}_i^\parallel + \sin \varphi \mathbf{e}_z \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

其中

$$0 \leq u \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

面积元为

$$dS = u du d\varphi. \quad (5.17)$$

对于两个互不重叠的磁体，其有限圆柱磁相互作用能为

$$\begin{aligned} U_{ij}^{\text{cyl}} &= \frac{\mu_0 M_i M_j \varepsilon_i \varepsilon_j}{4\pi} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{\zeta=\pm 1} \eta \zeta \\ &\quad \times \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{uv}{\|\mathbf{r}_{i,\eta}(u, \varphi) - \mathbf{r}_{j,\zeta}(v, \psi)\|} d\psi dv d\varphi du. \end{aligned} \quad (5.18)$$

式 (5.18) 同时保留圆柱有限半径、有限厚度、磁体中心位置变化和磁轴转动。后续磁广义力矩及线性化 Hessian 均由同一势函数的角度导数得到。

5.3 势能核的数值表示

直接在线性时间积分的每一步计算式 (5.18) 需要重复执行四维曲面积分。本文首先离线计算动力学所需的两体势，随后只在角度空间进行连续插值。

对于相距

$$s = |j - i| \quad (5.19)$$

个格点的一对磁摆，其固定悬点分离为

$$d_s = sa. \quad (5.20)$$

对实验参数中实际出现的每一个 d_s 分别计算几何核

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = \varepsilon_i \varepsilon_j M_i M_j \mathcal{G}_{d_s}(\theta_i, \theta_j), \quad (5.21)$$

其中 $\mathcal{G}_{d_s}$ 已经包含有限圆柱几何积分及 $\mu_0/(4\pi)$ 因子。

圆盘径向积分采用 Gauss-Legendre 求积，方位角积分采用等间距周期求积。对于每一个固定的

d_s , 在 (θ_i, θ_j) 平面建立二维能量表, 并构造具有连续一阶和二阶角度导数的三次插值函数

$$\tilde{\mathcal{G}}_{d_s}(\theta_i, \theta_j). \quad (5.22)$$

动力学中使用

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = \varepsilon_i \varepsilon_j M_i M_j \tilde{\mathcal{G}}_{|j-i|a}(\theta_i, \theta_j). \quad (5.23)$$

本文不在悬点距离方向进行连续插值或外推。不同 a 所需的 $d_s = sa$ 均作为独立距离切片预先计算, 势能、磁广义力矩和 Hessian 由同一二维插值函数获得。为统一表示独立磁场模型与实际摆链动力学中的有效磁耦合, 定义两体有效磁势

$$U_{ij}^{(\lambda)} = \lambda_m U_{ij}^{\text{cyl}}. \quad (5.24)$$

其中, $\lambda_m = 1$ 对应完全由单磁体空间磁场标定确定的有限圆柱模型。在 $N = 3$ 、 $a = 60$ mm 的基准链中, 由第二和第三实验模态统一确定

$$\lambda_m = 0.473305. \quad (5.25)$$

λ_m 表征有限圆柱磁相互作用进入实际摆链广义动力学后的全局有效磁耦合尺度。单磁体空间磁场测量确定各磁体的 M_i , 有限链模态则进一步取决于实际平衡构型附近的磁势曲率。本文全部动力学实验采用相同的双线悬挂摆单元, 多体磁排斥形成具有有限偏转的平衡构型, 典型两摆和多摆状态如图 5.2 所示。



图 5.2: 双线悬挂磁摆的实际平衡几何。红线表示由悬挂结构和磁体中心位置确定的几何方向, 蓝箭头表示摆体及磁体的取向。

Actual equilibrium geometry of a bifilar-suspended magnetic pendulum. Red lines indicate geometric directions determined by the suspension and magnet centers, while blue arrows indicate pendulum and magnet orientations.

图 5.2 显示, 多体系统的工作点具有非零几何偏转, 磁体中心位置随平衡构型发生明显变化。对于本文 $l = 200$ mm 的特征摆长, 角度变化 Δq 对应的水平位移量级为

$$\Delta x \simeq l \sin(\Delta q). \quad (5.26)$$

例如, $\Delta q = 1^\circ$ 、 3° 和 5° 分别对应约 3.49 mm、10.47 mm 和 17.43 mm 的水平位置变化。相对于本文 40–80 mm 的悬点间距, 这一几何变化会直接进入磁体间相对位置及有限圆柱磁势。

有限圆柱两体磁势一般写为

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = U_{ij}^{\text{cyl}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \psi_i, \psi_j), \quad (5.27)$$

其中 $\mathbf{r}_i$ 表示磁体中心位置, ψ_i 表示磁体取向。平衡构型附近的磁耦合由磁势 Hessian 描述:

$$\mathbf{H}_m = \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2 V_m|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{\text{eq}}}. \quad (5.28)$$

为估计这一几何敏感性的数量级, 取基准链参数 $a = 60 \text{ mm}$ 、 $l = 200 \text{ mm}$ 、 $R = 12.5 \text{ mm}$ 和 $t_m = 3.0 \text{ mm}$ 。固定一块磁体, 令相邻磁体由参考位置向外偏转 δ , 其中心间距为

$$\rho(\delta) = \sqrt{[a + l \sin \delta]^2 + [l(1 - \cos \delta)]^2}. \quad (5.29)$$

采用与动力学计算一致的有限圆柱端面磁荷积分, 定义归一化磁势

$$\Gamma_U(\delta) = \frac{|U^{\text{cyl}}(-\delta, 0)|}{|U^{\text{cyl}}(0, 0)|}, \quad (5.30)$$

以及该方向上的局部磁刚度和归一化磁刚度

$$K_m(\delta) = \left| \frac{d^2}{d\delta^2} U^{\text{cyl}}(-\delta, 0) \right|, \quad \Gamma_K(\delta) = \frac{K_m(\delta)}{K_m(0)}. \quad (5.31)$$

对应数值结果列于表 5.1。

表 5.1: 有限圆柱磁势和局部磁刚度随几何工作点的变化。

Variation of finite-cylinder magnetic potential and local magnetic stiffness with the geometric operating point.

δ	$l \sin \delta / \text{mm}$	ρ / mm	Γ_U	Γ_K
0°	0.000	60.000	1.0000	1.0000
1°	3.490	63.490	0.8542	0.7788
2°	6.980	66.980	0.7349	0.6127
3°	10.467	70.468	0.6365	0.4867
3.1236°	10.898	70.899	0.6255	0.473305
4°	13.951	73.953	0.5546	0.3900
5°	17.431	77.435	0.4861	0.3152

表 5.1 给出了有限圆柱磁相互作用对几何工作点的直接敏感性。当 $\delta = 3.1236^\circ$ 时, 水平位移为 10.90 mm, 磁体中心间距约为 70.90 mm, 并得到

$$\Gamma_K(3.1236^\circ) = 0.473305. \quad (5.32)$$

该数值与基准链模态得到的 $\lambda_m = 0.473305$ 对应同一磁刚度尺度。同时, 由表中数据可见, δ 从 0° 增加至 3° 时, 归一化磁势由 1 降至 0.6365, 局部磁刚度由 1 降至 0.4867; 到 5° 时, 二者进一步降至 0.4861 和 0.3152。因此, 本文实验几何中的数度工作点变化已经对应显著的磁势曲率变化。

若直接考察磁势幅值, 求解 $\Gamma_U(\delta) = 0.473305$ 得到 $\delta = 5.2067^\circ$ 。磁势与局部磁刚度对几何工作点表现出不同的下降速率, 而正常模态直接对应平衡点附近的二阶磁势曲率, 因此后续动力学采用

$$\mathbf{H}_m^{\text{eff}} \simeq \lambda_m \mathbf{H}_m^{\text{cyl}}. \quad (5.33)$$

七块磁体由独立空间磁场测量确定的 M_i 在这一过程中保持不变。由于 $N = 3$ 、 $N = 5$ 、 $N = 7$ 以及

不同悬点间距实验均采用相同的双线悬挂结构、摆体几何和磁体安装方式,本文仅在 $N = 3, a = 60$ mm 的基准链中确定 λ_m , 随后固定 $\lambda_m = 0.473305$, 用于 $N = 5, N = 7$ 以及 $a = 40, 60, 70, 80$ mm 条件下的模态和时域动力学计算。不同链长和悬点间距下的实验结果进一步检验这一参数的迁移特征。

实验摆体具有有限横向尺寸, 其有效直径为

$$D_p = 35.0 \text{ mm}. \quad (5.34)$$

数值积分限制在

$$\rho_{ij} \geq D_p, \quad i < j, \quad (5.35)$$

所定义的重叠构型范围内。

5.4 两体势能地形

为考察两个摆角对磁相互作用的共同影响, 在基准悬点间距下计算相邻磁体的二维势能

$$U_{i,i+1}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_{i+1}). \quad (5.36)$$

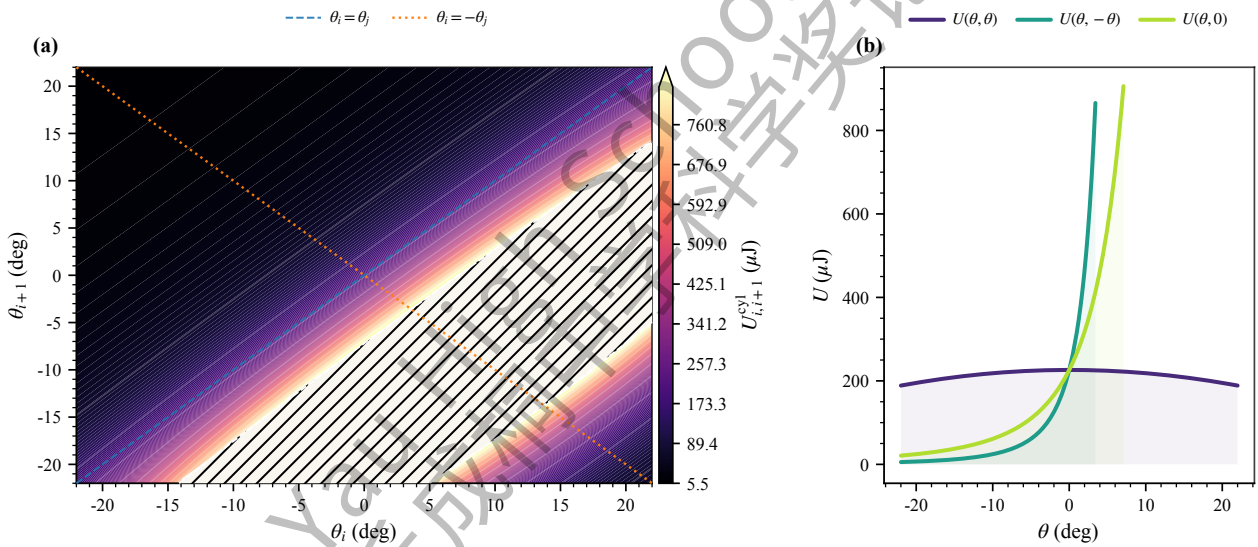


图 5.3: 相邻有限圆柱磁体在基准间距下的两角度势能地形及三条代表性截面。

Two-angle potential-energy landscape and three representative sections for adjacent finite cylindrical magnets at the reference spacing.

图 5.3(a) 给出 (θ_i, θ_{i+1}) 平面中的磁势。斜线区域满足 $\rho_{i,i+1} < D_p$, 对应摆体发生几何重叠的构型, 不进入实际动力学求解。

对于基准链中近似相同的有效摆长 $l_i = l_{i+1} = l$, 沿

$$\theta_i = \theta_{i+1} \quad (5.37)$$

共同转动时, 两磁体中心距保持为 a 。磁轴相对于固定中心连线的方向仍随角度变化, 因此 $U(\theta, \theta)$ 一般并非常数。这一截面直接表明, 完整两体势不能只由瞬时中心距 ρ 确定。

沿

$$\theta_i = -\theta_{i+1} \quad (5.38)$$

的反向转动过程中，两磁体中心距和相对取向均发生变化，势能在接近无重叠边界时明显增大。图中只保留与 $\theta = 0$ 连续相连的无重叠分支。

图 5.3(b) 中的阴影由工作求积阶数与加密求积阶数的结果差异构造，用于显示数值求积敏感性，不表示实验测量不确定度。

5.5 有限链的拉格朗日方程

以 m_i^p 表示第 i 个磁摆的机械质量， I_i 表示关于等效悬点的有效转动惯量， $l_{c,i}$ 表示机械质心到悬点的距离。

系统动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \dot{\theta}_i^2. \quad (5.39)$$

重力势能为

$$V_g = \sum_{i=1}^N m_i^p g l_{c,i} (1 - \cos \theta_i). \quad (5.40)$$

定义

$$k_{g,i} = m_i^p g l_{c,i}. \quad (5.41)$$

采用统一磁势尺度后，总磁势为

$$V_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta}; N, a) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}^{(\lambda)}(\theta_i, \theta_j). \quad (5.42)$$

总势能与拉格朗日量写为

$$V^{(\lambda)} = V_g + V_m^{(\lambda)}, \quad \mathcal{L} = T - V^{(\lambda)}. \quad (5.43)$$

机械耗散采用 Rayleigh 函数

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i \dot{\theta}_i^2. \quad (5.44)$$

单摆自由衰减实验给出统一衰减率

$$\beta = 0.059979/\text{s}, \quad (5.45)$$

因此

$$c_i = 2\beta I_i. \quad (5.46)$$

Euler-Lagrange 方程给出

$$I_i \ddot{\theta}_i + c_i \dot{\theta}_i + m_i^p g l_{c,i} \sin \theta_i + \frac{\partial V_m^{(\lambda)}}{\partial \theta_i} = 0. \quad (5.47)$$

第 i 个广义坐标上的磁广义力矩为

$$\tau_i^m = -\frac{\partial V_m^{(\lambda)}}{\partial \theta_i}. \quad (5.48)$$

由于 $U_{ij}^{(\lambda)}(\theta_i, \theta_j)$ 已经包含磁体中心平移和磁轴转动，式 (5.48) 同时包含这两类几何变化产生的磁作用。

5.6 链长与悬点间距对静止构型的影响

对于给定 (N, a) ，稳定静止构型 θ^* 由无重叠可行域内的驻点条件

$$\nabla_{\theta} V^{(\lambda)}(\theta^*) = 0 \quad (5.49)$$

确定。

在该平衡点定义总势能 Hessian

$$\mathbf{H} = \nabla_{\theta}^2 V^{(\lambda)} \Big|_{\theta^*}, \quad (5.50)$$

本文采用的稳定平衡解满足

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}) > 0. \quad (5.51)$$

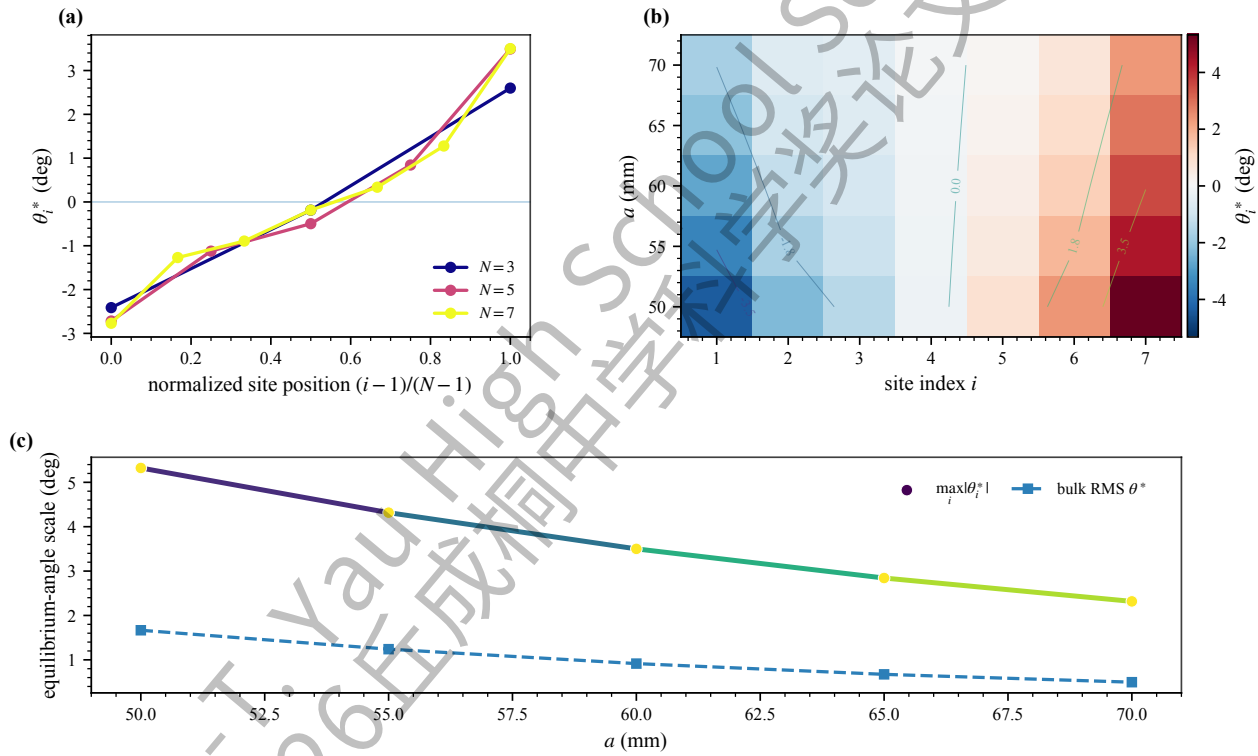


图 5.4: 不同链长与悬点间距下有限磁摆链的稳定静止构型及其特征角尺度。

Stable equilibrium configurations and characteristic angular scales of finite magnetic-pendulum chains for different chain lengths and pivot spacings.

图 5.4(a) 比较固定悬点间距下不同链长的平衡构型。在当前交替极性和实测磁参数下，端点缺少一侧对应的磁体集合，两侧磁作用不能完全抵消，因此端点出现较明显的静态偏转。由于各磁体使用独立标定的 M_i ，有限链平衡构型不要求严格满足镜面对称。

图 5.4(b) 给出 θ_i^* 在 (i, a) 平面内的分布。在当前参数范围内，随 a 增大，各格点平衡角的绝对值整体减小并逐渐接近竖直构型，与有限圆柱磁相互作用随几何分离增加而减弱的趋势一致。

定义最大平衡偏角

$$\Theta_{\max}^* = \max_i |\theta_i^*|. \quad (5.52)$$

图 5.4(c) 同时给出 $\Theta_{\max}^*$ 和链内部格点的均方根平衡角, 两者用于量化不同 a 下静态偏转的整体尺度。

5.7 线性化与有限链正常模态

对于给定链长 N 和悬点间距 a , 首先由

$$\nabla_{\theta} V^{(\lambda)}(\theta^*) = \mathbf{0}$$

确定稳定平衡构型 θ^* 。在其附近定义小扰动

$$\xi = \theta - \theta^*. \quad (5.53)$$

当 $\|\xi\|$ 足够小时, 总势能可在平衡点附近展开至二阶:

$$V^{(\lambda)} = V^* + \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{H} \xi + O(\|\xi\|^3), \quad (5.54)$$

其中

$$\mathbf{H} = \nabla_{\theta}^2 V^{(\lambda)} \big|_{\theta^*} \quad (5.55)$$

为总势能在平衡构型处的 Hessian 矩阵。其对角元描述各摆角方向上的局部势能曲率, 非对角元则反映不同磁摆之间的线性化角向耦合。

定义惯性矩阵和阻尼矩阵

$$\mathbf{J} = \text{diag}(I_1, \dots, I_N), \quad \mathbf{C} = \text{diag}(c_1, \dots, c_N). \quad (5.56)$$

将势能二阶展开代入有限链动力学方程, 得到平衡点附近的线性系统

$$\mathbf{J} \ddot{\xi} + \mathbf{C} \dot{\xi} + \mathbf{H} \xi = \mathbf{0}. \quad (5.57)$$

先忽略阻尼, 取第 n 阶简谐解

$$\xi_n(t) = \phi_n e^{i\omega_n t}, \quad (5.58)$$

代入式 (5.57), 得到广义本征值问题

$$\mathbf{H} \phi_n = \omega_n^2 \mathbf{J} \phi_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5.59)$$

其中 ω_n 为第 n 阶无阻尼角频率, ϕ_n 给出相应的有限链空间振型。采用惯性归一化时可取

$$\phi_m^T \mathbf{J} \phi_n = \delta_{mn}, \quad (5.60)$$

因此不同本征方向在线性近似下构成一组相互正交的模式基。

对应的无阻尼频率为

$$f_n^{(0)} = \frac{\omega_n}{2\pi}. \quad (5.61)$$

单摆自由衰减实验给出统一衰减率 β , 且本文采用

$$\mathbf{C} = 2\beta \mathbf{J}. \quad (5.62)$$

由于阻尼矩阵与惯性矩阵成比例，在线性模态基中各阶模态仍保持解耦。第 n 阶模态坐标满足

$$\ddot{Q}_n + 2\beta\dot{Q}_n + \omega_n^2 Q_n = 0, \quad (5.63)$$

因此在欠阻尼条件 $\omega_n > \beta$ 下，相应阻尼振荡频率为

$$f_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}. \quad (5.64)$$

为比较磁耦合引起的频率分裂，取单个磁摆在相同机械参数和阻尼条件下的频率作为参考：

$$f_{\text{iso}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_g}{I_{\text{eff}}} - \beta^2}. \quad (5.65)$$

第 n 阶有限链模态相对于孤立摆的归一化频移定义为

$$\delta_{f,n}(a) = \frac{f_n^{(d)}(a) - f_{\text{iso}}}{f_{\text{iso}}}. \quad (5.66)$$

因此，不同链长和悬点间距下的平衡构型首先改变 $\mathbf{H}$ ，进而改变有限链的本征频率 ω_n 和空间振型 ϕ_n 。后文通过实验模态频率和空间振型对这些线性化结果进行比较。

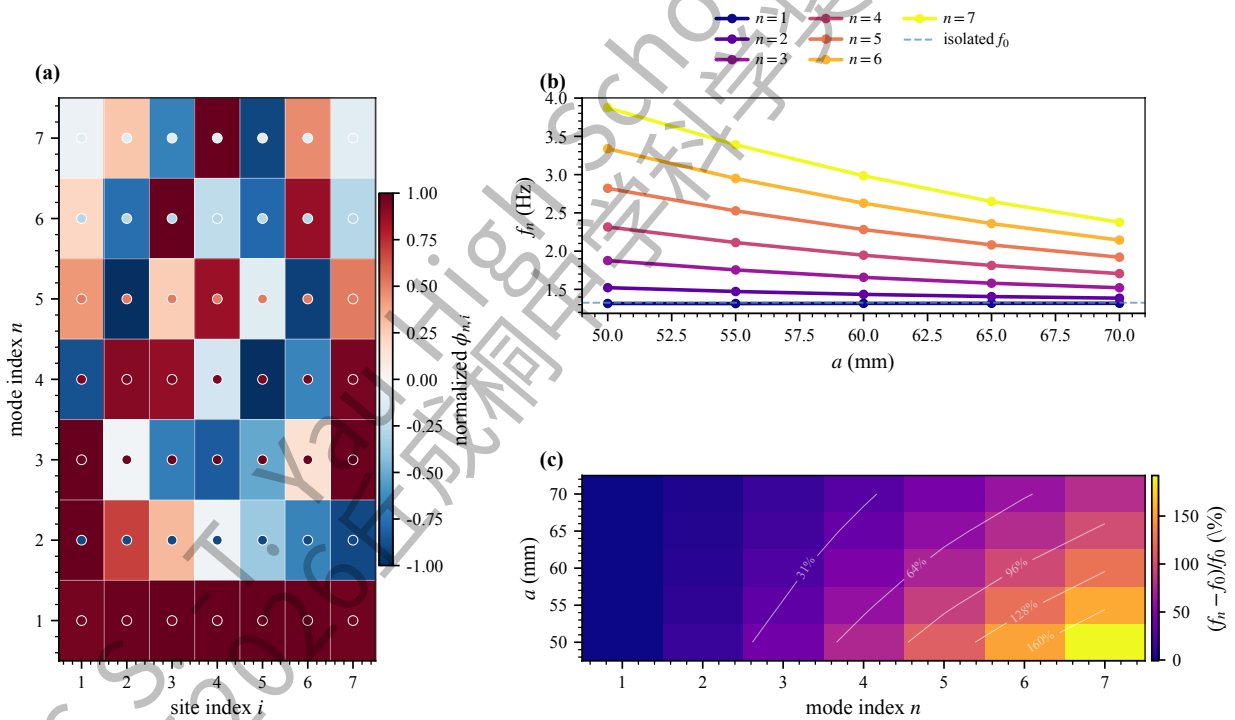


图 5.5: 七摆链的离散正常模态、模态频率随悬点间距的变化及相对于孤立摆频率的偏移。

Discrete normal modes of the seven-pendulum chain, variation of modal frequencies with pivot spacing, and frequency shifts relative to an isolated pendulum.

图 5.5(a) 给出基准构型下七个归一化本征模态。颜色正负表示不同格点之间的相对相位；本征向量整体乘以 -1 不会改变该模态。

最低阶模态中相邻格点主要表现为近同相运动。随模态阶数增加，本征向量出现更多格点间符号变化，对应不同的有限链空间结构。

图 5.5(b) 显示在当前参数范围内，悬点间距增大时频带整体收缩，中高阶模态的频率变化更加明

显，低阶模态则始终处于接近孤立摆时间尺度的区域。

图 5.5(c) 给出相对频移 $\delta_{f,n}$ 在模态阶次和悬点间距上的分布，用于量化磁耦合引起的频率分裂。

5.8 长程角向耦合与色散关系

有限链本征问题采用各磁体独立标定的 M_i 。为分析理想长链中的空间色散，进一步考虑机械参数一致、磁化强度取代表值 $\bar{M}$ 且极性严格交替的无限周期链 [5]。

取均匀平衡态

$$\bar{\theta} = 0. \quad (5.67)$$

由于

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i+s} = (-1)^s, \quad (5.68)$$

相距 s 个格点的一对磁摆的有效两体势写为

$$U_s^{(\lambda)} = \lambda_m (-1)^s \bar{M}^2 \tilde{\mathcal{G}}_{sa}(\theta_i, \theta_{i+s}). \quad (5.69)$$

在 $\bar{\theta} = 0$ 处定义

$$A_s = \left. \frac{\partial^2 U_s^{(\lambda)}}{\partial \theta_i^2} \right|_{\bar{\theta}}, \quad (5.70)$$

$$B_s = \left. \frac{\partial^2 U_s^{(\lambda)}}{\partial \theta_i \partial \theta_{i+s}} \right|_{\bar{\theta}}. \quad (5.71)$$

其中 A_s 表示第 s 阶邻居对单格点角向曲率的贡献， B_s 表示对应的交叉角向耦合。两者已经包含交替极性产生的 $(-1)^s$ 符号。

均匀长链的线性运动方程为

$$I \ddot{\xi}_i + k_g \xi_i + \sum_{s=1}^{\infty} [2A_s \xi_i + B_s (\xi_{i-s} + \xi_{i+s})] = 0. \quad (5.72)$$

代入 Bloch 波

$$\xi_i = B \exp [i(qia - \omega t)], \quad (5.73)$$

得到无阻尼色散关系

$$\omega^2(q) = \frac{1}{I} \left[k_g + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (A_s + B_s \cos(sqa)) \right]. \quad (5.74)$$

其中

$$-\frac{\pi}{a} \leq q \leq \frac{\pi}{a}$$

为第一 Brillouin 区。

数值计算中将相互作用截断到第 S 阶邻居，得到

$$\omega_S^2(q) = \frac{1}{I} \left[k_g + 2 \sum_{s=1}^S (A_s + B_s \cos(sqa)) \right]. \quad (5.75)$$

当前计算取

$$S_{\text{ref}} = 6 \quad (5.76)$$

作为数值长程参考。若图例中使用 $full$ ，其含义为 $S = S_{\text{ref}}$ ，不表示数学上的无穷级数。

定义相对于该参考结果的截断误差

$$\delta_S(q) = \frac{|f_S(q) - f_{S_{\text{ref}}}(q)|}{f_{S_{\text{ref}}}(q)}. \quad (5.77)$$

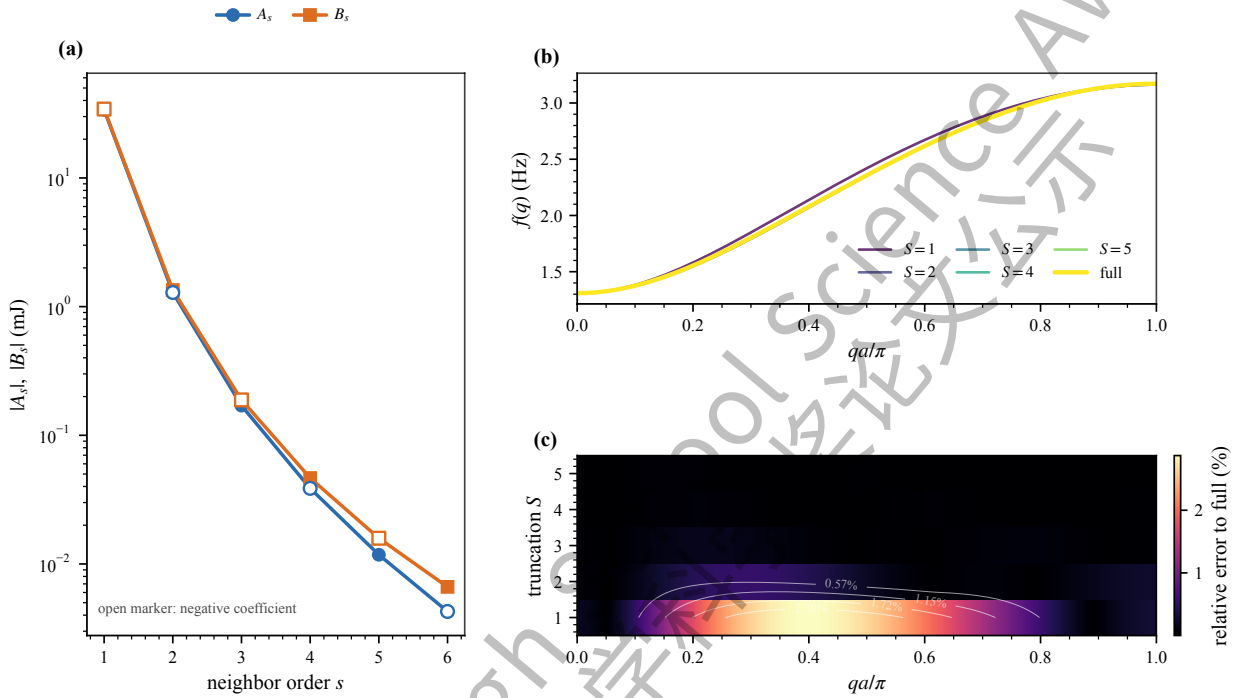


图 5.6: 均匀交替极性长链中不同阶邻居的角向耦合、截断色散关系及相对于六阶长程参考结果的误差。
Angular couplings of different neighbor orders, truncated dispersion relations, and errors relative to the sixth-neighbor long-range reference for a uniform alternating-polarity chain.

图 5.6(a) 显示 $|A_s|$ 和 $|B_s|$ 随邻居阶数增加快速减小。纵轴采用对数尺度，因此绘制的是系数绝对值；空心标记表示原始系数为负。这些正负号表示势能 Hessian 的角向曲率符号，不直接对应两磁体之间静态吸引或排斥的符号。

图 5.6(b) 比较不同邻居截断阶数下的色散曲线。最近邻项给出主要频带尺度，加入更远邻居后曲线逐渐接近 $S_{\text{ref}} = 6$ 的参考结果。

图 5.6(c) 给出 $\delta_S(q)$ 。不同波数区域对远邻项的敏感程度存在差异，随着 S 增加，截断结果逐渐向六阶参考结果收敛。

5.9 非线性初值与能量输运量

线性模态描述稳定构型附近的小振幅动力学。对于有限释放角，时间演化直接积分式 (5.47)。

定义相对于静态平衡构型的角位移

$$\xi_i = \theta_i - \theta_i^*. \quad (5.78)$$

对于一般的单端释放，可写成

$$\xi_1(0) = \Theta_0, \quad \xi_{i>1}(0) = 0, \quad \dot{\xi}_i(0) = 0. \quad (5.79)$$

改变 a 会同时改变平衡构型和初始磁势。因此固定 Θ_0 时，不同悬点间距下的初始超额机械能一般不同。

若需要比较相同初始能量尺度下的理论传输过程，可以进一步采用

$$E(0; N, a) - E^*(N, a) = E_0 \quad (5.80)$$

的等初始超额能量条件。

系统总机械能定义为

$$E = T + V^{(\lambda)}. \quad (5.81)$$

根据运动方程，有

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{i=1}^N c_i \dot{\theta}_i^2 = -\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (5.82)$$

为定义局部能量，将成对磁势平均分配到两个参与格点。对于 $i < j$ ，定义对称扩展

$$U_{ji}^{(\lambda)}(\theta_j, \theta_i) \equiv U_{ij}^{(\lambda)}(\theta_i, \theta_j). \quad (5.83)$$

第 i 个格点相对于平衡态的局部超额能量定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i = & \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 + m_i^p g l_{c,i} (\cos \theta_i^* - \cos \theta_i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \left[U_{ij}^{(\lambda)}(\theta_i, \theta_j) - U_{ij}^{(\lambda)}(\theta_i^*, \theta_j^*) \right]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

其总和满足

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = E - E^*. \quad (5.85)$$

对于一般两角度势 $U_{ij}^{(\lambda)}(\theta_i, \theta_j)$ ，定义从格点 i 指向格点 j 的瞬时保守能流

$$J_{i \rightarrow j} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_{ij}^{(\lambda)}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i - \frac{\partial U_{ij}^{(\lambda)}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_j \right]. \quad (5.86)$$

由定义有

$$J_{j \rightarrow i} = -J_{i \rightarrow j}. \quad (5.87)$$

因此第 i 个格点满足局部能量平衡

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} + \sum_{j \neq i} J_{i \rightarrow j} = -c_i \dot{\theta}_i^2. \quad (5.88)$$

对于当前长程模型， $J_{i \rightarrow j}$ 对所有保留的磁体对均有定义，其和给出格点 i 与其余链之间的净保守能量交换；对全部格点求和时，内部成对能流由式 (5.87) 相互抵消，恢复式 (5.82)。

第 6 章 实验检验

6.1 $N = 3$ 有限链的端点释放动力学

6.1.1 端点释放与实验观测量

三摆有限链作为有限圆柱动力学模型的基准校准工况。实验选用磁体 5、4、3 构成三摆链，悬点间距固定为

$$a = 60 \text{ mm}. \quad (6.1)$$

释放前，将端点磁体 5 沿链外侧偏离平衡位置，并在最高位附近由静止释放。以各摆静态平衡位置 θ_i^* 为参考，初始状态近似写为

$$\theta_5(t_r) = \theta_5^* + \Delta\theta, \quad \theta_4(t_r) \simeq \theta_4^*, \quad \theta_3(t_r) \simeq \theta_3^*, \quad (6.2)$$

以及

$$\dot{\theta}_3(t_r) \simeq \dot{\theta}_4(t_r) \simeq \dot{\theta}_5(t_r) \simeq 0. \quad (6.3)$$

数值积分采用释放时刻附近由实验轨迹确定的实际初始状态。

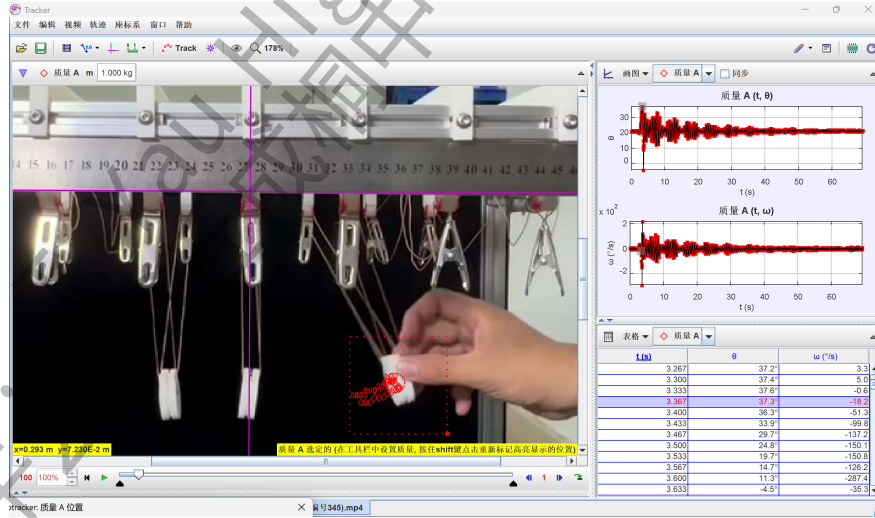


图 6.1: 三摆链释放时刻附近的 Tracker 实验追踪图像。

Tracker image of the three-pendulum chain near the release instant.

Tracker 逐帧提取各磁体中心相对于固定视频原点的位置极角。三摆实验以磁体 4 的悬点为观测基准，并采用运动末段稳定区间进行中心化：

$$\eta_i^{\text{exp}}(t) = \alpha_i^{\text{exp}}(t) - \tilde{\alpha}_{i,\text{tail}}, \quad (6.4)$$

其中 $\tilde{\alpha}_{i,\text{tail}}$ 为第 i 个通道末段稳定区间内位置极角的中位数。由此消除固定观测几何产生的静态偏置。理论计算采用相同观测几何。取磁体 4 的悬点为原点，三个悬点的水平位置为

$$X_3 = -a, \quad X_4 = 0, \quad X_5 = a. \quad (6.5)$$

第 i 个磁摆的理论位置极角定义为

$$\alpha_i^{\text{th}} = \text{atan2}(X_i + l_i \sin \theta_i, l_i \cos \theta_i), \quad (6.6)$$

其中第一实参为相对于观测原点的水平位移，第二实参为向下竖直分量，因此 α_i 从竖直向下方向起算。

理论中心化观测量写为

$$\eta_i^{\text{th}}(t) = \alpha_i^{\text{th}}(\theta_i^{\text{th}}(t)) - \alpha_i^{\text{th}}(\theta_i^*). \quad (6.7)$$

理论与实验均在观测量 η_i 下比较。记释放时刻为 t_r ，释放后时间定义为

$$\tau = t - t_r. \quad (6.8)$$

6.1.2 非线性瞬态响应与理论实验对照

图 6.2 给出端点释放后三个磁摆的实验观测量，并比较独立磁场标定有限圆柱模型与 $N = 3$ 基准链校准后的有效有限圆柱模型。

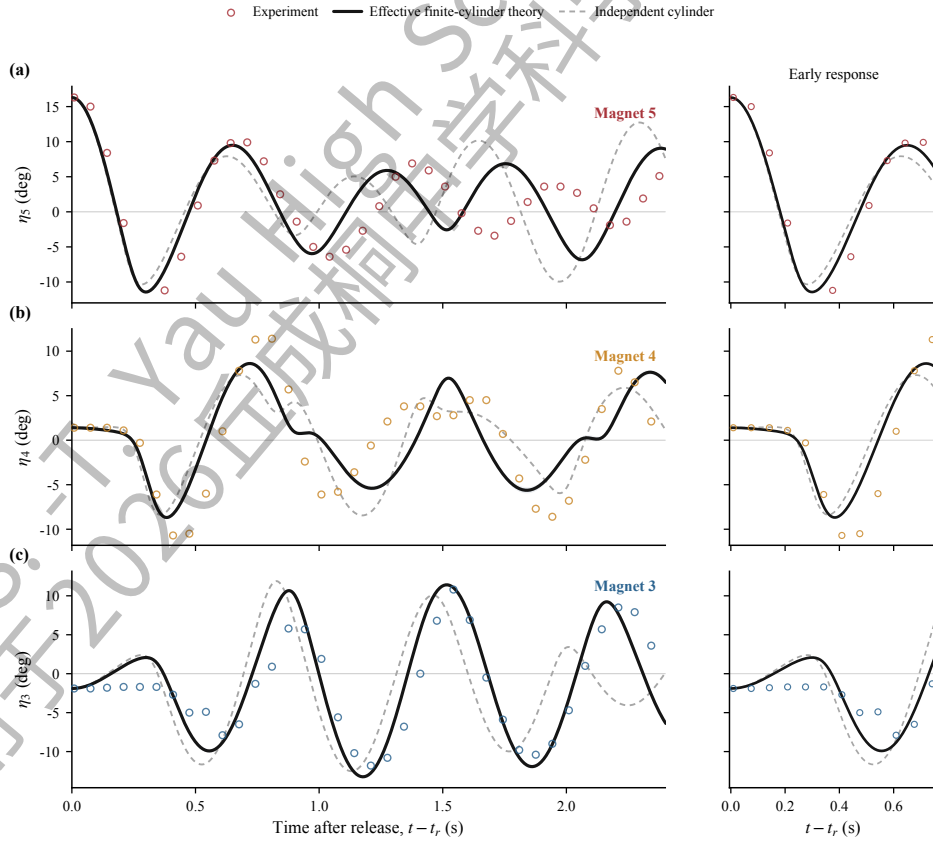


图 6.2: 三摆链在 $a = 60$ mm 时的端点释放实验响应及两种有限圆柱模型的时间域比较。

Endpoint-release response of the three-pendulum chain at $a = 60$ mm and time-domain comparison of two finite-cylinder models.

释放时刻附近, 磁体 5 具有最大正向位移, 磁体 4 和磁体 3 位于各自平衡位置附近。随后三个通道依次进入振荡, 并表现出不同的幅值和相位演化。

由单磁体磁场扫描得到的 M_i 直接构造三摆链有限圆柱总磁势

$$V_m^{\text{cyl}} = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}). \quad (6.9)$$

独立磁场模型对应

$$\lambda_m = 1.$$

该模型给出的主要振荡时间尺度与实验接近, 但第二、第三模态理论频率偏高。因此定义有效磁势

$$V_m^{\text{eff}} = \lambda_m V_m^{\text{cyl}}, \quad (6.10)$$

并在 $N = 3$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 的基准链中, 由第二和第三实验模态共同确定

$$\lambda_m = 0.473305. \quad (6.11)$$

第一模态未参与参数识别, 主要由于其对 λ_m 的敏感性较弱。当 λ_m 由 1 调整为 0.473305 时, 第一阶理论频率仅由 1.3206 Hz 变化至 1.3225 Hz, 约变化 0.14%; 第二、第三阶则分别由 1.6640 和 2.2412 Hz 变化至 1.5486 和 1.9581 Hz。第一模态接近孤立摆参考频率 $f_{\text{iso}} \simeq 1.3257 \text{ Hz}$, 其中重力恢复作用占比较高, 磁耦合对该阶频率的影响较小。因此第二、第三模态用于共同确定 λ_m , 第一模态保留用于独立频率比较。

该修正仅作用于总有限圆柱磁势, 各磁体独立测得的 M_i 和圆柱几何参数保持不变。后续 $N = 5$ 、 $N = 7$ 及不同悬点间距实验均固定

$$\lambda_m = 0.473305.$$

图 6.2 显示有效模型能够描述三个通道的主要振荡周期、早期极值位置和格点间相位关系, 后期实验与理论逐渐出现相位和局部幅值差异。

端点释放初态同时投影到多个有限链本征方向, 因此单个格点轨迹包含多个离散频率成分。后续通过联合模态分析进一步分离这些模态成分。

6.1.3 实验本征频率与模态动力学

对三个同步 Tracker 角度通道进行共享频率模态识别, 得到三个实验模态频率

$$f_1^{\text{exp}} = 1.3667 \text{ Hz}, \quad f_2^{\text{exp}} = 1.5712 \text{ Hz}, \quad f_3^{\text{exp}} = 1.9444 \text{ Hz}. \quad (6.12)$$

本文所有理论实验频率比较均采用含实测黏性衰减率后的阻尼振荡频率

$$f_n^{\text{th}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}. \quad (6.13)$$

独立有限圆柱模型 $\lambda_m = 1$ 给出

$$f_n^{\text{cyl}} = (1.3206, 1.6640, 2.2412) \text{ Hz}. \quad (6.14)$$

采用 $\lambda_m = 0.473305$ 后得到

$$f_n^{\text{eff}} = (1.3225, 1.5486, 1.9581) \text{ Hz}. \quad (6.15)$$

定义相对频率误差

$$\varepsilon_{f,n} = 100\% \frac{f_n^{\text{eff}} - f_n^{\text{exp}}}{f_n^{\text{exp}}}, \quad (6.16)$$

对应

$$\varepsilon_f = (-3.2\%, -1.4\%, +0.7\%). \quad (6.17)$$

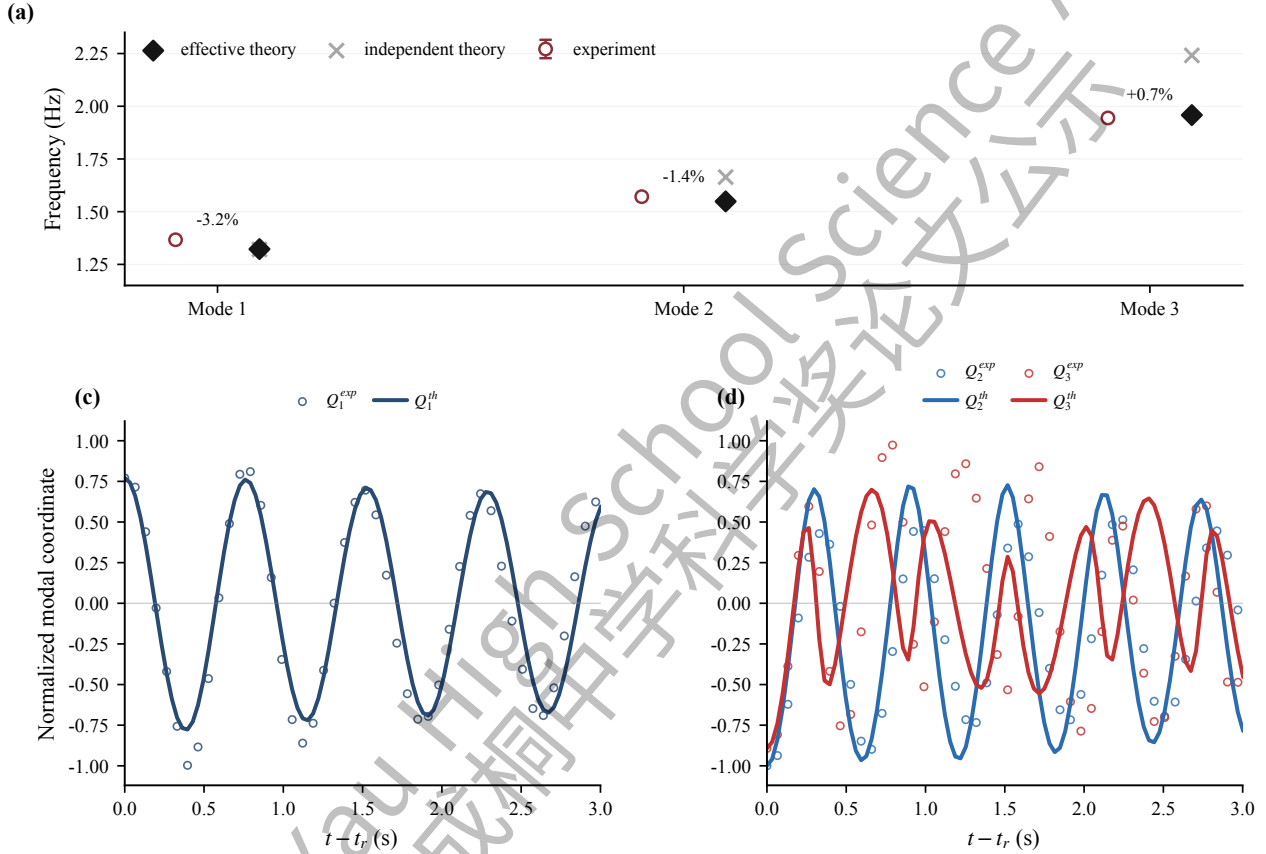


图 6.3: 三摆链的实验模态频率及实验与有效有限圆柱模型在理论本征基中的模态坐标比较。

Experimental modal frequencies of the three-pendulum chain and comparison of experimental and effective finite-cylinder modal coordinates in the theoretical eigenbasis.

图 6.3(a) 显示三阶实验频率和理论频率具有相同的阶次排序。第二和第三模态参与 λ_m 的确定，第一模态未参与该参数校准，其理论频率相对实验低约 3.2%。

为分析完整非线性轨迹在平衡点线性本征基中的组成，定义物理角位移

$$\xi(t) = \theta(t) - \theta^*. \quad (6.18)$$

记有效总势能平衡点处的 Hessian 为 $\mathbf{H}$ ，惯性矩阵为 $\mathbf{J}$ ，则无阻尼线性化正常模态满足

$$\mathbf{H}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{J}\phi_n. \quad (6.19)$$

取惯性归一条件

$$\Phi^T \mathbf{J} \Phi = \mathbf{I}_3, \quad (6.20)$$

其中

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3).$$

实验与理论物理角轨迹在同一本征基中的投影为

$$\mathbf{Q}(t) = \Phi^T \mathbf{J} \xi(t). \quad (6.21)$$

图 6.3(c) 给出最低频本征方向上的实验和理论模态坐标。二者在多个振荡周期内具有相近的主要周期和相位演化。

图 6.3(d) 给出第二和第三本征方向上的时间投影。两个模态具有更短的振荡周期，实验和理论均呈现相应的正负振荡以及随时间变化的幅值包络。

由此可见，端点释放初态在三阶有限链本征基中同时具有多个非零投影，图 6.2 中的单格点时间轨迹对应这些离散模态成分的共同演化。

6.1.4 三格点有限链的时空响应

将

$$\eta_5(t), \quad \eta_4(t), \quad \eta_3(t)$$

按照链中实际空间顺序排列，可以同时比较三个格点上的时间演化。

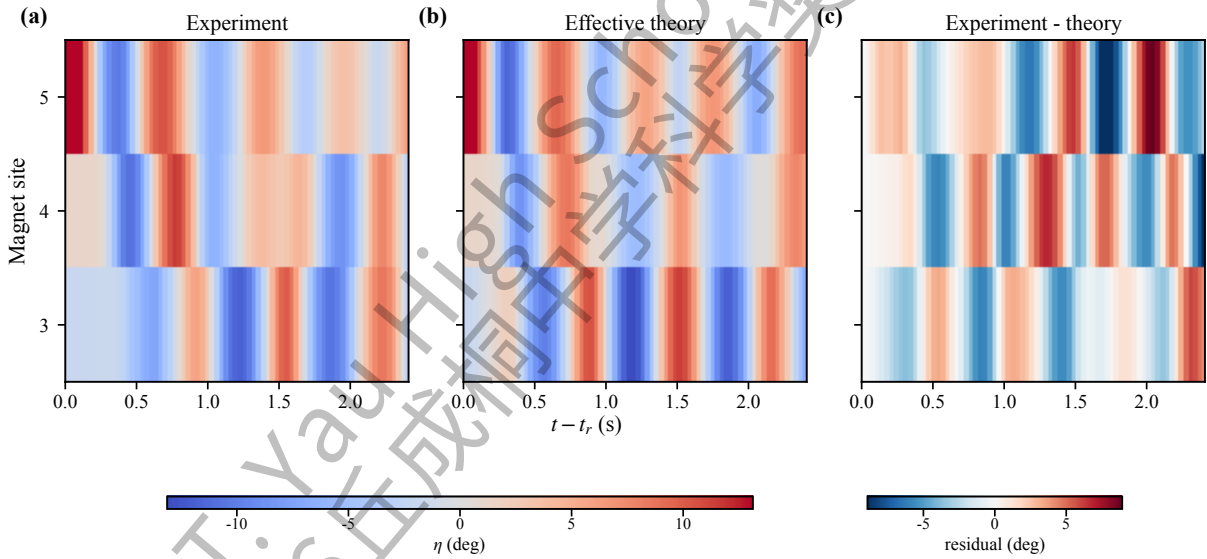


图 6.4: 三摆有限链端点释放后的实验响应、有效有限圆柱理论响应及其格点-时间残差。

Experimental response, effective finite-cylinder prediction, and site-time residuals of the three-pendulum finite chain after endpoint release.

图 6.4(a) 显示三个实验格点在释放后具有不同的响应时序和相位结构。释放端磁体 5 首先出现大幅响应，随后磁体 4 和磁体 3 相继进入明显振荡。

图 6.4(b) 给出 $\lambda_m = 0.473305$ 下的理论结果。主要条纹周期、格点间符号变化及相位结构与实验具有相近的时间尺度。

定义格点-时间残差

$$r_i(\tau) = \eta_i^{\text{exp}}(\tau) - \eta_i^{\text{th}}(\tau). \quad (6.22)$$

图 6.4(c) 中的残差呈连续正负交替结构，其中包含频率、相位和局部幅值差异。结合后续模态频率比较，可进一步描述理论与实验之间的偏差。

三摆链用于确定 λ_m ，并给出时域轨迹、模态频率和格点-时间结构的基准结果。后续链长与悬点间距实验均沿用相同的有限圆柱势、机械参数、阻尼模型和观测坐标处理方法。

6.2 链长对有限链动力学的影响

固定悬点间距

$$a = 60 \text{ mm},$$

比较 $N = 3, 5, 7$ 三种有限链，用于考察链长增加后离散模态结构、边界效应及固定参数模型的迁移表现。

不同链长均采用各磁体独立磁场标定得到的 M_i ，并保持磁体几何参数、机械参数和阻尼模型一致。有效磁势尺度固定为

$$\lambda_m = 0.473305,$$

该参数由 $N = 3$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 基准链的第二和第三实验模态共同确定。后续 $N = 5$ 和 $N = 7$ 计算均直接使用该参数，不再依据相应实验频率重新调整 λ_m ，从而比较同一磁势尺度在不同链长条件下的结果。

对于任意链长 N ，有限圆柱总磁势写为

$$V_m^{\text{cyl}} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}), \quad d_{p,ij} = |i - j|a. \quad (6.23)$$

其中全部

$$\binom{N}{2}$$

个磁体对均计入总磁势，因此模型同时保留相邻磁体和非相邻磁体之间的直接磁耦合。对于 $N = 3, 5, 7$ ，对应磁体对数量分别为 3、10 和 21，链长增加后内部格点数和长程磁体对数量也相应增加。

固定参数迁移模型写为

$$V_m^{\text{tr}} = \lambda_m V_m^{\text{cyl}}, \quad \lambda_m = 0.473305. \quad (6.24)$$

对于每一种链长，均由对应总势能重新求解稳定平衡构型，并在平衡点计算 Hessian 矩阵。随后由同一组磁学和机械参数得到本征频率、空间振型及非线性时间轨迹。因此三种链长之间的比较同时包含自由度数目、有限链边界结构和磁体对组成的变化，而磁体参数与有效磁势尺度保持统一。

6.2.1 $N = 5$ 的固定参数迁移

当链长增加至 $N = 5$ 时，实验中识别出五个离散模态，对应五自由度有限链的五个主要线性本征方向。与三摆链相比，五摆链包含更多内部格点和磁体对，有限链频谱中可分辨的离散本征结构也相应增加。

在保持 $\lambda_m = 0.473305$ 及其余参数不变的条件下，固定参数理论相对于实验的五阶频率误差约为

$$-3.9\%, \quad -2.5\%, \quad -2.4\%, \quad 0.0\%, \quad +4.3\%.$$

前三阶理论频率略低于实验值，第四阶与实验较为接近，第五阶理论频率略高。五阶误差整体处于数个百分点范围，且理论与实验保持相同的模态频率排序。这表明三摆基准链确定的磁势尺度迁移至五摆链后，仍能给出与实验接近的主要离散频谱结构。

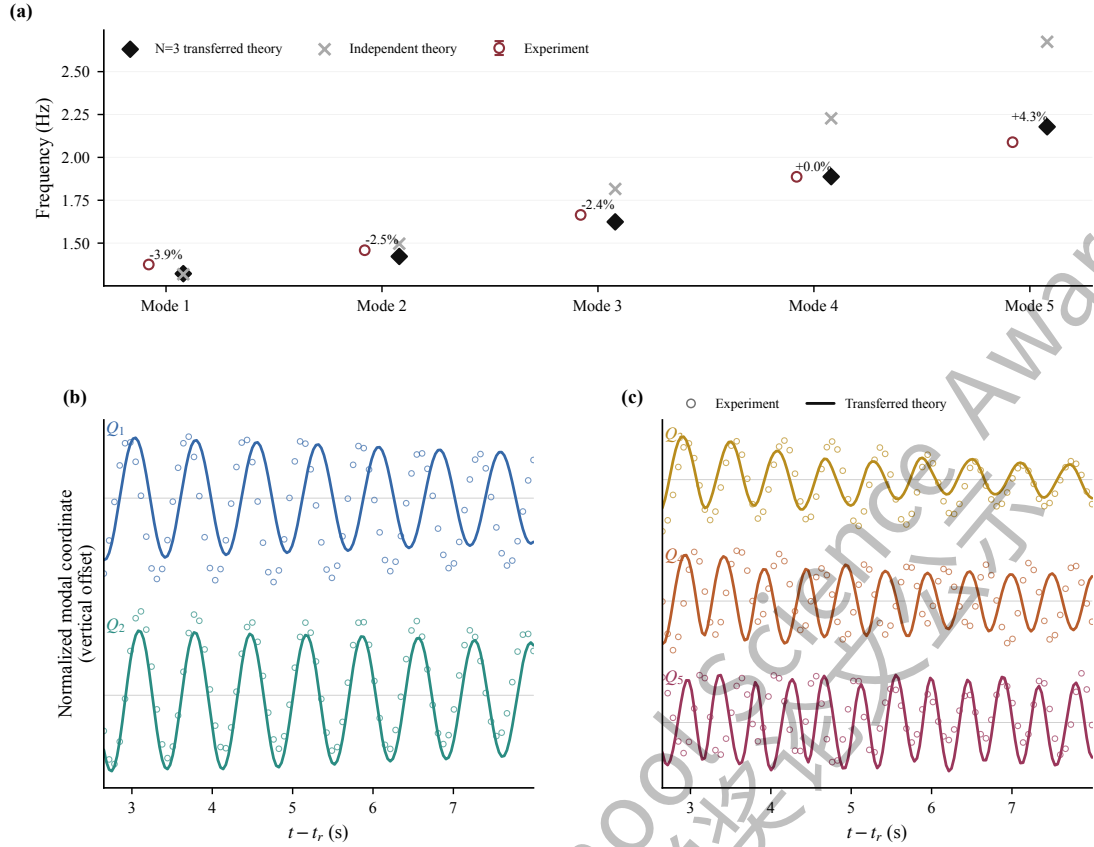


图 6.5: 五摆链的实验模态频率以及实验与理论在五阶本征基中的模态坐标比较。

Experimental modal frequencies of the five-pendulum chain and comparison of experimental and theoretical modal coordinates in the five-mode eigenbasis.

图 6.5(a) 显示五个实验模态位于约 1.4–2.1 Hz 范围。前三阶理论频率略低于实验值，第四阶接近实验值，第五阶理论频率略高于实验值。

图 6.5(b,c) 给出实验与理论轨迹在同一理论本征基中的投影。五个本征方向均具有清晰的实验响应，不同模态对应不同的振荡时间尺度，其叠加共同形成有限链中的时变能量交换。

进一步利用五通道共同观测区间内的实验轨迹，重构各磁体对之间的瞬时能流 $J_{i \rightarrow j}(t)$ ，并与相同参数下的理论结果进行比较，如图 6.6 所示。

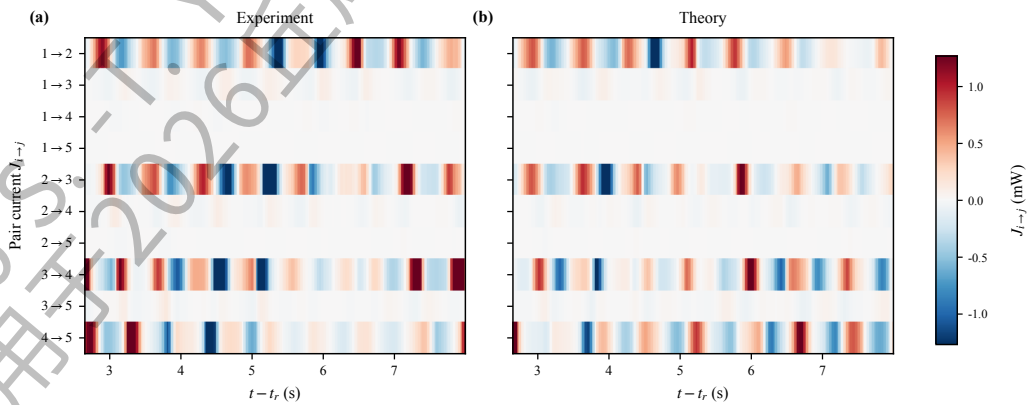


图 6.6: 五摆链中各磁体对瞬时能流的实验重构与理论结果。

Experimental reconstruction and theoretical prediction of instantaneous pairwise energy currents in the five-pendulum chain.

图 6.6 显示，能量交换主要集中于 $1 \leftrightarrow 2$ 、 $2 \leftrightarrow 3$ 、 $3 \leftrightarrow 4$ 和 $4 \leftrightarrow 5$ 等相邻磁体对，随着磁体间隔增加，瞬时能流幅值整体减弱。各主要通道中的 $J_{i \rightarrow j}(t)$ 随时间交替取正值和负值，对应有限链中能

量在不同磁体之间的往复交换。

实验与理论在主要能流通道、远近邻耦合强弱关系以及能流振荡时间尺度上具有一致的结构特征。这一结果将前述正常模态分析进一步延伸到 $J_{i \rightarrow j}(t)$ 所描述的局域能量交换，表明固定参数有限圆柱模型能够同时描述五摆链的频谱结构、空间振型和主要能量输运过程。

6.2.2 $N = 7$ 的固定参数迁移

当链长增加至 $N = 7$ 时，实验中识别出七个离散模态。固定迁移理论的频率相对误差依次约为

$$-4.1\%, -2.7\%, -0.6\%, +1.2\%, +4.0\%, +6.2\%, +9.9\%.$$

为量化整体频率误差，定义

$$\text{MARE}_f = \frac{100\%}{N} \sum_{n=1}^N \left| \frac{f_n^{\text{th}} - f_n^{\text{exp}}}{f_n^{\text{exp}}} \right|, \quad \text{RMSRE}_f = 100\% \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{f_n^{\text{th}} - f_n^{\text{exp}}}{f_n^{\text{exp}}} \right)^2}. \quad (6.25)$$

对应 $N = 5$ 和 $N = 7$ 分别得到

$$\text{MARE}_f = 2.62\%, 4.10\%, \quad \text{RMSRE}_f = 3.02\%, 5.05\%.$$

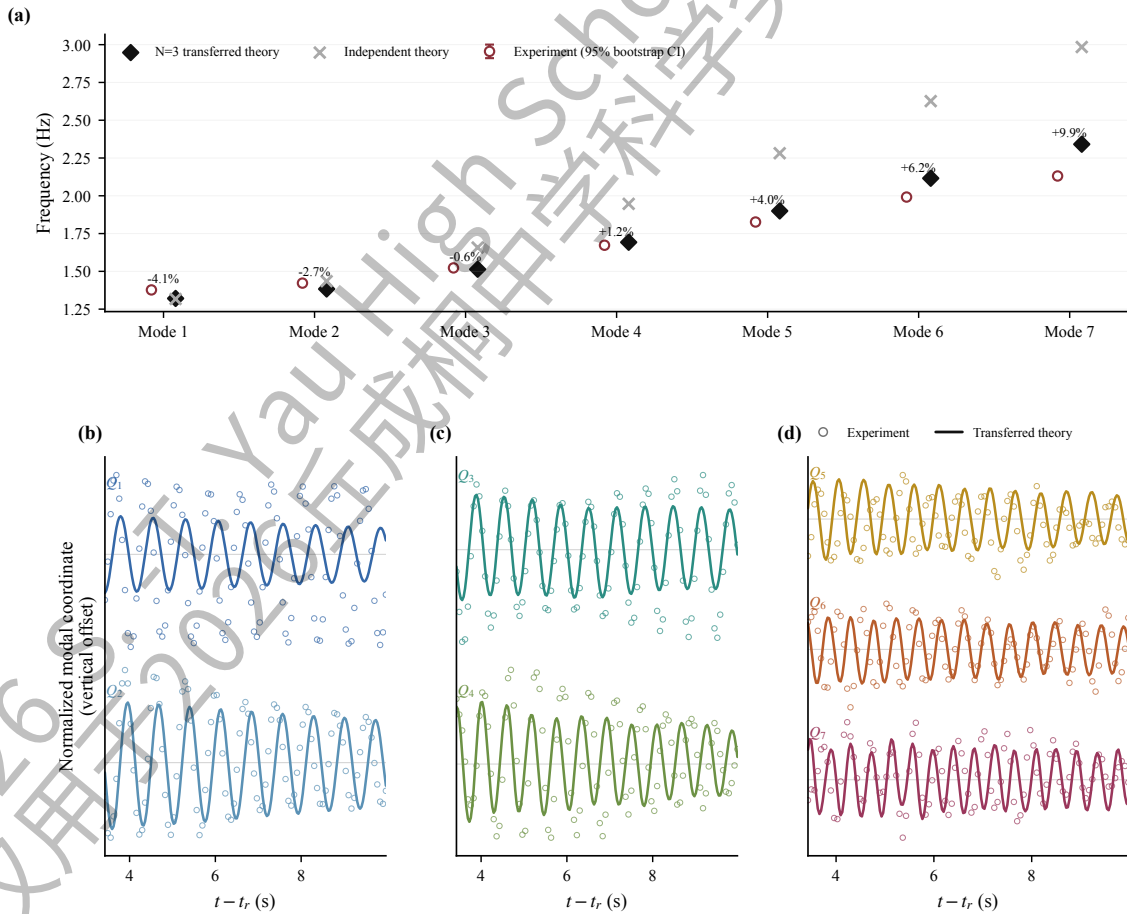


图 6.7: 七摆链的实验模态频率及实验与固定参数迁移理论在七阶本征基中的模态坐标比较。

Experimental modal frequencies of the seven-pendulum chain and comparison with fixed-parameter transferred theory in the seven-mode eigenbasis.

图 6.7(a) 显示理论与实验频率残差随模态阶次变化：前三阶理论频率略低于实验值，第四阶较为接近，第五至第七阶逐渐高于实验值。

在稳定平衡构型 θ^* 附近，总势能 Hessian 定义为

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta^*}, \quad (6.26)$$

记 $\mathbf{H} = [H_{ij}]$ ，则无阻尼正常模态满足

$$\mathbf{H}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{J}\phi_n. \quad (6.27)$$

其中 ω_n 和 ϕ_n 分别表示本征频率和空间振型。

为与 Tracker 实验比较，将理论振型映射到固定原点观测空间。第 i 个摆的观测角为

$$\alpha_i(\theta_i) = \text{atan2}(X_i + l_i \sin \theta_i, l_i \cos \theta_i), \quad (6.28)$$

平衡点附近的观测 Jacobian 为

$$\mathbf{G}_{\text{obs}} = \text{diag} \left[\left. \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i^*} \right], \quad (6.29)$$

因此理论观测空间振型写为

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{G}_{\text{obs}} \phi_n. \quad (6.30)$$

七通道共享频率拟合得到实验复模态

$$\mathbf{e}_n = (A_{1n} - iB_{1n}, \dots, A_{7n} - iB_{7n})^\top. \quad (6.31)$$

理论与实验振型的一致性采用复模态保证准则

$$\text{MAC}_{mn} = \frac{|\mathbf{t}_m^\dagger \mathbf{e}_n|^2}{(\mathbf{t}_m^\dagger \mathbf{t}_m)(\mathbf{e}_n^\dagger \mathbf{e}_n)}. \quad (6.32)$$

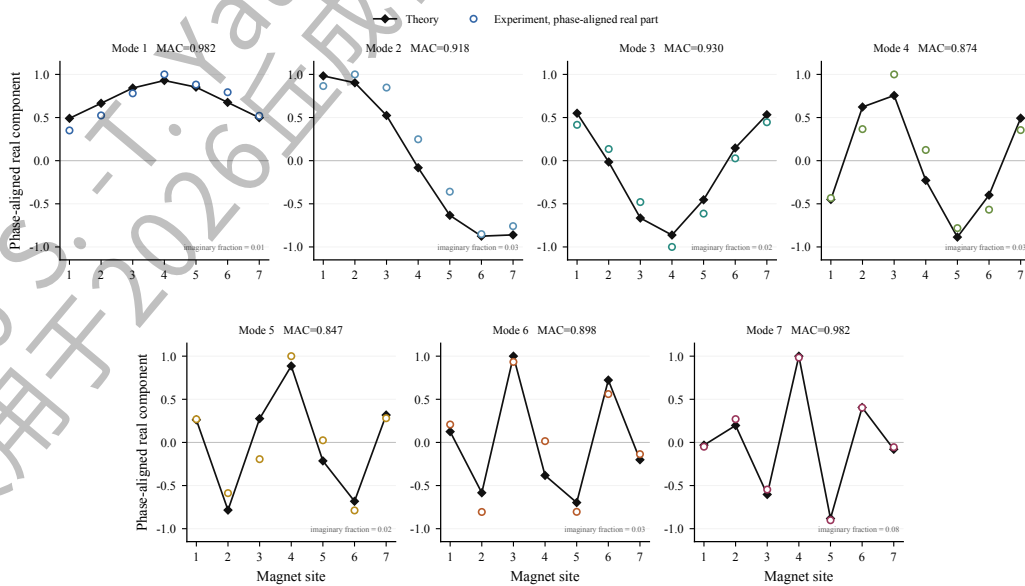


图 6.8: 七阶实验复模态经整体相位对齐后的实部与固定参数迁移理论观测空间振型的逐格点比较。

Site-by-site comparison between the phase-aligned real parts of the seven experimental complex modes and the observation-space mode shapes from fixed-parameter transferred theory.

七阶 assigned MAC 约为

$$0.982, 0.918, 0.930, 0.874, 0.847, 0.898, 0.982,$$

平均值为

$$\overline{\text{MAC}}_{N=7} \simeq 0.919. \quad (6.33)$$

其中第一和第七模态的配对 MAC 均约为 0.982。第七模态同时具有约 +9.9% 的频率残差，说明空间振型与本征频率的理论-实验偏差可以具有不同的模态依赖。整体来看，固定 λ_m 后， $N = 5$ 和 $N = 7$ 中仍可辨认与理论对应的离散频率和空间振型。

6.3 $N = 7$ 下相互作用模型比较

在 $N = 7$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 条件下，比较独立磁场标定有限圆柱模型

$$V_m^{\text{ind}} = V_m^{\text{cyl}}, \quad \lambda_m = 1, \quad (6.34)$$

与由 $N = 3$ 基准链确定的固定参数迁移模型

$$V_m^{\text{tr}} = 0.473305 V_m^{\text{cyl}}. \quad (6.35)$$

两种模型采用相同的有限圆柱几何核，并保留全部磁体对：

$$V_m^{\text{cyl}} = \sum_{1 \leq i < j \leq 7} U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}). \quad (6.36)$$

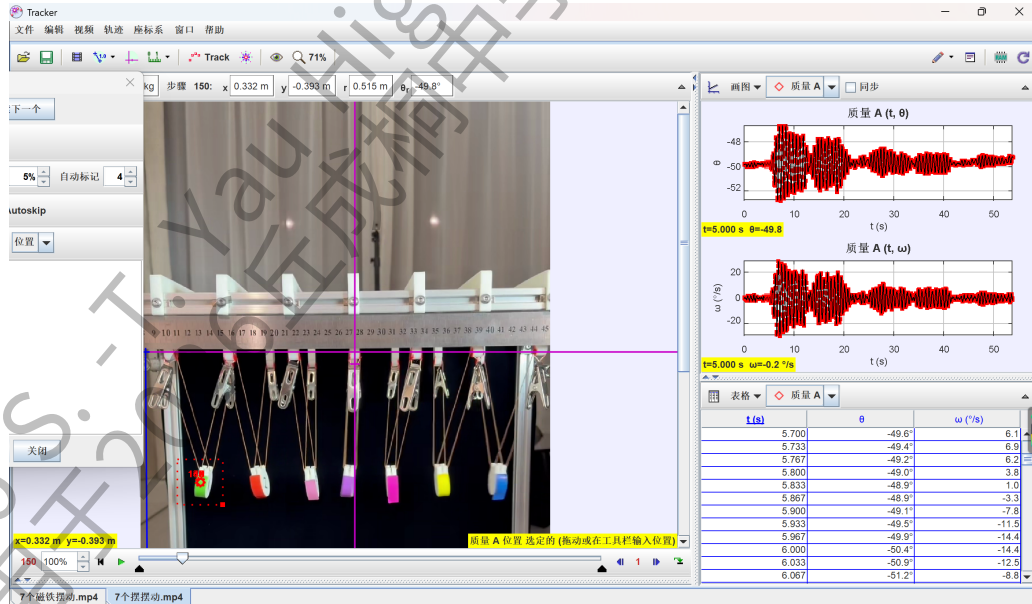


图 6.9: 七摆有限磁摆链的实验装置与 Tracker 观测构型。

Experimental apparatus and Tracker observation geometry for the seven-pendulum finite magnetic chain.

对于等间距七摆链，

$$d_{p,ij} = |i - j|a,$$

因此在 $a = 60 \text{ mm}$ 时包含

60, 120, 180, 240, 300, 360 mm

六种悬点分离尺度。

完整非线性动力学为

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \nabla_{\boldsymbol{\theta}}V(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}, \quad V = V_g + V_m. \quad (6.37)$$

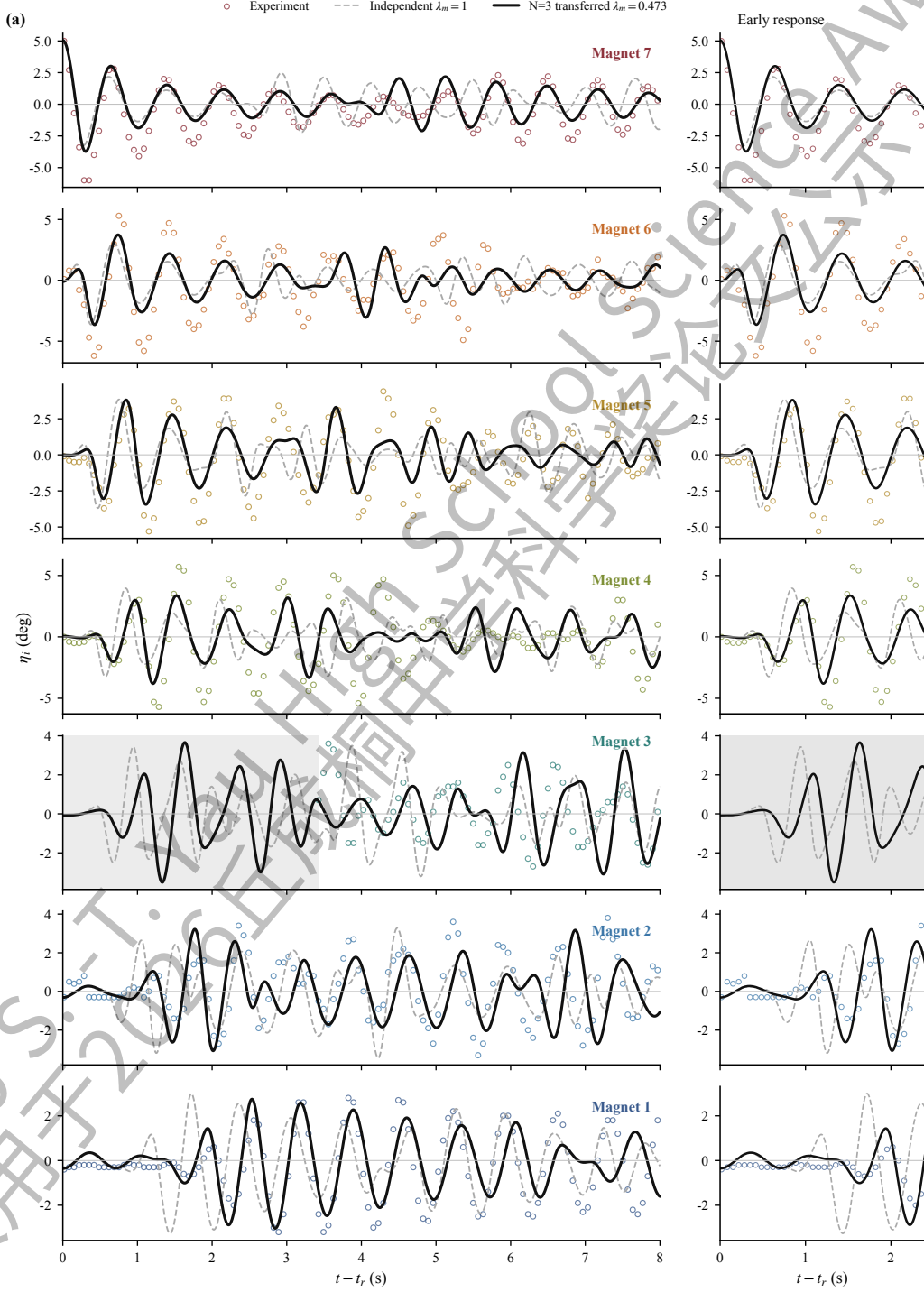


图 6.10: 七摆链在 $a = 60 \text{ mm}$ 时的端点释放实验响应及独立有限圆柱模型与固定参数迁移模型的时间域比较。

Endpoint-release response of the seven-pendulum chain at $a = 60 \text{ mm}$ and time-domain comparison of the independently calibrated finite-cylinder model and the fixed-parameter transferred model.

图 6.10 中灰色虚线对应 $\lambda_m = 1$ ，黑色实线对应 $\lambda_m = 0.473305$ 。独立模型在多个通道上给出的振荡周期较短，固定参数迁移模型在释放后前若干周期内与实验的主要周期和格点间相位关系更接近。

三号摆在释放后的早期缺少 Tracker 数据，该区间只绘制理论轨迹，理论实验比较仅使用实际存在的实验时间段。

若第 n 阶模态的理论实验频率差为

$$\Delta f_n = f_n^{\text{th}} - f_n^{\text{exp}}, \quad (6.38)$$

则单一模态的一阶相位积累为

$$\Delta \varphi_n(\tau) \simeq 2\pi \Delta f_n \tau, \quad \tau = t - t_r. \quad (6.39)$$

因此完整多模态轨迹中的长期残差同时包含频率差、相位差和幅值差。定义格点-时间残差

$$r_i(\tau) = \eta_i^{\text{exp}}(\tau) - \eta_i^{\text{tr}}(\tau). \quad (6.40)$$

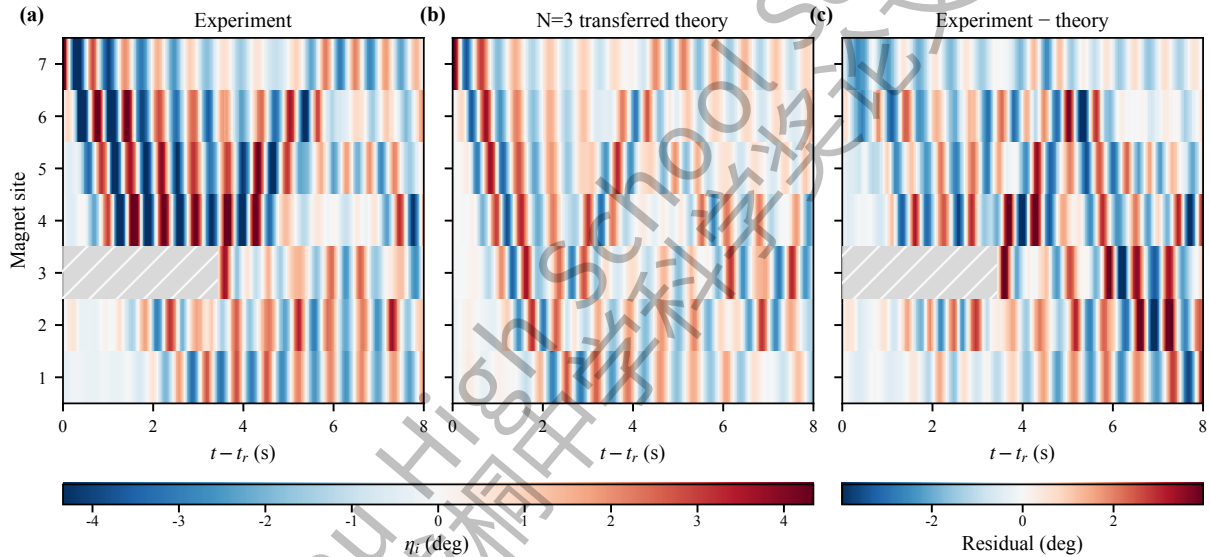


图 6.11: $N = 7$ 实验响应、固定参数迁移有限圆柱理论响应及其格点-时间残差。

Experimental response, fixed-parameter transferred finite-cylinder prediction, and site-time residuals for $N = 7$.

图 6.11(a) 展示七个实验通道的时空响应，不同格点在端点释放后逐渐出现具有不同相位和幅值的振荡结构。

图 6.11(b) 给出固定参数迁移理论，其主要周期和格点间条纹组织与实验处于相近的时间尺度。

图 6.11(c) 中的残差具有连续的正负结构。图 6.7(a) 所示的非零模态频率残差会对长期相位差产生贡献，因此频域结果与时间域残差共同用于描述模型误差。

三号摆释放后的早期实验数据缺失，相应残差仅在 Tracker 数据存在的时间区间定义。

综合 $N = 5$ 和 $N = 7$ 的频率、空间振型和时间域结果，固定 $\lambda_m = 0.473305$ 的有限圆柱模型能够给出更长有限链中的主要离散模态结构，同时高阶模态仍保留较明显的理论实验频率差。

6.4 悬点间距

悬点间距 a 改变各磁体悬点之间的固定分离，并进一步改变有限圆柱两体势在平衡构型附近的角曲率。磁摆链和排斥磁晶格中的实验研究均表明，磁相互作用具有显著的距离依赖，其变化可以反

映在正常模态和离散频谱中 [2, 3, 4, 5]。

本文使用的圆柱磁体具有有限半径和厚度，因此间距扫描继续采用前文建立的均匀磁化有限圆柱模型，并在动力学中保留磁体位置变化和磁轴转动 [6]。

本节固定

$$N = 5, \quad (6.41)$$

依次取

$$a = 40, 60, 70, 80 \text{ mm}. \quad (6.42)$$

五块磁体的 M_i 、 I_{eff} 、 k_g 、 β 及磁体几何尺寸均沿用独立标定结果，有效磁势尺度保持

$$\lambda_m = 0.473305.$$

四组间距数据不参与该参数的重新确定。

6.4.1 间距与线性化频谱

对于给定 a ，五摆系统总势能可为

$$V(\boldsymbol{\theta}; a) = k_g \sum_{i=1}^5 (1 - \cos \theta_i) + \lambda_m \sum_{1 \leq i < j \leq 5} U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; (j-i)a), \quad (6.43)$$

其中

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T. \quad (6.44)$$

五摆链中的

$$\binom{5}{2} = 10$$

个磁体对全部保留。

每一个间距均独立求解静态平衡构型

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}^*(a); a) = \mathbf{0}, \quad (6.45)$$

并在相应平衡点计算

$$H_{ij}(a) = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\boldsymbol{\theta}^*(a)}. \quad (6.46)$$

记

$$\mathbf{H}(a) = [H_{ij}(a)],$$

五摆惯性矩阵为

$$\mathbf{J}_5 = I_{\text{eff}} \mathbf{I}_5. \quad (6.47)$$

无阻尼正常模态满足

$$\mathbf{H}(a) \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2(a) \mathbf{J}_5 \boldsymbol{\phi}_n. \quad (6.48)$$

与实验振荡频率比较时采用

$$f_n^{\text{th}}(a) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2(a) - \beta^2}. \quad (6.49)$$

由独立机械参数得到孤立阻尼摆参考频率

$$f_{\text{iso}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_g}{I_{\text{eff}}}} - \beta^2 = 1.325738 \text{ Hz}. \quad (6.50)$$

随着 a 增大, 有限圆柱磁相互作用的整体曲率尺度随磁体分离增加而下降, 因此有限链模态分裂预期逐渐减小; 在耦合继续趋弱的极限下, 各模态频率趋向由单摆机械参数决定的 f_{iso} 。

本节同时保留两组理论结果。 $\lambda_m = 1$ 对应独立磁场标定有限圆柱模型, 固定迁移模型采用

$$\lambda_m = 0.473305,$$

并在四种悬点间距下保持不变。

6.4.2 实验响应与模态演化

五个 Tracker 通道分别采用其末段稳定区间中心化,

$$\eta_i^{\text{exp}}(t) = \alpha_i^{\text{exp}}(t) - \tilde{\alpha}_{i,\text{tail}}. \quad (6.51)$$

图 6.12 给出释放后前 8 s 的五摆实验时空响应。

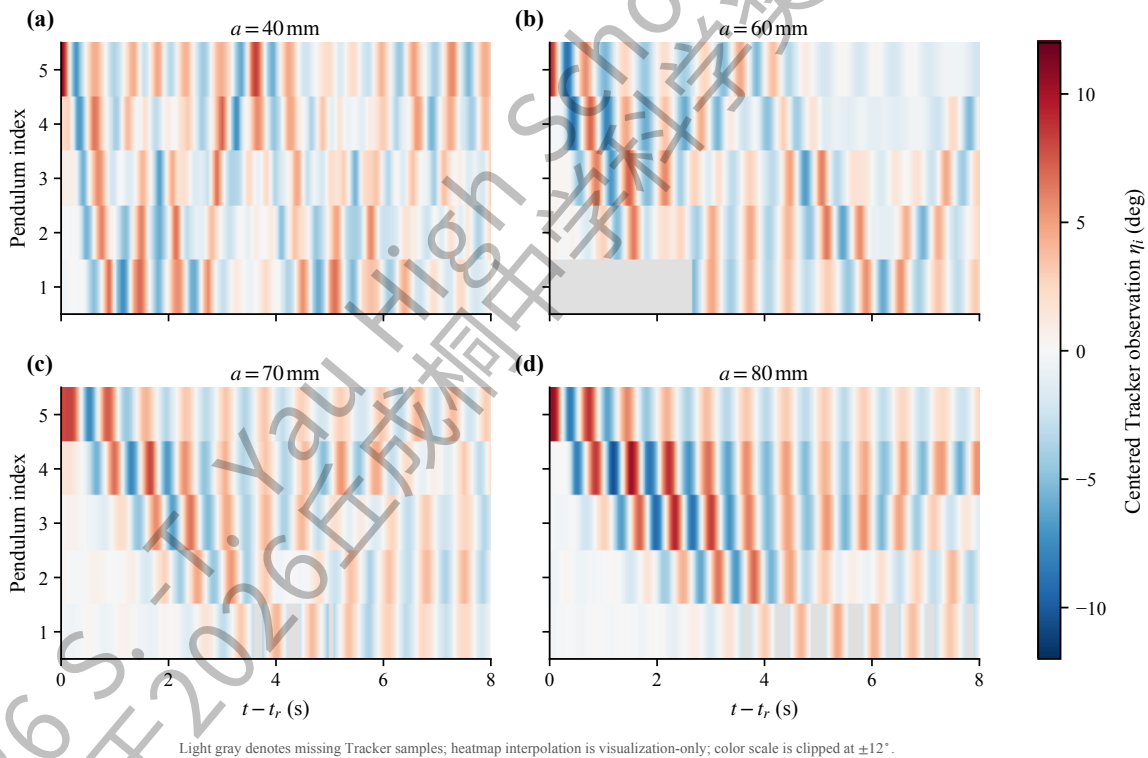


图 6.12: 四种悬点间距下五摆链释放后的中心化 Tracker 时空响应采用统一的 $\pm 12^\circ$ 色标, 浅灰区域表示缺失样本。

Centered Tracker spatiotemporal responses of the five-pendulum chain at four pivot spacings using a common $\pm 12^\circ$ color scale; light-gray regions denote missing samples.

在 $a = 40$ mm 时, 不同格点的实验信号中同时存在较宽范围的振荡时间尺度。随着 a 增加, 时空条纹对应的主要时间尺度逐渐接近。这一变化通过联合模态频率拟合进一步定量分析。

五个实验通道使用共享五个模态频率的阻尼时域模型联合拟合, 具体方法与处理敏感性检验见附

录 F。得到

a (mm)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	
40	1.3793	1.6509	2.1442	2.7167	3.3025	
60	1.3753	1.4586	1.6644	1.8866	2.0886	Hz.
70	1.3885	1.4286	1.5481	1.6843	1.8042	
80	1.3882	1.4065	1.4816	1.5688	1.6488	

定义五阶模态带宽

$$W(a) = f_5(a) - f_1(a). \quad (6.52)$$

实验结果为

$$W_{\text{exp}} = 1.9232, 0.7133, 0.4157, 0.2606 \text{ Hz}, \quad (6.53)$$

分别对应

$$a = 40, 60, 70, 80 \text{ mm}.$$

从 40 mm 增加至 80 mm 时, 实验五阶频带宽度缩小约 86.4%。

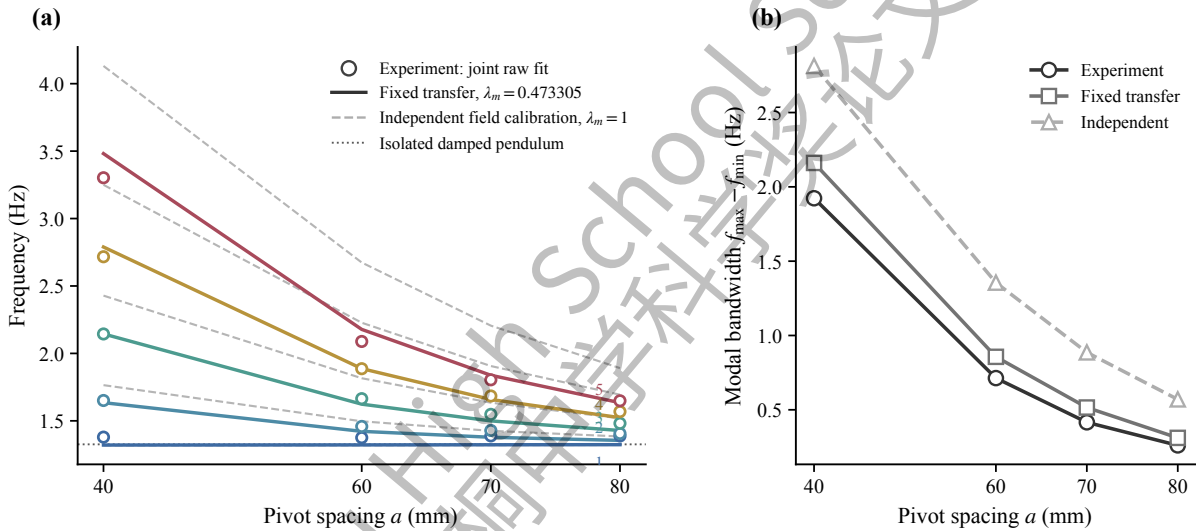


图 6.13: 五摆实验与有限圆柱理论的模态频率分支及模态带宽随悬点间距的变化。

Modal-frequency branches and modal bandwidth versus pivot spacing for the five-pendulum experiment and finite-cylinder theory.

图 6.13(a) 显示不同模态对 a 的变化幅度不同。第五实验模态由

$$3.3025 \text{ Hz}$$

下降至

$$1.6488 \text{ Hz},$$

第一模态则由约 1.38 Hz 小幅变化。

因此在当前实验区间内, 频带收缩主要体现在中高阶分支向低频方向移动, 最低频分支的变化幅度明显较小。

固定迁移模型在四个间距下均采用

$$\lambda_m = 0.473305.$$

定义频率相对误差

$$\varepsilon_{f,n} = 100\% \frac{f_n^{\text{tr}} - f_n^{\text{exp}}}{f_n^{\text{exp}}}. \quad (6.54)$$

四种间距共 20 个实验模态频率的平均绝对相对误差为

$$\text{MARE}_f = 2.85\%, \quad (6.55)$$

最大绝对相对误差为

$$\max |\varepsilon_f| = 5.42\%. \quad (6.56)$$

理论本征向量经过 Tracker 观测 Jacobian 映射后，与实验复模态进行复 MAC 配对，完整定义及 MAC 矩阵见附录 G。

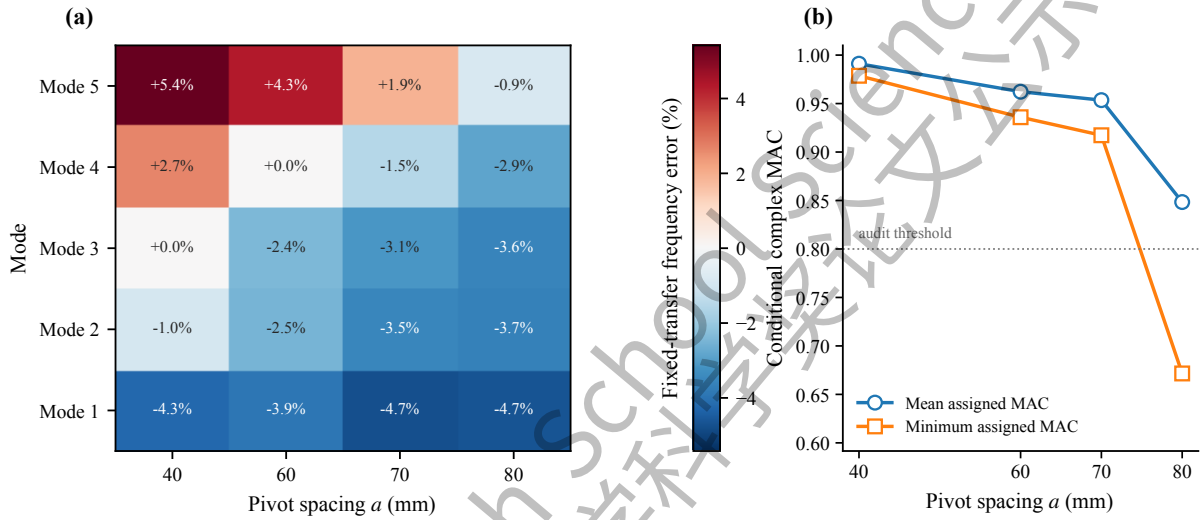


图 6.14: 固定参数迁移模型在四种悬点间距下的频率相对误差及理论观测空间模态与实验复模态的配对 MAC。
Relative frequency errors of the fixed-parameter transferred model and paired MAC values between theoretical observation-space modes and experimental complex modes at four pivot spacings.

在 $a = 40, 60, 70, 80$ mm 时，平均配对 MAC 分别为

$$0.991, \quad 0.962, \quad 0.954, \quad 0.848.$$

其中 $a = 80$ mm 时，第二和第四模态的配对 MAC 分别约为 0.672 和 0.736。

此时前两阶实验模态频率间隔仅为

$$\Delta f_{12} = 1.40653 - 1.38817 = 0.01836 \text{ Hz}. \quad (6.57)$$

较小的前两阶频率间隔与第二模态较低的单模态 MAC 同时出现，因此该模态的振型比较需要结合前两阶本征子空间理解；第四模态的较低 MAC 则作为独立的空间振型偏差记录。

综合图 6.12–6.14，实验五阶频带随悬点间距增加显著收缩，固定 λ_m 的有限圆柱模型给出相同的总体频谱演化趋势，同时仍保留数个百分点量级的模态频率残差和部分弱耦合工况下的振型偏差。

第 7 章 误差分析与不确定度量化

本节对磁场测量、磁体个体差异、阻尼参数和视频轨迹识别中的主要误差来源进行定量分析。不确定度评定采用 A 类和 B 类方法。A 类不确定度由重复观测、时间序列统计或参数拟合统计量获得；B 类不确定度由仪器精度和数字分辨率等已知技术指标确定。对于七块实际磁体之间的差异，本文单独给出样品离散程度，并在多体动力学中通过各磁体独立的磁化强度 M_i 保留这一差异。

7.1 不确定度评定方法

对于同一物理量 x 的 n 次独立重复观测，样本均值与样本标准差分别为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (7.1)$$

当研究量为重复测量均值时，A 类标准不确定度为

$$u_A(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \quad (7.2)$$

若仪器给出的最大允许误差为 $\pm\Delta_x$ ，并采用矩形分布估计，则 B 类标准不确定度为

$$u_B(x) = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}}. \quad (7.3)$$

对于最小分辨率为 q 的数字量，舍入范围为 $\pm q/2$ ，相应的 B 类标准不确定度为

$$u_{B,\text{res}} = \frac{q}{\sqrt{12}}. \quad (7.4)$$

若物理量 $y = f(x_1, \dots, x_m)$ ，并近似忽略各输入量之间的相关性，一阶合成标准不确定度为

$$u_c^2(y) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j). \quad (7.5)$$

需要给出扩展不确定度时，本文采用

$$U = k u_c, \quad k = 2, \quad (7.6)$$

对应约 95% 的覆盖水平。

7.2 磁场测量不确定度与磁体间离散性

7.2.1 特斯拉计 B 类不确定度

磁场采用 TD8620 特斯拉计测量，仪器标称测量精度为 $\pm 1\%$ 。将该精度作为最大允许误差并按矩形分布处理，磁场读数的相对 B 类标准不确定度为

$$u_{B,r}(B) = \frac{0.01}{\sqrt{3}} = 0.005773, \quad (7.7)$$

即约为

$$u_{B,r}(B) = 0.577\%. \quad (7.8)$$

取 $k = 2$ 后，相对扩展不确定度约为

$$U_r(B) = 1.155\%. \quad (7.9)$$

七块磁体在 $h = 0$ 时的平均轴向磁场峰值为

$$B_{z,pk} = 92.112 \text{ mT}. \quad (7.10)$$

由仪器精度得到

$$u_B(B_{z,pk}) = \frac{0.01 \times 92.112}{\sqrt{3}} = 0.532 \text{ mT}. \quad (7.11)$$

相应的扩展不确定度为

$$U(B_{z,pk}) = 2u_B = 1.064 \text{ mT}. \quad (7.12)$$

因此，仅计入特斯拉计标称精度时，轴向磁场峰值可表示为

$$B_{z,pk} = (92.112 \pm 1.064) \text{ mT}, \quad k = 2. \quad (7.13)$$

径向磁场平均峰值为

$$B_{r,pk} = 37.879 \text{ mT}. \quad (7.14)$$

对应

$$u_B(B_{r,pk}) = 0.219 \text{ mT}, \quad U(B_{r,pk}) = 0.437 \text{ mT}. \quad (7.15)$$

因此

$$B_{r,pk} = (37.879 \pm 0.437) \text{ mT}, \quad k = 2. \quad (7.16)$$

7.2.2 位置误差的传播

有限圆柱磁体近场具有明显的空间梯度。若探头径向位置、高度和姿态的标准不确定度分别为 $u(r)$ 、 $u(h)$ 和 $u(\vartheta)$ ，则单点磁场的合成标准不确定度可写为

$$\begin{aligned} u_c^2(B) = & u_B^2(B) + \left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)^2 u^2(r) + \left(\frac{\partial B}{\partial h}\right)^2 u^2(h) \\ & + \left(\frac{\partial B}{\partial \vartheta}\right)^2 u^2(\vartheta) + u_{\text{rep}}^2(B). \end{aligned} \quad (7.17)$$

其中 $u_{\text{rep}}(B)$ 表示同一位置重复测量产生的统计散布。当前实验记录可以直接量化特斯拉计精度对应的 B 类分量，其余位置与姿态项保留在式 (7.17) 中，用于说明近场测量中几何定位误差的传播路径。

7.2.3 七块磁体的磁场离散性

由于磁场扫描的径向步长为 5 mm，直接取离散测点最大值会受到采样位置影响。因此对每块磁体在峰值附近三个相邻径向测点作二次插值，写为

$$B(r) = ar^2 + br + c, \quad r_{\text{pk}} = -\frac{b}{2a}. \quad (7.18)$$

七块磁体在 $h = 0$ 处得到的峰值与峰位见表 7.1。

表 7.1: 七块磁体在 $h = 0$ 时的磁场峰值与峰位。

Magnetic-field peaks and corresponding radial positions of the seven magnets at $h = 0$.

磁体	r_{B_z} / mm	$B_{z,\text{pk}} / \text{mT}$	r_{B_r} / mm	$B_{r,\text{pk}} / \text{mT}$
1	9.394	87.509	13.942	34.922
2	9.526	61.692	11.665	32.994
3	9.320	101.983	11.173	38.245
4	9.297	87.634	10.541	44.691
5	9.434	106.189	10.648	42.700
6	9.463	105.954	10.927	38.605
7	9.862	93.824	12.678	32.994
均值	9.471	92.112	11.653	37.879
样本标准差	0.190	15.582	1.245	4.596

轴向和径向峰值的磁体间变异系数分别为

$$\text{CV}_{B_z} = \frac{15.582}{92.112} = 16.9\%, \quad \text{CV}_{B_r} = \frac{4.596}{37.879} = 12.1\%. \quad (7.19)$$

前文有限圆柱模型得到七块磁体的磁化强度为

$$M_i = (376.0716, 337.7114, 447.5570, 434.1561, 451.2323, 440.4404, 410.1925) \text{ kA m}^{-1}. \quad (7.20)$$

其平均值、样本标准差和变异系数分别为

$$\bar{M} = 413.909 \text{ kA/m}, \quad s_M = 42.604 \text{ kA/m}, \quad \text{CV}_M = 10.3\%. \quad (7.21)$$

七块磁体在磁场峰值和磁化强度上均存在可观的个体差异。多体动力学计算因此采用各磁体独立的 M_i ，使实际磁体间的磁强差异直接进入相互作用模型。表 7.1 中的样本标准差用于描述不同磁体之间的离散程度，不并入单块磁体重复测量的 A 类标准不确定度。

7.3 阻尼参数的不确定度

单摆自由衰减实验用于确定摆体的耗散参数。前文采用指数包络

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (7.22)$$

描述振幅随时间的衰减。

取对数可得

$$\ln A(t) = \ln A_0 - \beta t. \quad (7.23)$$

根据前文阻尼摆实验结果，阻尼率、阻尼振荡周期及拟合优度分别为

$$\beta = 0.059\,979/\text{s}, \quad T_d = 0.754\,297\text{ s}, \quad R^2 \simeq 0.9986. \quad (7.24)$$

对于式 (7.23) 的线性拟合，设

$$y_i = \ln A_i, \quad (7.25)$$

其拟合残差标准差为

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}}. \quad (7.26)$$

斜率对应阻尼率，其 A 类标准不确定度可由斜率标准误得到

$$u_A(\beta) = \frac{s_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}}. \quad (7.27)$$

根据本文阻尼摆原始衰减数据的统计结果，阻尼率标准不确定度约为

$$u_A(\beta) = 4.52 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}. \quad (7.28)$$

因此其相对 A 类标准不确定度为

$$u_{A,r}(\beta) = \frac{4.52 \times 10^{-4}}{0.059979} = 0.754\%. \quad (7.29)$$

可写为

$$\beta = (0.059979 \pm 0.000452) \text{ s}^{-1}, \quad 1\sigma. \quad (7.30)$$

约 95% 的区间可表示为

$$\beta \simeq (0.059979 \pm 0.00090) \text{ s}^{-1}. \quad (7.31)$$

阻尼振荡角频率为

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}. \quad (7.32)$$

代入 $T_d = 0.754\,297\text{ s}$ 得到

$$\omega_d \simeq 8.330 \text{ rad/s}. \quad (7.33)$$

无阻尼固有角频率满足

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \beta^2}. \quad (7.34)$$

代入 T_d 和 β 得到

$$\omega_0 \simeq 8.330 \text{ rad/s}. \quad (7.35)$$

对于 $\omega_0(T_d, \beta)$ ，一阶不确定度传播为

$$\begin{aligned} u^2(\omega_0) &= \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial T_d} \right)^2 u^2(T_d) + \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \beta} \right)^2 u^2(\beta) \\ &= \left(\frac{4\pi^2}{\omega_0 T_d^3} \right)^2 u^2(T_d) + \left(\frac{\beta}{\omega_0} \right)^2 u^2(\beta). \end{aligned} \quad (7.36)$$

本文采用的有效转动惯量为

$$I_{\text{eff}} = 4.1889 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2. \quad (7.37)$$

由

$$k_g = I_{\text{eff}} \omega_0^2 \quad (7.38)$$

可得重力恢复刚度的相对标准不确定度

$$\left(\frac{u(k_g)}{k_g} \right)^2 = \left(\frac{u(I_{\text{eff}})}{I_{\text{eff}}} \right)^2 + 4 \left(\frac{u(\omega_0)}{\omega_0} \right)^2. \quad (7.39)$$

黏性阻尼系数为

$$c = 2I_{\text{eff}}\beta, \quad (7.40)$$

因此

$$\left(\frac{u(c)}{c} \right)^2 = \left(\frac{u(I_{\text{eff}})}{I_{\text{eff}}} \right)^2 + \left(\frac{u(\beta)}{\beta} \right)^2. \quad (7.41)$$

阻尼摆实验中 $R^2 \simeq 0.9986$ ，说明指数衰减模型能够较好描述所采用实验区间的振幅包络。阻尼率的相对 A 类标准不确定度约为 0.754%。

7.4 Tracker 角度测量不确定度

Tracker 导出的角度数据保留至 0.1° 。数字分辨率产生的 B 类标准不确定度为

$$u_{B,\text{res}}(\theta) = \frac{0.1^\circ}{\sqrt{12}} = 0.0289^\circ. \quad (7.42)$$

实际视频跟踪同时包含像素定位、质心识别和轨迹提取产生的逐帧散布。在运动接近静止的尾段，采用相邻帧差分估计单帧角度的统计散布：

$$u_{A,i}(\theta) = \frac{\text{std}[\theta_i(t_{k+1}) - \theta_i(t_k)]}{\sqrt{2}}. \quad (7.43)$$

七摆实验得到

$$\begin{aligned} u_{A,i}(\theta) &= (0.057, 0.161, 0.184, 0.097, \\ &\quad 0.265, 0.395, 0.073)^\circ. \end{aligned} \quad (7.44)$$

七个通道的中位数为

$$\tilde{u}_A(\theta) = 0.161^\circ. \quad (7.45)$$

五摆实验中可用于该统计的 2-5 号磁体通道得到

$$u_{A,i}(\theta) = (0.097, 0.089, 0.093, 0.064)^\circ, \quad (7.46)$$

其中位数约为

$$\tilde{u}_A(\theta) = 0.091^\circ. \quad (7.47)$$

尾段统计量由 Tracker 已量化的角度序列直接计算, 其中已经包含数字舍入对逐帧散布的影响。因此角度轨迹分析采用实测的 $u_A(\theta)$ 描述实际跟踪散布, 同时单独给出 0.0289° 的数字分辨率尺度。

7.5 模态频率识别稳定性

多通道角度信号采用共享频率形式

$$\eta_i(t) = c_i + \sum_{n=1}^N [A_{in} \cos(2\pi f_n t) + B_{in} \sin(2\pi f_n t)]. \quad (7.48)$$

在保持各通道共享同一组 f_n 的条件下改变拟合时间区间, 可以估计模态频率对时间窗选择的敏感性。七摆实验的统计结果见表 7.2。

表 7.2: 七摆模态频率对拟合时间窗的敏感性。
Sensitivity of the seven modal frequencies to the fitting time window.

模态	f_n / Hz	u_{win} / mHz	相对散布 / %
1	1.3847	2.719	0.196
2	1.4623	2.387	0.163
3	1.5284	1.817	0.119
4	1.6741	0.414	0.025
5	1.8242	2.135	0.117
6	1.9910	1.125	0.057
7	2.1253	1.752	0.082

在合理拟合时间窗范围内, 七阶模态的频率统计散布约为

$$u_{\text{win}} = 0.414\text{--}2.719 \text{ mHz}, \quad (7.49)$$

对应相对值约为

$$0.025\%\text{--}0.196\%. \quad (7.50)$$

本文还比较了原始 Tracker 角度序列与 Savitzky–Golay 平滑序列得到的共享频率。最大频率变化为

$$\Delta f_{\text{SG,max}} = 0.424 \text{ mHz}, \quad (7.51)$$

相对变化约为 0.03%。

在 $a = 80 \text{ mm}$ 时, 最小实验模态间隔约为 18.36 mHz , 上述平滑处理引起的最大变化约占该模态间隔的

$$\frac{0.424}{18.36} = 2.31\%. \quad (7.52)$$

由此可见, 在当前处理条件下, 平滑方式和合理拟合时间窗产生的频率变化均保持在较小尺度。

7.6 理论模态频率的不确定度传播

理论模态频率可统一写为

$$f_n = F_n(M_1, \dots, M_N, a, l_i, I_i, \beta, \lambda_m). \quad (7.53)$$

记全部输入参数构成向量 $\mathbf{p}$ ，相应协方差矩阵为 Σ_p ，则一阶不确定度传播可写为

$$u^2(f_n) = \nabla_p F_n^T \Sigma_p \nabla_p F_n. \quad (7.54)$$

本文的平衡构型、磁相互作用 Hessian 和本征频率均随输入参数变化。在进一步进行全参数不确定度传播时，可对输入参数进行重复采样。第 s 组参数对应的计算过程为

$$\mathbf{p}^{(s)} \longrightarrow \mathbf{q}_0^{(s)} \longrightarrow \mathbf{H}^{(s)} \longrightarrow f_n^{(s)}. \quad (7.55)$$

经过多组参数样本计算后，由 $\{f_n^{(s)}\}$ 的分布得到理论频率的不确定度范围。采用 2.5% 和 97.5% 分位数，可构造约 95% 的理论预测区间。

7.7 误差与不确定度汇总

现有实验数据能够直接量化的主要不确定度及误差尺度汇总于表 7.3。

表 7.3: 实验测量、参数识别与模型比较中的主要误差尺度。

Main uncertainty and error scales in measurements, parameter identification and model comparison.

项目	量化结果	说明
特斯拉计 B 类标准不确定度	相对值 0.577%	由标称 $\pm 1\%$ 精度按矩形分布计算
B_z 峰值	$u_B = 0.532 \text{ mT}$	$k=2$ 时扩展不确定度为 1.064 mT
B_r 峰值	$u_B = 0.219 \text{ mT}$	$k=2$ 时扩展不确定度为 0.437 mT
七磁体 B_z 峰值离散	$s = 15.582 \text{ mT}$, CV = 16.9%	七块实际磁体之间的轴向峰值差异
七磁体 B_r 峰值离散	$s = 4.596 \text{ mT}$, CV = 12.1%	七块实际磁体之间的径向峰值差异
磁化强度 M_i	$s_M = 42.604 \text{ kA/m}$, CV = 10.3%	反映七块磁体的磁参数离散程度
阻尼率 β	$\beta = 0.059979/\text{s}$, $u_A = 4.52 \times 10^{-4}/\text{s}$	相对 A 类标准不确定度约为 0.754%，拟合 $R^2 \simeq 0.9986$
阻尼振荡周期	$T_d = 0.754297 \text{ s}$	采用前文阻尼摆实验参数
Tracker 数字分辨率	$u_B = 0.0289^\circ$	由 0.1° 角度输出分辨率得到
七摆 Tracker 尾段散布	$0.057^\circ - 0.395^\circ$	七通道中位数约为 0.161°
五摆 Tracker 尾段散布	$0.064^\circ - 0.097^\circ$	四个有效通道的中位数约为 0.091°
七摆频率窗口敏感性	$0.414 - 2.719 \text{ mHz}$	相对统计散布约为 0.025%–0.196%
平滑处理频率变化	最大 0.424 mHz	相对变化约为 0.03%
$N=5$ 模态频率偏差	MARE = 2.62%	理论模态与实验模态之间的平均相对误差
$N=7$ 模态频率偏差	MARE = 4.10%	理论模态与实验模态之间的平均相对误差
四种间距共 20 个模态	MARE = 2.85%，最大误差 = 5.42%	固定参数模型在不同悬点间距下的预测误差

综合以上结果，TD8620 特斯拉计对应的相对 B 类标准不确定度为 0.577%。七块磁体的 B_z 和 B_r 峰值变异系数分别为 16.9% 和 12.1%，磁化强度 M_i 的变异系数约为 10.3%。这些差异通过各磁体独立的 M_i 进入有限磁摆链动力学模型。

阻尼摆实验采用参数

$$T_d = 0.754\,297\,\text{s}, \quad \beta = 0.059\,979/\text{s}, \quad R^2 \simeq 0.9986.$$

阻尼率的 A 类相对标准不确定度约为 0.754%。

Tracker 七摆静止尾段的角度统计散布中位数约为 0.161° ，共享模态频率对合理拟合时间窗变化的相对散布约为 0.025%–0.196%，原始序列与平滑序列之间的最大频率变化约为 0.03%。

上述结果表明，本文实验测量、参数识别和模态频率提取中的主要误差尺度均已得到独立量化。其中，七块磁体之间较明显的磁参数离散性已通过独立的 M_i 显式进入有限圆柱多体模型；阻尼率和 Tracker 轨迹识别的不确定度则分别进入动力学参数与实验观测量。同时，频率识别对拟合时间窗和平滑方法的敏感性明显低于 $N = 5$ 、 $N = 7$ 以及不同悬点间距条件下数个百分点量级的理论–实验频率偏差，说明这些残差不能仅由数据处理过程中的统计波动解释。

第 8 章 总结与展望

8.1 主要结论

本文围绕有限尺寸圆柱永磁体构成的非接触磁摆链，建立了从单磁体空间磁场测量到有限链正常模态与端点释放动力学的参数传递框架。七块磁体均通过二维磁场扫描独立标定，近场模型保留圆柱实际半径和厚度，并将逐块获得的磁化强度继续用于两体磁势与整链动力学。以一号磁体为基准的比较表明，在本文完整测量域内，点磁偶极模型的 $R^2 = 0.6789$ 、 $\text{RMSE} = 7.023 \text{ mT}$ ，均匀磁化有限圆柱模型的 $R^2 = 0.9833$ 、 $\text{RMSE} = 1.602 \text{ mT}$ ；在本文定义的 $\rho \geq 2R$ 数据子集中，点磁偶极模型的 R^2 提高至 0.9592。这些结果说明，在与磁体尺寸可比的工作距离内，有限尺寸结构对实验磁场分布具有不可忽略的影响，而点磁偶极模型更适合作为较远距离下的渐近比较。

基于逐块磁参数，本文构造了随两个摆角共同变化的有限圆柱两体磁势 $U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij})$ ，并在有限链中保留全部磁体对。摆角变化同时改变磁体中心位置和磁化方向，因此磁广义力矩、静止构型和稳定平衡附近的 Hessian 均由同一个总势函数得到。由 Hessian 建立的广义本征问题给出有限链正常模态，而同一势函数的非线性方程用于端点释放后的时域演化，从而使静态平衡、频谱、空间振型和瞬态动力学具有统一的相互作用基础。

在 $N = 3$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 的基准链中，第二、第三实验模态用于确定统一有效磁势尺度 $\lambda_m = 0.473305$ 。第一模态接近孤立摆频率，对 λ_m 的敏感度较低，因此未进入参数识别而作为独立校验。随后保持 λ_m 不变：在 $a = 60 \text{ mm}$ 时迁移到 $N = 5$ 和 $N = 7$ ，模态频率平均绝对相对误差分别为 2.62% 和 4.10%，七摆链平均复 MAC 为 0.919；在 $N = 5$ 的 $a = 40, 60, 70, 80 \text{ mm}$ 四种条件下，共 20 个模态频率的平均绝对相对误差为 2.85%，最大绝对相对误差为 5.42%。

悬点间距扫描进一步给出了耦合强度与频谱结构之间的直接联系。 a 从 40 mm 增至 80 mm 时，实验五阶模态带宽由 1.9232 Hz 收缩至 0.2606 Hz，中高阶模态明显向孤立摆时间尺度聚集。相同有限圆柱相互作用构造的周期链色散关系也表现出随耦合减弱而收缩的频带，因此有限链模态分裂、频带宽度和长链色散的变化可以在磁势曲率随几何分离衰减的同一图像下理解。

本文的参数链可概括为

$$\{B_r(r, h), B_z(r, h)\} \longrightarrow M_i \longrightarrow U_{ij}^{\text{cyl}} \longrightarrow V(\boldsymbol{\theta}) \longrightarrow \{\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{H}, \omega_n, \boldsymbol{\phi}_n, \boldsymbol{\theta}(t)\}. \quad (8.1)$$

这一路径将单磁体可测量的空间磁场、有限尺寸磁静力学和有限多体动力学连接起来，并通过不同链长与不同悬点间距下的实验给出参数迁移检验。

8.2 局限性与模型适用边界

本文有限圆柱模型采用均匀轴向磁化假设，以单一磁化强度 M_i 表征每块磁体。在本文测量区域内，该模型能够较好描述实测空间磁场，并保留圆柱半径、厚度及逐块磁强差异。对于更靠近磁体表面的区域，材料内部磁化分布、边缘效应及制造差异可能进一步影响局部磁场结构。后续可结合更密

集的三维磁场测量与有限元磁静力计算，提高近场空间结构的描述精度。

动力学模型以摆角 θ_i 描述双线悬挂磁摆的主要平面运动，并采用统一有效磁势尺度 λ_m 表征实际装置几何进入整链动力学后的有效磁耦合强度。实验结果表明，数度量级的平衡偏转已经对应明显的磁势曲率变化，因此双线悬挂几何、磁体姿态和实际平衡位置均会影响线性化磁刚度。本文在相同悬挂结构和磁体安装方式下采用统一的 λ_m ，后续可进一步将横向位移、微小扭转及磁体姿态纳入多自由度刚体模型，从几何层面直接计算相应的有效磁刚度。

正常模态由稳定平衡构型附近的 Hessian 得到，其适用范围对应小扰动线性动力学。端点释放过程则采用完整的非线性有限圆柱势进行积分，从而保留有限振幅下磁体中心位置和磁轴方向的连续变化。本文数值与实验主要覆盖磁体保持无重叠的运动区域

$$\rho_{ij} \geq D_p,$$

因此当前结果主要对应无碰撞、无接触条件下的非接触磁耦合动力学。进一步增大释放角后，可继续研究强非线性、近接触以及几何约束对能量输运的影响。

跨条件实验覆盖 $N = 3, 5, 7$ ，其中链长比较采用 $a = 60 \text{ mm}$ ；悬点间距实验采用 $N = 5$ ，覆盖 $a = 40\text{--}80 \text{ mm}$ 。因此本文关于固定参数迁移的实验结果对应上述链长、间距以及相同装置结构。更长有限链、其他边界条件及不同磁体尺寸可作为后续检验范围。随着磁耦合减弱，相邻本征频率逐渐接近，此时单个模态振型对实验噪声和本征子空间旋转更加敏感，因此近简并模态可进一步结合子空间指标进行比较。

机械耗散采用单磁摆自由衰减实验得到的统一线性黏性衰减率，并取 $c_i = 2\beta I_i$ 。该模型能够描述本文实验中的主要振幅包络衰减。在更长时间尺度或更大振幅范围内，空气阻力、悬线内耗、支点摩擦及幅值相关耗散可能共同参与动力学演化。后续若分别标定这些耗散来源，可进一步改善长时间轨迹中的相位和幅值预测，并形成从磁场、机械参数到非线性时域响应的更完整实验模型。

8.3 展望

后续工作首先可将双线悬挂从单摆角约化扩展为包含平面摆动、横向位移和微小扭转的多自由度刚体模型，并直接测量每个摆体在静止构型中的磁体姿态。这样可以把当前由 λ_m 表征的有效磁刚度尺度进一步分解为可测量的几何来源，并检验该系数能否由装置参数直接预测。

其次，可在单磁体磁场标定中增加三维测量与不确定度传播。通过更密集的径向和轴向网格、不同方位角扫描以及独立重复测量，可以同时估计 M_i 、 $z_{0,i}$ 、探头姿态和模型残差的不确定度，再将这些不确定度传播到平衡角、Hessian、本征频率和模态振型，建立从磁场测量到动力学预测的完整误差链。

第三，可继续拓展链长、边界条件和几何拓扑。更长的一维链能够更清晰地比较有限链离散模态与周期链色散之间的收敛关系；改变端点边界、引入缺陷磁体或局部间距变化，则可以进一步研究局域模态、带隙内状态和能量局域化。若扩展到二维磁摆阵列，还可研究有限尺寸长程磁耦合对二维模态结构和波传播方向性的影响。

最后，可在当前端点释放实验基础上系统改变初始能量，比较等释放角与等初始超额能量两类条件，并结合局域能量 $\mathcal{E}_i(t)$ 和成对能流 $J_{i \rightarrow j}(t)$ 研究从近线性模态叠加到明显非线性能量转移的过渡。这样可以进一步明确有限链正常模态、长程磁耦合和非线性能量输运之间的联系。

参考文献

- [1] International Young Physicists' Tournament, IYPT 2026 Problems: Problem 15, Magnetic Newton's Cradle, 2026. [Online]. Available: <https://www.iypt.org/problems/iypt-2026-problems/>. Accessed: June 2026.
- [2] F. M. Russell, Y. Zolotaryuk, J. C. Eilbeck, and T. Dauxois, Moving breathers in a chain of magnetic pendulums, *Physical Review B*, vol. 55, no. 10, pp. 6304–6308, 1997. doi: 10.1103/PhysRevB.55.6304.
- [3] M. Molerón, A. Leonard, and C. Daraio, Solitary waves in a chain of repelling magnets, *Journal of Applied Physics*, vol. 115, no. 18, Art. no. 184901, 2014. doi: 10.1063/1.4872252.
- [4] A. Mehrem, N. Jiménez, L. J. Salmerón-Contreras, X. García-Andrés, L. M. García-Raffi, R. Picó, and V. J. Sánchez-Morcillo, Nonlinear dispersive waves in repulsive lattices, *Physical Review E*, vol. 96, no. 1, Art. no. 012208, 2017. doi: 10.1103/PhysRevE.96.012208.
- [5] M. Molerón, C. Chong, A. J. Martínez, M. A. Porter, P. G. Kevrekidis, and C. Daraio, Nonlinear excitations in magnetic lattices with long-range interactions, *New Journal of Physics*, vol. 21, no. 6, Art. no. 063032, 2019. doi: 10.1088/1367-2630/ab0118.
- [6] D. Vokoun, M. Beleggia, L. Heller, and P. Sittner, Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 321, no. 22, pp. 3758–3763, 2009. doi: 10.1016/j.jmmm.2009.07.030.
- [7] K. Polczyński, S. Skurativskiy, M. Bednarek, and J. Awrejcewicz, Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 154, Art. no. 107560, 2021. doi: 10.1016/j.ymssp.2020.107560.
- [8] V. N. Pilipchuk, K. Polczyński, M. Bednarek, and J. Awrejcewicz, Guidance of the resonance energy flow in the mechanism of coupled magnetic pendulums, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 176, Art. no. 105019, 2022. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105019.
- [9] Y. E. Surganova and Y. V. Mikhlin, Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 147, Art. no. 104182, 2022. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182.
- [10] Y. E. Surganova and Y. V. Mikhlin, Stability of nonlinear normal modes in the system of coupled pendulums in a magnetic field, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 160, Art. no. 104649, 2024. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104649.
- [11] P. Pathak, Y. Patel, and R. Raj, Magnetically coupled oscillators and a smartphone, *The Physics Teacher*, vol. 62, no. 6, pp. 463–467, 2024. doi: 10.1119/5.0150809.

- [12] 阚君武, 王凯, 王进, 张忠华, 费翔, 王淑云, 磁耦合式压电振动发电机的试验与分析, *振动工程学报*, vol. 35, no. 4, pp. 887–894, 2022. doi: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2022.04.012.
- [13] 石慧荣, 左存胜, 高全福, 随动压电磁耦合能量采集器的组合共振分析, *振动与冲击*, vol. 43, no. 3, pp. 209–217, 2024.
- [14] S. M. Montgomery, S. Wu, X. Kuang, C. D. Armstrong, C. Zemelka, Q. Ze, R. Zhang, R. Zhao, and H. J. Qi, Magneto-mechanical metamaterials with widely tunable mechanical properties and acoustic bandgaps, *Advanced Functional Materials*, vol. 31, no. 3, Art. no. 2005319, 2021. doi: 10.1002/adfm.202005319.
- [15] V. T. Nguyen, M. Bermingham, and M. S. Dargusch, Data-driven modelling of the interaction force between permanent magnets, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 532, Art. no. 167869, 2021. doi: 10.1016/j.jmmm.2021.167869.
- [16] V. T. Nguyen, S. Bollmann, M. Bermingham, and M. S. Dargusch, Efficient modelling of permanent magnet field distribution for deep learning applications, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 559, Art. no. 169521, 2022. doi: 10.1016/j.jmmm.2022.169521.
- [17] B. Nana, K. Polczyński, P. Woaf, J. Awrejcewicz, and G. Wasilewski, Analysis of the nonlinear dynamics of a single pendulum driven by a magnetic field using the magnetic charges interaction model and the experimentally fitted interaction model, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 209, Art. no. 111114, 2024. doi: 10.1016/j.ymssp.2024.111114.
- [18] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2017. doi: 10.1017/9781108333511.

致谢

本项目从前期实验装置搭建到论文完成，前后持续约半年。在此过程中，我得到了老师、学校实验室和家人的帮助与支持。

首先，感谢王小亚老师和阮锦龙老师在研究过程中给予的指导。两位老师在选题、实验方案、物理分析和论文整理等方面提出了许多具体建议，帮助我及时发现实验和理论分析中存在的问题，并进一步完善研究思路。

感谢武汉爱莎文华高级中学物理实验室为本项目提供实验场地和设备支持。实验过程中涉及磁体测量、悬挂结构调整、视频拍摄以及部分装置制作，实验室提供的硬件条件使这些工作能够顺利进行。

同时，感谢父母在整个研究过程中的理解和支持。实验期间经历了多次装置修改、器材购置和重新调试，他们的支持使我能够持续完成实验和后续分析工作。

本研究由本人独立完成选题构思、实验装置搭建与调试、磁体空间磁场扫描测量、磁摆链运动视频采集、Tracker 轨迹提取、理论模型建立、主要公式推导、数值计算代码编写、实验数据处理与分析以及论文主体撰写。

王小亚老师和阮锦龙老师在研究过程中主要对选题方向、实验实施方案、物理概念辨析、实验结果分析、图表处理以及论文写作与结构安排提供指导。武汉爱莎文华高级中学物理实验室为本研究提供了实验场地、实验器材以及装置制作和调试所需的硬件条件。

回顾这半年的研究过程，我最大的感受是，很多真正值得研究的问题都是在实验和计算不断推进的过程中逐渐出现的。最开始，我只是希望搭建一个能够稳定运行的磁摆链装置，观察磁体之间的非接触相互作用。随着实验逐步深入，问题又延伸到磁场分布、有限尺寸磁体建模、正常模态以及能量传递等方面。

以前面对一个新的研究问题时，我常常希望先把相关知识学得足够完整，再开始实验和计算。这次研究让我逐渐适应了边学边做的方式。很多知识并不是提前一次性学完的，而是在遇到具体问题以后再去补充。装置出现扭转时，我开始重新学习结构设计并修改磁体固定方式；磁场边缘效应明显时，我进一步学习有限尺寸磁体的磁场模型；理论结果与实验存在偏差时，我重新检查实际悬挂结构和磁体姿态；数值计算速度下降时，我又重新整理计算流程，并采用预计算和插值提高计算效率。

这种过程并不是一次完成的。最初能够解决的只是装置能否稳定运行的问题，之后才逐渐进入磁场测量和相互作用建模，再进一步分析模态和瞬态动力学。每解决一个阶段的问题，我都会发现下一层需要理解的新问题，再继续补充相应的知识和方法。

这些经历也让我逐渐认识到，实验细节、理论假设和数值方法之间始终存在紧密联系。一个很小的结构偏差可能改变实际几何关系，一项看似简单的数据处理选择也可能影响最终结果。研究中出现的问题并没有打断项目，反而不断推动我回到实验、模型和计算中重新检查，并进一步理解其中的物理内容。

对我来说，这个项目最重要的收获并不限于最终得到的实验结果和理论模型。更重要的是，我开始逐渐形成自己的研究方式：从一个可以实现的方案开始，通过实验观察、理论推导和数值计算不断验证，再根据结果继续修改装置和模型。在这个过程中，我也逐渐理解了边学边做的意义。很多能力都是在解决具体问题时一点一点建立起来的，而研究本身也正是在这样一次次推进和修正中逐渐深入。

这个过程让我更加确定，自己希望继续学习更多物理、数值计算以及与实际实验相结合的研究方法。

生成式人工智能使用说明

本研究在论文初稿形成后的整理、修改和排版阶段使用了 OpenAI ChatGPT (GPT-5.6) 作为辅助工具。其主要作用集中在对本人已经完成的论文内容进行语言润色、逻辑衔接检查和 LaTeX 排版优化。使用过程中，我通常先根据实验记录、理论推导和数据分析结果独立完成相应章节，再将已经写好的文字交由 AI 检查表达是否通顺、前后逻辑是否连贯，以及章节之间的衔接是否清晰。在论文结构基本确定后，也使用 AI 辅助检查图表位置、公式编号、符号统一、单位书写、交叉引用以及部分 LaTeX 排版问题，并根据实际版面情况进行调整。

在语言和逻辑整理方面，AI 主要用于帮助我发现已有文字中存在的重复表达、语序不顺、上下文衔接不充分以及部分术语前后不一致等问题。对于较长的理论和实验章节，我会利用 AI 检查叙述顺序是否与实际研究过程一致，并对已经形成的文字提出精简或调整建议。论文中的研究逻辑仍以本人实际完成的实验过程和理论分析为基础，所有修改均需要与原始实验记录、数据结果和已有推导相互核对后再决定是否采用。

在排版方面，AI 主要用于协助调整 LaTeX 代码，例如检查图表浮动位置、公式与正文间距、表格宽度、图题和表题格式、章节层级以及部分编译错误。涉及图像、数据和公式时，论文最终采用的内容均以本人获得的实验结果和计算结果为准。AI 提供的排版代码和文字修改建议均经过本人检查，并根据论文整体格式重新调整。

本研究的选题构思、实验装置搭建与调试、磁体空间磁场扫描测量、磁摆链运动视频采集、Tracker 轨迹提取、理论模型建立、主要公式推导、数值计算代码编写、实验数据处理与分析以及研究结论均由本人完成。论文中的图表数据、理论结果和主要学术判断均来源于本人实际开展的研究工作。AI 的使用集中在这些工作已经完成或形成初稿之后，主要帮助我提高论文表达的准确性、章节逻辑的连贯性以及 LaTeX 排版的规范性。

在整个论文整理过程中，我对 AI 给出的建议逐项进行核对。涉及物理概念、公式、实验参数和数据结果的内容，均返回原始记录和计算结果进行确认；对于不符合实际实验过程或改变原意的建议不予采用。最终论文中的文字、公式、图表和结论均由本人确认并负责。

附录说明

为保持正文的论证集中，同时保留理论推导、数值实现和扩展实验结果的完整性，本文将相关详细内容统一置于正文后的附录中。附录按照研究内容连续编号为 A-G，并与正文采用同一套符号、模型参数和实验数据。

附录 A 至附录 C 主要给出理论与数值计算细节：附录 A 推导均匀磁化有限圆柱的轴向磁场及其远场点磁偶极极限；附录 B 给出有限圆柱离轴磁场、实验测量坐标映射以及两体磁相互作用能的完整计算；附录 C 给出总势能梯度、静态平衡、Hessian、正常模态、非线性动力学和数值一致性检验。

附录 D 至附录 G 主要给出正文之外的扩展实验结果：附录 D 给出二至七号磁体的逐点磁场拟合；附录 E 比较 $N = 3$ 、 $N = 5$ 和 $N = 7$ 在相同悬点间距下的相空间、模态坐标、空间振型、能量、时频结构和时间域残差；附录 F 给出不同悬点间距下的模态频率识别与频谱检验；附录 G 给出不同悬点间距下实验复模态与理论观测空间振型的比较。

正文中的主要理论模型、实验结果和结论均可独立阅读，以下附录用于提供更完整的推导过程、数值实现细节和可复核的扩展实验依据。

附录 A 均匀磁化有限圆柱的轴向磁场

本章给出均匀轴向磁化有限圆柱的轴向磁场，并说明有限圆柱模型与点磁偶极远场之间的渐近联系。均匀磁化体的束缚电流和等效磁荷表示均遵循标准磁静力学定义 [18]；有限尺寸圆柱磁体的形状效应及其远距离偶极极限可参见 Vokoun 等的分析 [6]。

A.1 等效束缚电流表示

考虑半径为 R 、厚度为 t_m 的圆柱永磁体，取圆柱几何中心为原点，圆柱轴沿 z 方向。设磁体内部磁化强度均匀，其磁化矢量为

$$\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.1})$$

均匀磁化体内部的体束缚电流密度为

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.2})$$

表面束缚电流密度为

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (\text{A.3})$$

对于圆柱侧壁，外法向为

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r,$$

因此

$$\mathbf{K}_b = M \mathbf{e}_\phi, \quad (\text{A.4})$$

其大小为

$$K_b = M. \quad (\text{A.5})$$

两个圆形端面的外法向与 $\mathbf{M}$ 平行或反平行，故端面上的束缚表面电流为零。均匀轴向磁化有限圆柱因此可表示为分布于圆柱侧壁的连续环向面电流。

取侧壁上轴向宽度为 dz' 的窄条，其等效圆环电流为

$$dI = K_b dz' = M dz'. \quad (\text{A.6})$$

A.2 单个电流环的轴向磁场

半径为 R 、电流为 dI 的圆环，在轴线上距圆环平面 $z - z'$ 处产生的轴向磁场为

$$dB_z = \frac{\mu_0 dI R^2}{2 [R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (\text{A.7})$$

代入式 (A.6)，并沿圆柱厚度

$$-\frac{t_m}{2} \leq z' \leq \frac{t_m}{2}$$

积分，得到

$$B_z^{\text{axis}}(z) = \frac{\mu_0 M R^2}{2} \int_{-t_m/2}^{t_m/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (\text{A.8})$$

令

$$u = z - z', \quad (\text{A.9})$$

并利用

$$\int \frac{du}{(R^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{R^2 \sqrt{R^2 + u^2}}, \quad (\text{A.10})$$

可得以圆柱几何中心为坐标原点的轴向场

$$B_z^{\text{axis}}(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z + t_m/2}{\sqrt{R^2 + (z + t_m/2)^2}} - \frac{z - t_m/2}{\sqrt{R^2 + (z - t_m/2)^2}} \right]. \quad (\text{A.11})$$

式 (A.11) 保留了圆柱有限半径和有限厚度，并给出后续离轴有限圆柱模型在 $r = 0$ 条件下的解析极限。

A.3 实验高度坐标与轴向解析式

实验磁场扫描的名义高度从磁体上表面起算。记实验记录高度为 $h \geq 0$ ，第 i 块磁体磁场拟合得到的有效轴向位置偏移为 $z_{0,i}$ 。场点相对于磁体几何中心的轴向坐标为

$$z_c = h + z_{0,i} + \frac{t_m}{2}. \quad (\text{A.12})$$

将式 (A.12) 代入式 (A.11)，得到第 i 块磁体轴线上方的理论轴向场

$$B_{z,i}^{\text{axis}}(h) = \frac{\mu_0 M_i}{2} \left[\frac{h + z_{0,i} + t_m}{\sqrt{R^2 + (h + z_{0,i} + t_m)^2}} - \frac{h + z_{0,i}}{\sqrt{R^2 + (h + z_{0,i})^2}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

当 $z_{0,i} = 0$ 时， $h = 0$ 对应磁体上表面的轴线位置。

式 (A.13) 给出轴向场的解析特例。正文中各磁体的 M_i 由多个 (r, h) 位置处的 B_r 与 B_z 数据联合确定，实际拟合采用下一章给出的完整离轴有限圆柱场； $z_{0,i}$ 和探头轴向偏转参数用于描述测量坐标关系。

A.4 远场极限与点磁偶极模型

定义均匀磁化圆柱的磁矩大小

$$\mu = M V_m = M \pi R^2 t_m, \quad (\text{A.14})$$

其中

$$V_m = \pi R^2 t_m$$

为磁体体积。

当以圆柱中心为原点的观测距离满足

$$|z| \gg R, t_m, \quad (\text{A.15})$$

对式 (A.11) 作远场展开，其最低阶非零项为

$$B_z^{\text{axis}}(z) = \frac{\mu_0 M R^2 t_m}{2z^3} + O(z^{-5}), \quad (\text{A.16})$$

即

$$B_z^{\text{axis}}(z) \simeq \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}. \quad (\text{A.17})$$

式 (A.17) 与磁矩为 $\mu \mathbf{e}_z$ 的点磁偶极轴向场一致。因此点磁偶极模型给出了均匀磁化有限圆柱外场的最低阶远场项 [18, 6]。

正文采用

$$\rho \geq 2R$$

作为实验数据中选取远场拟合子集的操作性尺度，其作用是比较有限圆柱模型与点偶极模型在较大空间尺度下的实验表现。

附录 B 有限圆柱离轴磁场与两体相互作用能

本章首先由圆电流环的离轴场建立单个均匀磁化圆柱的二维磁场，随后采用等效表面磁荷表示构造两个随摆角转动的有限圆柱之间的磁相互作用能。Vokoun 等对轴向磁化、平行圆柱轴条件下的有限尺寸磁静力相互作用进行了分析 [6]；本文摆链中的磁轴随摆角转动，相应两体势由标准磁荷表示结合实际三维几何直接计算。

B.1 圆电流环的离轴磁场

考虑半径为 R 、电流为 I 的圆形电流环。以圆环中心为原点建立柱坐标系 (r, ϕ, z) ，定义椭圆积分模数

$$k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2}. \quad (\text{B.1})$$

第一类和第二类完全椭圆积分定义为

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (\text{B.2})$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (\text{B.3})$$

这里 k 表示椭圆积分模数。若数值函数以参数 $m = k^2$ 作为自变量，计算时使用式 (B.1) 给出的 m 。

对于 $r > 0$ 且场点不位于理想电流丝上，圆环磁场的径向分量为

$$B_r^{\text{loop}} = \frac{\mu_0 I z}{2\pi r \sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(k) \right], \quad (\text{B.4})$$

轴向分量为

$$B_z^{\text{loop}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} E(k) \right]. \quad (\text{B.5})$$

在轴线 $r = 0$ 上，由轴对称性直接得到

$$B_r^{\text{loop}}(0, z) = 0, \quad (\text{B.6})$$

以及

$$B_z^{\text{loop}}(0, z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (\text{B.7})$$

数值实现中在 $r = 0$ 直接采用式 (B.6) 和式 (B.7)，避免使用含显式 $1/r$ 的离轴表达式。

B.2 有限圆柱离轴场

对于均匀轴向磁化圆柱，侧壁面电流可以看作沿厚度方向连续排列的圆形电流环。由

$$dI = M dz'$$

得到有限圆柱的有符号理论场分量

$$B_r^{\text{cyl}}(r, z) = M \int_{-t_m/2}^{t_m/2} B_r^{\text{loop}}(r, z - z'; I = 1) dz', \quad (\text{B.8})$$

$$B_z^{\text{cyl}}(r, z) = M \int_{-t_m/2}^{t_m/2} B_z^{\text{loop}}(r, z - z'; I = 1) dz'. \quad (\text{B.9})$$

厚度积分采用 Gauss-Legendre 求积。设 x_q, w_q 为区间 $[-1, 1]$ 上的节点与权重，定义

$$z'_q = \frac{t_m}{2} x_q, \quad W_q^{(z)} = \frac{t_m}{2} w_q. \quad (\text{B.10})$$

于是

$$B_\alpha^{\text{cyl}}(r, z) \simeq M \sum_{q=1}^{N_q} W_q^{(z)} B_\alpha^{\text{loop}}(r, z - z'_q; I = 1), \quad \alpha \in \{r, z\}. \quad (\text{B.11})$$

式 (B.11) 用于计算均匀磁化有限圆柱的离轴空间场，并与上一章的轴向解析式在 $r = 0$ 条件下相互核验。

B.3 理论磁场与实验测量坐标

式 (B.8) 和式 (B.9) 给出磁体本征坐标系中的有符号磁场分量。对于第 i 块磁体，实验名义高度 h 对应的中心坐标为

$$z_c = h + z_{0,i} + \frac{t_m}{2}. \quad (\text{B.12})$$

考虑 Hall 探头敏感轴相对于理想 (r, z) 方向的小角度偏差 $\theta_{\text{eff},i}$ ，用于拟合实验记录的分量大小写为

$$B_{r,i}^{\text{meas}} = \left| B_r^{\text{cyl}} \cos \theta_{\text{eff},i} - B_z^{\text{cyl}} \sin \theta_{\text{eff},i} \right|, \quad (\text{B.13})$$

$$B_{z,i}^{\text{meas}} = \left| B_z^{\text{cyl}} \cos \theta_{\text{eff},i} + B_r^{\text{cyl}} \sin \theta_{\text{eff},i} \right|. \quad (\text{B.14})$$

其中 B_r^{cyl} 和 B_z^{cyl} 均在 (r, z_c) 处计算。参数 $z_{0,i}$ 和 $\theta_{\text{eff},i}$ 描述测量坐标关系，后续磁摆链相互作用采用拟合得到的 M_i 以及磁体真实几何参数。

B.4 摆链中的磁体位置与磁化方向

考虑第 i 个磁摆。悬点位置记为

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

磁体中心位置为

$$\mathbf{q}_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} X_i + l_i \sin \theta_i \\ -l_i \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

定义沿等效摆线方向的单位矢量

$$\mathbf{e}_i^{\parallel} = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

以及运动平面内与其正交的单位矢量

$$\mathbf{e}_i^{\perp} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

二者满足

$$\mathbf{e}_i^{\parallel} \cdot \mathbf{e}_i^{\perp} = 0. \quad (\text{B.19})$$

实验装置中，圆柱磁体轴线位于摆动平面内并与等效摆线方向正交。第 i 块磁体的磁化矢量写为

$$\mathbf{M}_i = \varepsilon_i M_i \mathbf{e}_i^{\perp}, \quad \varepsilon_i \in \{+1, -1\}, \quad (\text{B.20})$$

其中 $M_i > 0$ 为单磁体磁场拟合得到的磁化强度， ε_i 描述安装极性。

相邻磁体采用同极相对的排斥构型，因此

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = -1. \quad (\text{B.21})$$

对于规则交替排列，可取

$$\varepsilon_i = (-1)^{i-1} \varepsilon_1. \quad (\text{B.22})$$

第 i 块磁体的磁矩大小为

$$\mu_i = M_i V_m = M_i \pi R^2 t_m, \quad (\text{B.23})$$

相应磁矩矢量为

$$\boldsymbol{\mu}_i = \varepsilon_i \mu_i \mathbf{e}_i^{\perp}. \quad (\text{B.24})$$

B.5 有限圆柱两体相互作用能

对于均匀磁化体，还可采用等效磁荷表示 [18]。定义表面磁荷密度

$$\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{B.25})$$

均匀磁化使体磁荷

$$-\nabla \cdot \mathbf{M}$$

在磁体内部为零。圆柱侧壁满足

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

因此等效磁荷仅分布在两个圆形端面。

令 $\eta = \pm 1$ 表示磁体 i 的两个端面, $\zeta = \pm 1$ 表示磁体 j 的两个端面。相应外法向分别为

$$\mathbf{n}_{i,\eta} = \eta \mathbf{e}_i^\perp, \quad \mathbf{n}_{j,\zeta} = \zeta \mathbf{e}_j^\perp. \quad (\text{B.26})$$

端面磁荷密度为

$$\sigma_{i,\eta} = \eta \varepsilon_i M_i, \quad \sigma_{j,\zeta} = \zeta \varepsilon_j M_j. \quad (\text{B.27})$$

定义垂直于摆动平面的单位矢量

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

在磁体 i 的第 η 个端面上采用极坐标 (s_i, ϕ_i) , 其中

$$0 \leq s_i \leq R, \quad 0 \leq \phi_i < 2\pi.$$

端面上的空间点为

$$\mathbf{r}_{i,\eta} = \mathbf{q}_i + \eta \frac{t_m}{2} \mathbf{e}_i^\perp + s_i \cos \phi_i \mathbf{e}_i^\parallel + s_i \sin \phi_i \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.29})$$

类似地,

$$\mathbf{r}_{j,\zeta} = \mathbf{q}_j + \zeta \frac{t_m}{2} \mathbf{e}_j^\perp + s_j \cos \phi_j \mathbf{e}_j^\parallel + s_j \sin \phi_j \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.30})$$

面积元分别为

$$\mathrm{d}S_i = s_i \mathrm{d}s_i \mathrm{d}\phi_i, \quad \mathrm{d}S_j = s_j \mathrm{d}s_j \mathrm{d}\phi_j. \quad (\text{B.31})$$

对于两个互不重叠的磁体, 由两组表面磁荷之间的交叉磁静力能得到

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = \frac{\mu_0 M_i M_j \varepsilon_i \varepsilon_j}{4\pi} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{\zeta=\pm 1} \eta \zeta \iint_{S_i} \iint_{S_j} \frac{\mathrm{d}S_i \mathrm{d}S_j}{\|\mathbf{r}_{i,\eta} - \mathbf{r}_{j,\zeta}\|}. \quad (\text{B.32})$$

式 (B.32) 直接保留圆柱有限半径、有限厚度、磁体中心的真实位移、磁轴随摆角的转动以及不同磁体的实测磁化强度。

对于规则摆链, 定义固定悬点分离

$$d_{p,ij} = |X_j - X_i| = |j - i|a. \quad (\text{B.33})$$

在其余磁学与机械参数给定后, 两体势可记为

$$U_{ij}^{\text{cyl}} = U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}). \quad (\text{B.34})$$

与此同时, 两磁体瞬时中心距为

$$\rho_{ij} = \|\mathbf{q}_j(\theta_j) - \mathbf{q}_i(\theta_i)\|. \quad (\text{B.35})$$

摆角变化同时改变 ρ_{ij} 以及两磁轴相对于中心连线的取向，因此式 (B.34) 一般保持双角度依赖。在磁轴取向固定且相互作用只依赖中心距离的特殊构型中，才可进一步使用

$$U_{ij} = U_{ij}(\rho_{ij})$$

的单变量表示。

B.6 四维曲面积分的离散求积

式 (B.32) 包含两个圆形端面上的四维积分。每个圆盘的径向积分采用 Gauss–Legendre 求积，方位角采用等间距周期求积。

将

$$s \in [0, R]$$

映射到标准区间 $[-1, 1]$ 。若 x_p, w_p 为 Gauss–Legendre 节点和权重，则

$$s_p = \frac{R}{2}(x_p + 1), \quad W_p^{(r)} = \frac{R}{2}w_p. \quad (\text{B.36})$$

方位角节点取

$$\phi_q = \frac{2\pi q}{N_\phi}, \quad q = 0, \dots, N_\phi - 1, \quad (\text{B.37})$$

周期求积权重为

$$W^{(\phi)} = \frac{2\pi}{N_\phi}. \quad (\text{B.38})$$

对于任意圆盘函数 $f(s, \phi)$ ，面积积分离散为

$$\iint_S f \, dS \simeq \sum_{p=1}^{N_r} \sum_{q=0}^{N_\phi-1} W_p^{(r)} W^{(\phi)} s_p f(s_p, \phi_q). \quad (\text{B.39})$$

定义单圆盘节点的面积权重

$$W_{pq}^{(S)} = W_p^{(r)} W^{(\phi)} s_p. \quad (\text{B.40})$$

将式 (B.39) 分别应用于两块磁体的端面，式 (B.32) 离散为

$$\begin{aligned} U_{ij}^{\text{cyl}} \simeq & \frac{\mu_0 M_i M_j \varepsilon_i \varepsilon_j}{4\pi} \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{\zeta=\pm 1} \eta \zeta \\ & \times \sum_{p=1}^{N_r} \sum_{q=0}^{N_\phi-1} \sum_{u=1}^{N_r} \sum_{v=0}^{N_\phi-1} \frac{W_{pq}^{(S)} W_{uv}^{(S)}}{\|\mathbf{r}_{i,\eta}^{pq} - \mathbf{r}_{j,\zeta}^{uv}\|}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

该离散式即为两体有限圆柱几何核的数值基础。

B.7 角度查表与连续插值

在非线性 ODE 的每一个时间步直接重复计算式 (B.41) 计算量较大。本文对实验与理论计算中实际出现的悬点分离 $d_{p,ij}$ 分别预计算有限圆柱几何核。

对于每一个固定的 $d_{p,ij}$ ，设置角度节点

$$\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N_\theta)} \in [-\theta_{\max}, \theta_{\max}], \quad (\text{B.42})$$

并计算二维能量表

$$U_{ij}^{ab} = U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta^{(a)}, \theta^{(b)}; d_{p,ij}). \quad (\text{B.43})$$

程序对每个实际使用的 $d_{p,ij}$ 建立独立距离切片，因此动力学求解中只在 (θ_i, θ_j) 平面内进行二维插值，不对悬点距离进行连续插值。

例如，对于 $N = 3$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 的有限链，所需悬点分离为

$$d_p = 60 \text{ mm}, \quad 120 \text{ mm}. \quad (\text{B.44})$$

对于一般 N 和 a ，预计算集合由

$$\mathcal{D}(N, a) = \{sa : s = 1, \dots, N - 1\} \quad (\text{B.45})$$

给出；进行多组悬点间距扫描时，使用各实验工况所需集合的并集建立精确距离切片。

在每一个固定 $d_{p,ij}$ 的角度平面上，采用二维三次样条构造连续势函数

$$\tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}). \quad (\text{B.46})$$

由同一插值函数计算

$$\tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}, \quad \frac{\partial \tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial \tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_j}, \quad (\text{B.47})$$

以及

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i^2}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{U}_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_j^2}. \quad (\text{B.48})$$

所有角度导数均以弧度为自变量。总势能、非线性磁广义力矩和线性化 Hessian 使用同一组二维势能插值，其有限差分与求积收敛性检验见附录 C。

附录 C 动力学导数、Hessian 与数值验证

本附录给出有限圆柱磁摆链动力学中使用的势能导数、静态平衡、Hessian、正常模态及主要数值一致性检验。所有导数均从与正文相同的有限圆柱两体势出发，并在同一势函数上完成非线性时间积分与线性化分析。

C.1 总势能与广义磁力矩

对于由 N 个磁摆组成的有限链，定义广义坐标

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T.$$

总势能写为

$$V^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta}) = V_g(\boldsymbol{\theta}) + V_m^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{C.1})$$

其中重力势能为

$$V_g = \sum_{i=1}^N m_i^p g l_{c,i} (1 - \cos \theta_i). \quad (\text{C.2})$$

记

$$k_{g,i} = m_i^p g l_{c,i}, \quad (\text{C.3})$$

则 $k_{g,i}$ 为第 i 个磁摆在 $\theta_i = 0$ 附近的重力角向刚度。

有限圆柱磁相互作用势写为

$$V_m^{(\lambda)} = \lambda_m \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}), \quad d_{p,ij} = |X_j - X_i|. \quad (\text{C.4})$$

其中 $\lambda_m = 1$ 对应独立磁场标定模型，正文采用的固定迁移模型取

$$\lambda_m = 0.473305. \quad (\text{C.5})$$

第 i 个摆受到的磁广义力矩定义为

$$\tau_i^{(m)} = -\frac{\partial V_m^{(\lambda)}}{\partial \theta_i}. \quad (\text{C.6})$$

由于正文中的两体势只按 $i < j$ 存储，对第 i 个广义坐标求导时严格写为

$$\frac{\partial V_m^{(\lambda)}}{\partial \theta_i} = \lambda_m \left[\sum_{j < i} \frac{\partial U_{ji}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i} + \sum_{j > i} \frac{\partial U_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i} \right]. \quad (\text{C.7})$$

式 (C.7) 中的角度导数同时包含磁体中心位置随摆角变化产生的几何贡献，以及磁化轴随摆角转动产生的取向贡献。

C.2 几何导数

由正文与附录 B 中的磁体中心位置

$$\mathbf{q}_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} X_i + l_i \sin \theta_i \\ -l_i \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

其关于摆角的一阶导数为

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \theta_i} = l_i \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{pmatrix} = l_i \mathbf{e}_i^\perp. \quad (\text{C.9})$$

二阶导数为

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_i}{\partial \theta_i^2} = l_i \begin{pmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix} = -l_i \mathbf{e}_i^\parallel. \quad (\text{C.10})$$

磁体轴线方向为

$$\mathbf{e}_i^\perp = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

因此

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i^\perp}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_i^\parallel. \quad (\text{C.11})$$

相应地，完整的 $\partial U_{ij}^{\text{cyl}} / \partial \theta_i$ 同时包含 $\partial \mathbf{q}_i / \partial \theta_i$ 引起的中心平移，以及 $\partial \mathbf{e}_i^\perp / \partial \theta_i$ 引起的磁轴转动。正文采用的二维角度势已经将这两部分共同包含在 $U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij})$ 之中。

C.3 固定取向中心势的特殊极限

为与常用单变量两体势形式联系，考虑两磁体取向保持固定，并且相互作用能只随磁体中心距变化的特殊构型。

定义中心分离矢量

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i, \quad (\text{C.12})$$

中心距及其单位矢量分别为

$$\rho_{ij} = \|\mathbf{d}_{ij}\|, \quad \hat{\mathbf{d}}_{ij} = \frac{\mathbf{d}_{ij}}{\rho_{ij}}. \quad (\text{C.13})$$

若

$$U_{ij} = U_{ij}(\rho_{ij}), \quad (\text{C.14})$$

则

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \theta_i} = -\hat{\mathbf{d}}_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \theta_i}, \quad (\text{C.15})$$

以及

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial \theta_j} = \hat{\mathbf{d}}_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial \theta_j}. \quad (\text{C.16})$$

因此

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_i} = -U'_{ij}(\rho_{ij}) \hat{\mathbf{d}}_{ij} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \theta_i}. \quad (\text{C.17})$$

式 (C.17) 给出固定取向中心势的链式求导形式。正文有限圆柱磁摆链保留磁轴随摆角转动，因此实际动力学使用式 (C.7) 中的双角度势。

C.4 非线性动力学方程

定义惯性矩阵

$$\mathbf{J} = \text{diag}(I_1, \dots, I_N), \quad (\text{C.18})$$

以及黏性转动阻尼矩阵

$$\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, \dots, c_N). \quad (\text{C.19})$$

单摆小振幅自由衰减满足

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (\text{C.20})$$

其中本文采用统一实验衰减率

$$\beta = 0.059979 \text{ s}^{-1}.$$

因此

$$c_i = 2\beta I_i. \quad (\text{C.21})$$

由此有

$$\mathbf{C} = 2\beta \mathbf{J}. \quad (\text{C.22})$$

完整非线性动力学方程写为

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} V^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}. \quad (\text{C.23})$$

逐分量展开为

$$I_i \ddot{\theta}_i + c_i \dot{\theta}_i + m_i^p g l_{c,i} \sin \theta_i + \frac{\partial V_m^{(\lambda)}}{\partial \theta_i} = 0. \quad (\text{C.24})$$

C.5 静态平衡、Hessian 与正常模态

对于给定链长、悬点间距和磁势尺度，稳定静态构型记为 $\boldsymbol{\theta}^*$ ，其驻点条件为

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta}^*) = \mathbf{0}. \quad (\text{C.25})$$

本文讨论的平衡点位于无几何重叠的可行域内部。总势能 Hessian 定义为

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V^{(\lambda)}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*}. \quad (\text{C.26})$$

记

$$\mathbf{H} = [H_{ij}]_{N \times N}.$$

重力部分为对角矩阵

$$(H_g)_{ij} = \delta_{ij} m_i^p g l_{c,i} \cos \theta_i^*. \quad (\text{C.27})$$

磁相互作用部分由与动力学相同的二维能量插值函数求二阶导数，包括

$$\frac{\partial^2 U_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i^2}, \quad \frac{\partial^2 U_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad \frac{\partial^2 U_{ij}^{\text{cyl}}}{\partial \theta_j^2}. \quad (\text{C.28})$$

对于固定迁移模型，磁 Hessian 同样包含 λ_m 的整体尺度，因此

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_g + \lambda_m \mathbf{H}_m^{\text{cyl}}. \quad (\text{C.29})$$

若 $\mathbf{H}$ 在该内部驻点正定，则 $\boldsymbol{\theta}^*$ 为总势能的严格局部极小值。结合 $c_i > 0$ ，线性化阻尼系统在该平衡点附近具有衰减振荡解。

无阻尼正常模态满足广义本征值问题

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{J} \boldsymbol{\phi}_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (\text{C.30})$$

相应无阻尼本征频率为

$$f_n^{(0)} = \frac{\omega_n}{2\pi}. \quad (\text{C.31})$$

由于式 (C.22) 满足 $\mathbf{C} = 2\beta\mathbf{J}$ ，与实验振荡频率比较时采用

$$f_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}. \quad (\text{C.32})$$

正文报告的理论模态频率 f_n^{th} 均采用

$$f_n^{\text{th}} \equiv f_n^{(d)}. \quad (\text{C.33})$$

C.6 势能梯度的有限差分核验

记二维插值势给出的总势能梯度分量为

$$g_i^{\text{spl}} = \frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial \theta_i}. \quad (\text{C.34})$$

为避免与物理空间中的 $\mathbf{e}_i^{\parallel}$ 和 $\mathbf{e}_i^{\perp}$ 混淆，定义 $\mathbf{u}_i$ 为广义坐标空间 $\mathbb{R}^N$ 中的第 i 个标准基向量。

中心有限差分写为

$$g_i^{\text{FD}}(h) = \frac{V^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta} + h\mathbf{u}_i) - V^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta} - h\mathbf{u}_i)}{2h}. \quad (\text{C.35})$$

其中 h 为以弧度表示的角度步长。对多个 h 重复计算，用以识别有限差分截断误差和浮点舍入误差之间的稳定区间。

定义相对梯度差

$$\varepsilon_{g,i} = \frac{|g_i^{\text{spl}} - g_i^{\text{FD}}|}{\max(|g_i^{\text{spl}}|, |g_i^{\text{FD}}|, g_{\text{ref}})}. \quad (\text{C.36})$$

其中 $g_{\text{ref}} > 0$ 为固定的数值归一化下限，用于避免梯度接近零时相对误差失去尺度意义。

C.7 Hessian 的双重核验

插值势的二阶导数给出 $\mathbf{H}^{\text{spl}}$ 。同时对梯度进行中心差分，得到

$$H_{ij}^{\text{FD}} = \frac{g_i(\boldsymbol{\theta}^* + h\mathbf{u}_j) - g_i(\boldsymbol{\theta}^* - h\mathbf{u}_j)}{2h}. \quad (\text{C.37})$$

二者之间的矩阵相对差定义为

$$\varepsilon_H = \frac{\|\mathbf{H}^{\text{spl}} - \mathbf{H}^{\text{FD}}\|_F}{\max(\|\mathbf{H}^{\text{FD}}\|_F, H_{\text{ref}})}, \quad (\text{C.38})$$

其中 $H_{\text{ref}} > 0$ 为固定数值归一化尺度。

此外检查 Hessian 对称性

$$\varepsilon_{\text{sym}} = \frac{\|\mathbf{H} - \mathbf{H}^T\|_F}{\|\mathbf{H}\|_F}. \quad (\text{C.39})$$

由于 $\mathbf{H}$ 来自标量势函数的二阶导数，在势函数二阶连续且数值精度充分时应满足

$$H_{ij} = H_{ji}. \quad (\text{C.40})$$

C.8 有限圆柱求积收敛性

有限圆柱两体势由四维端面曲面积分计算。为检查数值求积对动力学输入的影响，分别采用基准求积参数

$$(N_r, N_\phi)$$

以及加密求积参数

$$(N'_r, N'_\phi)$$

重新计算同一组角度节点，并分别重建对应的二维势能插值函数。

对于相同的动力学状态，定义两组求积得到的磁广义力矩差

$$\Delta\tau_i = \tau_i^{\text{fine}} - \tau_i^{\text{base}}, \quad (\text{C.41})$$

以及归一化差异

$$\varepsilon_{\tau,i} = \frac{|\Delta\tau_i|}{\max(|\tau_i^{\text{fine}}|, |\tau_i^{\text{base}}|, \tau_{\text{ref}})}. \quad (\text{C.42})$$

其中 $\tau_{\text{ref}} > 0$ 为固定数值归一化下限。

在 $N = 3$ 、 $a = 60$ mm 的固定迁移模型轨迹上进行加密求积比较，磁力矩归一化差异的中位数约为

$$2 \times 10^{-4}\%,$$

第 95 百分位约为

$$1.0 \times 10^{-3}\%,$$

最大绝对磁力矩差约为

$$1.65 \times 10^{-8} \text{ N m}. \quad (\text{C.43})$$

该加密计算表明，工作求积阶数与更高阶求积在当前动力学轨迹上的磁广义力矩差异保持在较小尺度。

C.9 无阻尼能量守恒

为使能量检验与势能零点的任意选择无关, 定义相对于稳定平衡构型 θ^* 的超额机械能

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathbf{J} \dot{\theta} + V^{(\lambda)}(\theta) - V^{(\lambda)}(\theta^*). \quad (\text{C.44})$$

令

$$\mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.45})$$

由于 $V^{(\lambda)}(\theta^*)$ 为常数, 有

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{\theta}^T \mathbf{J} \ddot{\theta} + \dot{\theta}^T \nabla_{\theta} V^{(\lambda)} \quad (\text{C.46})$$

$$= \dot{\theta}^T [\mathbf{J} \ddot{\theta} + \nabla_{\theta} V^{(\lambda)}] \quad (\text{C.47})$$

$$= 0. \quad (\text{C.48})$$

因此无阻尼数值积分应满足

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) \quad (\text{C.49})$$

到时间积分的数值误差精度, 其中 t_0 为积分初始时刻。

C.10 含阻尼系统的能量闭合

含黏性阻尼时, 由式 (C.23) 得

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{\theta}^T [\mathbf{J} \ddot{\theta} + \nabla_{\theta} V^{(\lambda)}] \quad (\text{C.50})$$

$$= -\dot{\theta}^T \mathbf{C} \dot{\theta}. \quad (\text{C.51})$$

定义从积分初始时刻 t_0 开始的累计黏性耗散

$$D(t) = \int_{t_0}^t \dot{\theta}^T \mathbf{C} \dot{\theta} dt'. \quad (\text{C.52})$$

于是

$$\mathcal{E}(t) + D(t) = \mathcal{E}(t_0). \quad (\text{C.53})$$

定义归一化能量闭合误差

$$\varepsilon_E(t) = \frac{|\mathcal{E}(t) + D(t) - \mathcal{E}(t_0)|}{\mathcal{E}(t_0)}. \quad (\text{C.54})$$

在正文 $N = 3$ 、 $a = 60 \text{ mm}$ 的固定迁移模型非线性积分中, 4 s 检验区间内得到

$$\max_t \varepsilon_E(t) \simeq 1.06 \times 10^{-6}, \quad (\text{C.55})$$

对应

$$1.06 \times 10^{-4}\%. \quad (\text{C.56})$$

该结果给出了有限圆柱势能、势能梯度、黏性阻尼项和时间积分在同一数值实现中的闭合程度。

C.11 数值计算流程

有限圆柱磁摆链的计算流程如下。

1. 读取各磁体独立标定的磁化强度 M_i ，安装极性 ε_i ，以及磁体几何参数 R 和 t_m 。
2. 读取机械参数 l_i 、 I_i 、 m_i^P 、 $l_{c,i}$ 以及实验衰减率 β 。
3. 根据链长和悬点位置生成全部实际悬点分离

$$d_{p,ij} = |X_j - X_i|. \quad (C.57)$$

4. 对每一个不同的 $d_{p,ij}$ 独立建立二维摆角网格

$$(\theta_i, \theta_j).$$

5. 在每个角度节点上，构造两磁体中心 $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j$ 以及随摆角变化的磁轴 $\mathbf{e}_i^\perp, \mathbf{e}_j^\perp$ 。
6. 根据附录 B 的端面参数化，建立两个有限圆柱的四个圆形端面，并使用径向 Gauss-Legendre 求积和方位角周期求积计算

$$U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}).$$

7. 对每个二维势能表建立光滑三次插值，并从同一插值函数获得

$$U_{ij}^{\text{cyl}}, \quad \partial_{\theta_i} U_{ij}^{\text{cyl}}, \quad \partial_{\theta_j} U_{ij}^{\text{cyl}},$$

以及 Hessian 所需的二阶角度导数。

8. 根据所考察的模型选择

$$\lambda_m = 1$$

或

$$\lambda_m = 0.473305,$$

并构造

$$V^{(\lambda)} = V_g + \lambda_m \sum_{i < j} U_{ij}^{\text{cyl}}.$$

9. 在无几何重叠的可行域内求解

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V^{(\lambda)} = \mathbf{0},$$

得到静态平衡构型 $\boldsymbol{\theta}^*$ 。

10. 在平衡点计算

$$\mathbf{H} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2 V^{(\lambda)}(\boldsymbol{\theta}^*),$$

并求解

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{J}\boldsymbol{\phi}_n.$$

11. 由

$$f_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}$$

得到与实验振荡频率比较的理论模态频率。

12. 根据实验释放状态建立

$$\theta(t_0), \quad \dot{\theta}(t_0),$$

并积分

$$\mathbf{J}\ddot{\theta} + \mathbf{C}\dot{\theta} + \nabla_{\theta}V^{(\lambda)} = \mathbf{0}.$$

13. 将理论物理摆角经过与 Tracker 一致的观测几何映射, 得到

$$\eta_i^{\text{th}}(t),$$

并与

$$\eta_i^{\text{exp}}(t)$$

在同一释放后时间轴上比较。

14. 依次执行势能梯度有限差分核验、Hessian 有限差分与对称性核验、有限圆柱求积加密测试、无阻尼能量守恒测试以及含阻尼能量闭合测试。

C.12 计算流程伪代码

下面给出与上述物理定义对应的流程化伪代码。

INPUT:

magnet geometry R, tm

measured magnetizations M[i]

polarity epsilon[i]

pivot positions X[i]

pendulum lengths l[i]

inertia I[i]

mechanical parameters m_p[i], lc[i]

damping rate beta

magnetic scale lambda_m

release state theta_init, theta_dot_init

FOR every distinct pivot separation dp:

create angle grid theta_a, theta_b

FOR each (theta_a, theta_b):

construct magnet centers q_i, q_j

construct magnet axes e_perp_i, e_perp_j

U_cyl = 0

FOR eta in {-1, +1}:

FOR zeta in {-1, +1}:

construct the corresponding circular end faces

FOR all radial quadrature nodes:

FOR all azimuthal quadrature nodes:

evaluate pairwise surface distance

accumulate weighted

$\eta * \zeta / |r_i - r_j|$

store $U_{\text{cyl}}(\theta_a, \theta_b; dp)$

build smooth 2D interpolation of U_{cyl}

obtain first and second angular derivatives

construct magnetic potential:

$V_m(\theta)$

$= \lambda_m * \sum_{i < j} U_{\text{cyl}_{ij}}(\theta_i, \theta_j)$

construct total potential:

$V(\theta)$

$= V_{\text{gravity}}(\theta) + V_m(\theta)$

solve static equilibrium:

$\text{grad } V(\theta_{\text{eq}}) = 0$

construct Hessian:

$H = d^2V/d\theta_i d\theta_j$ at θ_{eq}

solve generalized eigenproblem:

$H \phi_n = \omega_n^2 J \phi_n$

compute damped modal frequencies:

$f_n = \sqrt{(\omega_n^2 - \beta^2)/(2\pi)}$

construct damping matrix:

$C = 2\beta J$

integrate nonlinear dynamics:

$J \ddot{\theta}$

$+ C \dot{\theta}$

$+ \text{grad } V(\theta)$

$= 0$

map physical theory coordinates

to Tracker observation coordinates

compare theory and experiment
on the same post-release time axis

AUDIT:

interpolant gradient vs finite difference
interpolant Hessian vs finite difference
Hessian symmetry
baseline quadrature vs refined quadrature
undamped excess-energy conservation
damped excess-energy closure

OUTPUT:

equilibrium configuration
undamped eigenfrequencies
damped modal frequencies
eigenmodes
nonlinear trajectories
energy histories
numerical-audit metrics

附录 D 七块磁铁的逐点拟合

二至七号磁铁采用与一号磁铁相同的固定径向位置进行轴向磁场比较，用于检验有限圆柱模型和点磁偶极模型在不同样品上的一致性。

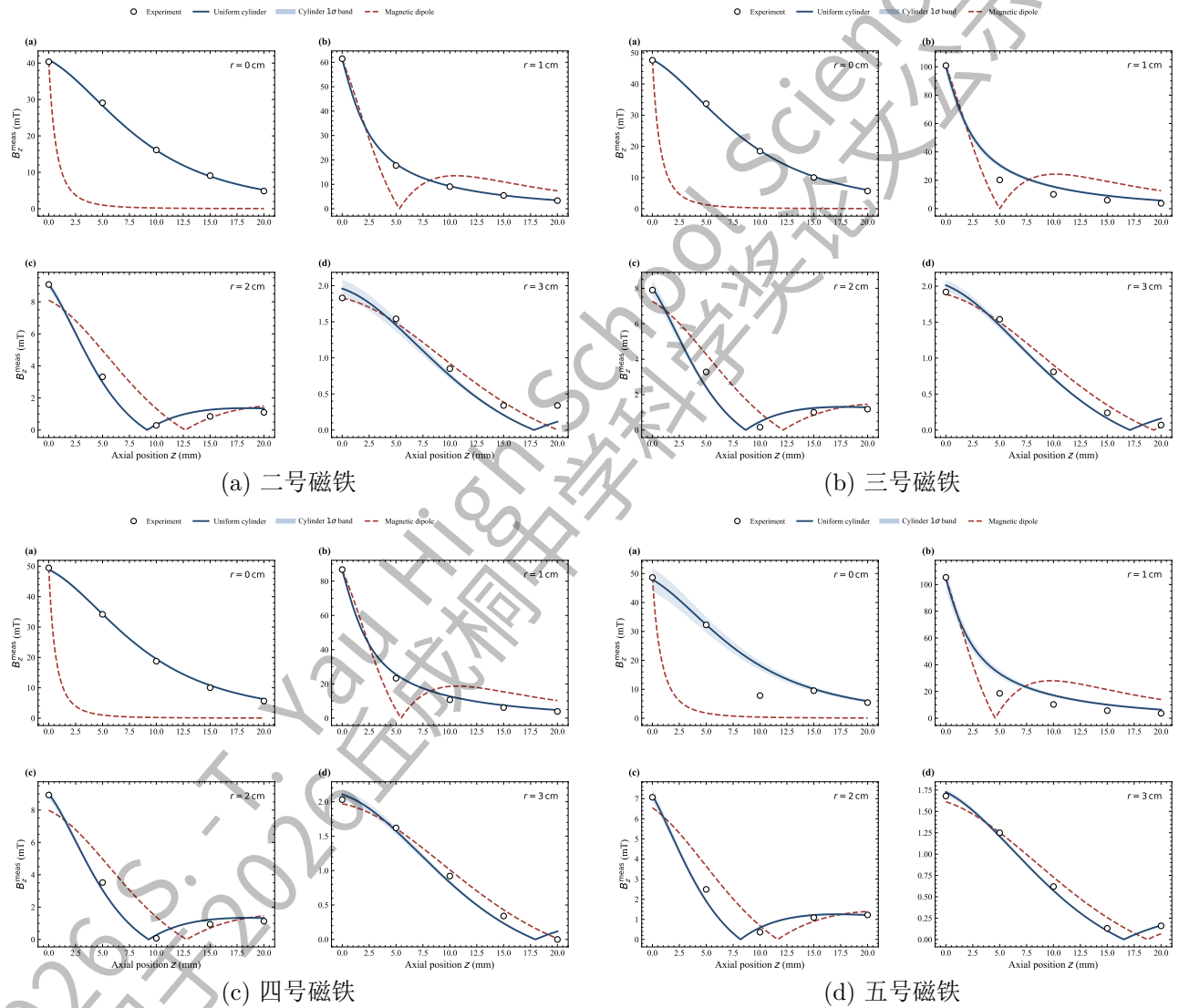


图 D.1: 二至五号磁铁在不同固定径向位置处的实测轴向磁场及有限圆柱与点磁偶极模型比较。

Measured axial fields of magnets 2–5 at selected fixed radial positions and comparison with finite-cylinder and point-dipole models.

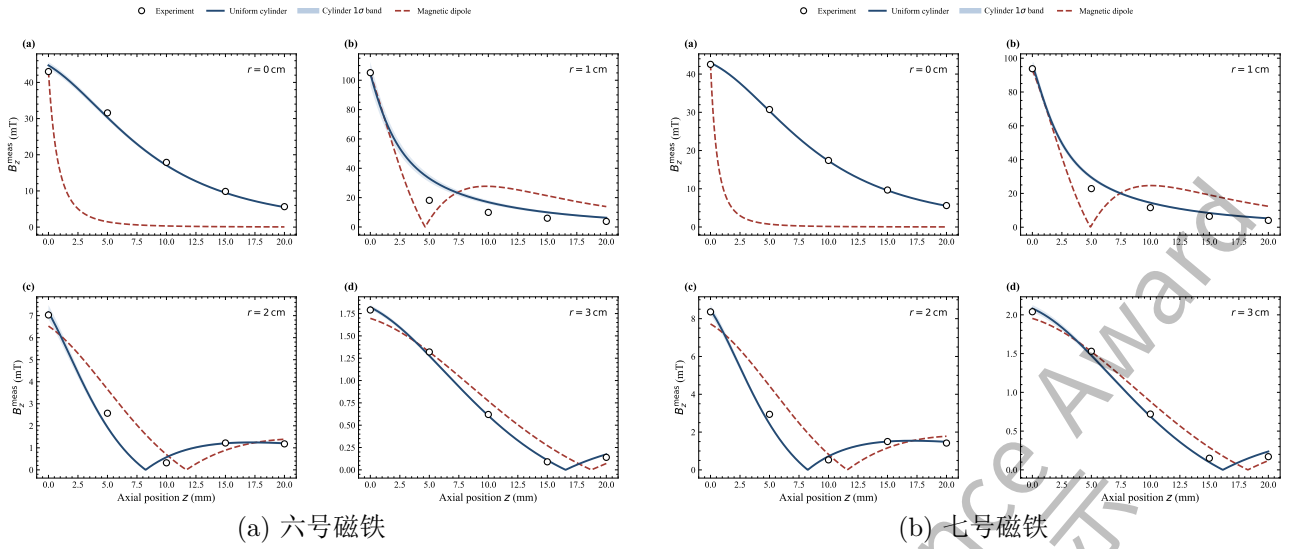


图 D.2: 六号和七号磁铁在不同固定径向位置处的实测轴向磁场及有限圆柱与点磁偶极模型比较。

Measured axial fields of magnets 6 and 7 at selected fixed radial positions and comparison with finite-cylinder and point-dipole models.

附录 E 补充图像与扩展分析

本附录在统一的物理量和观测坐标定义下比较

$$N = 3, \quad N = 5, \quad N = 7$$

三种有限磁摆链在

$$a = 60 \text{ mm}$$

条件下的扩展动力学结果。

三组实验采用相同的机械参数定义、有限圆柱磁相互作用核和黏性阻尼模型。有限圆柱总磁势统一写为

$$V_m^{\text{cyl}} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}^{\text{cyl}}(\theta_i, \theta_j; d_{p,ij}), \quad d_{p,ij} = |X_j - X_i| = |i - j|a. \quad (\text{E.1})$$

由三摆链第二、第三实验模态确定的有效磁势尺度为

$$\lambda_m = 0.473305, \quad (\text{E.2})$$

相应迁移磁势定义为

$$V_m^{\text{tr}} = \lambda_m V_m^{\text{cyl}}. \quad (\text{E.3})$$

对于 $N = 3$ ，第二和第三实验模态参与式 (E.2) 的确定，第一模态保留为同一链长下的独立频率比较量。对于 $N = 5$ 和 $N = 7$ ， λ_m 保持固定，平衡构型、本征频率、本征振型和非线性时间轨迹均由同一迁移模型计算。

本文对三种链长分别考察 $N = 3$ 的基准动力学校准、 $N = 5$ 的首次跨链长检验以及 $N = 7$ 下更高阶离散模态的迁移表现。这样可以在不重新调整磁势尺度的条件下比较链长增加后的频率、振型和时间域响应。

E.1 统一频率基准与观测坐标

有限链第 n 阶正常模态的无阻尼本征角频率记为

$$\omega_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

在线性化平衡构型 θ^* 附近，广义本征方程为

$$\mathbf{H}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{J}\phi_n, \quad (\text{E.4})$$

其中

$$\mathbf{H} = \nabla_{\theta}^2 V|_{\theta^*}, \quad \mathbf{J} = \text{diag}(I_1, \dots, I_N). \quad (\text{E.5})$$

相应无阻尼本征频率定义为

$$f_n^{(0)} = \frac{\omega_n}{2\pi}. \quad (\text{E.6})$$

实验中各摆采用共同的自由衰减率 β ，且转动阻尼满足

$$c_i = 2\beta I_i. \quad (\text{E.7})$$

因此线性阻尼矩阵满足

$$\mathbf{C} = 2\beta \mathbf{J},$$

各无阻尼本征向量仍构成阻尼系统的模态基，与实验振荡频率比较时采用

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}. \quad (\text{E.8})$$

以下涉及实验模态频率、频率残差和模态带宽时， f_n 均表示式 (E.8) 定义的阻尼振荡频率。

无磁耦合条件下，孤立磁摆的无阻尼角频率为

$$\omega_{\text{iso}} = \sqrt{\frac{k_g}{I_{\text{eff}}}}, \quad (\text{E.9})$$

对应实验条件下的阻尼参考频率为

$$f_{\text{iso}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_g}{I_{\text{eff}}} - \beta^2}. \quad (\text{E.10})$$

第 n 阶有限链模态相对于孤立摆的频率偏移定义为

$$\delta_n^{(N)} = \frac{f_n^{(N)} - f_{\text{iso}}}{f_{\text{iso}}}. \quad (\text{E.11})$$

当 $N = 1$ 且不存在其他磁体时，有

$$f_1 = f_{\text{iso}}.$$

对于 $N > 1$ ， $f_1, \dots, f_N$ 均表示有限链的集体正常模态频率。

Tracker 给出的角度对应固定视频原点下的几何极角。定义第 i 个悬点相对于观测原点的水平坐标为 X_i ，磁体中心到等效悬点的距离为 l_i ，则理论摆角 θ_i 与 Tracker 观测角 α_i 的几何映射为

$$\alpha_i(\theta_i) = \text{atan2}(X_i + l_i \sin \theta_i, l_i \cos \theta_i). \quad (\text{E.12})$$

这里采用 $\text{atan2}(y, x)$ 的两参数定义，第一实参对应相对于观测原点的水平位移，第二实参对应向下的竖直分量，因此 α_i 从竖直向下方向起算。

式 (E.12) 在平衡位置处的局部 Jacobian 为

$$g_i = \left. \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i^*} = \left. \frac{l_i^2 + X_i l_i \sin \theta_i}{X_i^2 + l_i^2 + 2X_i l_i \sin \theta_i} \right|_{\theta_i^*}. \quad (\text{E.13})$$

实验观测量采用末段数据估计各通道的静态基线，

$$\eta_i^{\text{exp}}(t) = \alpha_i^{\text{exp}}(t) - \tilde{\alpha}_{i,\text{tail}}, \quad (\text{E.14})$$

其中 $\tilde{\alpha}_{i,\text{tail}}$ 为末段稳定区间内观测角的中位数。

理论比较量采用理论平衡构型作为零点,

$$\eta_i^{\text{th}}(t) = \alpha_i \left(\theta_i^{\text{th}}(t) \right) - \alpha_i \left(\theta_i^* \right). \quad (\text{E.15})$$

进行物理相空间和本征模投影时, 使用平衡位置附近的物理角位移

$$\xi_i(t) = \theta_i(t) - \theta_i^*. \quad (\text{E.16})$$

由于 θ_i^* 为常数, 有

$$\dot{\xi}_i = \dot{\theta}_i. \quad (\text{E.17})$$

E.2 链长增加时的物理相空间结构

在统一局部坐标

$$(\xi_i, \dot{\xi}_i)$$

中, 相空间轨迹同时记录各格点的位移、角速度、振幅衰减以及多频成分叠加后的轨道形状。三种链长采用相同的物理坐标定义, 因此可以比较不同自由度下实验与迁移理论的相空间结构。

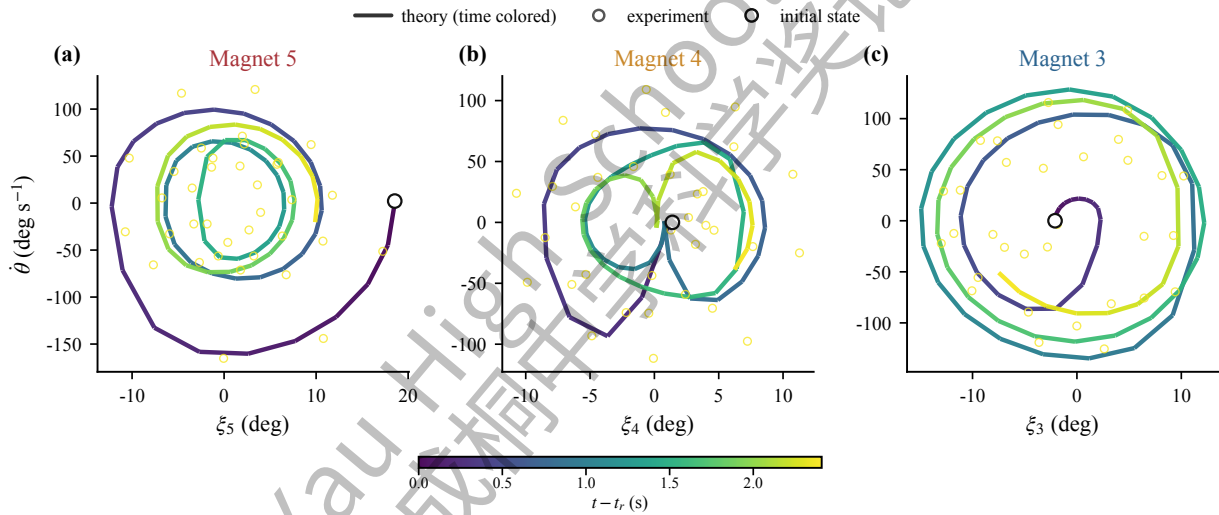


图 E.1: $N = 3$ 、 $a = 60$ mm 端点释放后三个磁摆在物理角位移-角速度相空间中的实验轨迹与迁移有限圆柱理论。

Experimental and transferred finite-cylinder phase-space trajectories in physical angular displacement-angular velocity coordinates for the three pendulums after endpoint release at $N = 3$, $a = 60$ mm.

对于 $N = 3$, 释放端具有最大的初始相空间轨道, 中间磁摆和远端磁摆随后进入可观测振荡区域。图 E.1 中理论轨迹随时间逐渐向平衡位置附近收缩, 与黏性耗散项所给出的能量衰减方向一致。

实验散点覆盖理论轨迹的主要位移和角速度范围。外层轨迹主要出现在释放后的早期瞬态阶段, 随后轨迹进入幅值较小的多圈结构。

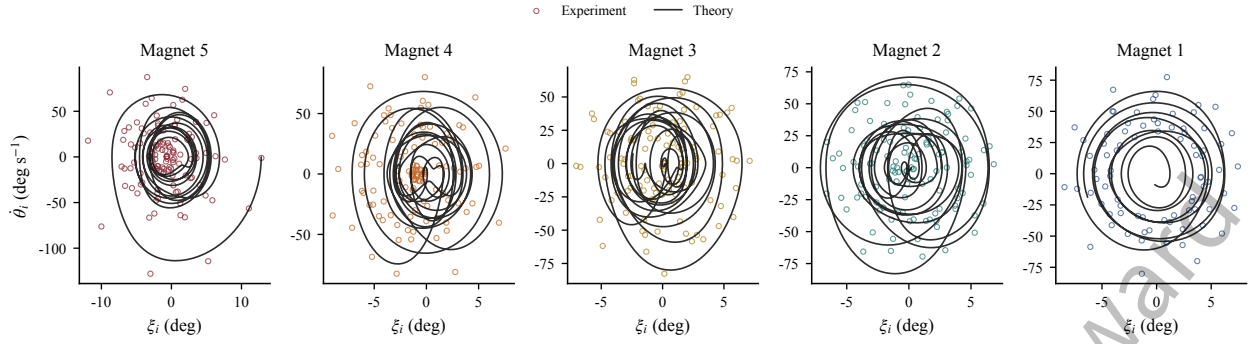


图 E.2: $N = 5$ 、 $a = 60$ mm 时五个磁摆在平衡中心化物理相空间中的实验轨迹与固定参数迁移理论。
Experimental trajectories and fixed-parameter transferred theory in equilibrium-centered physical phase space for the five pendulums at $N = 5$, $a = 60$ mm.

链长增加至 $N = 5$ 后，五个格点的相空间轨迹出现更多不同尺度的环形结构，不同位置的轨道半径和局部形状存在明显差异。这些结构与五阶有限链频谱中多个离散时间尺度同时出现在实验信号中的结果相符。

靠近释放端的磁摆保留较大的早期轨道，链内部和另一端磁摆主要表现为随后建立的振荡结构。Magnet 1 的实验记录开始时间晚于释放时刻，因此相图中的实验散点仅覆盖实际存在的数据区间。

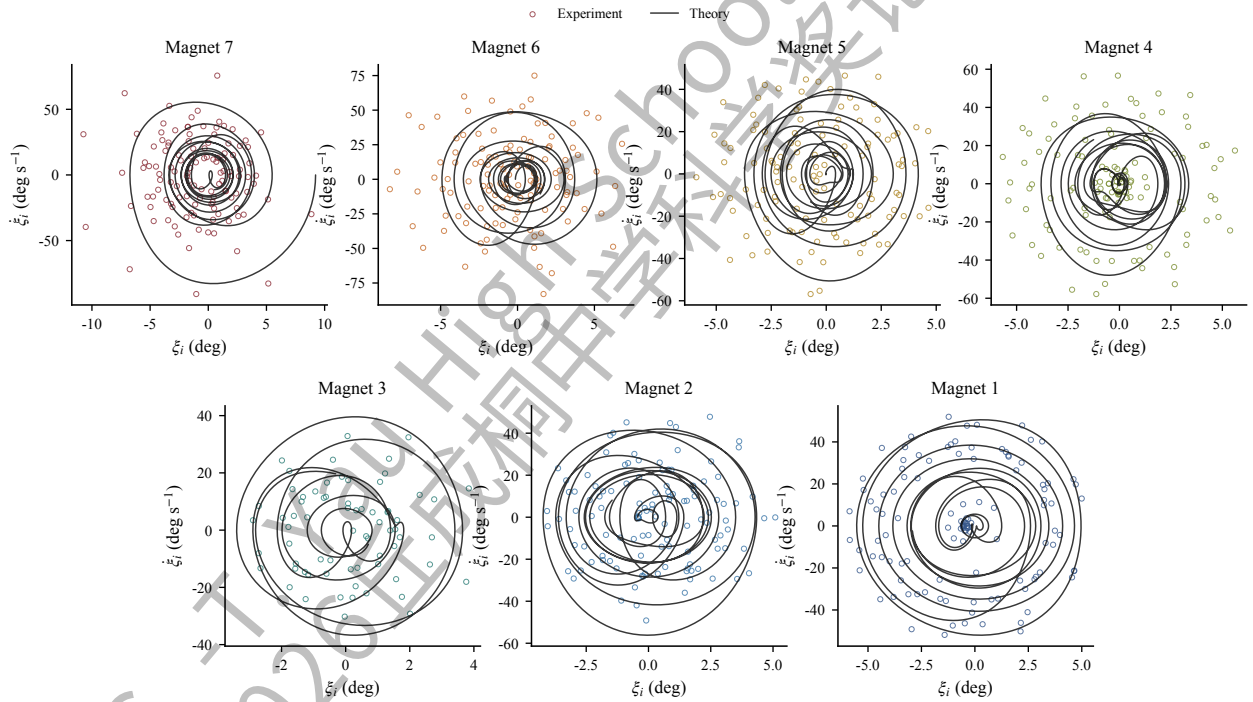


图 E.3: $N = 7$ 、 $a = 60$ mm 时七个磁摆在平衡中心化物理相空间中的实验轨迹与固定参数迁移理论。
Experimental trajectories and fixed-parameter transferred theory in equilibrium-centered physical phase space for the seven pendulums at $N = 7$, $a = 60$ mm.

对于 $N = 7$ ，不同格点的实验相轨迹呈现出更丰富的内外轨道结构，并覆盖更广的局部曲率和幅值尺度。七阶频谱提供了更多可参与瞬态运动的离散时间尺度，相空间结果与后续模态投影和时频分析共同用于描述这些成分在各格点上的参与情况。

图 E.1、图 E.2 和图 E.3 表明三种链长下的轨迹均围绕各自稳定平衡构型演化，并随时间表现出与实测耗散相符的幅值收缩。

E.3 统一模态基下的时间演化

理论本征向量采用惯性归一条件

$$\Phi^T \mathbf{J} \Phi = \mathbf{I}_N, \quad (\text{E.18})$$

其中

$$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N),$$

$\mathbf{I}_N$ 为 N 阶单位矩阵。

实验恢复得到的物理角位移向量记为

$$\xi^{\text{exp}}(t),$$

其在固定迁移理论本征基中的投影定义为

$$\mathbf{Q}^{\text{exp}}(t) = \Phi_{\text{tr}}^T \mathbf{J} \xi^{\text{exp}}(t). \quad (\text{E.19})$$

理论非线性轨迹采用相同本征基投影,

$$\mathbf{Q}^{\text{th}}(t) = \Phi_{\text{tr}}^T \mathbf{J} \xi^{\text{th}}(t). \quad (\text{E.20})$$

因此以下模态坐标表示实验与理论非线性轨迹在同一组线性化本征方向上的时间投影, 用于比较主要周期、相位和幅值演化。

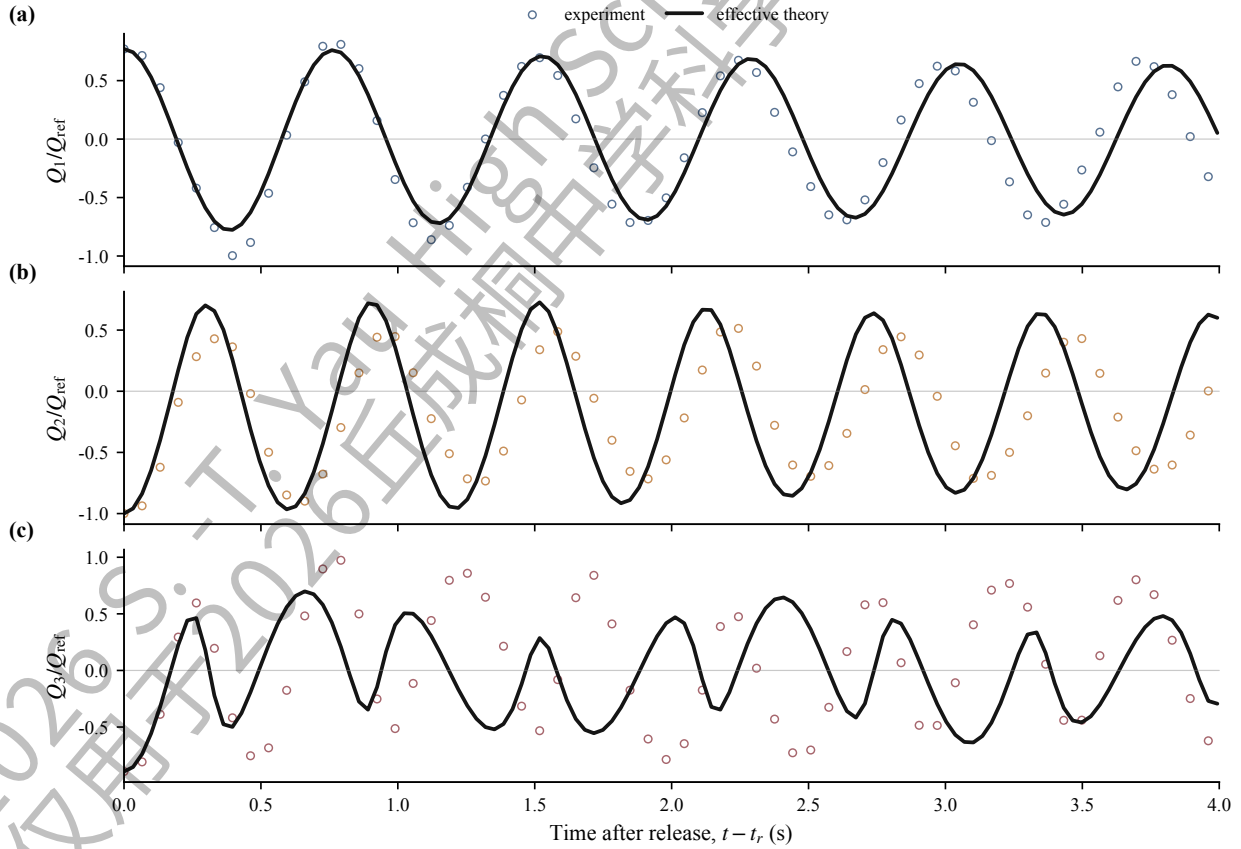


图 E.4: $N = 3$ 实验与有效有限圆柱理论在三阶迁移理论本征基中的模态坐标时间演化。

Time evolution of modal coordinates for the $N = 3$ experiment and effective finite-cylinder theory in the three-mode transferred theoretical eigenbasis.

三摆链的三个理论本征方向在端点释放后均具有明显投影。第一模态对应最低的集体振荡频率, 第

二和第三模态具有更强的格点间相对运动。

第二和第三实验模态参与 λ_m 的确定，因此图 E.4 用于比较参数确定后完整时间轨迹在相同本征基中的演化，第一模态则同时保留独立的频率检验作用。

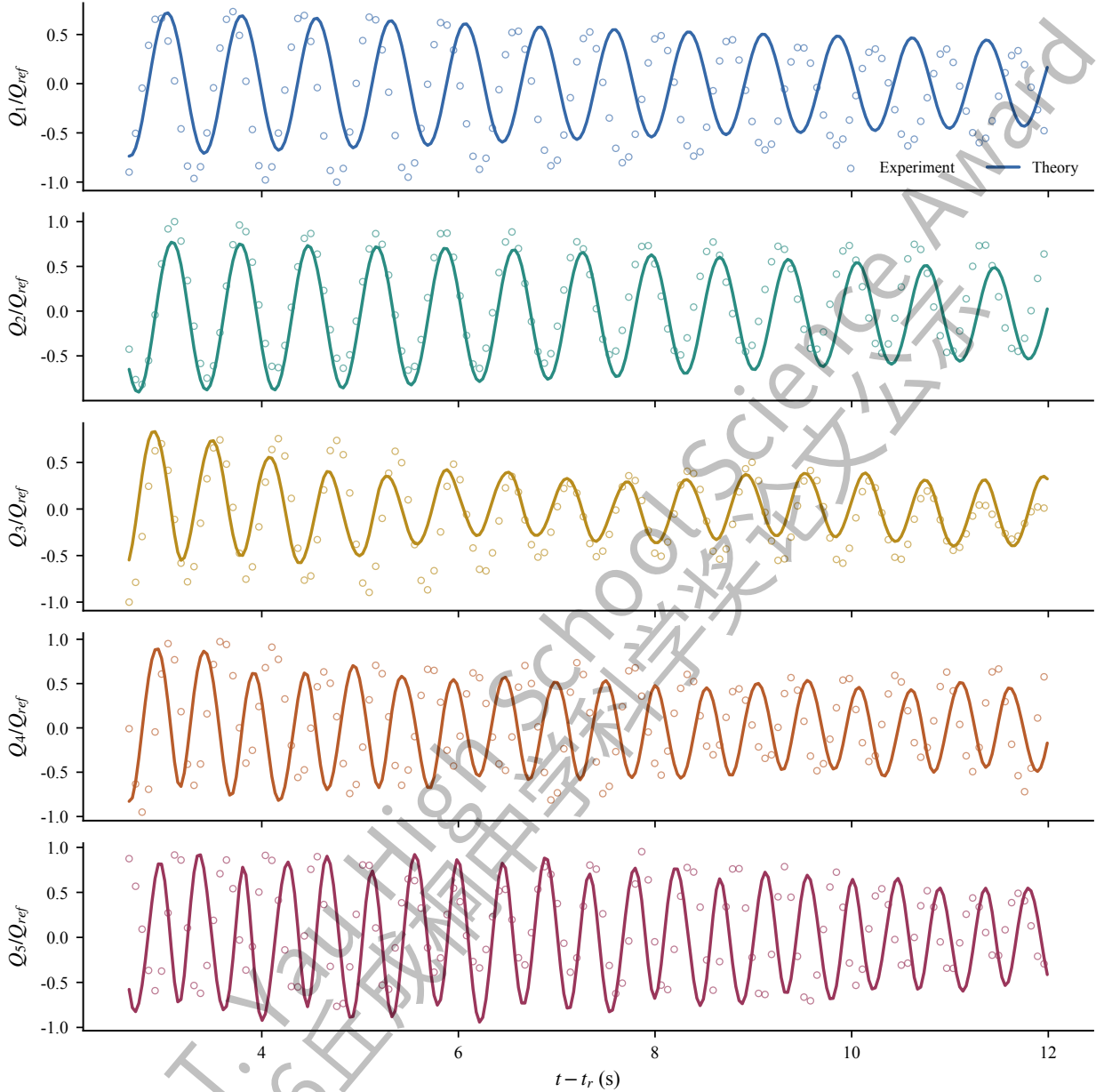


图 E.5: $N = 5$ 实验轨迹与固定 $N = 3$ 迁移模型在五阶理论本征基中的模态坐标时间演化。

Time evolution of modal coordinates for the $N = 5$ experiment and the fixed $N = 3$ transferred model in the five-mode theoretical eigenbasis.

在 $N = 5$ 中，固定 λ_m 给出五阶理论本征基。图 E.5 显示五个本征方向均具有可辨认的实验投影，各 Q_n 呈现不同的振荡时间尺度和衰减包络。

部分高阶模态的理论与实验相位差随时间增加更加明显，与相应模态存在非零频率残差的结果一致。

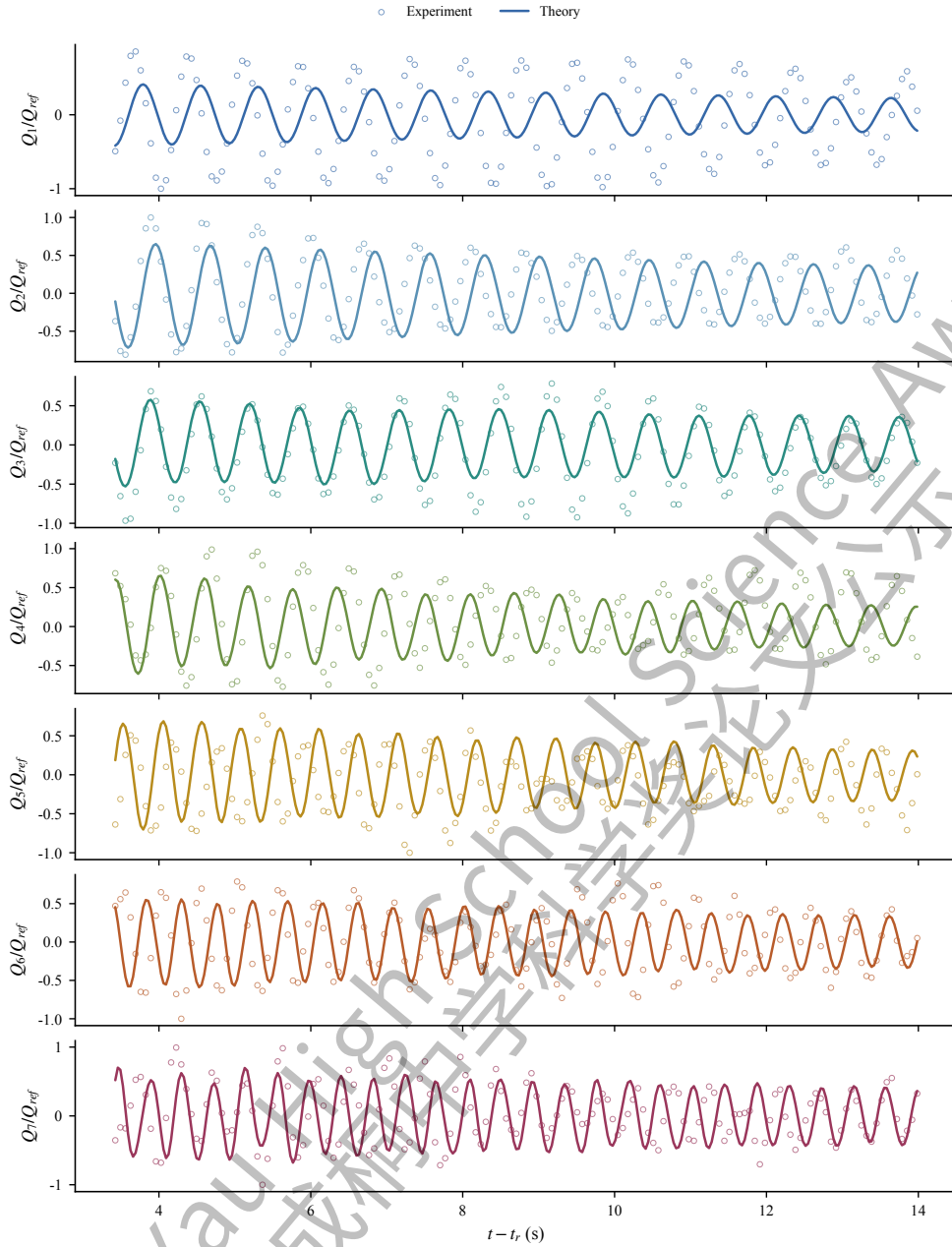


图 E.6: $N = 7$ 实验轨迹与固定参数迁移模型在七阶理论本征基中的模态坐标时间演化。

Time evolution of modal coordinates for the $N = 7$ experiment and fixed-parameter transferred model in the seven-mode theoretical eigenbasis.

七摆链中，七个理论本征方向均出现可辨认的实验振荡成分。高阶模态具有较短振荡周期，其理论与实验的长期相位差也更加容易在时间域中分辨。

三种链长的模态投影表明，端点释放在不同 N 下均可在多个有限链本征方向上产生有限投影，链长增加同时增加了实验频带内可辨认的离散模态数目。

E.4 实验模态识别与空间振型一致性

模态坐标描述实验轨迹在理论本征基中的投影。为独立提取实验空间振型，对多个 Tracker 角度通道进行共享频率拟合。

对于给定的实验拟合窗口，第 i 个通道写为

$$\eta_i^{\text{exp}}(t) = c_i + \sum_{n=1}^N [A_{in} \cos(2\pi f_n t) + B_{in} \sin(2\pi f_n t)], \quad (\text{E.21})$$

其中所有通道共享 $f_1, \dots, f_N$ ，而 c_i, A_{in}, B_{in} 为通道相关系数。

第 n 阶实验复模态定义为

$$\mathbf{e}_n = (A_{1n} - iB_{1n}, \dots, A_{Nn} - iB_{Nn})^\top. \quad (\text{E.22})$$

理论本征向量首先转换至 Tracker 的线性化观测空间，

$$\mathbf{G}_{\text{obs}} = \text{diag}(g_1, \dots, g_N), \quad (\text{E.23})$$

其中 g_i 由式 (E.13) 给出。第 n 阶理论观测空间振型为

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{G}_{\text{obs}} \phi_n. \quad (\text{E.24})$$

理论与实验振型之间采用复数模态保证准则

$$\text{MAC}_{mn} = \frac{|\mathbf{t}_m^\dagger \mathbf{e}_n|^2}{(\mathbf{t}_m^\dagger \mathbf{t}_m)(\mathbf{e}_n^\dagger \mathbf{e}_n)}. \quad (\text{E.25})$$

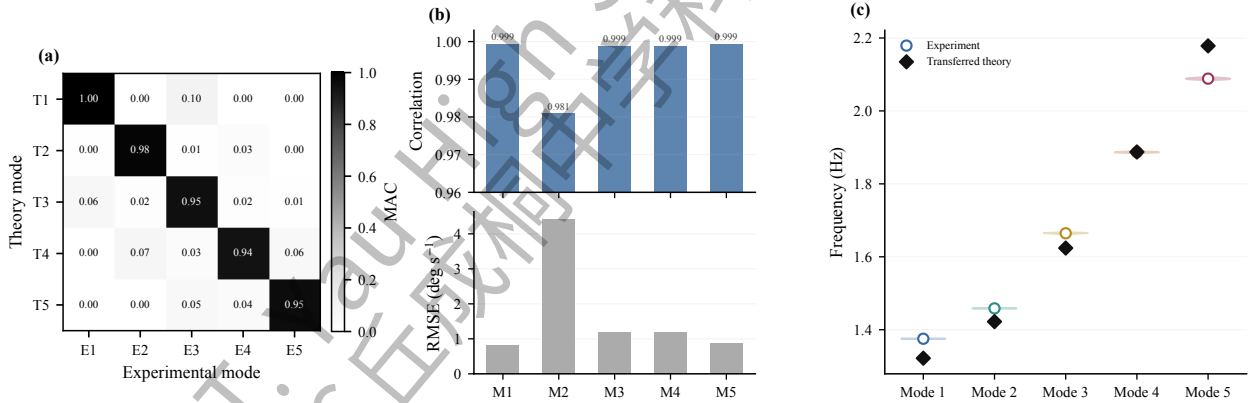


图 E.7: $N = 5$ 的理论-实验复模态 MAC、Tracker 角速度通道质量以及共享模态频率的重采样稳定性。

Theory-experiment complex-mode MAC, Tracker angular-velocity channel quality, and resampling stability of shared modal frequencies for $N = 5$.

图 E.7(a) 中的 MAC 矩阵以主对角分量为主，五个实验模态能够与五个迁移理论模态形成明确配对。对应 assigned MAC 约为

$$0.996, \quad 0.977, \quad 0.949, \quad 0.936, \quad 0.953,$$

平均值约为

$$\overline{\text{MAC}}_{N=5} \simeq 0.962.$$

图 E.7(b) 比较 Tracker 直接输出角速度与由平滑角度序列求导得到的角速度。Magnet 2 的角速度通道具有较大的散布，因此本节模态频率和实验振型均由角度时间序列提取。

图 E.7(c) 给出时间相关重采样下的共享频率分布，用于描述有限实验记录对频率识别稳定性的影响。

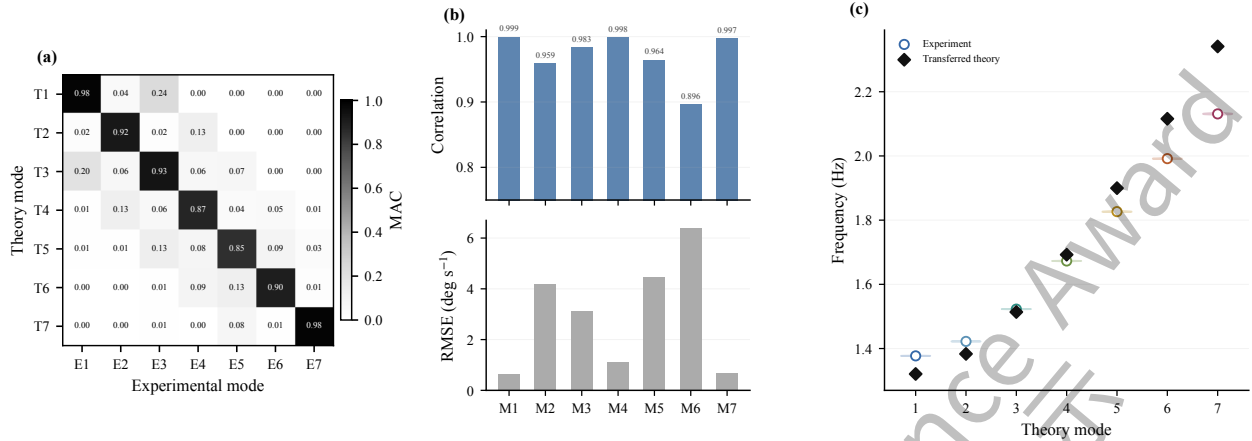


图 E.8: $N = 7$ 的理论-实验复模态 MAC、Tracker 通道质量以及七阶共享模态频率的重采样稳定性。
Theory-experiment complex-mode MAC, Tracker channel quality, and resampling stability of the seven shared modal frequencies for $N = 7$.

对于 $N = 7$ ，MAC 矩阵仍具有明显的主对角结构。七阶 assigned MAC 约为

$$0.982, \quad 0.918, \quad 0.930, \quad 0.874, \quad 0.847, \quad 0.898, \quad 0.982,$$

平均值为

$$\overline{\text{MAC}}_{N=7} \simeq 0.919. \quad (\text{E.26})$$

与 $N = 5$ 相比，七摆链的部分中阶模态具有更大的非对角 MAC 分量，而第一和第七模态仍保持较高的配对值。

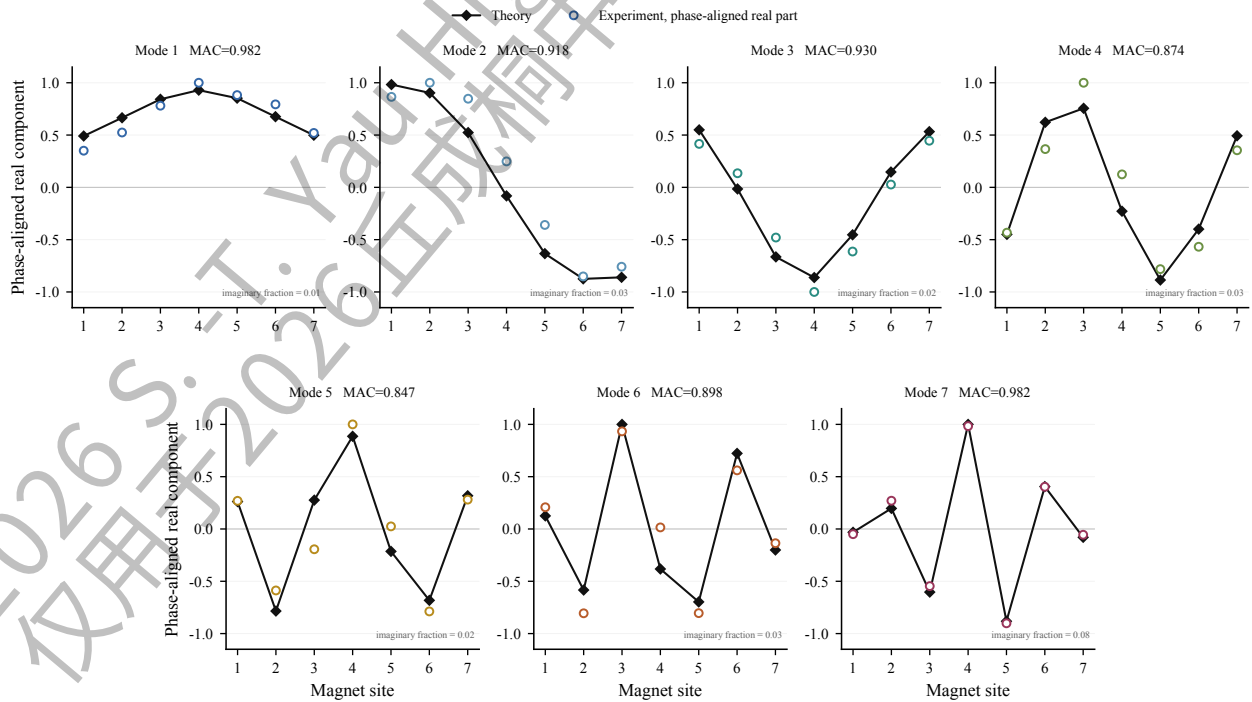


图 E.9: $N = 7$ 七阶实验复模态经整体相位对齐后的实部与迁移理论观测空间振型的逐格点比较。
Site-by-site comparison of the phase-aligned real parts of the seven experimental complex modes and transferred theoretical observation-space mode shapes for $N = 7$.

图 E.9 进一步显示七个配对模态的格点结构。第七模态具有

$$\text{MAC}_7 \simeq 0.982,$$

同时其理论频率相对实验约高

$$9.9\%.$$

广义本征问题

$$\mathbf{H}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{J}\phi_n$$

中，本征值和本征向量描述不同的谱信息。第七模态同时具有较高空间 MAC 和较大的频率残差，说明该模态的实验空间结构与理论本征方向较为接近，而相应本征频率仍存在明显偏差。

经整体相位对齐后，多数实验复模态的虚部分量较小，表明主要格点振幅结构可以由相应实本征向量描述。

E.5 线性化模态成分与完整非线性能量

在满足式 (E.18) 的惯性归一本征基中，定义第 n 阶线性二次模态量

$$E_n^{(2)} = \frac{1}{2} (\dot{Q}_n^2 + \omega_n^2 Q_n^2). \quad (\text{E.27})$$

相应二次模态比例为

$$\chi_n(t) = \frac{E_n^{(2)}(t)}{\sum_m E_m^{(2)}(t)}. \quad (\text{E.28})$$

χ_n 表示完整非线性轨迹在平衡点线性本征基中的瞬时二次投影比例，其本身不等同于完整非线性系统严格可分离的模态能量。

相对于稳定平衡构型，完整非线性系统的超额机械能定义为

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} + V(\boldsymbol{\theta}) - V(\boldsymbol{\theta}^*). \quad (\text{E.29})$$

从释放时刻 t_r 起累计的黏性耗散为

$$D(t) = \int_{t_r}^t \dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}} dt. \quad (\text{E.30})$$

由运动方程可得

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{E.31})$$

因此理论上满足

$$E(t) + D(t) = E(t_r). \quad (\text{E.32})$$

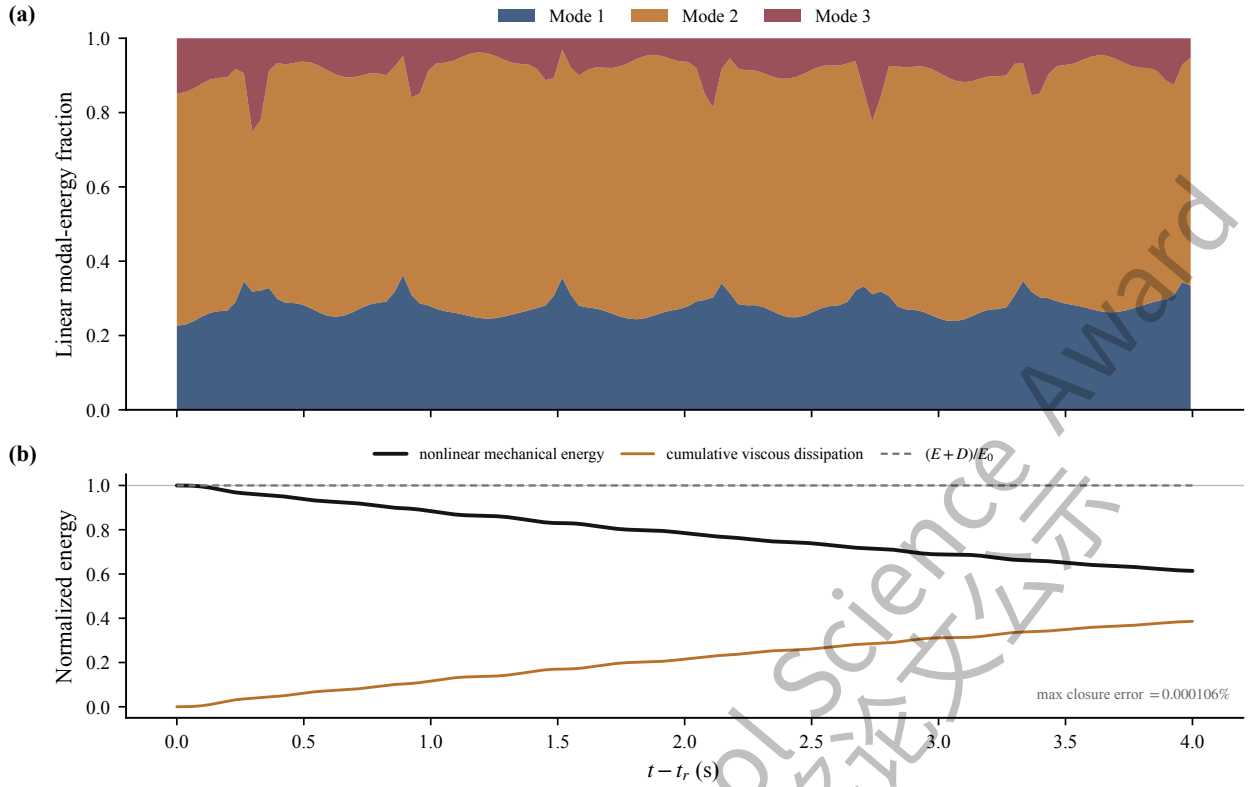


图 E.10: $N = 3$ 在线性化本征基中的二次模态组成以及完整非线性机械能、累计黏性耗散和能量闭合关系。
Quadratic modal composition in the linearized eigenbasis and the full nonlinear mechanical energy, accumulated viscous dissipation, and energy closure for $N = 3$.

三摆端点释放后三个线性本征方向均具有有限二次投影。图 E.10(a) 中各 χ_n 随时间变化，反映非线性轨迹相对于固定线性本征基的组成变化。

图 E.10(b) 中机械能随时间下降，累计黏性耗散增加，二者之和在数值精度内保持稳定。最大相对闭合误差约为

$$1.06 \times 10^{-4}\%.$$

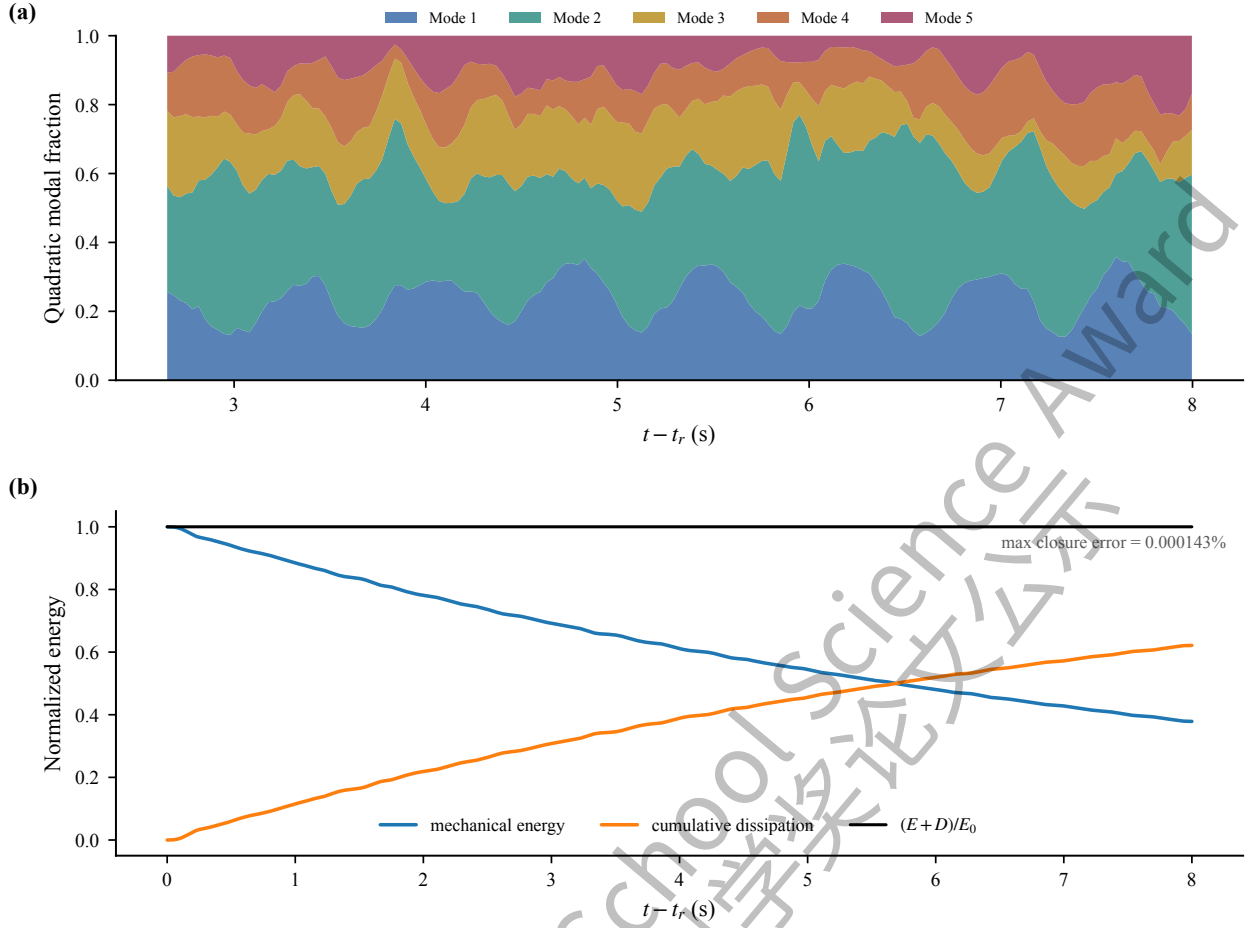


图 E.11: $N = 5$ 的五阶二次模态组成以及固定参数迁移有限圆柱动力学中的机械能与黏性耗散。
Five-mode quadratic composition and mechanical energy with viscous dissipation in the fixed-parameter transferred finite-cylinder dynamics for $N = 5$.

当链长增加至 $N = 5$ 后，二次模态组成扩展为五个分量，不同分量在时间轴上的比例持续变化。完整非线性积分的最大能量闭合误差约为

$$1.43 \times 10^{-4}\%.$$

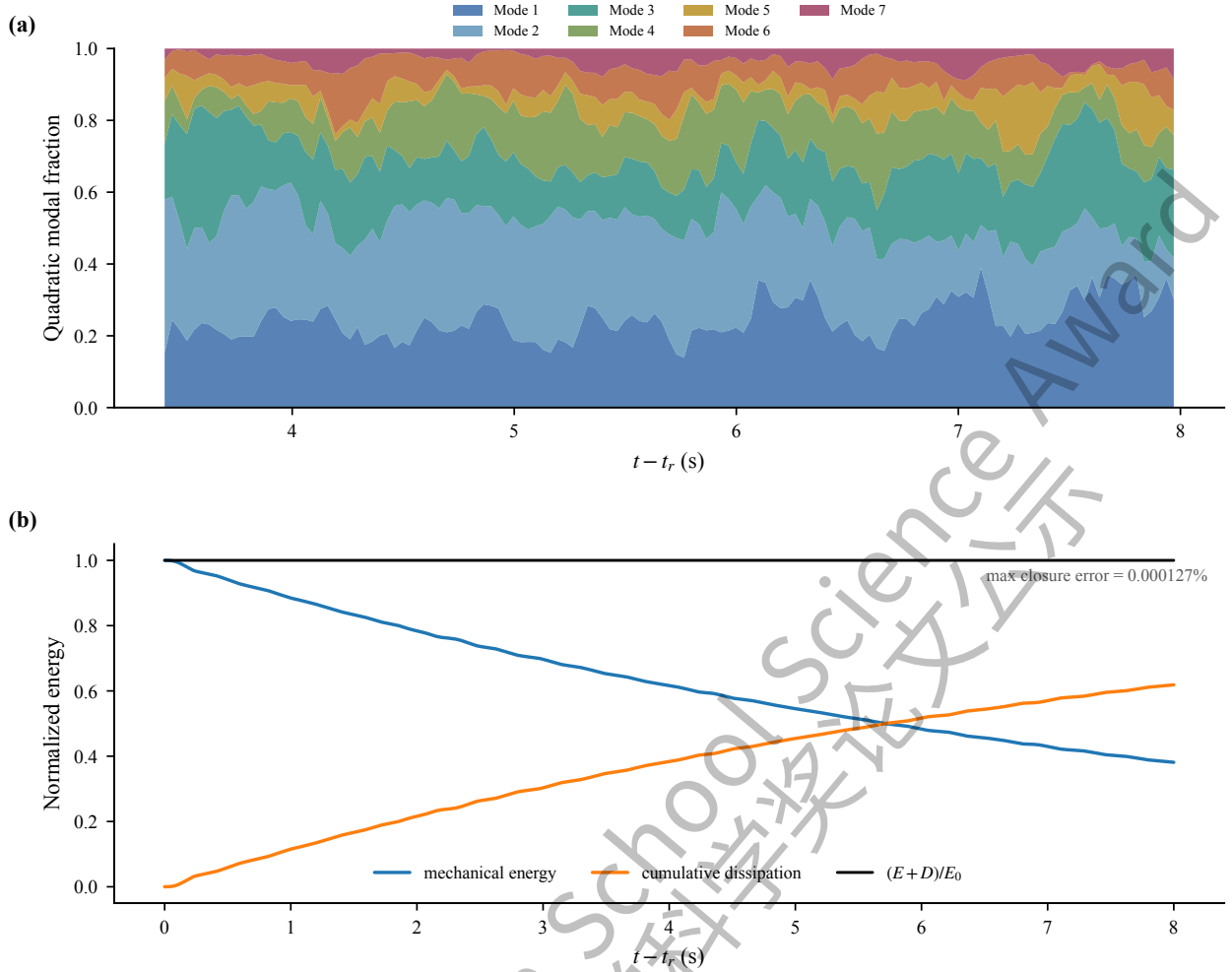


图 E.12: $N = 7$ 的七阶二次模态组成以及完整长程有限圆柱动力学中的机械能衰减、累计耗散和数值闭合关系。

Seven-mode quadratic composition and mechanical-energy decay, accumulated dissipation, and numerical closure in the full long-range finite-cylinder dynamics for $N = 7$.

七摆链中七个线性本征方向均具有有限投影，不同模态在不同时间区间表现出不同的二次权重。图 E.12(b) 给出的最大能量闭合误差约为

$$1.27 \times 10^{-4}\%.$$

三种链长的能量闭合误差均保持在 $10^{-4}\%$ 量级，说明有限圆柱势能、由同一势函数得到的广义磁力矩、黏性阻尼项和非线性时间积分之间具有一致的数值实现。

进一步定义第 i 个格点相对于平衡态的局部超额能量

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 + m_i^p g l_{c,i} (\cos \theta_i^* - \cos \theta_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} [U_{ij}(\theta_i, \theta_j) - U_{ij}(\theta_i^*, \theta_j^*)]. \quad (\text{E.33})$$

对于一般两角度势 $U_{ij}(\theta_i, \theta_j)$ ，从格点 i 指向格点 j 的成对能流定义为

$$J_{i \rightarrow j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_j \right]. \quad (\text{E.34})$$

由定义直接得到

$$J_{j \rightarrow i} = -J_{i \rightarrow j}. \quad (\text{E.35})$$

局部超额能量满足

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} + \sum_{j \neq i} J_{i \rightarrow j} = -c_i \dot{\theta}_i^2. \quad (\text{E.36})$$

因此 $\sum_{j \neq i} J_{i \rightarrow j}$ 表示格点 i 与其余格点之间的净保守能量交换，而对整条链求和时内部成对能流相互抵消。

E.6 链长增加时的时频结构

共享频率拟合用于确定有限链的离散实验模态频率，短时傅里叶变换用于显示不同频率成分在有限时间窗中的局部分布。定义

$$X_i(\tau, f) = \int \eta_i^{\text{exp}}(t) w(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt, \quad (\text{E.37})$$

其中 w 为 Hann 窗。

各格点的 STFT 功率分别按自身最大值归一化，因此图中的颜色用于比较同一实验通道内部不同时间和频率处的相对谱强度，不同格点之间的颜色幅值不表示绝对功率大小。

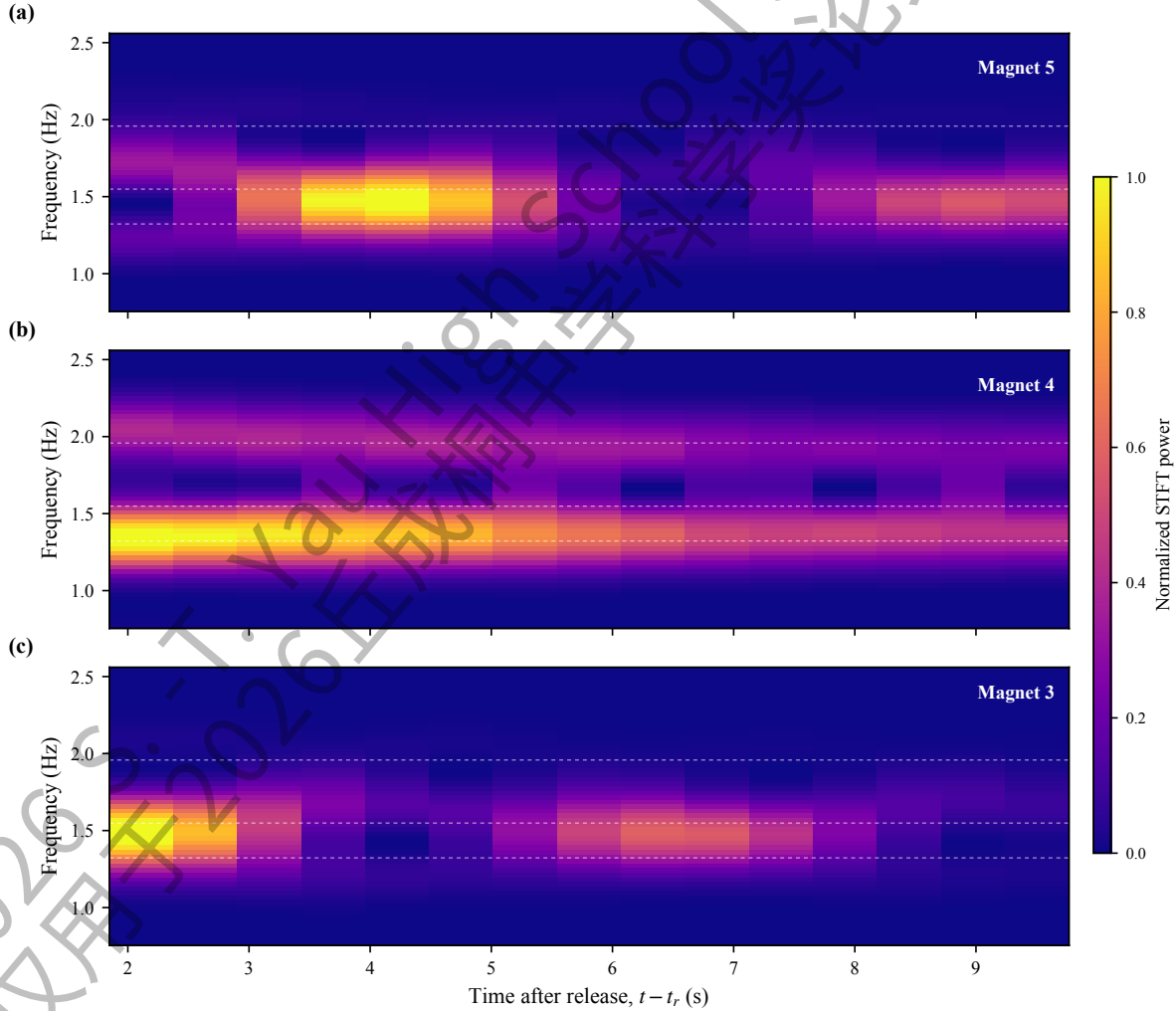


图 E.13: $N = 3$ 三个实验观测通道的 Hann 窗短时傅里叶归一化功率谱。

Hann-window short-time Fourier normalized power spectra of the three experimental observation channels for $N = 3$.

三摆链的主要谱强度集中在三个实验模态所在的频率范围附近，不同格点对各频率成分的相对谱

强度存在差异。

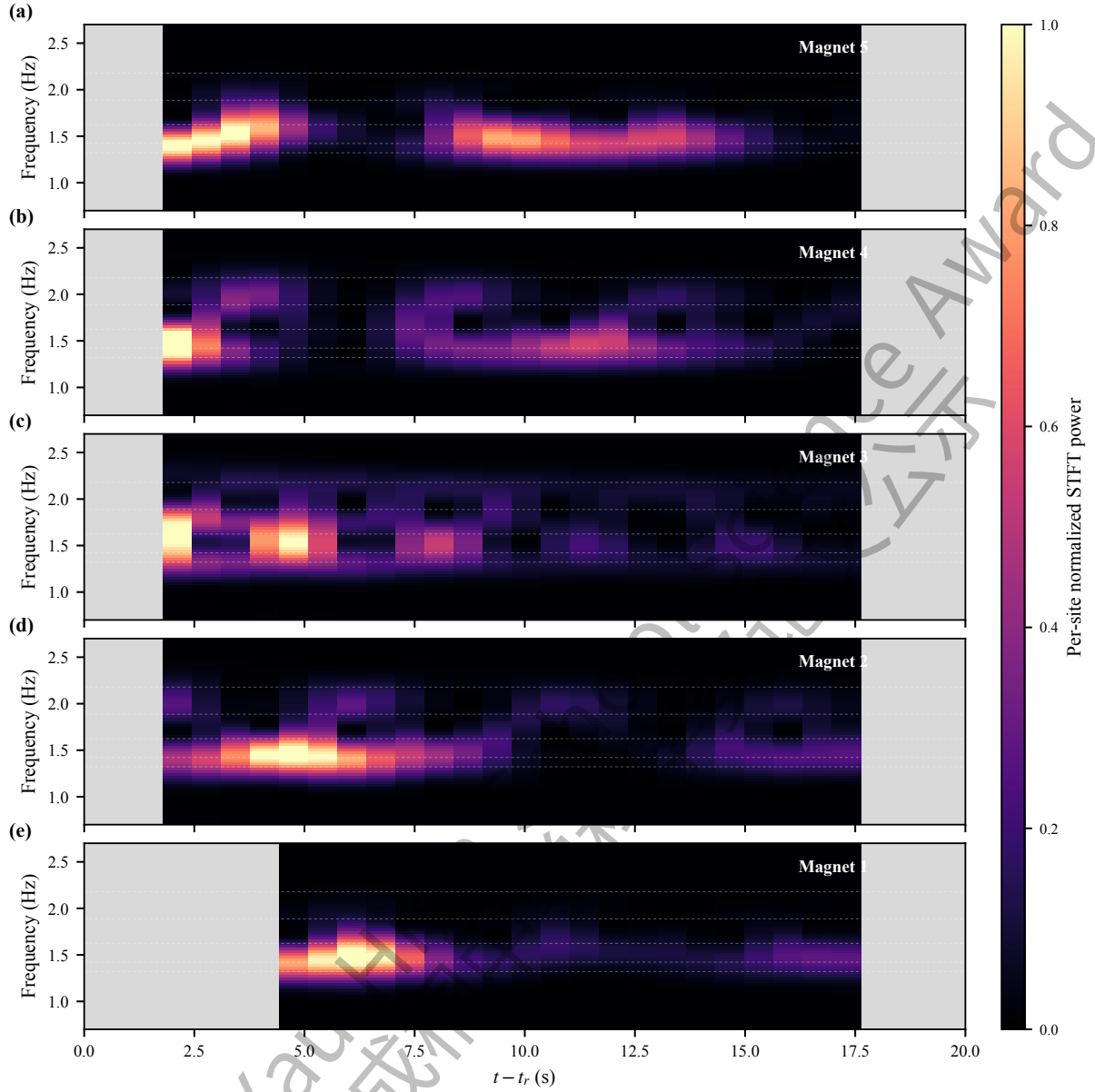


图 E.14: $N = 5$ 五个实验通道的短时傅里叶归一化功率谱，其中水平参考线表示固定参数迁移模型的五阶理论频率。

Short-time Fourier normalized power spectra of the five experimental channels for $N = 5$; horizontal reference lines indicate the five theoretical frequencies of the fixed-parameter transferred model.

五摆链中可辨认的频率成分数量增加，不同格点在约 1.3–2.2 Hz 范围具有不同的局部谱分布。理论水平线用于标记固定参数迁移模型对应的离散模态位置。

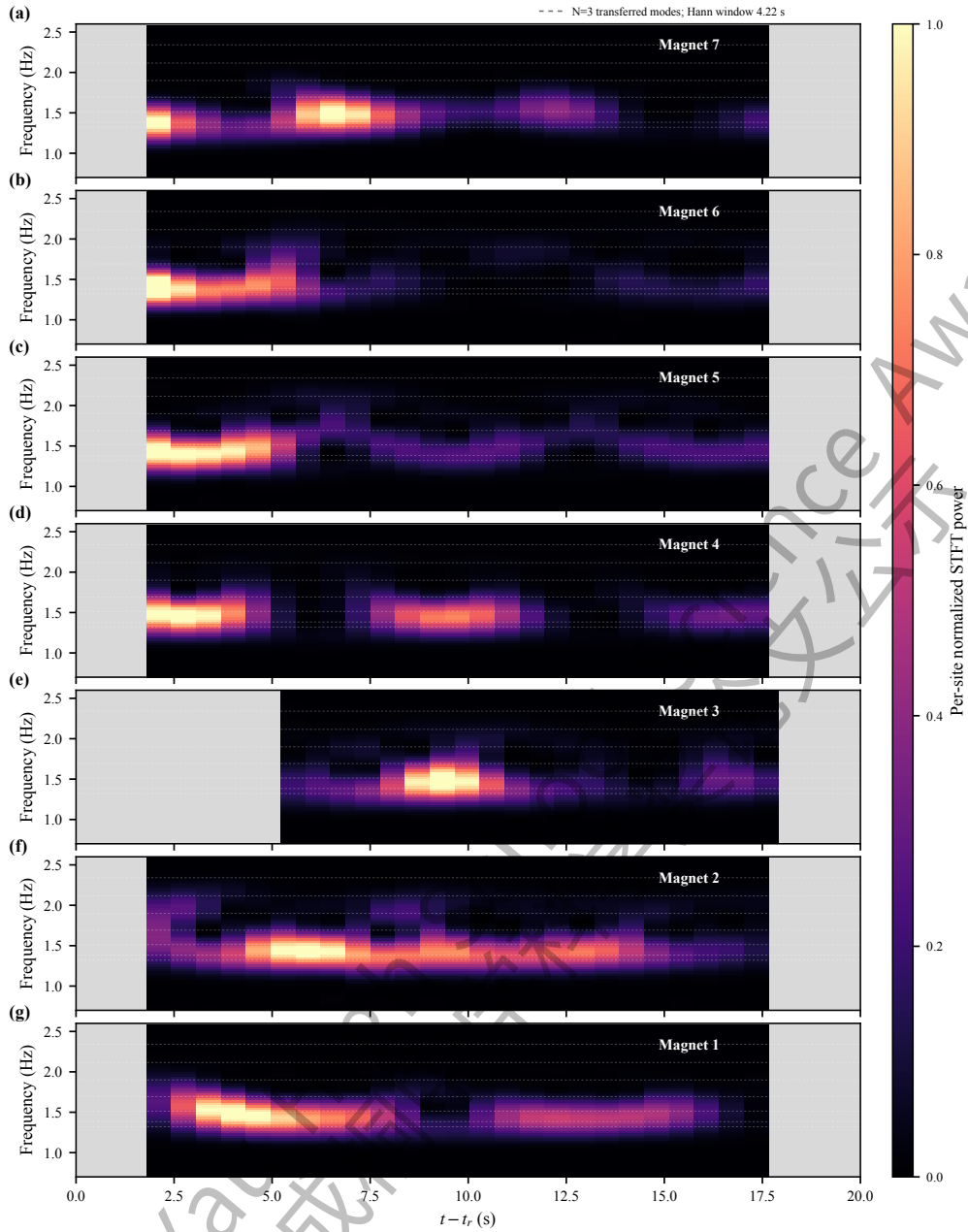


图 E.15: $N = 7$ 七个实验通道的短时傅里叶归一化功率谱以及固定参数迁移模型的七阶理论频率参考线。
Short-time Fourier normalized power spectra of the seven experimental channels for $N = 7$ and the seven theoretical frequency reference lines from the fixed-parameter transferred model.

七摆链中可辨认的频率结构进一步增多，不同格点对各离散频率区域表现出不同的相对谱强度。

STFT 的频率分辨率受有限窗宽限制，因此本文所报告的精确实验模态频率仍由多通道共享频率拟合确定；时频图用于辅助观察各频率成分在时间和格点方向上的分布。

E.7 参数敏感性、数据质量与频率识别稳定性

三摆链承担有效磁势尺度的动力学校准，因此其扩展分析考察机械参数、磁参数和初始状态变化与主要动力学输出之间的关系。五摆和七摆链保持

$$\lambda_m = 0.473305$$

固定，相应的数据审计集中于实验通道质量和实验模态频率识别稳定性。

参数 x 与输出量 y 的单调关联采用 Spearman 秩相关系数

$$\rho_S(x, y) = \text{corr}[\text{rank}(x), \text{rank}(y)] \quad (\text{E.38})$$

表示。

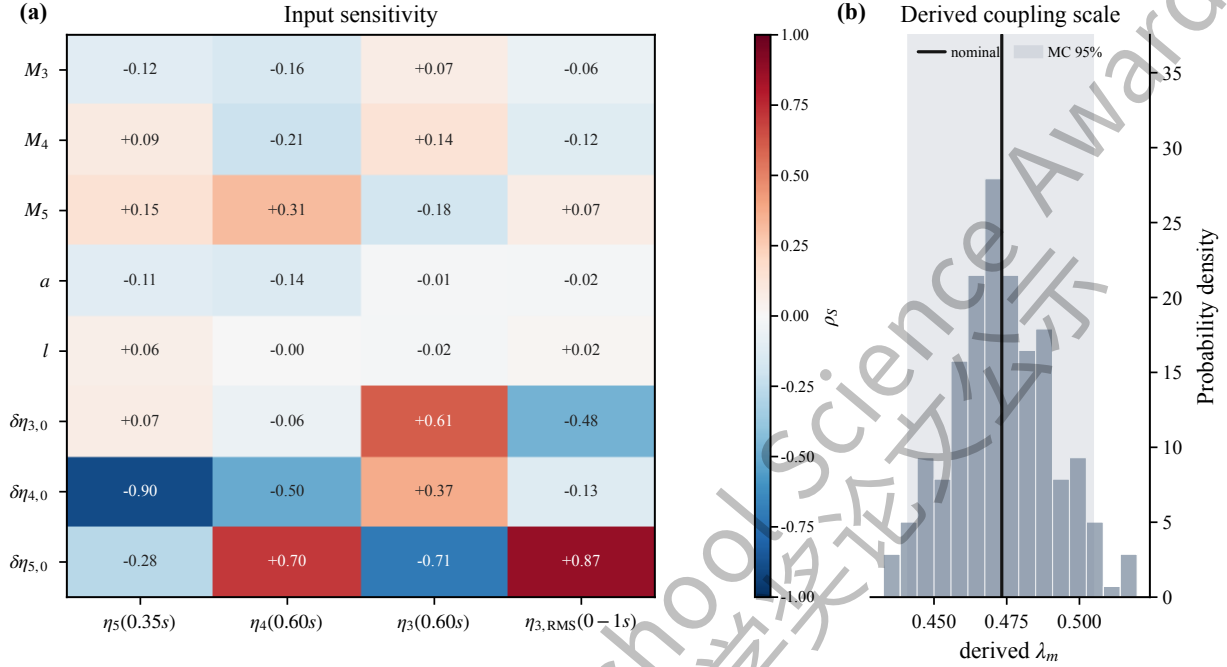


图 E.16: $N = 3$ 早期动力学输出与磁参数、几何参数和释放状态之间的 Spearman 秩相关以及重复参数采样得到的有效磁势尺度分布。

Spearman rank correlations between early-time $N = 3$ dynamical outputs and magnetic, geometric, and release parameters, together with the effective magnetic-potential scale distribution from repeated parameter sampling.

图 E.16 显示部分释放状态参数与早期轨迹幅值具有较强单调相关。磁化强度、悬点间距和有效摆长的变化同时影响平衡构型和总势能 Hessian，并进一步改变相应的线性模态频率。

重复参数采样得到的 λ_m 分布集中在名义值附近，用于描述输入参数扰动下该校准量的变化范围。

图 E.7(b) 显示 N5 各 Tracker 角速度通道的数据质量存在差异，其中 Magnet 2 的导数散布较大，因此五摆模态识别采用角度序列作为主要实验输入。

图 E.7(c) 中的重采样结果给出五阶共享频率在有限时间序列下的识别分布。

对于 N7，图 E.8(b) 同样显示不同 Tracker 通道的角速度质量存在格点差异，七阶实验模态仍从角度时间序列联合提取。

图 E.8(c) 给出的频率分布用于比较实验识别散布与理论-实验频率残差的相对尺度。

E.8 时间域残差与跨链长模型误差结构

统一定义时间域残差

$$r_i(t) = \eta_i^{\text{exp}}(t) - \eta_i^{\text{th}}(t). \quad (\text{E.39})$$

若第 n 阶模态的理论和实验频率差为

$$\Delta f_n = f_n^{\text{th}} - f_n^{\text{exp}}, \quad (\text{E.40})$$

并以释放时刻为相位参考，则由频率差产生的相位差一阶估计为

$$\Delta\varphi_n(\tau) \simeq 2\pi\Delta f_n\tau, \quad \tau = t - t_r. \quad (\text{E.41})$$

多模态信号中，不同 Δf_n 的相位积累会共同进入时间域残差。

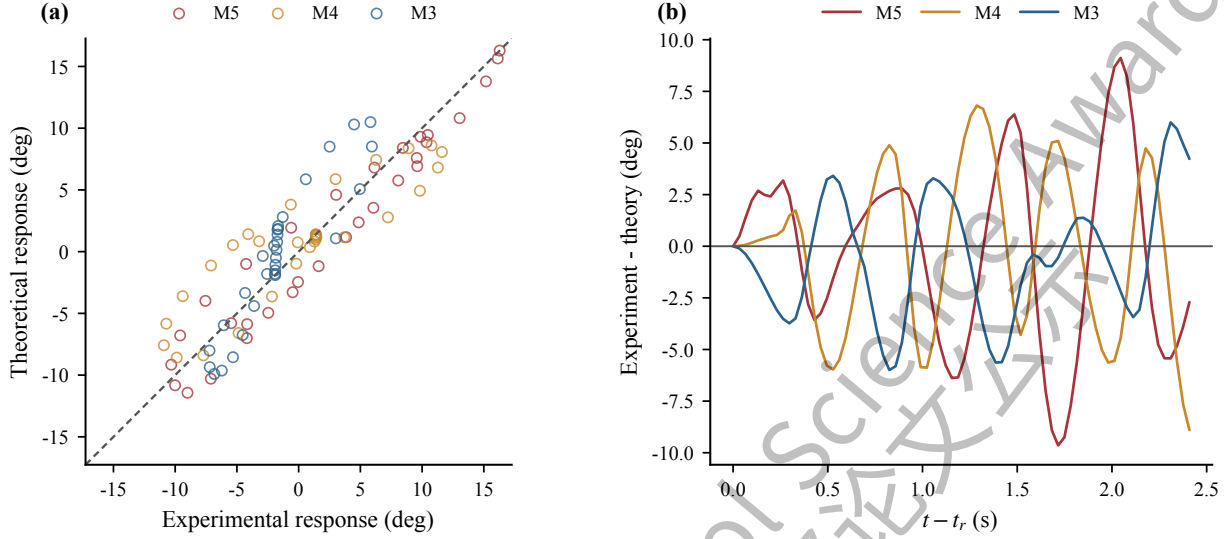


图 E.17: $N = 3$ 有效有限圆柱理论与实验的同刻度 parity 分布以及三个格点的时间域残差。
Same-scale parity distribution and time-domain residuals at the three sites for the $N = 3$ effective finite-cylinder theory and experiment.

图 E.17(a) 中的实验值和理论值主要分布在对角线附近，表明模型覆盖了三个格点的主要角位移范围。时间残差表现出连续振荡结构，其中包含理论与实验频率、相位和幅值差异的共同贡献。

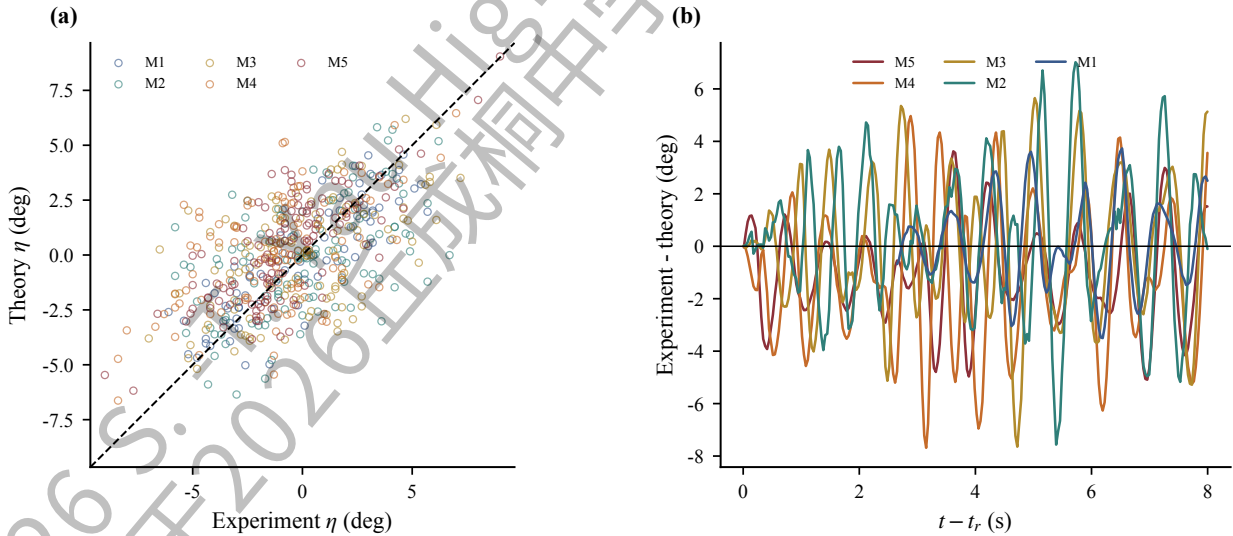


图 E.18: $N = 5$ 固定参数迁移理论与五通道实验之间的 parity 分布和逐格点时间域残差。
Parity distribution and site-resolved time-domain residuals between fixed-parameter transferred theory and the five-channel $N = 5$ experiment.

五摆链没有利用自身时间轨迹重新确定 λ_m ，因此图 E.18 直接给出固定三摆校准量迁移至五摆链后的时间域比较。

实验与理论总体保持正相关，而随时间形成的正负残差结构与多个非零模态频率残差同时存在。

对于 $N = 7$ ，正文已经给出完整的七格点时空残差。图 E.8 和图 E.9 进一步提供频率与空间振型

层面的比较。

七阶频率误差由低阶负偏差逐渐过渡至高阶正偏差，第七模态的理论频率相对实验约高

$$9.9\%,$$

同时

$$\text{MAC}_7 \simeq 0.982.$$

这两个量分别描述该模态的本征值和观测空间本征向量匹配程度，应作为互补指标进行比较。

E.9 链长变化下的模态与误差特征

综合相空间、模态坐标、复模态 MAC、能量闭合、时频结构和时间残差，三种链长给出了同一固定参数模型在不同自由度下的多层次比较。

对于 $N = 3$ ，系统具有三个离散正常模态。第二和第三实验模态用于确定 λ_m ，第一模态及完整时间轨迹提供同一链长下的额外比较。

当链长增加至 $N = 5$ 时，系统具有五个离散正常模态。保持 λ_m 固定后，五阶理论频率与实验频率保持数个百分点量级的偏差，平均复模态 MAC 约为

$$0.962.$$

对于 $N = 7$ ，七阶实验模态仍能够与七阶理论模态建立明确配对，平均 MAC 约为

$$0.919.$$

与此同时，高阶理论频率相对于实验的正偏差逐步增大。

从线性化本征问题看，不同模态分别采样总势能 Hessian 在不同空间方向上的曲率。随着模态阶次增加，格点间相对运动通常具有更短的空间变化尺度，因此高阶本征频率对磁势局部曲率的变化表现出更明显的响应。

第七模态同时具有

$$\text{MAC}_7 \simeq 0.982$$

和约

$$9.9\%$$

的频率残差，说明空间振型和本征频率对模型差异可以表现出不同的敏感程度。

三种链长的完整非线性积分均给出 $10^{-4}\%$ 量级的能量闭合误差，表明当前数值实现中的有限圆柱势能、磁广义力、黏性耗散和时间积分保持相互一致。

随着

$$N = 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7,$$

实验中可辨认的离散模态数目增加，相空间、模态投影和时频图相应呈现更多时间尺度。这些结果为后续固定链长并改变悬点间距的实验提供统一的频率和振型比较基准。

附录 F 悬点间距实验的模态识别与频谱检验

固定

$$N = 5$$

并取

$$a = 40, 60, 70, 80 \text{ mm}$$

时，五个 Tracker 通道保留各自原始时间戳。实验模态采用共享五个频率的阻尼时域模型

$$\eta_i^{\text{exp}}(t) = c_i + d_i t + e^{-\beta t} \sum_{n=1}^5 [A_{in} \cos(2\pi f_n t) + B_{in} \sin(2\pi f_n t)]. \quad (\text{F.1})$$

其中 $f_1, \dots, f_5$ 由五个通道共同确定， c_i, d_i, A_{in}, B_{in} 为通道相关线性系数。定量频率结果采用中心化后的原始 Tracker 数据；Savitzky–Golay 处理结果用于检查数据处理方式对识别频率的影响。

F.1 频谱与数据处理检验

对五个 Tracker 通道分别计算 Lomb–Scargle 功率，将各通道功率按自身最大值归一化后再取平均。该量用于显示原始数据中的主要频率结构，报告的模态频率仍由式 (F.1) 的联合时域拟合确定。

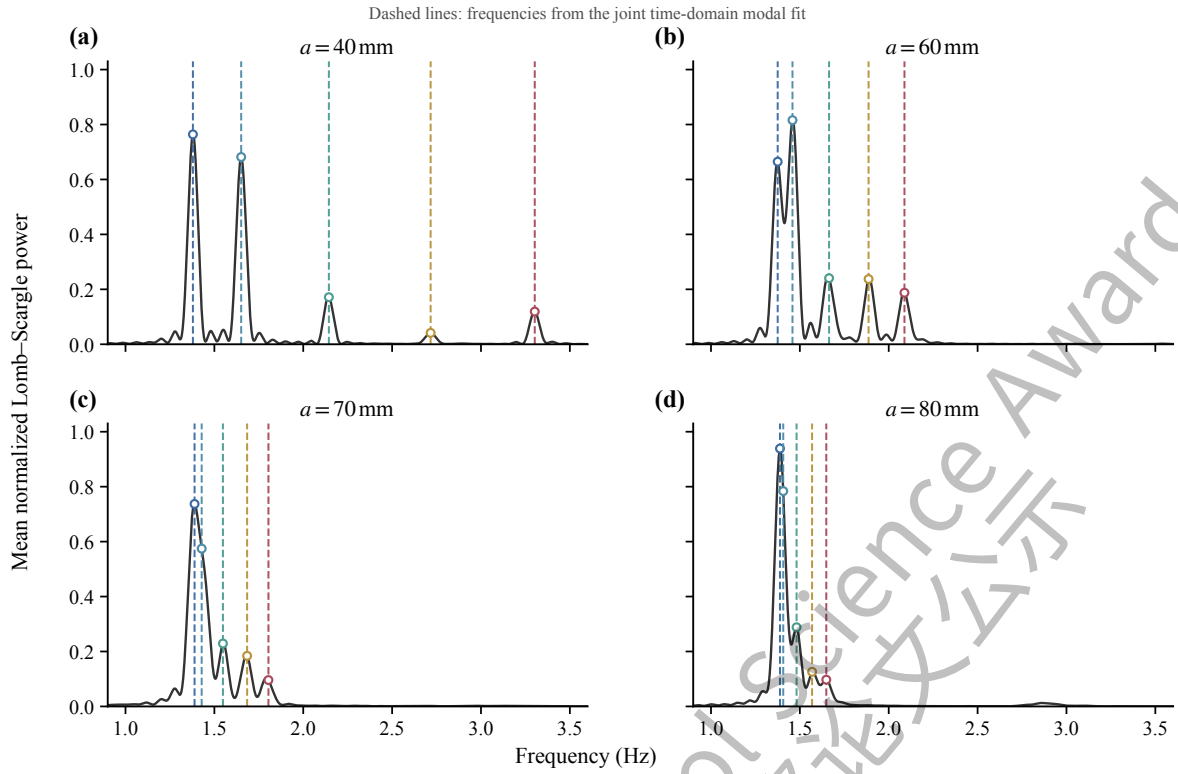


图 F.1: 四种悬点间距下五通道平均归一化 Lomb-Scargle 功率及联合时域拟合得到的五阶模态频率。
Five-channel mean normalized Lomb-Scargle power and five modal frequencies obtained from joint time-domain fitting at four pivot spacings.

随着 a 增大, 主要频率结构向较窄的低频区间集中。在 $a = 70$ 和 80 mm 时, 相邻低阶模态进入较小的频率间隔, 平均 Lomb-Scargle 曲线中并非每个拟合模态都对应彼此完全分离的独立峰。

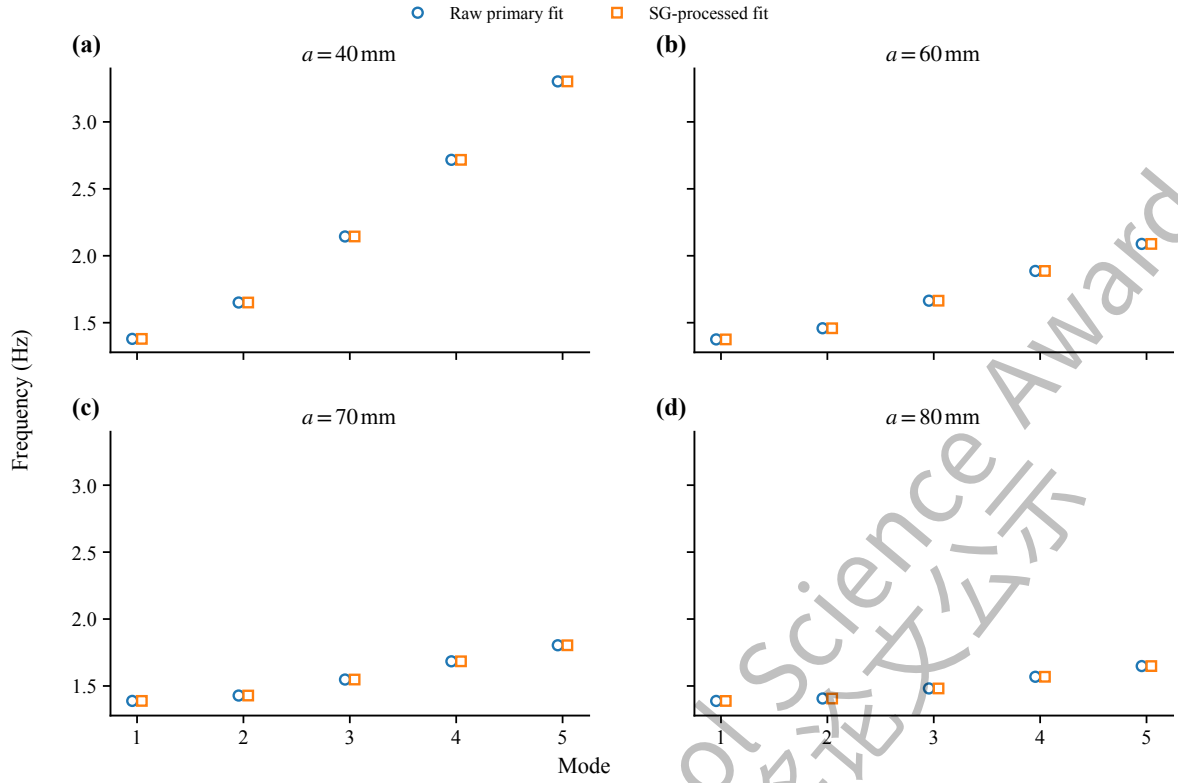


图 F.2: 原始 Tracker 数据与 Savitzky-Golay 处理数据所得五阶联合模态频率在四种悬点间距下的比较。
Comparison of five jointly identified modal frequencies obtained from raw Tracker data and Savitzky-Golay processed data at four pivot spacings.

两种处理流程的最大频率差出现在 $a = 80$ mm 的第二模态，约为
 0.424 mHz.

该差值约占相应模态频率的 0.03%，表明本节报告的频率对该平滑处理选择具有较低敏感性。

附录 G 悬点间距实验的观测空间振型

对于间距扫描，理论本征向量仍通过平衡构型处的 Tracker 观测 Jacobian 映射至观测空间，

$$\delta\alpha \simeq \mathbf{G}_{\text{obs}}\delta\theta, \quad (\text{G.1})$$

从而

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{G}_{\text{obs}}\phi_n. \quad (\text{G.2})$$

由式 (F.1) 的正余弦系数构造第 n 阶实验复模态

$$\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} A_{1n} - \mathrm{i}B_{1n} \\ A_{2n} - \mathrm{i}B_{2n} \\ A_{3n} - \mathrm{i}B_{3n} \\ A_{4n} - \mathrm{i}B_{4n} \\ A_{5n} - \mathrm{i}B_{5n} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.3})$$

理论与实验振型之间的复 MAC 为

$$\text{MAC}_{mn} = \frac{|\mathbf{t}_m^\dagger \mathbf{e}_n|^2}{(\mathbf{t}_m^\dagger \mathbf{t}_m)(\mathbf{e}_n^\dagger \mathbf{e}_n)}. \quad (\text{G.4})$$

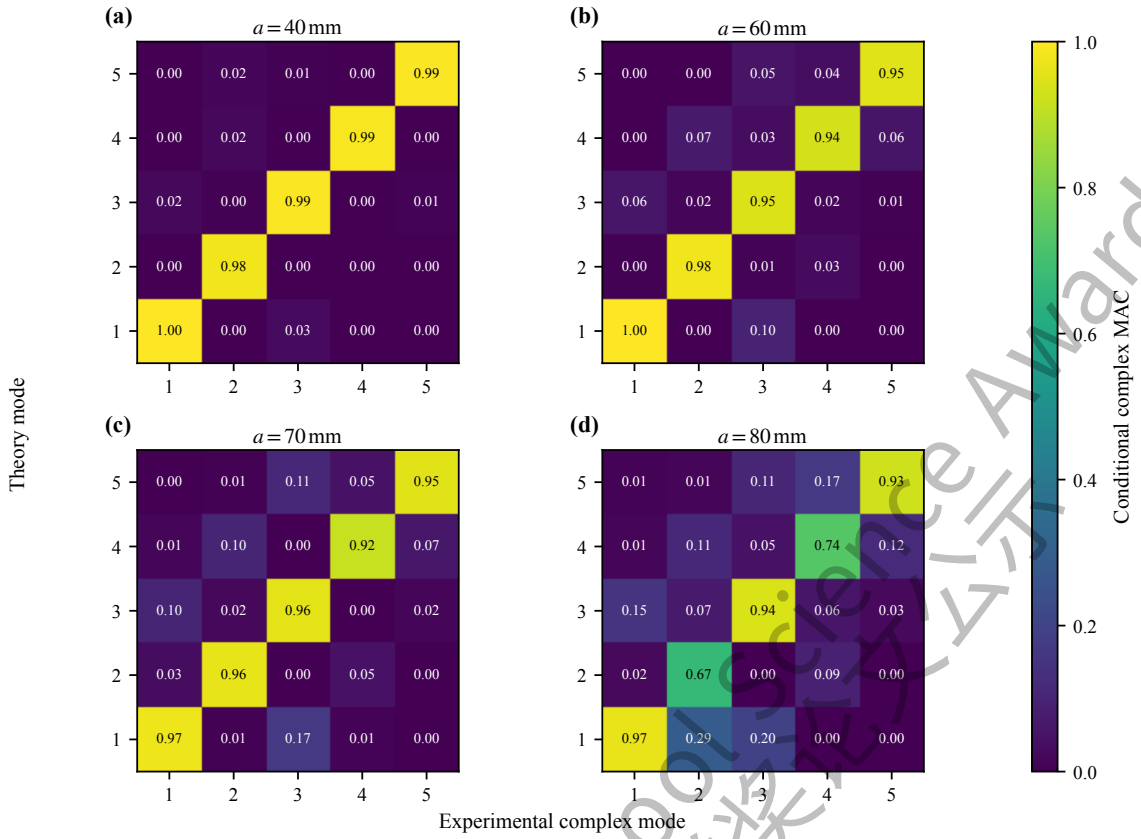


图 G.1: 四种悬点间距下理论观测空间模态与实验复模态之间的完整 complex MAC 矩阵。

Complete complex MAC matrices between theoretical observation-space modes and experimental complex modes at four pivot spacings.

在 $a = 40, 60, 70$ mm 时, MAC 矩阵主要呈现清晰的对角结构。在 $a = 80$ mm 时, 部分相邻模态出现较大的非对角投影, 其中前两阶实验频率仅相差约

0.01836 Hz.

较小的本征频率间隔与较低的部分单模态 MAC 同时出现, 因此该工况下单个本征向量的比较需要结合相邻模态的整体空间结构理解。

实验复模态在逐格点比较前进行整体相位对齐,

$$\tilde{e}_n = e_n \exp \left[-i \arg \left(t_n^\dagger e_n \right) \right]. \quad (G.5)$$

该变换只改变复模态的整体相位, 不会改变其 MAC。以下图中理论振型、实验实部和实验虚部在每一个模态内采用共同归一化尺度, 因此用于比较格点结构, 不同模态之间的纵轴幅值不表示实际振动能量大小。

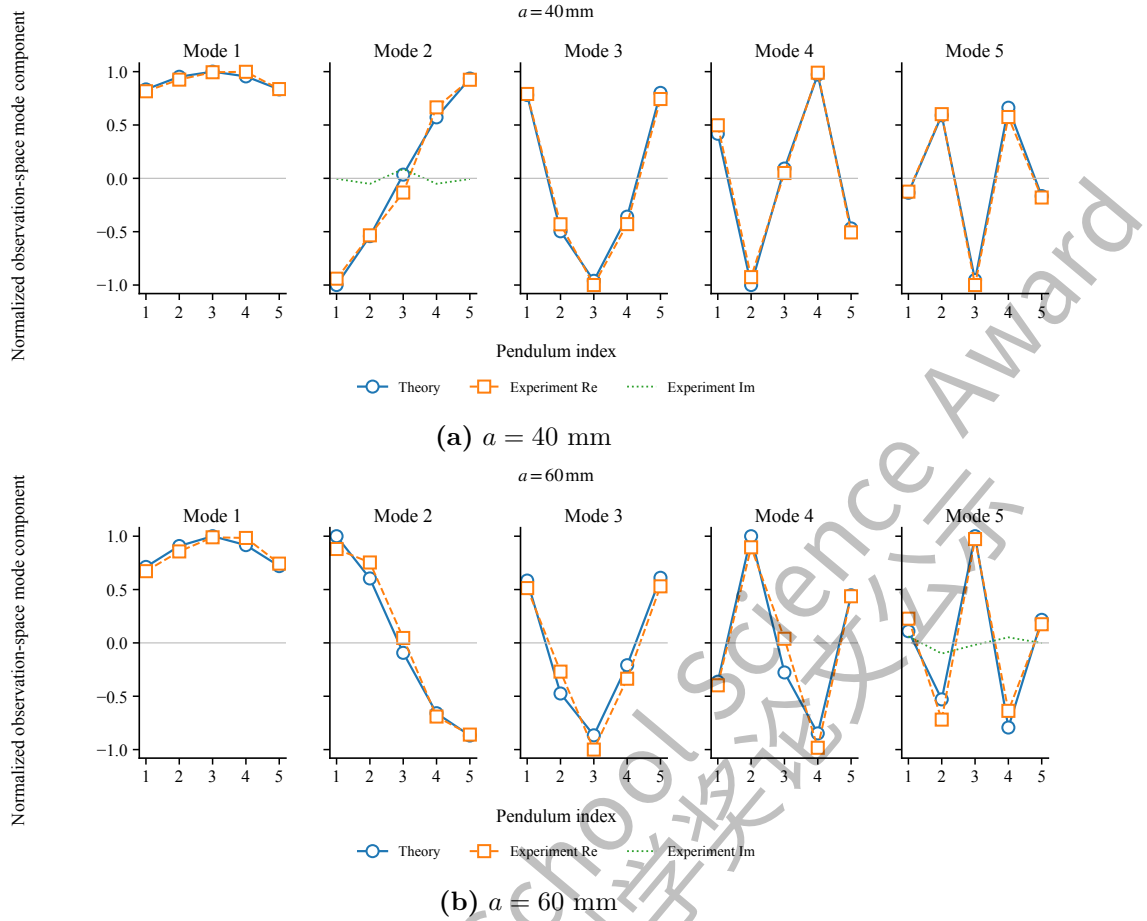


图 G.2: $a = 40$ 和 60 mm 时五阶实验复模态与有限圆柱理论观测空间振型的逐格点比较。

Site-by-site comparison of the five experimental complex modes and finite-cylinder theoretical observation-space mode shapes at (a) $a = 40 \text{ mm}$ and (b) $a = 60 \text{ mm}$.

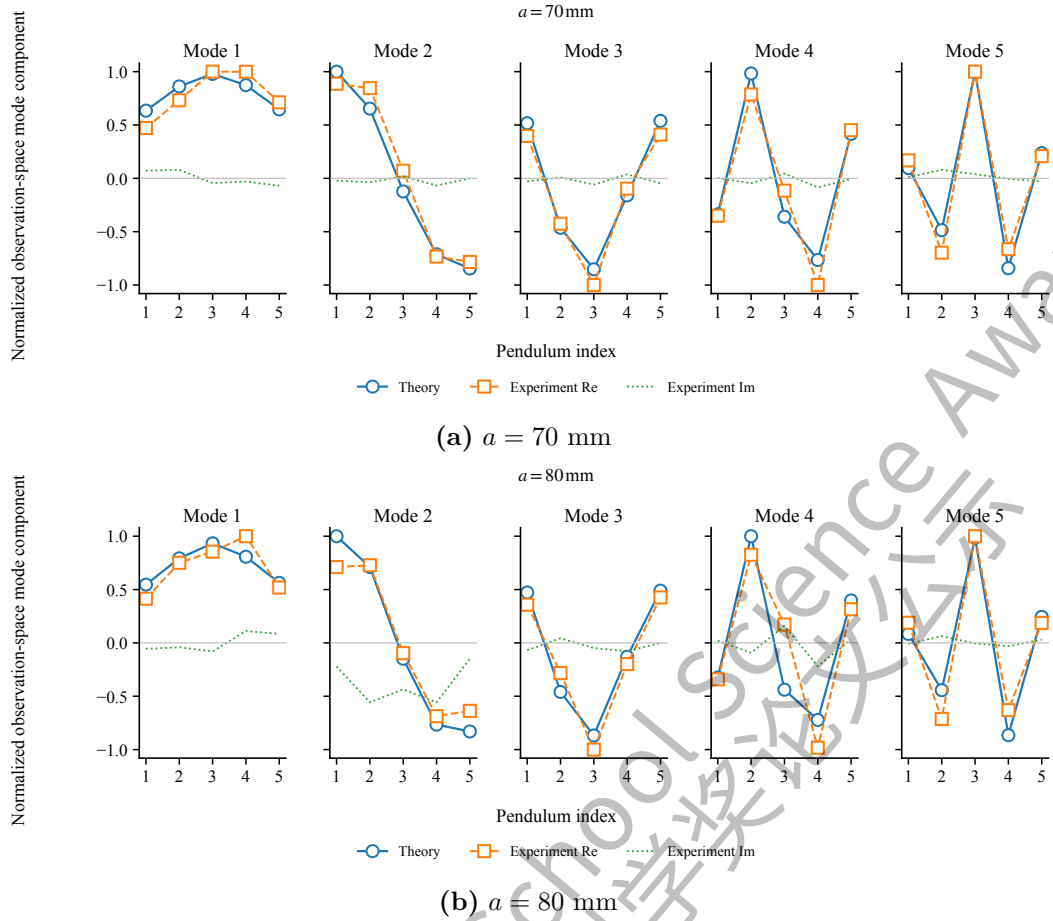


图 G.3: $a = 70$ 和 80 mm 时五阶实验复模态与有限圆柱理论观测空间振型的逐格点比较。

Site-by-site comparison of the five experimental complex modes and finite-cylinder theoretical observation-space mode shapes at (a) $a = 70 \text{ mm}$ and (b) $a = 80 \text{ mm}$.