参赛学生姓名：陈星云 欧阳霈 陈禹硕

中学：广州市第六中学（海珠校区）

省份：广东省

国家/地区：中华人民共和国

指导老师姓名：璩斌

指导老师单位：广州市第六中学（海珠校区）

论文题目：树映射多项式熵的上界估计

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

树映射多项式熵的上界估计

陈星云　欧阳霈　陈禹硕

摘要

多项式熵是一个刻画动力系统混沌程度的量化指标. 当动力系统的拓扑熵为零的时候, 多项式熵可用于描述该系统的复杂程度. 本文将区间分段单调映射多项式熵关于 Lap 数和总变差的两个上界进行推广, 得到了有限树映射的多项式熵的相关结论. 本文通过定义各单调片上的轨道长度, 给出有限树映射多项式熵 Lap 数上界的直接几何证明；利用最小子树的深度优先遍历方法与满射复合下总变差不减, 得到了有限树映射多项式熵满射情形下总变差的上界, 并且在文末构造多项式熵为零、同时达到两个上界以及两阶段延迟实现多项式熵为 2 的算例对结论加以说明.

关键词：有限树映射；多项式熵；Lap 数；总变差；深度优先遍历

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 **4**

2.1 有限树、顶点、边与线性度量 4

2.2 Bowen 距离、分离集与生成集 5

2.3 单调边剖分与树的 Lap 数 7

2.4 树上的总变差 8

2.5 Markov 剖分与转移矩阵 9

3 主要结果的证明与算例 **10**

3.1 迭代映射的有限单调边剖分 10

3.2 单调片上的轨道长度与生成估计 12

3.3 Lap 数上界 14

3.4 深度优先遍历与分离集估计 14

3.5 满射复合不降低总变差 17

3.6 总变差上界 18

3.7 算例一：多项式熵为零的分支轮换 19

3.8 算例二：Y 形树上两个上界同时取等 20

3.9 算例三：帐篷映射 21

3.10 算例四：非满射的三分支合流与总变差下降 22

3.11 算例五：异速分支轮换与指数幂复合 23

3.12 算例六：两阶段延迟产生二次轨道复杂度 23

4 总结与遗留问题 **26**

4.1 主要结论 26

4.2 可进一步研究的问题 26

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026正成桐中学科学奖论文公示

1 引言

拓扑熵是刻画动力系统轨道复杂度的基本不变量, 其详细定义可参见2.7. 它刻画在给定观测精度 ε 下, 长度为 n 的可区分轨道段的数量随 n 增长的指数速率. 但如果拓扑熵为零, 轨道的复杂性也未必有限, 即系统动力学应按较慢的增长方式加以考察. 多项式熵用于刻画零拓扑熵系统中轨道复杂度的多项式阶增长, 是研究零熵系统的重要不变量, Marco 对多项式熵及其在可积哈密顿系统中的应用进行了系统研究 [11]. 关于其性质与取值问题的系统研究, 可参见 [3, 14].

在区间 $[0,1]$ 上, Misiurewicz–Szlenk [13] 与 Milnor–Thurston [12] 的经典工作表明, 分段单调映射的动力学复杂度由其单调片数（Lap 数）控制; Gomes–Carneiro [8] 进一步在多项式尺度下建立了 Lap 数与总变差对多项式熵的上界. 树作为区间的自然推广, 其上映射的组合动力学已有系统研究 [1, 2]; 区间情形的系统论述见 [15]. 关于更一般的正则曲线, Kato [10] 研究了其上映射的拓扑熵与原像结构, Đorić–Katić 等研究了诱导映射与对称积上的多项式熵 [5, 7]; Đorić–Katić [6, Theorem 3.1] 对一般正则曲线给出了用原像连通分支数控制多项式熵的上界.

与区间不同, 树上不存在全局的线性序: 在 Y 形树的三条分支上各取一点, 无法将它们纳入统一的左右顺序, 因此区间上基于相邻点排序的论证不能直接推广, 见图 1. 另一方面, 树中任意两点之间存在唯一连接弧, 这一性质是本文进行长度估计的基础.

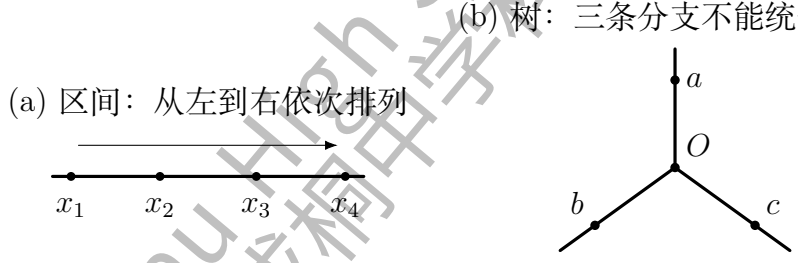


图 1: 区间与树的主要区别: 树有分岔点, 却仍有连接任意两点的唯一弧段.

本文建立有限树上分段严格单调映射多项式熵的两个上界. 设 T 为有限树, $f\colon T \to T$ 连续. 若 T 可剖分为有限条弧段, 使 f 在每段上均为到其像的同胚, 则称 f 为*分段严格单调*的（见定义 2.11）. 记 c_n^T 为 f^n 的单调边剖分的最小片数, 称为树上的 *Lap* 数. 本文首先证明

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log c_n^T}{\log n}. \tag{1.1}$$

其次, 以 $\mathrm{Var}_d(f^n)$ 记 f^n 关于树的线性度量 d 的总变差. 当 f 为满射时, 本文证明

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ \mathrm{Var}_d(f^n)}{\log n}, \tag{1.2}$$

其中 $\log^+ t = \log\max\{1,t\}$,$t \ge 0$. 若相应的复杂度指标至多以 n^q 的速度增长, 则上述两个不等式将多项式熵控制在 $q+1$ 以内.

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

两个上界的证明途径不同. 第一个证明在每条单调弧上将前 n 步的轨道总位移相加, 利用其可加性, 并以一维分点论证选取代表点, 从而构造生成集. 第二个证明面对的是整个树而非线性序区间, 故改为对分离点集生成的最小子树作深度优先遍历：每条边恰好往返一次, 于是分离轨道的条数可被各次迭代总变差之和控制；满射性进一步保证总变差在复合下单调不减, 从而得到式 (1.2). 需指出, Lap 数上界也可由 Đorić–Katić [6, Theorem 3.1] 关于原像连通分支数的一般上界推出：对分段严格单调的 f^n, 任一点的原像个数不超过 c_n^T. 本文给出不依赖该一般结论的直接几何证明, 并以总变差及其复合单调性为另一条论证主线.

本文结构如下. 第 2 节给出树的线性度量、Bowen 距离、单调边剖分、总变差与 Markov 剖分等预备知识；第 3 节证明两个主定理, 并给六个算例：分支轮换、平方映射、帐篷映射、非满射分支合流、异速分支轮换, 以及实现多项式熵取到 2 的分段线性延迟映射；第 4 节总结全文并提出若干后续问题.

2 预备知识

注 2.1 (记号约定)**.** 本文中 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 表示数列的上极限, 即 $\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geq N} a_n$, 用于处理增长速度有波动、普通极限未必存在的情形；log 表示自然对数, 含 $\log n$ 的极限均在 $n \geq 2$ 上考察；有限集合的基数记为 $\mathrm{card}(\cdot)$; $\mathrm{length}_d(e)$ 指边 e 在树度量 d 下的长度, 等于它的两个端点之间的距离.

2.1 有限树、顶点、边与线性度量

定义 2.2 (有限树)**.** 本文所谓有限树, 是由有限条闭线段沿端点相互连接而成的连通图, 且不含闭合回路. 允许线段弯曲为弧段, 这不影响各段的连接关系；恒假定 T 至少含一条边. 对 $x \in T$, 若 $T\setminus\{x\}$ 恰有 k 个连通分支, 则记 $\mathrm{val}_T(x) = k$. 其中 $\mathrm{val}_T(x) = 1$ 的点称为*端点*, $\mathrm{val}_T(x) \geq 3$ 的点称为*分岔点*. 令

$$V(T) = \{x \in T : \mathrm{val}_T(x) \neq 2\}.$$

去掉 $V(T)$ 中各点后, 每个连通分支的闭包称为一条*自然边*, 全体自然边记作 $E(T)$.

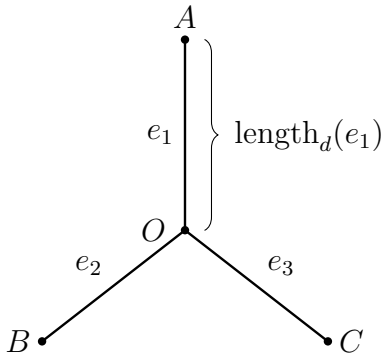
由于不含闭合回路, 任意两点 $x, y \in T$ 之间存在唯一一条连接弧, 记作 $[x, y]_T$. 该事实在后文的证明中反复使用.

定义 2.3 (线性度量)**.** 给每条自然边 e 规定正长度 ℓ_e, 并通过弧的参数化将其与度量区间 $[0, \ell_e]$ 等距对应. 将两点间唯一连接弧的长度定义为该两点的距离, 记为 $d(x, y)$. 这类与树的拓扑相容的路径度量称为*线性度量*. 若 $z \in [x, y]_T$, 则

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

树的总长度定义为 $L_d(T) = \sum_{e\in E(T)} \mathrm{length}_d(e)$.

2026 S.-T. Yau High School Science Award 应用于2026丘成桐中学科学奖论文公示



$$L_d(T) = \mathrm{length}_d(e_1) + \mathrm{length}_d(e_2) + \mathrm{length}_d(e_3)$$

图 2: Y 形树的自然边结构与总长度

2.2 Bowen 距离、分离集与生成集

设 (X, d) 是紧度量空间,$f\colon X \to X$ 连续. 对 $n \geq 1$, 定义第 n 步 Bowen 距离

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq k < n} d\big(f^k(x), f^k(y)\big).$$

与单步距离不同,d_n 度量的是前 n 次迭代中轨道分离的最大程度.

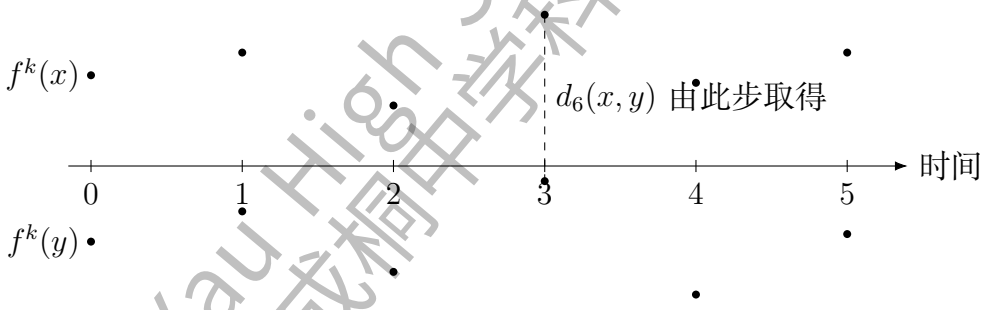


图 3: Bowen 距离记录前 n 步中最大的轨道分离

定义 2.4 (分离集与生成集)**.** 固定观察步数 $n \geq 1$ 与精度 $\varepsilon > 0$.

(i) 若有限集 $E \subset X$ 中任意不同的 x, y 都满足 $d_n(x, y) > \varepsilon$, 则称 E 为 (n, ε)-分离集; 其最大基数记为 $s(n, \varepsilon)$（紧性保证其有限且最大值存在）.

(ii) 若对每个 $x \in X$, 都存在 $y \in F$ 使 $d_n(x, y) \leq \varepsilon$, 则称 F 为 (n, ε)-生成集; 其最小基数记为 $r(n, \varepsilon)$.

注 2.5 (分离集与生成集的关系)**.** 分离集要求其中任意两条轨道在前 n 步内彼此分离; 生成集要求每个点的轨道都被某个代表点在前 n 步内逼近. 两类基数在固定的 n, ε 下一般不同, 但其增长阶相互控制, 见下面的引理.

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

引理 2.6. 对任意 $n \geq 1$ 与 $\varepsilon > 0$, 有

$$r(n,\varepsilon) \leq s(n,\varepsilon) \leq r\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

证明. 取基数最大的 (n,ε)-分离集 E. 若 E 不是生成集, 则存在 $x \in X$, 使对一切 $y \in E$ 有 $d_n(x,y) > \varepsilon$, 从而 $E \cup \{x\}$ 仍是 (n,ε)-分离集, 与 E 的极大性矛盾. 故 E 是生成集, 且

$$r(n,\varepsilon) \leq \mathrm{card}(E) \leq s(n,\varepsilon).$$

另一方面, 取基数最小的 $(n,\varepsilon/2)$-生成集 F, 则 $\mathrm{card}(F) = r(n,\varepsilon/2)$. 对每个 $x \in E$, 可选定 $y_x \in F$ 使 $d_n(x,y_x) \leq \varepsilon/2$. 若两个不同的点 $x_1, x_2 \in E$ 对应同一个 $y \in F$, 则

$$d_n(x_1,x_2) \leq d_n(x_1,y) + d_n(x_2,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

与 E 的分离性矛盾. 因此每个 $y \in F$ 至多对应一个 $x \in E$, 故

$$s(n,\varepsilon) \leq \mathrm{card}(F) = r\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

□

定义 2.7. 连续映射 f 的拓扑熵定义为

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log s(n,\varepsilon)}{n}.$$

连续映射 f 的多项式熵定义为

$$h_{\mathrm{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log s(n,\varepsilon)}{\log n}.$$

由引理 2.6, 对固定的 n 与 $\varepsilon > 0$ 有

$$r(n,\varepsilon) \leq s(n,\varepsilon) \leq r(n,\varepsilon/2).$$

先取对数、除以 $\log n$ 并令 $n \to \infty$ 取上极限, 再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由夹逼定理及精度参数的单调性可得

$$h_{\mathrm{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log r(n,\varepsilon)}{\log n}.$$

注意在固定的 n,ε 下,$s(n,\varepsilon)$ 与 $r(n,\varepsilon)$ 一般并不相等.

例 2.8. 若对充分小的 ε, 存在两个常数 C_1, C_2 有

$$C_1 \cdot n^3 \leq s(n,\varepsilon) \leq C_2 \cdot n^3,$$

则 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{\log s(n,\varepsilon)}{\log n} \longrightarrow 3,$$

因而 $h_{\mathrm{pol}}(f) = 3$. 若 $s(n,\varepsilon)$ 保持有界, 则多项式熵为 0.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

命题 2.9. 若 $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$, 则 $h_{\mathrm{pol}}(f) = +\infty$.

证明. 由拓扑熵的分离集刻画, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 与 $a > 0$, 使无穷多个 n 满足

$$s(n, \varepsilon_0) \geq e^{an}.$$

取满足上述不等式的子列 $n_j \to \infty$, 则

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log s(n, \varepsilon_0)}{\log n} \geq \lim_{j\to\infty} \frac{an_j}{\log n_j} = +\infty.$$

□

2.3 单调边剖分与树的 Lap 数

定义 2.10. 设 X, Y 是两条弧段, 若映射 $g : X \to Y$ 满足以下条件:

(i) g 是连续的

(ii) g 是双射的 (单射且满射)

(iii) g^{-1} 也是连续的

则称映射 g 是同胚.

定义 2.11 (边剖分、单调边剖分与 Lap 数). 设 $\mathcal{P} = \{J_1, \ldots, J_m\}$ 是有限个非退化闭弧段组成的集合, 满足: 每个 J_i 完整地含于某条自然边内; $T = \bigcup_i J_i$; 不同片的相对内部两两不交. 则称 $\mathcal{P}$ 为 T 的边剖分, 若对每个 $i, f|_{J_i} : J_i \to f(J_i)$ 是到一条非退化弧的同胚, 则称 $\mathcal{P}$ 为 f 的单调边剖分. 存在有限单调边剖分的映射称为分段严格单调的.

对 $n \geq 1$, 定义

$$c_n^T = \min\{card(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ 是} f^n \text{ 的单调边剖分}\},$$

称之为 f 的 n 次迭代在树上的 *Lap* 数. 这里始终采用要求单调片位于自然边中的最小片数约定. 命题 3.2 将证明该定义对任意 n 均有意义.

注 2.12. 例如, 函数 $x \mapsto x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的单调片数为 1, 而帐篷映射 $x \mapsto 1 - 2|x - 1/2|$ 在 $[0, 1]$ 上的单调片数为 2. 单调片不限定映射递增或递减的方向, 本质条件是单射. 像弧段可以跨过树的分岔点, 但每个定义域片必须完整地位于一条自然边内.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

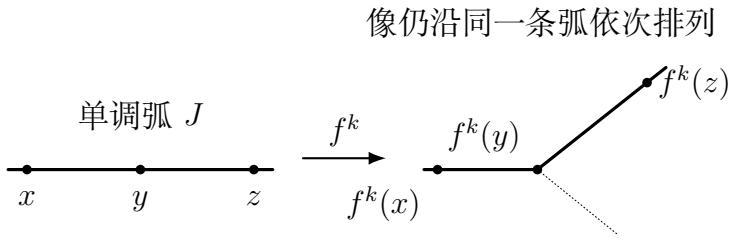


图 4: 单调片不折叠：若 y 位于 x, z 之间, 则 $f^k(y)$ 仍位于 $f^k(x), f^k(z)$ 之间. 点线表示树上可能存在的另一分支.

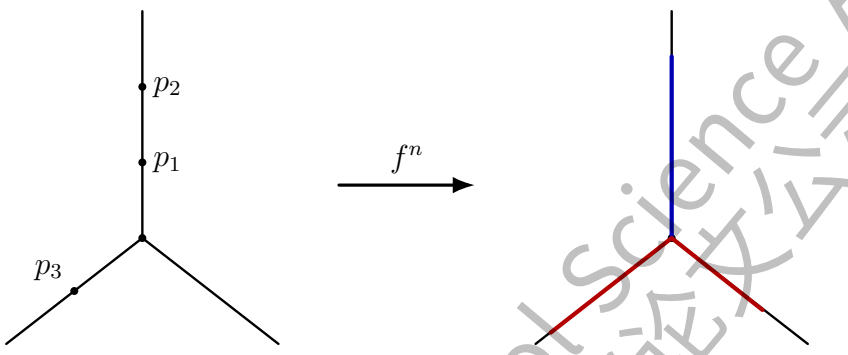


图 5: 单调片可以沿树弯曲, 但在单片内不能发生折叠（示意图）

2.4 树上的总变差

定义 2.13 (总变差). 在弧段 J 上选定从一端到另一端的方向. 对 J 上依次排列的有限点列 $t_0 <_J t_1 <_J \cdots <_J t_r$, 考察连续映射 $g : T \to T$ 作用下的折线路程

$$\sum_{i=1}^{r} d\big(g(t_{i-1}), g(t_i)\big).$$

对所有这类有限点列取上确界, 便定义了 g 在 J 上的总变差:

$$\mathrm{Var}_{J,d}(g) = \sup_{t_0<_J\cdots<_J t_r} \sum_{i=1}^{r} d\big(g(t_{i-1}), g(t_i)\big).$$

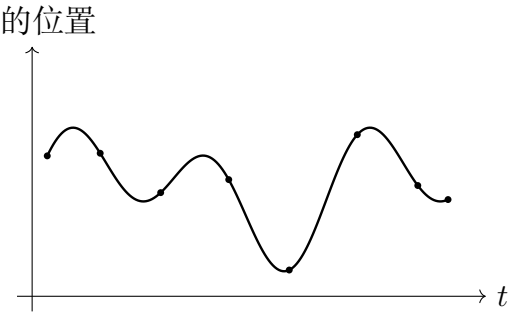
在整个树上的总变差定义为

$$\mathrm{Var}_d(g) = \sum_{e\in E(T)} \mathrm{Var}_{e,d}(g).$$

变差可取 $+\infty$. 若 $g|_J$ 为到其像弧的同胚, 则 $\mathrm{Var}_{J,d}(g) = \mathrm{length}_d(g(J))$, 因为像中有序点沿唯一弧排列. 因此, 对本文研究的分段严格单调映射及其迭代, 各次迭代的总变差均有限.

注 2.14 (总变差与端点距离的区别). 总变差记录包含折返的完整路程：即使 g 在弧段两端点的像重合,$\mathrm{Var}_{J,d}(g)$ 仍可能为正. 因此, 总变差比端点距离更适合刻画映射的振荡复杂程度.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026年成都市学科学术论文公示



总变差是所有上升与下降路程的总和的上确界

图 6: 一维总变差的直观图像

引理 2.15 (总变差的分段可加性)**.** *设弧段 J 被依次切成 $J_1, \dots, J_r$, 相邻小段只在公共端点相交, 则*

$$\mathrm{Var}_{J,d}(g) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Var}_{J_i,d}(g).$$

特别地, 若 $\mathcal{P}$ 是整棵树的一个边剖分, 则 $\mathrm{Var}_d(g) = \sum_{J\in\mathcal{P}} \mathrm{Var}_{J,d}(g)$.

证明. 任取 J 上一组有限分点, 并将各 J_i 的端点加入. 由三角不等式, 加入分点不会使距离和减少; 加入后的分点列被分成各 J_i 内部的分点列, 故原距离和不超过各段变差之和. 取上确界, 得"$\le$". 反之, 对任意 $\delta > 0$, 分别在 J_i 上选取距离和大于 $\mathrm{Var}_{J_i,d}(g) - \delta/r$ 的分点列, 并按顺序拼接, 得到 J 上距离和大于各段变差之和减 δ 的分点列. 令 $\delta \downarrow 0$, 得"$\ge$". 若某段变差为 $+\infty$, 可直接取任意大的距离和, 结论同样成立. □

引理 2.16 (弧段被覆盖时的估计)**.** *若闭子弧 $K_1, \dots, K_s$ 覆盖弧段 J, 则*

$$\mathrm{Var}_{J,d}(g) \le \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Var}_{K_i,d}(g).$$

证明. 将所有 K_i 的端点加入 J 的有限分点列, 得到更细的分点, 从而 J 被分成若干子弧 B_ℓ, 每条 B_ℓ 至少含于一条 K_i. 由引理 2.15, 所有 B_ℓ 上的变差之和等于 J 上的变差; 将各 B_ℓ 归入覆盖它的 K_i, 并利用变差在子弧上的单调性, 即得不等式. □

注 2.17. 两条引理表明: 弧段剖分时总变差可以分段相加; 弧段被有限覆盖时, 其总变差不超过诸覆盖弧段变差之和. 后文的证明将反复使用这两条性质.

2.5 Markov 剖分与转移矩阵

定义 2.18. 设 $\mathcal{Q} = \{I_1, \dots, I_m\}$ 是有限树的边剖分. 若

(i) $\mathcal{Q}$ 的顶点集（即各 I_i 的端点, 以及树自身的分岔点与端点）在 f 下的像仍属于该顶点集, 即不含于任何 I_i 的内部;

2026 丘成桐中学数学论文公示 仅用于 2026 丘成桐中学数学论文公示 Tsinghua High School Science Award

(ii) f 在每个 I_i 上是同胚, 且每个 $f(I_i)$ 都是若干个 I_j 的并;

则称 $\mathcal{Q}$ 为 f 的一个 *Markov* 剖分. 定义 $m \times m$ 转移矩阵

$$A = (a_{ij})_{m\times m}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & I_j \subset f(I_i), \\ 0, & I_j \not\subset f(I_i). \end{cases}$$

注 2.19. 转移矩阵记录各段像的覆盖关系: $a_{ij} = 1$ 表示 $I_j \subset f(I_i)$,$a_{ij} = 0$ 表示不包含. 一般而言, 不能仅凭任意转移矩阵断言其谱半径的对数等于拓扑熵, 这需要相应的 Markov 映射定理及其条件成立. 本文只在明确的算例中使用转移矩阵.

例 2.20 (三条分支的周期轮换)**.** 设 $T = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ 是三条等长边构成的 Y 形树. 令 f 保持每点到中心的距离, 并循环置换三条边:

$$e_1 \mapsto e_2, \qquad e_2 \mapsto e_3, \qquad e_3 \mapsto e_1.$$

其转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 e_1, e_2, e_3 的像分别为 e_2, e_3, e_1.

由映射的定义直接可见 $f^3 = \mathrm{id}_T$: 中心点固定, 其余各点的最小周期均为 3, 不产生新的轨道分支; 矩阵等式 $P^3 = I$ 正是这一事实的组合记录.

第 3 节将直接计算该系统的 c_n^T、总变差与多项式熵.

3 主要结果的证明与算例

3.1 迭代映射的有限单调边剖分

引理 3.1. *若 f 有一个包含 m 个单调片的边剖分, 则每个点 $y \in T$ 至多有 m 个原像.*

证明. 在每个单调片 J 上,$f|_J : J \to f(J)$ 是双射, 故 y 在 J 中的原像至多一点; 又各片两两至多在端点处相交, 将 m 个片上的原像个数相加, 即得结论. □

命题 3.2 (迭代后仍可切成有限个单调片)**.** *若 $f : T \to T$ 连续且分段严格单调, 则对每个 $n \geq 1$, 映射 f^n 存在有限单调边剖分, 因而 $c_n^T < \infty$.*

证明. 由于 $f : T \to T$ 分段严格单调, 取 f 的一组有限单调边剖分 $\mathcal{P} = \{J_1, ..., J_m\}$, 记所有剖分片端点组成的集合为 C_0. 则

$$|C_0| < \infty.$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

由引理 3.1, 记剖分片数量为 m 则

$$|f^{-1}(y)| \leq m.$$

设有限集 S, 那么 S 的全体原像就是所有 $y \in S$ 的原像并在一起, 即

$$f^{-1}(S) = \bigcup_{y \in S} f^{-1}(y).$$

每个 y 最多贡献 m 个原像, 所以

$$|f^{-1}(S)| \leq m|S|$$

是有限的. 所以对任意有限集取的原像数量是有限的.

令

$$C_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(C_0),$$

即所有在接下来 n 步迭代之内, 可能会映射到原始切点 C_0 的点的全体. 因为每一步取原像都保持有限, 所以每一步取的原像数量加起来也是有限的, 因此

$$|C_n| < \infty.$$

沿着 C_n 里所有点, 把树的每条自然边切开. 切开后的弧段数量有限. 把得到的极小弧段组成的剖分记为 $\mathcal{P}_n$. 对于每一段 $J \in \mathcal{P}_n$, 记 J° 为 J 去掉两个端点后所得的开弧, 有 $J^\circ \cap C_n = \varnothing$.

下面归纳证明 $f^k|_J$ 对 $0 \leq k \leq n$ 均为到其像的同胚.$k = 0$ 显然; $k = 1$ 由 J 包含在原单调片中可知. 假设 $1 \leq k < n$ 且 $f^k|_J$ 是同胚.

若存在某个 k, 使得

$$f^k(x) \in C_0.$$

两边同时取 f^{-k}, 得

$$x \in f^{-k}(C_0).$$

而根据 C_n 的定义,

$$f^{-k}(C_0) \subset C_n.$$

所以

$$x \in C_n.$$

但 $x \in J^\circ$, 而 $J^\circ \cap C_n = \varnothing$, 矛盾. 因此

$$\forall 0 \leq k \leq n-1,\ \forall x \in J^\circ,\ f^k(x) \notin C_0.$$

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

由于 C_0 含有原剖分的全部端点（特别包含树的所有分岔点），整条像弧 $f^k(J)$ 必须位于 $\mathcal{P}$ 的某个单调片内. 于是 f 在 $f^k(J)$ 上是同胚, 从而 $f^{k+1}|_J$ 也是同胚. 归纳完成, 因此 $\mathcal{P}_n$ 是 f^n 的有限单调边剖分. 因此

$$c_n^T \le |\mathcal{P}_n| < \infty.$$

□

注 3.3. 证明思路与一元函数迭代下单调片增长的经典论证一致: 将折叠点及其前 $n-1$ 步内的原像一并设为剖分点, 从而保证在观察时间内每一小片保持单射. 证明中使用“紧弧段上的连续单射是到其像的同胚” 这一标准事实, 其证明属于初等拓扑, 不依赖本文的熵估计.

3.2 单调片上的轨道长度与生成估计

引理 3.4 (末次迭代的单射性蕴含此前各次的单射性)**.** *若 $f^n|_J : J \to f^n(J)$ 是单射, 则对每个 $0 \le k \le n$,$f^k|_J$ 也是到其像的同胚.*

证明. 若有不同的 $x, y \in J$ 满足 $f^k(x) = f^k(y)$, 再作用 f^{n-k} 后便有 $f^n(x) = f^n(y)$, 与假设矛盾. 因此 $f^k|_J$ 单射; 又它连续且 J 是紧弧段, 故它是到其像的同胚. □

若 $f^n|_J$ 是同胚, 对 $x, y \in J$ 定义

$$\rho_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} d\big(f^k(x), f^k(y)\big).$$

显然 $d_n(x, y) \le \rho_n(x, y)$.

引理 3.5 (ρ_n 的可加性)**.** *若 $f^n|_J$ 是同胚, 且 $x <_J y <_J z$, 则*

$$\rho_n(x, z) = \rho_n(x, y) + \rho_n(y, z).$$

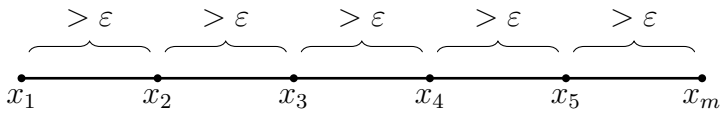
证明. 由引理 3.4, 每个 $f^k|_J$ 都是同胚. 因此原来位于 x, z 之间的点 y, 在第 k 步仍位于树上唯一弧 $[f^k(x), f^k(z)]_T$ 上. 沿树的距离可加, 于是

$$d(f^k(x), f^k(z)) = d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^k(z)).$$

将 $k = 0, \dots, n-1$ 的等式相加即得结论. □

注 3.6. 此处引入” 各步距离之和” ρ_n 而非仅用” 最大距离” d_n 的原因在于可加性: 由引理 3.5,ρ_n 沿弧段可加, 从而可以对整条弧上相互分离的点数进行估计, 见下面的引理.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示



取一个极大的 ρ_n-ε-分离集

图 7: 用极大 ρ_n-ε-分离集构造生成集

引理 3.7 (单调弧上生成集的基数估计)**.** *若 $f^n|_J$ 是到其像的同胚, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 弧段 J 存在一个 (n,ε)-生成集, 其点数不超过*

$$1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}.$$

证明. 取 J 的一个端点 a, 令 $\phi(x) = \rho_n(a,x)$, 并设 b 为另一端点, 由引理 3.5,ϕ 沿 J 连续且严格递增, 任意两点的 ρ_n 距离等于其 ϕ 值之差, 故 J 在 ρ_n 距离下等距于长度为 $L = \phi(b) = \rho_n(a,b)$ 的区间.

由于每条 $f^k(J)$ 是树上的弧段, 长度不超过树的总长度 $L_d(T)$, 故

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} d(f^k(a), f^k(b)) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{length}_d(f^k(J)) \le nL_d(T).$$

在 J 内取一个关于 ρ_n 的极大 ε-分离集 $F = \{x_1, \dots, x_m\}$, 各点按弧上的先后排列. 当 $m = 1$ 时, 所需基数估计显然; 以下设 $m \ge 2$. 相邻两点的 ρ_n 距离均大于 ε, 于是

$$(m-1)\varepsilon < \sum_{i=1}^{m-1} \rho_n(x_i, x_{i+1}) = \rho_n(x_1, x_m) \le L \le nL_d(T).$$

因此 $m < 1 + nL_d(T)/\varepsilon$.

由 F 的极大性, 对任意 $x \in J$: 若 $x \in F$: 取 $p = x$,$d_n(x,p) = 0 \le \varepsilon$, 成立. 若 $x \notin F$: 由 F 的极大性, 把 x 塞进 F 会破坏分离性. 所以必存在某 $x_i \in F$ 使

$$\rho_n(x, x_i) \le \varepsilon.$$

因为 Bowen 距离是各步距离的最大值, 而 ρ_n 是各步距离的总和, 所以 $d_n \le \rho_n$, 所以有

$$d_n(x, x_i) \le \rho_n(x, x_i) \le \varepsilon.$$

可知,F 也是所需的 (n,ε)-生成集. □

注 3.8. 该引理的实质是一维分点估计: 长为 L 的区间上间距大于 ε 的点至多 $1 + L/\varepsilon$ 个, 而此处 $L \le nL_d(T)$. 这是全部复杂度估计的起点.

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

3.3 Lap 数上界

注 3.9. 此上界的证明思路如下：将 T 剖分为 c_n^T 个 n 步单调片, 每片在 Bowen 距离下至多需要 $O(n)$ 个代表点即可覆盖, 故整个树至多需要 $c_n^T \cdot O(n)$ 个点. 取对数后, 线性因子 n 恰好使上界增加常数 1.

定理 3.10. *若 $f\colon T \to T$ 连续且分段严格单调, 则*

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log c_n^T}{\log n}.$$

证明. 取 f^n 的片数为 c_n^T 的单调边剖分

$$\mathcal{P}_n = \{J_1, \dots, J_{c_n^T}\}.$$

由引理 3.7, 每个 J_i 有一个点数不超过

$$1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}$$

的 (n,ε)-生成集. 将这些集合合并, 得到 T 的 (n,ε)-生成集, 因此

$$r(n,\varepsilon) \le c_n^T \left(1 + \frac{nL_d(T)}{\varepsilon}\right).$$

于是, 对固定的 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{\log r(n,\varepsilon)}{\log n} &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log c_n^T}{\log n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(1 + nL_d(T)/\varepsilon)}{\log n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log c_n^T}{\log n} + 1,\end{aligned}$$

其中最后一步用到 $\log(1 + nL_d(T)/\varepsilon)/\log n \to 1$.

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由定义 2.7 的生成集等价形式, 便得到所需上界. □

推论 3.11. *若存在 $q \ge 0$ 与 $C > 0$, 使对所有充分大的 n 有*

$$c_n^T \le C n^q,$$

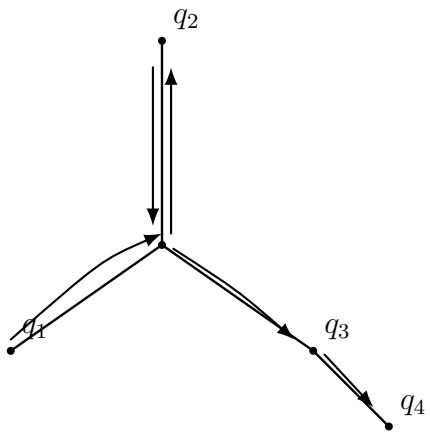
则

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le q + 1.$$

3.4 深度优先遍历与分离集估计

设 $E \subset T$ 是有限集, 记 $[E]$ 为包含 E 的最小子树. 将 $[E]$ 的每条边复制两次, 可得一条经过其中每条边恰两次的闭游走；等价地, 从某顶点出发对 $[E]$ 作深度优先遍历：沿每条边进入尚未访问的分支, 遍历完毕后原路返回.

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示



遍历每条边至多两次, 并按首次到达时间排列 E 中的点

图 8: 最小子树上的深度优先遍历

引理 3.12 (深度优先遍历序下的变差估计)**.** 设 $E=\{q_1,\dots,q_M\}$ 是有限树 T 上的有限点集, 则总能重新排列这些点, 使得对每个连续映射 $g\colon T\to T$, 都有

$$\sum_{i=1}^{M-1} d\big(g(q_i),g(q_{i+1})\big)\le 2\,\mathrm{Var}_d(g). \tag{3.1}$$

证明. 记 $H=[E]$. 若 $M=1$, 左端为空和, 结论立即成立. 设 $M\ge 2$, 先将 H 的边在 E 中各点处细分. 因 H 无圈, 可从某个顶点出发作深度优先遍历: 沿每条边进入尚未访问的分支, 并在该分支遍历完毕后原路返回. 于是每条细分后的边被经过往返各一次, 得到一条闭合折线路径 P, 它在每条边上恰好往返一次, 因此总长度恰为 $2L_d(H)$, 即树边长的两倍.

把 E 中的点按沿 P 首次到达的先后顺序排成 $q_1,\dots,q_M$, 首次到达时刻依次为 $t_1<\cdots<t_M$. 路径中从 q_i 到 q_{i+1} 的一段, 其在 g 作用下的路程不小于两端点像的距离, 故由三角不等式与总变差的定义,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{M-1} d\big(g(q_i),g(q_{i+1})\big)=\sum_{i=1}^{M-1} d\big(g(P(t_i)),g(P(t_{i+1}))\big)&\le \mathrm{Var}_{[t_1,t_M]}(g\circ P)\\ &\le \mathrm{Var}_{[0,2L_d(H)]}(g\circ P).\end{aligned}$$

由于每条细分后的边恰被经过两次, 后一项等于 $2\,\mathrm{Var}_{H,d}(g)$, 其中对任意有限子树 $H\subset T$,$\mathrm{Var}_{H,d}(g)$ 表示在 H 的自然边上分别求变差后相加; 遍历路径的每次经过均为该边的单调参数化, 故可使用引理 2.15 及 3.17; 因 $H\subset T$, 有 $\mathrm{Var}_{H,d}(g)\le\mathrm{Var}_d(g)$. 合并即得式 (3.1). □

注 3.13 (系数 2 的来源)**.** 区间情形只需沿自然序遍历一次; 树上由于存在分岔, 深度优先遍历使每条边往返各一次, 因此估计中出现系数 2. 该估计直接控制整条游走的路程, 无需另行估计每个分岔点被覆盖的次数.

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

引理 3.14 (分离集基数与总变差)**.** 设 $f : T \to T$ 连续, 且前 n 次迭代的总变差有限, 则对每个 $\varepsilon > 0$ 有

$$s(n, \varepsilon) \le 1 + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}_d(f^k). \tag{3.2}$$

证明. 取一个有 M 个点的 (n, ε)-分离集 E. 当 $M = 1$ 时结论显然; 以下设 $M \ge 2$. 将其按引理 3.12 排成 $q_1, \dots, q_M$. 由分离性, 对每个 $i < M$, 存在 $k_i \in \{0, \dots, n-1\}$, 使

$$d\big(f^{k_i}(q_i), f^{k_i}(q_{i+1})\big) > \varepsilon.$$

先将各特定时刻的距离放大为所有时刻的距离总和, 再对每个 $g = f^k$ 使用式 (3.1), 得

$$\begin{aligned}(M-1)\varepsilon &< \sum_{i=1}^{M-1} d\big(f^{k_i}(q_i), f^{k_i}(q_{i+1})\big) \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{M-1} d\big(f^{k}(q_i), f^{k}(q_{i+1})\big) \\ &\le 2 \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}_d(f^k).\end{aligned}$$

整理并对分离集取最大可能的 M, 便得式 (3.2). □

推论 3.15 (累积变差上界)**.** 设 $f : T \to T$ 连续, 且对每个 $k \ge 0$,$\mathrm{Var}_d(f^k)$ 均有限. 则

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+\big(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}_d(f^k)\big)}{\log n}.$$

该结论不要求 f 满射, 也不要求分段严格单调.

证明. 记

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}_d(f^k), n \ge 1.$$

由 $f^0 = \mathrm{id}_T$ 及总变差的定义, 对于 $n \ge 1$, 记

$$S_n \ge S_1 = L_d(T) =: c > 0,$$

由引理 3.14, 对每个 $\varepsilon > 0$ 与 $n \ge 1$,

$$s(n, \varepsilon) \le 1 + \frac{2}{\varepsilon} S_n \le \max\Big\{1, \frac{2}{\varepsilon}\Big\} (1 + S_n).$$

固定 $\varepsilon > 0$. 对其取对数、除以 $\log n$、取上极限得

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(1 + S_n)}{\log n}.$$

对一切 $n \ge 1$ 有

$$0 \le \log(1 + S_n) - \log S_n \le \log\Big(1 + \frac{1}{c}\Big) < +\infty,$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

即两个对数之差一致有界. 于是由上极限的次可加性及 $\log\left(1+\frac{1}{c}\right)\log n \to 0$, 得

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log(1+S_n)}{\log n} &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{\log S_n}{\log n} + \limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\log n}\\ &= \limsup_{n\to\infty}\frac{\log S_n}{\log n},\end{aligned}$$

而反向不等式由 $\log S_n \le \log(1+S_n)$ 直接得到. 故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log(1+S_n)}{\log n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{\log S_n}{\log n}.$$

取 $\log^+$ 可避免单独讨论 S_n 很小时的对数符号问题 □

注 3.16. 该估计的适用范围比两个主定理更广：它只需 f 连续且各次迭代的总变差有限, 既不要求 f 满射, 也不依赖单调剖分. 满射性在下一小节中用于将各次迭代的变差之和归结为单次迭代的变差.

3.5 满射复合不降低总变差

引理 3.17 (重参数化不改变变差)**.** *设 $u\colon J\to K$ 是两条弧段之间的同胚,$h\colon K\to T$ 连续, 则*

$$\mathrm{Var}_{J,d}(h\circ u) = \mathrm{Var}_{K,d}(h).$$

证明. 同胚 u 将 J 上依次排列的有限分点列一一对应地映为 K 上的分点列（方向可能保持或反转）, 而总变差与分点列的方向选取无关；对两侧分别取上确界, 即得等式. □

引理 3.18 (满射情形下复合一次后变差不减小)**.** *若 $f:T\to T$ 连续、满射且分段严格单调, 则对任意连续 $h:T\to T$, 都有*

$$\mathrm{Var}_d(h\circ f) \ge \mathrm{Var}_d(h).$$

证明. 取 f 的单调边剖分 $\mathcal{P}=\{J_1,\dots,J_m\}$. 由于 f 满射, 所有弧 $f(J_i)$ 的并恰好覆盖 T. 固定一条自然边 e, 并令 $I_{i,e}=f(J_i)\cap e$. 这类交集非空时或为一点, 或为闭子弧. 忽略单点交集后, 其余非退化闭子弧仍覆盖 e：否则它们的有限并作为闭集, 会在 e 上留下非退化开子弧, 而该开子弧不可能被有限多个单点覆盖. 由引理 2.16,

$$\mathrm{Var}_{e,d}(h) \le \sum_{i:\, I_{i,e}\text{非退化}} \mathrm{Var}_{I_{i,e},d}(h).$$

在 J_i 上 f 是同胚, 故对应的原像 $D_{i,e}=(f|_{J_i})^{-1}(I_{i,e})$ 也是闭子弧, 且由重参数化不变性（引理 3.17）：

$$\mathrm{Var}_{I_{i,e},d}(h) = \mathrm{Var}_{D_{i,e},d}(h\circ f).$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

对所有自然边 e 求和. 对固定的 i, 这些 $D_{i,e}$ 的相对内部两两不交：因为树的不同自然边只有端点可能相交, 而 $f|_{J_i}$ 是弧同胚. 故利用总变差的分段可加性, 它们的变差之和不超过 $\mathrm{Var}_{J_i,d}(h\circ f)$. 再将各 J_i 上的变差相加, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_d(h) &= \sum_{e}\mathrm{Var}_{e,d}(h)\\ &\le \sum_{e}\sum_{i:\, I_{i,e}\text{非退化}}\mathrm{Var}_{D_{i,e},d}(h\circ f)\\ &\le \sum_{i}\mathrm{Var}_{J_i,d}(h\circ f)=\mathrm{Var}_d(h\circ f).\end{aligned}$$

□

注 3.19. 满射性的作用在于：它保证诸像弧 $f(J_i)$ 覆盖整个目标树 T, 从而 T 上任一段弧的变差都能由定义域相应片上的变差控制；若 f 非满射, 该覆盖论证不成立.

推论 3.20. *在引理 3.18 的条件下,*

$$\mathrm{Var}_d(f^0)\le \mathrm{Var}_d(f)\le \mathrm{Var}_d(f^2)\le\cdots.$$

证明. 在引理 3.18 中依次取 $h=\mathrm{id}_T, f, f^2,\dots$, 即得结论. □

3.6 总变差上界

注 3.21. 此上界的证明思路如下：由引理 3.14, 分离集的基数被前 n 次迭代总变差之和控制；由推论 3.20, 满射性使总变差单调不减, 故

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Var}_d(f^k)\le n\,\mathrm{Var}_d(f^n).$$

线性因子 n 同样在多项式熵上界中贡献常数 1.

定理 3.22. *若 $f\colon T\to T$ 连续、满射且分段严格单调, 则*

$$h_{\mathrm{pol}}(f)\le 1+\limsup_{n\to\infty}\frac{\log^{+}\mathrm{Var}_d(f^n)}{\log n}.$$

证明. 由引理 3.14 与推论 3.20,

$$s(n,\varepsilon)\le 1+\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Var}_d(f^k)\le 1+\frac{2n}{\varepsilon}\,\mathrm{Var}_d(f^n).$$

对 $n\ge 1$, 有

$$1+\frac{2n}{\varepsilon}\,\mathrm{Var}_d(f^n)\le\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)n\max\{1,\mathrm{Var}_d(f^n)\}.$$

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

记 $C_\varepsilon = 1 + 2/\varepsilon$（与 n 无关），则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{\log s(n,\varepsilon)}{\log n} &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(C_\varepsilon n \max\{1, \mathrm{Var}_d(f^n)\}\right)}{\log n} \\ &= 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \max\{1, \mathrm{Var}_d(f^n)\}}{\log n} \\ &= 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ \mathrm{Var}_d(f^n)}{\log n}.\end{aligned}$$

由定义 2.7, 令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即得结论. □

推论 3.23. *若存在 $q \ge 0$ 与 $C > 0$, 使*

$$\mathrm{Var}_d(f^n) \le C n^q$$

对所有充分大的 n 成立, 则

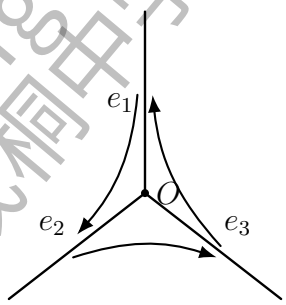
$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le q + 1.$$

3.7 算例一：多项式熵为零的分支轮换

令 $T = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ 为三条长度均为 1 的边构成的 Y 形树, 中心为 O. 将每条边以 $t \in [0,1]$ 来定义,$t = 0$ 对应 O. 定义

$$f(t, e_1) = (t, e_2), \qquad f(t, e_2) = (t, e_3), \qquad f(t, e_3) = (t, e_1).$$

于是 f^3 是恒等映射.



$$e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_1$$

图 9: 三条分支的周期轮换

自然边剖分本身就是每个 f^n 的单调边剖分, 且由于本文要求每个单调片完整地位于一条自然边内, 经过中心 O 的两条边不能合并为一条边, 因此

$$c_n^T = 3, \qquad n \ge 1.$$

又 f^n 将每条单位边等距地映到一条单位边, 每条边上的像路程均为 1, 故 $\mathrm{Var}_d(f^n) = 3$, 且

$$\frac{\log^+ \mathrm{Var}_d(f^n)}{\log n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

定理 3.10 与定理 3.22 此时均只给出 $h_{\mathrm{pol}}(f)\le 1$；但利用 $f^3=\mathrm{id}_T$ 可得实际值为 0：对所有 $n\ge 3$, 有 $d_n=d_3$, 于是 $s(n,\varepsilon)=s(3,\varepsilon)$, 故对固定的 $\varepsilon>0$, 分离数关于 n 有界, 从而 $h_{\mathrm{pol}}(f)=0$.

这个例子说明：本文的上界不一定取等号；它们的作用是对复杂度给出可靠的控制, 而非在所有情形下给出精确公式.

3.8 算例二：Y 形树上两个上界同时取等

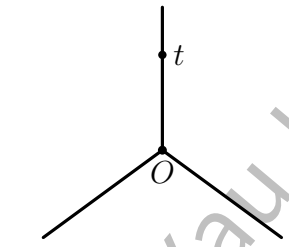
上一算例表明上界未必精确. 本例构造一个含分岔点的树映射, 使两个上界均取等号, 且只需初等函数 $t\mapsto t^2$.

设 T 是三条长度均为 1 的边构成的 Y 形树, 每条边记为 e_i, 并以到中心的距离 $t\in[0,1]$ 为坐标. 定义

$$f(t,e_i)=(t^2,e_i),\qquad i=1,2,3.$$

由于三条边在中心处的坐标均为 $t=0$, 且三个公式在中心处给出相同的像, 故 f 是整个 T 上的连续映射. 每条边都被严格递增地映到自身, 故 f 既满射又分段严格单调, 且

$$f^n(t,e_i)=(t^{2^n},e_i).$$



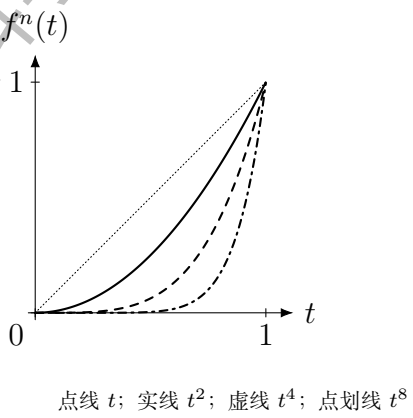


图 10: Y 形树上 $f^n(t,e_i)=(t^{2^n},e_i)$ 的直观形状：每条边都不折叠, 迭代后图像逐渐贴近横轴, 但仍覆盖整条边.

每次迭代在每条边上仅有一个单调片, 故 $c_n^T=3$；每条边上 f^n 的像路程均为 1, 故 $\mathrm{Var}_d(f^n)=3$. 于是两个主定理均给出 $h_{\mathrm{pol}}(f)\le 1$.

下文不引用其他定理, 直接证明反向不等式. 在第一条边上固定 $a=1/2$, 选取 n 个点

$$x_j=a^{2^{-j}},\qquad j=0,1,\dots,n-1.$$

当 $i<j$ 时, 考察第 i 步, 有

$$f^i(x_i)=a,\qquad f^i(x_j)=a^{2^{i-j}}\ge\sqrt{a},$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

其中用到 $0<a<1$ 时幂指数越小、幂值越大的初等性质. 因此

$$d_n(x_i,x_j)\geq \sqrt{a}-a>0.$$

取任意 $0<\varepsilon<\sqrt{a}-a$, 则这 n 个点两两 (n,ε)-分离, 即 $s(n,\varepsilon)\geq n$. 由定义 2.7,

$$h_{\mathrm{pol}}(f)\geq \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log n}=1.$$

因此

$$h_{\mathrm{pol}}(f)=1,\qquad c_n^T=3,\qquad \mathrm{Var}_d(f^n)=3.$$

这表明两个上界均可取等号, 且取等的例子确实存在于含分岔点的树上.

3.9 算例三：帐篷映射

设 $T=[0,1]$, 自然边仅有一条 $e=[0,1]$. 定义帐篷映射

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq \frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1.\end{cases}$$

显然 f 连续、满射、分段严格单调. 取剖分

$$I_1=\left[0,\frac{1}{2}\right],\qquad I_2=\left[\frac{1}{2},1\right].$$

顶点像为

$$f(0)=0,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\qquad f(1)=0.$$

在每个 I_i 上 f 是线性同胚, 且

$$f(I_1)=[0,1]=I_1\cup I_2,\qquad f(I_2)=[0,1]=I_1\cup I_2.$$

因此 $\{I_1,I_2\}$ 是 f 的一个 Markov 剖分, 转移矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

特征多项式

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-1=\lambda(\lambda-2),$$

故谱半径 $\rho(A)=2$. 由分段单调区间映射的公式 [13], 拓扑熵为

$$h_{\mathrm{top}}(f)=\log 2>0.$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

由于每个单调片的像都覆盖整个 $[0,1]$, 每迭代一次, 每个单调片在下一步都被一分为二, 片数翻倍, 故

$$c_n^T = 2^n.$$

又 f^n 有 2^n 个单调片, 每个单调片将长度为 2^{-n} 的子区间映满 $[0,1]$, 各贡献总变差 1, 故

$$\mathrm{Var}_d(f^n) = 2^n.$$

代入定理 3.10 与定理 3.22：

$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log c_n^T}{\log n} = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(2^n)}{\log n} = +\infty,$$
$$h_{\mathrm{pol}}(f) \le 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log^+ \mathrm{Var}_d(f^n)}{\log n} = +\infty.$$

又由命题 2.9,$h_{\mathrm{top}}(f) = \log \rho(A) = \log 2 > 0$, 故

$$h_{\mathrm{pol}}(f) = +\infty.$$

该算例呈现了具有指数增长的 Markov 结构：两个上界此时同时发散为 $+\infty$, 与多项式熵的实际值相符.

3.10 算例四：非满射的三分支合流与总变差下降

这个例子说明第二个主定理不能在原有证明中直接删除满射性, 也展示累积变差上界的优势. 令 T 为三条长度为 1 的分支 e_1, e_2, e_3 组成的 Y 形树,$t = 0$ 为共同中心, 定义

$$f(t, e_1) = (t/2, e_1), \qquad f(t, e_2) = (3t/4, e_1), \qquad f(t, e_3) = (t/3, e_1).$$

三条分支上的公式在中心一致, 故 f 连续；其在每条分支上均严格单调, 但不是满射. 记 $\lambda_1 = 1/2$、$\lambda_2 = 3/4$、$\lambda_3 = 1/3$. 对每个 $n \ge 1$, 有

$$f^n(t, e_i) = \big(2^{-(n-1)}\lambda_i t, e_1\big), \qquad c_n^T = 3, \qquad \mathrm{Var}_d(f^n) = \frac{19}{12}\, 2^{-(n-1)}.$$

其中 $c_n^T = 3$ 是因为每条自然边必须至少贡献一个单调片；总变差公式则由三条边的像长度直接求得. 特别地,$\mathrm{Var}_d(f^0) = 3 > 19/12 = \mathrm{Var}_d(f)$, 故满射复合引理的单调性在这里确实失效.

当 $n \ge 2$ 时, 所有 $k \ge 1$ 的像均位于 e_1, 且 f^k 在这些像上的距离随着 k 增加而缩小, 所以

$$d_n(x, y) = \max\{d(x, y), d(f(x), f(y))\} = d_2(x, y), \qquad n \ge 2.$$

因此 $h_{\mathrm{pol}}(f) = 0$. 而累积变差满足

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}_d(f^k) \le 3 + \frac{19}{12} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} = \frac{37}{6},$$

由推论 3.15 也可直接得到 $h_{\mathrm{pol}}(f) = 0$, 且这一估计比 Lap 数上界 $h_{\mathrm{pol}}(f) \le 1$ 更精确.

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

3.11 算例五：异速分支轮换与指数幂复合

令 T 仍为等长 Y 形树, 定义

$$f(t,e_1)=(t^2,e_2),\qquad f(t,e_2)=(t^3,e_1),\qquad f(t,e_3)=(t,e_3).$$

映射连续、满射且在每条自然边上都是同胚. 但与单纯的周期轮换不同, 前两条分支上的径向坐标在每两步后发生六次幂变化：

$$f^{2m}(t,e_i)=(t^{6^m},e_i)\quad(i=1,2),\qquad f^{2m}(t,e_3)=(t,e_3).$$

因此 $c_n^T=3$、$\mathrm{Var}_d(f^n)=3$ 对所有 $n\ge 1$ 成立, 两个主定理均给出 $h_{\mathrm{pol}}(f)\le 1$.

为了得到下界, 在 e_1 中固定 $a=1/2$, 并取 m 个点 $x_j=(a^{6^{-j}},e_1)$,$0\le j<m$. 若 $i<j$, 则在时间 $2i<2m$ 有

$$d\big(f^{2i}(x_i),f^{2i}(x_j)\big)=a^{6^{i-j}}-a\ge a^{1/6}-a>0.$$

因此对任意固定的 $0<\varepsilon<a^{1/6}-a$, 有 $s(2m,\varepsilon)\ge m$, 从而 $h_{\mathrm{pol}}(f)\ge 1$. 所以

$$\boxed{h_{\mathrm{pol}}(f)=1,\qquad c_n^T=3,\qquad \mathrm{Var}_d(f^n)=3.}$$

这个例子强调了：即使自然边每次映到另一条自然边, 轨道在径向上的非等距变化仍可产生正的多项式熵.

3.12 算例六：两阶段延迟产生二次轨道复杂度

下面构造一个真正分段折叠、但拓扑熵仍为零的 Y 形树映射, 使两个主定理同时以有限值取等, 并且多项式熵为 2. 记 $T=e_1\cup e_2\cup e_3$, 三条边均以 $t\in[0,1]$ 参数化,$t=0$ 对应中心. 先定义分段线性函数

$$F(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t\le \frac{3}{10},\\ \frac{3}{4}-\frac{t}{2}, & \frac{3}{10}\le t\le \frac{1}{2},\\ \frac{3}{2}t-\frac{1}{4}, & \frac{1}{2}\le t\le \frac{3}{4},\\ \frac{t}{2}+\frac{1}{2}, & \frac{3}{4}\le t\le 1.\end{cases}$$

各接点处的函数值一致, 且 $F(0)=0$、$F(1)=1$. 在树上定义

$$f(t,e_1)=(F(t),e_1),\qquad f(t,e_2)=(t^2,e_2),\qquad f(t,e_3)=(t,e_3).$$

这个映射连续、满射且分段严格单调. 记 $G=F|_{[1/2,1]}$, 则 G 是 $[1/2,1]$ 上的严格递增同胚,$G(1/2)=1/2$,$G(t)>t$ 对 $1/2<t<1$ 成立.

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

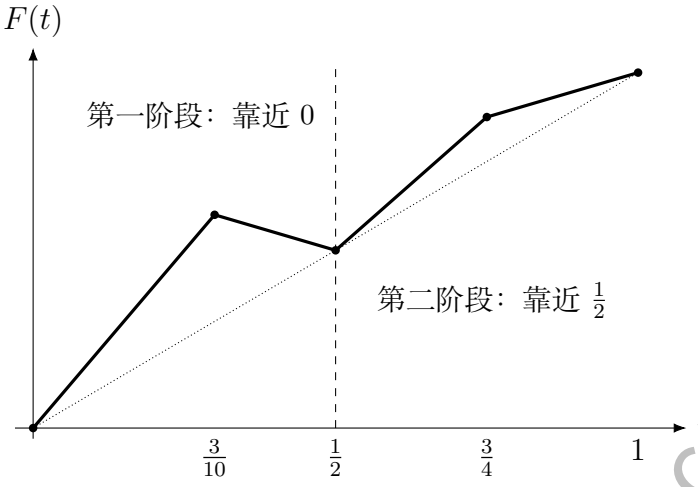


图 11: 两阶段分段线性映射 F：先在左端延迟, 再跨过固定门槛 1/2, 形成两个独立的等待时间. 点线为恒等映射.

Lap 数与变差的精确计算. F 的两个真正转折点为 3/10（局部极大）和 1/2（局部极小）. 前者的所有前向迭代都落在 $[1/2, 1]$, 其向后迭代的原像唯一地沿第一线性段趋向 0；后者是不动点. 对每个 $n \geq 1$,F^n 的转折点恰为

$$\left\{\frac{3}{10}\,2^{-j} : 0 \leq j \leq n-1\right\} \cup \left\{\frac{1}{4}\,2^{-j} : 0 \leq j \leq n-2\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

这 $2n$ 个点互不相同, 且均为真正的局部极值点；前向迭代在 $[1/2, 1]$ 上严格递增, 后向分支的限制为单射, 故上述折叠不会消失；反之, 复合映射的新转折只能来自此前转折点的原像. 于是第一条自然边上恰有 $2n+1$ 个 Lap, 另两条自然边各有一个, 因而

$$\boxed{c_n^T = 2n + 3.}$$

沿第一条边由左到右计算 F^n 的相邻极值, 所有局部极小值均为 1/2, 局部极大值依次为 $G^j(3/5)$（$j = 0, \ldots, n-1$, 按次序排列）；两个端点像分别为 0 和 1. 故

$$\mathrm{Var}_d(f^n) = 2 + \mathrm{Var}_{[0,1]}(F^n) = 3 + 2\sum_{j=0}^{n-1}\left(G^j(3/5) - \frac{1}{2}\right).$$

由于 $3/5 \leq G^j(3/5) < 1$, 得到

$$3 + \frac{n}{5} \leq \mathrm{Var}_d(f^n) < 3 + n.$$

所以 c_n^T 与 $\mathrm{Var}_d(f^n)$ 均呈线性增长, 两个主定理均给出 $h_{\mathrm{pol}}(f) \leq 2$.

构造二次规模的分离集. 令 $a = 1/10$,$b = 3/2$, 并取

$$\delta_l = ab^{-l}, \qquad x_{k,l} = 2^{-k}\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta_l}{2}\right), \qquad k, l \geq 0.$$

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

把 $x_{k,l}$ 视为第一条自然边上的点. 对 $0 \le j \le k$, 有 $F^j(x_{k,l}) = 2^j x_{k,l}$；特别地

$$F^{k+1}(x_{k,l}) = \frac{1}{2} + \delta_l.$$

当 $0 \le r \le l$ 时, 这些像始终落在 $[1/2, 3/4]$ 的线性段内, 故

$$F^{k+1+r}(x_{k,l}) = \frac{1}{2} + ab^{r-l}.$$

对给定 $n \ge 2$, 考察点集

$$E_n = \{x_{k,l} : k, l \ge 0,\ k + l \le n - 2\}, \qquad \mathrm{card}(E_n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

若 $k < k'$, 在时间 $k + 1 < n$, 前一个点的像至少为 $1/2$, 后一个点的像至多为 $3/10$, 故二者距离至少 $1/5$. 若 $k = k'$ 而 $l < l'$, 则在时间 $k + 1 + l < n$, 两个像分别为 $1/2 + a$ 与不超过 $1/2 + a/b$, 距离至少为

$$a(1 - b^{-1}) = \frac{1}{30}.$$

所以对固定的 $0 < \varepsilon < 1/30$,E_n 是 (n, ε)-分离集, 故

$$s(n, \varepsilon) \ge \frac{n(n-1)}{2}, \qquad h_{\mathrm{pol}}(f) \ge 2.$$

结合上界, 得到

$$\boxed{h_{\mathrm{pol}}(f) = 2, \qquad c_n^T = 2n + 3, \qquad \mathrm{Var}_d(f^n) = \Theta(n).}$$

此时两个主定理的右端都等于 2. 这说明有限树上折叠导致 Lap 数线性增长时, 两个不同的等待时间参数能够形成二次规模的可分离轨道族.

表 1: 六个算例的轨道复杂度比较（Θ 表示双边同阶）

映射	c_n^T	$\mathrm{Var}_d(f^n)$	$h_{\mathrm{pol}}(f)$
三分支等距轮换	3	3	0
各分支平方	3	3	1
帐篷映射	2^n	2^n	$+\infty$
三分支非满射合流	3	$\frac{19}{12}2^{-(n-1)}$	0
异速幂映射轮换	3	3	1
两阶段延迟	$2n + 3$	$\Theta(n)$	2

2026 S. -T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4 总结与遗留问题

4.1 主要结论

本文从轨道复杂度的度量出发, 以两种方法给出有限树上分段单调映射多项式熵的上界.

第一种方法基于单调片计数: 将 T 剖分为 c_n^T 个 n 步单调片, 利用 ρ_n 的可加性, 每片至多需要 $1+nL_d(T)/\varepsilon$ 个代表点, 从而得到 Lap 数上界. 第二种方法基于总变差: 对分离点集生成的最小子树作深度优先遍历, 得到式 (3.2), 再结合满射条件下总变差的单调性, 得到总变差上界. 二者合写为

$$h_{\mathrm{pol}}(f)\le 1+\limsup_{n\to\infty}\frac{\log c_n^T}{\log n},\qquad h_{\mathrm{pol}}(f)\le 1+\limsup_{n\to\infty}\frac{\log^+\mathrm{Var}_d(f^n)}{\log n}.$$

第二个不等式要求 f 连续、满射且分段严格单调; 第一个仅要求连续与分段严格单调. 两个上界中的常数 1 均来自估计中额外出现的关于 n 的一次因子. 算例二、六、七分别在多项式熵为 1、2 和 3 时验证两个上界均可达到; 算例一与算例三展示上界不严格及指数型复杂度, 算例四则说明满射性对变差单调引理不可缺少.

本文的两个上界分别来自轨道长度与总变差的直接估计, 所用工具初等, 能够具体反映树的几何结构对轨道复杂度的限制. 需要强调,Lap 数上界也可由已有关于正则曲线原像分支数的结果得到; 这里的贡献是针对有限树给出独立而具体的几何证明, 另以累积变差与满射复合的性质组织变差上界.

4.2 可进一步研究的问题

本文的方法留下若干自然问题: 能否在适当条件下, 由 Lap 数的增长得到多项式熵的下界? 对非满射映射, 是否存在替代总变差单调性的条件? 当树上含环路时, 深度优先遍历可改在生成树上进行, 未被遍历的边对估计有何影响? 这些问题有待进一步研究.

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

参考文献

[1] L. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, 2nd ed., Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 5, World Scientific, Singapore, 2000, ISBN 981-02-4053-8.

[2] J. F. Alves and J. Sousa Ramos, Kneading theory for tree maps, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24** (2004), no. 4, 957–985, doi:10.1017/S014338570400015X.

[3] A. Artigue, D. Carrasco-Olivera and I. Monteverde, Polynomial entropy and expansivity, *Acta Math. Hungar.* **152** (2017), 140–149.

[4] M. Baillif, A polynomial bound for the Lap number, *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **3** (2002), 325–329, doi:10.1007/BF02969409.

[5] M. Đorić and J. Katić, Polynomial entropy of induced maps of circle and interval homeomorphisms, *Qual. Theory Dyn. Syst.* **22** (2023), Article 103, doi:10.1007/s12346-023-00806-y.

[6] M. Đorić and J. Katić, Polynomial entropy on regular curves, *Applied General Topology* **27** (2026), no. 2, Article 25695, doi:10.4995/agt.25695.

[7] M. Đorić, J. Katić and B. Lasković, On polynomial entropy of induced maps on symmetric products, *Acta Math. Hungar.* **171** (2023), 334–347, doi:10.1007/s10474-023-01386-8.

[8] J. Barbosa Gomes and M. J. Dias Carneiro, Polynomial entropy for interval maps and Lap number, *Qualitative Theory of Dynamical Systems* **20** (2021), no. 1, Paper No. 21, 16 pp., doi:10.1007/s12346-021-00456-y.

[9] F. Grycan-Gérard and J.-P. Marco, Polynomial entropy and polynomial torsion for fibered systems, *Regular and Chaotic Dynamics* **28** (2023), nos. 4–5, 613–627, doi:10.1134/S156035472304007X.

[10] H. Kato, Topological entropy of maps on regular curves, *Topology Appl.* **154** (2007), no. 6, 1027–1031, doi:10.1016/j.topol.2006.10.011.

[11] J.-P. Marco, Polynomial entropies and integrable Hamiltonian systems, *Regular and Chaotic Dynamics* **18** (2013), no. 6, 623–655, doi:10.1134/S1560354713060051.

[12] J. Milnor and W. Thurston, On iterated maps of the interval, in: *Dynamical Systems (College Park, MD, 1986–87)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1342, Springer, Berlin, 1988, 465–563.

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

[13] M. Misiurewicz and W. Szlenk, Entropy of piecewise monotone mappings, *Studia Mathematica* **67** (1980), no. 1, 45–63, doi:10.4064/sm-67-1-45-63.

[14] S. Roth, Z. Roth and Ł. Snoha, Rigidity and flexibility of polynomial entropy, *Adv. Math.* **443** (2024), Article 109591, doi:10.1016/j.aim.2024.109591.

[15] S. Ruette, *Chaos on the Interval*, University Lecture Series, Vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, ISBN 978-1-4704-2956-0.

[16] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 79, Springer-Verlag, New York, 1982, ISBN 0-387-90599-5.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

致谢页

一、致谢

本文的完成是老师与同学共同协助的结果。首先对指导教师璩斌老师作诚挚的感谢。有关选题、结构、证明思路乃至论文多次修改的种种问题，都是由璩老师用耐心方式加以说明或引导的。当研究没有进展时，他并不直接给出答案而是提出问题，促使我们自己去分析、思考，因而较完整地认识了数学研究的实际情况。

其次感谢我们父母对本次研究过程的默默支持。为了能更好的讨论项目，我们在暑假期间频繁返校，劳烦家长接送以及晚上送饭到校，让我们能更专注高效地完成项目的研究。

还要感谢广州市第六中学，研究为时数月，学校为我们提供了安静舒适的数学竞赛课室以及电脑设备。老师们在看到我们研究到夜晚的时候也会为我们送水果以犒劳我们的辛苦。

最后，感谢我们自己在数月研究中的通力合作。正是彼此的讨论、争辩与鼓励，才使这篇论文从想法最终变为成果。

二、研究背景与选题来源

本论文选题来源于我们在化学课中学到的热力学熵的问题，我们据此联想到数学作为化学的基础，是否也存在类似热力学熵一样衡量系统复杂程度的值？于是在询问数学璩斌老师之后，了解到了数学领域拓扑熵与多项式熵现有的成果。我们在学习过程中发现，已有研究主要针对区间映射，而对具有分岔结构的有限树映射研究较少。经师生共同讨论，确定了“将多项式区间映射的 lap 数和总变差上界推广到有限树映射”这一研究方向。

三、指导老师与学生关系及指导情况

指导老师璩斌系广州市第六中学数学教师，与我们是师生关系。指导工作属于学校正常教学指导范畴，不涉及任何有偿指导。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026正式提交科学论文公示

在论文撰写过程中，指导老师主要负责确定选题方向、提供方法引导和修改意见。指导老师还推荐了许多重要参考文献，帮助我们建立了研究的理论基础。在学生遇到证明困难时，璩老师通过提问方式启发我们自己找到解法，没有代笔撰写论文的具体内容。论文撰写工作均由我们独立完成。除指导老师外，没有其他外部人员实质性参与本研究的成果产出。

四、团队分工与具体贡献

我们共同完成了文献研读、讨论和论证工作，同时各有侧重：

陈星云担任组长，他负责安排项目进度和编排全文，重点承担了 lap 数上界的理论证明工作。单调边剖分定义、引理 3.5 与 3.6 的证明，以及轨道长度生成估计的关键论证都是由他完成。文中的符号说明表也由他整理完成。

欧阳霈负责总变差上界的证明工作，重点完成了深度优先遍历方法、覆盖重数估计和分离集估计等核心部分，并撰写了 3.5 节满射复合不降低总变差的证明。

陈禹硕负责绘图与算例分析。他计算了 Y 形树分支轮换和帐篷映射两个算例，验证了定理的有效性，并完成了文中全部示意图的绘制及文献整理工作。

五、研究过程中的困难与解决

研究过程中主要遇到三个困难：

1.由于高中校内从未接触拓扑学相关知识，我们在学习本项目必要的拓扑学知识基础的过程中遇到不少困难。经过璩斌老师的耐心指导与三人的共同讨论，我们逐渐克服了概念问题带来的困难。

2.有限树不像区间那样有自然的代数顺序，如何定义有限树上的“单调”和“lap 数”成为一大难题。与璩老师多次讨论后，我们决定采用自然边结构限制剖分片，保证了定义的明确性和有限性。

3.证明过程中深度优先遍历的覆盖重数问题。我们发现直接计数十分困难，经过一周反复推演，最终借助“每条边至多经过两次”的遍历性质巧妙解决了这一问题。

以上困难均通过小组讨论、教师指导和自主查阅文献的方式解决。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

六、AI 使用情况说明

AI 工具名称：Deepseek

版本：DeepSeek V3.2、深度思考 R1

具体使用环节：论文规范修改

用途：论文写作规范查询

使用时间：8.26-9.15

频率：一周 1-2 次

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示