参赛学生姓名：高钰棠、江云琪、王井然

中学：上海市民办平和学校

省份：上海市

国家/地区：中国

指导老师姓名：李玲燕

指导老师单位：上海市民办平和学校

论文题目：

磁性牛顿摆的动力学、模态选择与能量传递

2026 C.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

磁性牛顿摆的动力学
模态选择与能量传递

高钰棠　江云琪　王井然

摘要

磁性牛顿摆通过磁体间的相互作用传递运动，呈现拍振、能量往返传递和部分摆短时运动减弱等现象。为解释这些现象，我们搭建了可调节的磁摆链装置，通过视频追踪提取摆角，并建立包含有限尺寸磁体相互作用、摆体转动惯量和耗散的动力学模型，结合数值求解与简正模态分析进行研究。

模型较好地再现了实验中的主要振动特征。改变释放位置会改变各模态的初始能量分配，而不同模态的叠加可以解释部分摆的短时运动减弱。在总距离和初始能量相同的模型对照中，保留中间摆明显增强了末端响应，说明中间摆能够通过改变系统的耦合与模态组成促进传能。进一步分析得到末端动能的理论上界，并表明实际峰值还取决于各模态在有限时间内的叠加及耗散。研究将磁摆链的运动现象与模态结构联系起来，为理解有限耦合系统中的能量分配和传递提供了依据。

关键词：磁性牛顿摆；简正模态；能量传递；耦合振动；耗散

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公开

目录

摘要 **I**

1 引言 **1**

1.1 从磁性牛顿摆提出的问题 1

1.2 相关研究与本文切入点 1

1.3 研究内容与结构 1

2 实验装置与观测方法 **2**

2.1 装置结构与可调参数 2

2.2 初始构型与释放过程 3

2.3 视频记录与观测量 3

2.4 从标记角点获得摆角 4

2.5 几何条件与时间轴 5

3 基础动力学模型与数值求解 **6**

3.1 装置和坐标 6

3.2 刚体复摆的机械能 7

3.3 磁相互作用模型的选择 8

3.4 地球磁场 10

3.5 拉格朗日方程与耗散 10

3.6 数值实现 11

4 简正模态与释放位置选择 **13**

4.1 平衡点附近的模态展开 13

4.2 双摆的模态叠加与拍振 14

4.3 从初态投影到模态能量 14

4.4 三至五摆完整振型图谱 15

4.5 不同释放位置的模态组成 21

4.6 从角度信号中提取模态频率 22

4.7 黏性阻尼下的模态演化 23

4.8 线性近似的适用范围 23

5 能量传递与有限时间谱聚焦 **24**

5.1 总能量与末端响应的统一定义 24

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

5.2 线性模型的局域能量与收支 25
5.3 二至五摆局域二次能量图谱 25
5.4 自由与移除中间摆的公平对照 28
5.5 相同初始能量下的端点响应 29
5.6 完整轨迹的模态分解 31
5.7 固定总长的间距扫描 32
5.8 末端动能聚焦的静态上界 33
5.9 固定总长下的预先谱预测检验 34
5.10 非线性恢复力与干摩擦的交叉对照 35

6 实验结果与理论对照 **36**
6.1 完整模型与实验轨迹 36
6.2 实验数据与计算流程 41
6.3 实测动能分布与波动指标 42
6.4 末端响应与空间展宽 45
6.5 实测频谱与固定模态诊断 46
6.6 偶数与奇数代表工况 50
6.7 三摆中间摆的短时运动减弱 51

7 结论与展望 **53**

参考文献 **54**

致谢 **55**

附录 **57**

A 单摆阻尼参数标定 **57**
A.1 模型与拟合方法 57
A.2 耗散形式比较 57
A.3 参考参数 57

B 测角方法对照与固定参数基线 **59**

C 谱聚焦的补充检验与敏感性 **62**
C.1 二至五摆的有限时间聚焦 62

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

C.2 模态权重与回顾检验 63
C.3 完整时间窗的成对能流 64
C.4 惯量和摩擦扰动下的比较 65
C.5 参数与数学边界 65

D 摆杆参数计算与数值检查 **67**
D.1 摆杆的三点取轴、转动惯量与重力力矩 67
D.2 主要符号 68
D.3 各类结果的参数边界 69
D.4 主要数值检查 70

E 核心代码摘录 **71**
E.1 磁势能查表与角度梯度 71
E.2 质量归一模态与静态聚焦上界 72
E.3 比例黏性响应与窗口峰值 73

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

1 引言

1.1 从磁性牛顿摆提出的问题

在普通牛顿摆中，碰撞把一端的运动传向另一端。换成相互排斥、始终不接触的磁体后，末端同样会动起来，但过程复杂了许多：能量会回流，各摆会发生拍振，中间摆有时还会短暂地慢下来。本研究由 2026 年 IYPT 第 15 题“磁性牛顿摆”引出 [1]。比赛结束后，这些现象仍让我们好奇。为什么改变释放位置就会看到不同的运动？中间摆究竟帮助了传递，还是分走了能量？要回答这些问题，不能只比较两端的最大摆角。

计算的第一个难点是磁力。摆动时，磁体之间的距离和朝向都在变；距离较近时，磁体本身的尺寸也不能忽略。远场点偶极子可以作参照，正式计算则需保留圆柱几何。均匀圆柱磁体的磁场可用等效电流描述 [2]。本文采用等价的端面磁荷积分求势能，再对摆角求导，得到所有磁体对的力矩。

另一个问题是怎样理解算出的复杂轨迹。稳定平衡附近的运动可以分解为简正模态，每个模态都有固定的振幅比例 [3]。但一个模态并不对应一个摆：同一个摆会同时受到多个模态的影响。因而，振型中的节点、摆暂时慢下来和局域能量较低，虽然看起来相似，却需要分别判断。

1.2 相关研究与本文切入点

已有质量弹簧链研究表明，通过调节参数和频谱，可以实现近乎无色散甚至完美的脉冲传递 [4, 5]。这给了我们一个思路：末端响应可能与模态权重及相位配合有关。不过，我们的装置只有二至五个摆，磁耦合不限于相邻两摆，而且存在摩擦，不能直接套用理想弹簧链的结论。这里从实际磁体几何求有限维刚度矩阵，再看给定释放方式下，末端在观察时间内能获得多少动能。

实验采用 ArUco 标记识别摆体并提取角点 [6]；满足共面条件时，可以用单应变换处理透视影响 [7]。这些都是已有方法。我们需要解决的是怎样把视频中的角度与模型里的摆角对应起来，并分清误差来自测量、初态还是计算。为此，轨迹拟合之外还要检查模态频率和能量收支。

1.3 研究内容与结构

全文围绕三个问题展开：有限磁体与复摆模型能否描述主要轨迹；释放位置怎样改变模态组成；中间摆怎样影响末端响应，以及能否在积分完整运动方程之前给出预测。

第2节介绍装置和测角方法，第3节建立动力学模型。随后，第4节从双摆拍振讲起，讨论多摆振型和释放位置；第5节转向局域能量、中间摆对照和谱预测。第6节将这些分析与实测轨迹比较，最后讨论尚未解决的问题。标定、补充检验、参数计算及核心代码放在附录，便于查阅和复算。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

2 实验装置与观测方法

为研究有限磁摆链的耦合运动、振幅分配与能量传递，我们搭建了可改变摆杆长度、磁体规格和摆间距的实验装置。实验通过牵线保持初始构型、剪线释放并录像，利用刚性固定在摆体上的 ArUco 标记识别各摆和提取转角。单摆自由衰减用于耗散标定，多摆录像用于运动观察与理论对照。

2.1 装置结构与可调参数

装置由 ABS 塑料框架、PLA 摆杆及角码、塑料管、陶瓷轴承和钕铁硼磁体组成，见图2.1。框架长 1.00 m、宽 0.25 m、高 0.18 m。摆杆采用 PLA 材料 3D 打印，提供 95、105、115、125 和 135 mm 五种名义长度；角码用于调整磁摆间距。摆杆的悬挂点采用塑料管与陶瓷轴承组合，以实现转动支承。

支架和转轴构件尽量选用非磁性材料，避免它们明显改变磁体间的作用。陶瓷轴承能减小支承摩擦，却不能让摩擦消失。残余耗散通过独立的单摆自由衰减实验估计，方法见附录A。

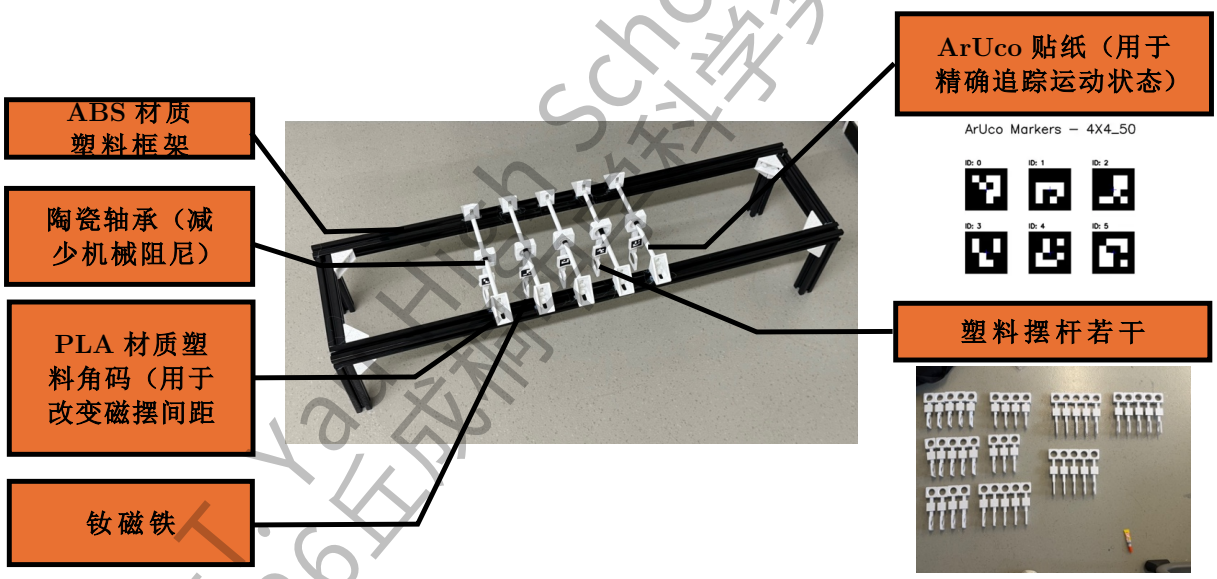


图 2.1: 磁摆实验装置及组成。框架和可调角码构成支承，摆杆通过陶瓷轴承转动，磁体固定于摆体，ArUco 标记用于识别与追踪。测角条件与耗散标定分别见正文。

装置使用 N30、N52 两种牌号、不同直径和厚度的钕铁硼磁体。计算前还要量清几种容易混淆的长度。摆杆总长、支点到磁心的距离、支点到总质心的距离并不相同。转动惯量 I_p 则要计入第 p 个摆的摆杆、磁体和安装构件，不能只按杆端质点估算。单摆标定所用的 I 和重力力矩系数 K_g 列于附录A，拟合耗散参数时将它们固定。

2026 年 Yau High School Science Award 用于成稿的科学论文公示

表 2.1: 实验装置的材料与配置范围。摆杆长度为构件名义长度。

构件	材料或规格
支承框架	ABS 塑料；长 1.00 m，宽 0.25 m，高 0.18 m
摆杆	PLA 材料 3D 打印；名义长度 95、105、115、125、135 mm
间距调节构件	PLA 角码
转动支承	塑料管与陶瓷轴承
磁体	N30、N52 牌号钕铁硼磁体；使用不同厚度、直径的规格
视觉标记	固定于摆体的 ArUco 编码贴纸

2.2　初始构型与释放过程

在框架上安装所需数量的磁摆后，记录磁体规格、体积和数量，并固定录像机位。按图2.2所示，用棉绳牵引末端磁摆并固定于框架，待摆链达到静止状态后剪断牵线释放。录像连续记录释放及其后的衰减运动，直至摆链停止可见摆动。



（a）录像机位与装置　　（b）牵线保持初始构型与剪线释放

图 2.2: 实验拍摄与释放方式。摄像设备固定在装置前方；棉绳牵引末端磁摆并固定于框架，待静止后剪线释放。

牵住端摆时，磁力也会拉偏其余摆，因此释放前并不是“只有一个摆偏转，其余都竖直”。我们在参考帧中分别确定各摆初角。

2.3　视频记录与观测量

ArUco 贴纸用于在同一画面中保持各摆身份，并通过标记角点的转动得到摆角 [6]。图2.3展示五摆录像的追踪界面。每段录像分别记录摆的空间顺序与标记 ID 的对应关系；标记编号不等同于摆在链中的序号，图中的五摆编号也不直接用于双摆数据。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

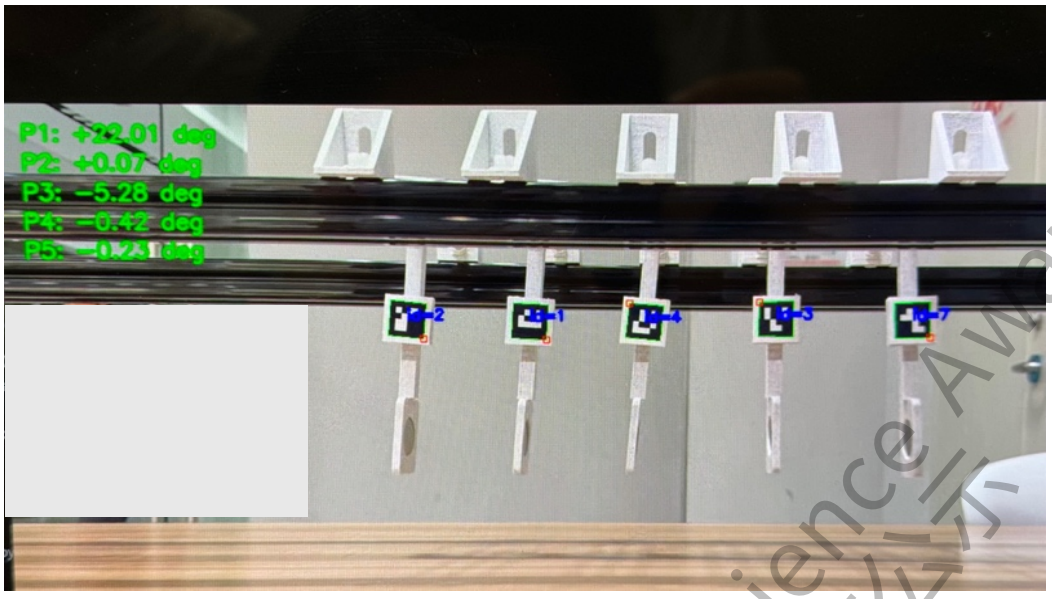


图 2.3: 五摆录像的 ArUco 追踪界面。标记 ID 用于区分各摆，画面叠加显示识别框和观测角；该图说明识别与显示方式，不作为测角精度的独立验证。

观测角以竖直向下为零、向画面右侧偏转为正。初角由参考帧中的杆方向与竖直参考确定，后续转角由标记追踪获得；角速度则由角度序列差分估计，不属于摄像头直接测得的独立物理量。记录保留原始帧号、时间戳、标记编号、角点、有效性和插值标志，以便区分直接观测与数据处理结果。

2.4 从标记角点获得摆角

我们用 OpenCV 识别刚性固定在摆体上的 ArUco 标记 [6]。每个标记的编码用于确定摆的身份，四个角点用于估计转动；程序启用亚像素角点细化。本文两次双摆录像均采用 `DICT_4X4_50` 字典，左摆 P1 对应 ID 3，右摆 P2 对应 ID 2。取得角点后，仍需确定初角、统一正方向，并剔除形状异常的帧。

我们以竖直向下为零角，摆杆向画面右侧偏转为正，记观测角为

$$y_p(t) = \alpha_{p,0} + \Delta\theta_p(t), \qquad \Delta\theta_p(0) = 0. \tag{2.1}$$

其中 p 表示摆的编号，$\alpha_{p,0}$ 为参考帧中的绝对初角，$\Delta\theta_p$ 为相对该帧的转角。参考帧中分别标出向下的竖直参考和由支点指向摆体的杆方向，由两者的有向夹角确定 $\alpha_{p,0}$。有向线段可避免将杆的两个方向混淆。图2.4给出一次实验所用的参考几何。

角点先按固定相机内参与畸变参数去畸变，再恢复到像素尺度。对参考帧与当前帧的四角点分别减去其中心位置，记为 $\mathbf{a}_i$ 与 $\mathbf{b}_i$。在角点一一对应的条件下，计算

$$\phi = \operatorname{atan2}\left[\sum_{i=1}^{4}(a_{ix}b_{iy} - a_{iy}b_{ix}),\ \sum_{i=1}^{4}\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i\right]. \tag{2.2}$$

2026 S. - T. Yau High School Science Award
仅用于2026上海市中学科学论文公示

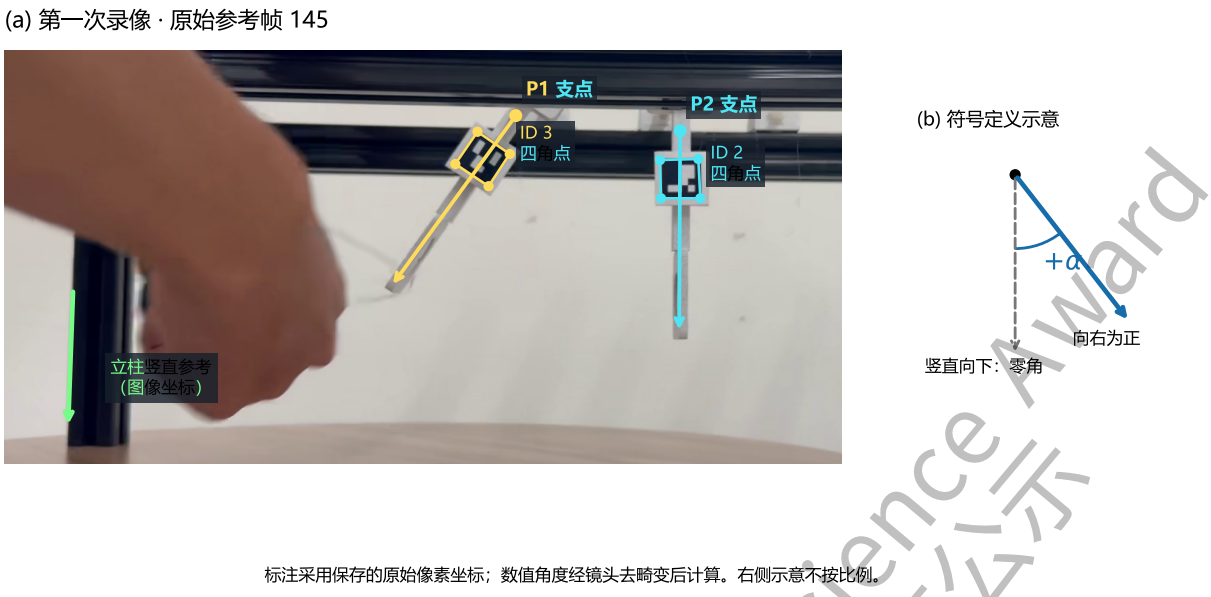


图 2.4: 第一次录像的参考帧。P1、P2 分别对应 ID 3、ID 2，杆向量由支点指向摆体，绿色线为竖直参考。照片保留原始像素坐标，数值计算先作镜头去畸变；右侧示意只说明角度正方向。

它给出四角点整体的二维旋转。因图像纵轴向下，按本文正方向取 $\Delta\theta = \mathrm{unwrap}(-\phi)$，其中角度展开用于消除跨越正负半周时的数值跳变。相对于只使用标记的一条边，四角点共同参与估计；标记与杆之间固定的平面内安装转角由初角与相对转角的分工处理。

2.5 几何条件与时间轴

测角前，先对识别出的标记角点进行镜头去畸变。镜头畸变会使角点偏离理想成像位置，其中径向畸变表现为画面向中心收缩或向外扩张，切向畸变则与镜头和成像面的安装偏差有关。程序根据相机内参和畸变系数，将原始角点换算到归一化成像坐标，反求去畸变后的坐标，再映射回像素坐标。参考帧和后续各帧采用相同的处理参数，随后按第2.4节的方法计算转角。

相机斜对摆动平面时，还会产生透视变形。例如，平面内的矩形在画面中可能呈现为梯形，两个方向的长度比例也随位置变化。平面透视矫正的目的，就是将这些像素位置还原到摆动平面内的直角坐标系中，使角度能在统一尺度下计算。

若需进行这一步矫正，应在与被测标记运动轨迹共面的平面内，选取至少四个已知位置的标定点，且其中任意三点不共线。例如，已知宽、高分别为 a、b 的矩形，其四角可依次设为 $(0,0)$、$(a,0)$、(a,b)、$(0,b)$。将这些实际坐标与去畸变后的像素坐标一一对应，即可求得单应矩阵 H[7]：

$$\lambda(X, Y, 1)^{\mathsf{T}} = H(u, v, 1)^{\mathsf{T}}. \tag{2.3}$$

其中，(u, v) 为去畸变后的像素坐标，(X, Y) 为平面内的实际坐标，λ 为随点的位置变化的比例因子。计算时，先用 H 乘以像素坐标列向量，再将所得前两个分量分别除以第三个分量，便得到 X 和 Y。平面坐标取 X 向右、Y 向下，与第2.4节的测角符号保

2026 Xi'an High School Science Award 仅用于2026正成科学奖论文公示

持一致。两轴应相互垂直，并采用相同的长度尺度；不能随意将矩形拉伸为正方形，否则会改变角度。

得到 H 后，将参考帧和各观测帧的标记角点统一转换到平面坐标，再按第2.4节计算相对转角。初角则由同一平面内的杆方向与竖直方向确定。相机位置和成像设置保持不变时，各帧使用同一个 H。本文两段双摆录像采用镜头去畸变后的角点直接计算转角，所得观测量在下文称为“图像二维角度”。

时间优先由视频帧时间戳确定；没有可用时间戳时，按帧号与帧率换算。以参考帧为时间原点，第 k 帧的相对时间为 $t_k = (k - k_0)/f_s$，其中 k_0 为参考帧号，f_s 为帧率。两次录像的参考帧、采样帧数和处理时长见表2.2。

表 2.2: 双摆测角对照的录像与处理区间。帧编号从零计数；时长为首末采样时刻之差。

项目	第一次双摆	第二次双摆
记录编号	2-first	2-second
分辨率	1280×720	1280×720
帧率（fps）	30	30
参考帧	145	92
处理帧数	799	857
处理时长（s）	26.600	28.533
P1、P2 的标记 ID	3、2	3、2

3 基础动力学模型与数值求解

3.1 装置和坐标

磁性牛顿摆由固定支点、刚性摆杆和实心圆柱磁铁组成。磁铁以竖直圆片的形式固定在摆杆下端，圆形端面朝向相邻磁铁。实验中各摆主要在同一竖直平面内运动，因此每个摆只保留一个转动自由度。图3.1 给出整条磁摆链的几何。

图中，P_i 是第 i 个支点，d_i 是相邻支点间距，θ_i 是摆角。计算采用米和弧度；图表以毫米或度显示时另行标注。

取摆动平面为 x–z 平面，x 轴水平向右，z 轴竖直向上，y 轴垂直于摆动平面。第 i 个支点的位置为

$$\boldsymbol{p}_i = (X_i, 0, Z_i). \tag{3.1}$$

2026 C·T·Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

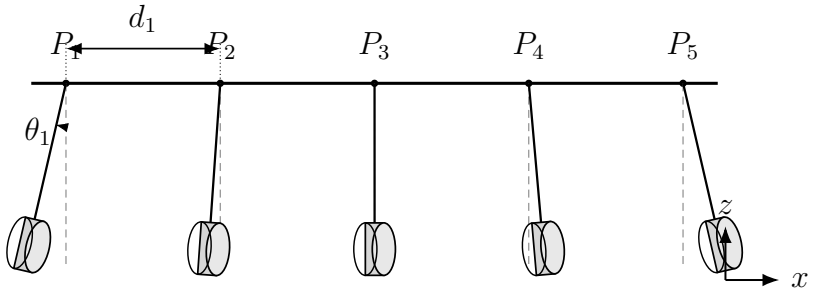


图 3.1: 磁性牛顿摆的装置示意。磁铁与摆杆刚性固连，示意角度经过放大。

X_i 和 Z_i 是第 i 个支点的水平、竖直坐标，平面模型中 $y=0$。规定竖直向下时 $\theta_i=0$，向右偏转为正。沿摆杆向下和沿正角方向的切向单位矢量分别为

$$\boldsymbol{e}_{r,i}=(\sin\theta_i,0,-\cos\theta_i),\qquad \boldsymbol{e}_{t,i}=(\cos\theta_i,0,\sin\theta_i). \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{e}_{r,i}$ 沿摆杆由支点指向磁铁中心，$\boldsymbol{e}_{t,i}$ 指向 θ_i 增大的切向方向。若支点到磁体中心的距离为 l_i，磁体中心 C_i 的位置为

$$\boldsymbol{r}_i(\theta_i)=\boldsymbol{p}_i+l_i\boldsymbol{e}_{r,i}. \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 块磁铁的中心位置，l_i 是支点到磁心的距离。磁铁与摆杆刚性固连，共用转角 θ_i；磁铁圆片的直径方向沿 $\boldsymbol{e}_{r,i}$，圆柱轴线沿 $\boldsymbol{e}_{t,i}$。再用 $p_i=\pm1$ 记录磁极方向，$\mathcal{M}_i>0$ 表示磁化强度：

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_i=p_i\mathcal{M}_i\boldsymbol{e}_{t,i}. \tag{3.4}$$

$\boldsymbol{\mathcal{M}}_i$ 是磁化强度矢量，单位为 $\mathrm{A\,m^{-1}}$；p_i 的正负对应两个相反方向。摆杆和磁铁没有相对转动。

3.2 刚体复摆的机械能

摆杆、夹具和磁铁共同绕支点转动，不能只把磁铁当作杆端质点。第 i 个摆的转动惯量为

$$I_i=\sum_a\left(I_{a,\mathrm{cm}}+m_a l_a^2\right), \tag{3.5}$$

a 遍历所有转动部件，$I_{a,\mathrm{cm}}$、m_a 和 l_a 分别是其质心转动惯量、质量和质心到支点的距离。I_i 的单位为 $\mathrm{kg\,m^2}$。不规则摆杆的 STL 积分、三点取轴及重力系数换算见附录D.1。质量为 $m_i^{(m)}$、半径为 R_i、厚度为 h_i 的实心圆柱磁铁，其质心转动惯量为

$$I_{i,\mathrm{cm}}^{(m)}=\frac{m_i^{(m)}}{12}\left(3R_i^2+h_i^2\right). \tag{3.6}$$

重力恢复作用由各部件的质量和质心位置共同决定。记

$$G_i=g\sum_a m_a l_a. \tag{3.7}$$

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

g 是当地重力加速度，G_i 是重力系数，单位为 N m。以竖直向下为势能零点，便有

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \dot{\theta}_i^2, \qquad V_g = \sum_{i=1}^{N} G_i(1-\cos\theta_i). \tag{3.8}$$

T 和 V_g 分别是系统的动能和重力势能，$\dot{\theta}_i$ 是第 i 个摆的角速度。

3.3 磁相互作用模型的选择

3.3.1 点偶极子远场参照

先看最简单的点偶极子模型。磁铁足够远时，磁化分布的细节不再重要，可以把整块磁铁压缩为中心处的一个磁矩：

$$\mathcal{V}_i = \pi R_i^2 h_i, \qquad \boldsymbol{\mu}_i = p_i \mathcal{M}_i \mathcal{V}_i \boldsymbol{e}_{t,i}. \tag{3.9}$$

$\mathcal{V}_i$ 是磁铁体积，$\boldsymbol{\mu}_i$ 是磁偶极矩，单位为 A m^2。记磁体 i 到磁体 j 的中心位移为 $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$，距离为 $r_{ij} = \|\boldsymbol{r}_{ij}\|$，方向为 $\hat{\boldsymbol{r}}_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij}$，点偶极子势能写成

$$U_{ij}^{\mathrm{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi r_{ij}^3}\left[\boldsymbol{\mu}_i\cdot\boldsymbol{\mu}_j - 3(\boldsymbol{\mu}_i\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ij})(\boldsymbol{\mu}_j\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ij})\right]. \tag{3.10}$$

μ_0 是真空磁导率。式(3.10)计算快，适合检查远场结果，但它没有保留磁铁的半径和厚度。这个问题可先从单块磁铁的轴向磁场看出来。半径为 R、厚度为 h、磁化强度为 $\mathcal{M}$ 的实心圆柱，在轴线上距中心 ξ 处产生的磁场为 [2]

$$B_{\mathrm{cyl}}(\xi) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2}\left[\frac{\xi + h/2}{\sqrt{(\xi+h/2)^2+R^2}} - \frac{\xi - h/2}{\sqrt{(\xi-h/2)^2+R^2}}\right]. \tag{3.11}$$

ξ 沿圆柱轴线量取，式(3.11)用于磁铁外部的 $\xi > h/2$；R 和 h 分别是磁铁半径和厚度。若把同一块磁铁换成点偶极子，轴向磁场变成

$$B_{\mathrm{dip}}(\xi) = \frac{\mu_0\mathcal{M}R^2 h}{2\xi^3}. \tag{3.12}$$

两式在 $\xi \gg R, h$ 时趋于一致。距离缩短后，点偶极子的点源假设开始失真。用

$$\varepsilon_B = \frac{|B_{\mathrm{dip}} - B_{\mathrm{cyl}}|}{|B_{\mathrm{cyl}}|} \tag{3.13}$$

表示轴向磁场的相对误差。ε_B 只衡量点偶极子与有限圆柱磁场的差别，不含测量误差。

图3.2中，距离越大，点偶极子近似与有限圆柱结果越接近。然而，真正计算两个磁体的相互作用时，接受磁场的另一个磁体也有尺寸，仅取其中心的场值还不够。因此，点偶极子只用于检查远场结果，轨迹计算采用保留有限尺寸的模型。

2026 年 T. Youli School Science Award 仅用于 2026 届城南学科学术公示

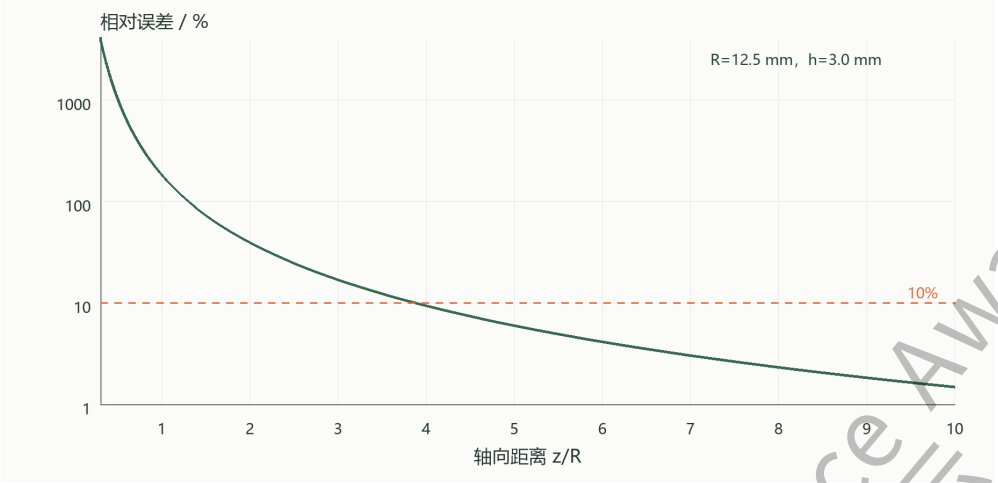


图 3.2: 点偶极子轴向磁场相对有限圆柱结果的误差。计算采用实验磁铁的 $R = 12.5\,\mathrm{mm}$、$h = 3.0\,\mathrm{mm}$；纵轴采用对数刻度，虚线为 10%。

3.3.2 有限尺寸实心圆柱模型

均匀磁化的实心圆柱既可表示为等效电流圆筒，也可表示为端面磁荷，两者在模型外部给出相同磁场 [2]。这两种方法都需要积分。我们选用端面磁荷，是因为它能直接给出一对磁体的势能，随后对摆角求导即可得到力矩。等效磁荷密度为

$$\sigma_m = \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{3.14}$$

σ_m 是等效面磁荷密度，$\boldsymbol{n}$ 是表面外法向。侧壁法向与磁化方向垂直，所以侧壁不带等效磁荷，只需积分两个圆形端面。

用 $\varepsilon = \pm 1$ 标记第 i 块磁铁的两个端面。端面上的点写成

$$\boldsymbol{R}_{i,\varepsilon}(r,\varphi) = \boldsymbol{r}_i + \varepsilon\frac{h_i}{2}\boldsymbol{e}_{t,i} + r\big(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_{r,i}\big), \tag{3.15}$$

r 和 φ 是端面内的极坐标，$\boldsymbol{e}_y = (0,1,0)$ 垂直于摆动平面，积分范围与面积元为

$$0 \le r \le R_i, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3.16}$$

$\mathrm{d}S$ 是端面面积元。两个端面的面磁荷密度分别为

$$\sigma_{i,\varepsilon} = \varepsilon p_i \mathcal{M}_i. \tag{3.17}$$

ε 区分两个端面，p_i 决定磁铁的实际极性。于是两块磁铁的相互作用势能为

$$U_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\varepsilon,\eta=\pm1}\iint_{S_{i,\varepsilon}}\iint_{S_{j,\eta}}\frac{\sigma_{i,\varepsilon}\sigma_{j,\eta}}{\|\boldsymbol{R}_{i,\varepsilon} - \boldsymbol{R}_{j,\eta}\|}\,\mathrm{d}S_i\,\mathrm{d}S_j. \tag{3.18}$$

$S_{i,\varepsilon}$ 与 $S_{j,\eta}$ 为两块磁体的圆形端面，$\eta = \pm 1$ 标记磁体 j 的两个端面。对全部面积积分后，U_{ij} 便包含了磁体尺寸、横向错位和相对倾角的影响。问题在于计算量：每求一次势能，都要做两端面的四重积分。单个位置尚可直接计算，若在 ODE 的每个时间步重复调用就太慢了。我们因此预先计算积分，并制成查询表。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

单对势能确定后，总磁势能就是所有磁铁对之和：

$$V_m(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{1 \le i < j \le N} U_{ij}(\theta_i, \theta_j). \tag{3.19}$$

N 是摆数。求和只取 $i<j$，每对磁铁计算一次，共有 $N(N-1)/2$ 项。

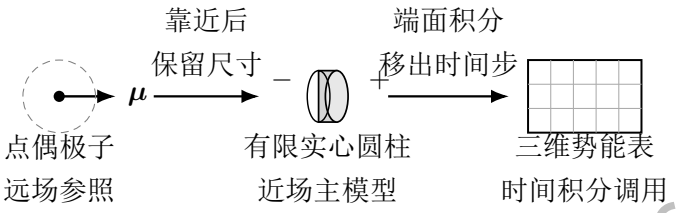


图 3.3: 磁相互作用模型的取舍。有限圆柱模型保留磁体几何，查表加速势能及梯度的计算；其离散误差另行核验。

3.4 地球磁场

磁铁除相互作用外，还受到地球磁场的转矩。装置尺度远小于地磁场的空间变化尺度，因此把一次实验中的地球主磁场视为常矢量 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{E}}$。WMM2025[8] 给出北、东、下三个分量 (B_N, B_E, B_D)；若装置 $+x$ 方向的真北方位角为 A，则

$$\begin{aligned} B_x &= B_N \cos A + B_E \sin A, \\ B_y &= B_N \sin A - B_E \cos A, \\ B_z &= -B_D. \end{aligned} \tag{3.20}$$

B_x、B_y 和 B_z 是地磁场在装置坐标系中的分量。WMM 输出以纳特斯拉给出，乘 10^{-9} 后换算为特斯拉。

第 i 块磁体在地磁场中的势能为

$$U_{E,i} = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{E}} = -p_i \mathcal{M}_i \mathcal{V}_i (B_x \cos\theta_i + B_z \sin\theta_i). \tag{3.21}$$

$U_{E,i}$ 是第 i 块磁铁的地磁势能。磁矩位于 x–z 平面内，所以 B_y 不进入摆角方程。

3.5 拉格朗日方程与耗散

重力、磁铁间作用和地磁场都已写成势能，因此可以直接相加：

$$V(\boldsymbol{\theta}) = V_g(\boldsymbol{\theta}) + V_m(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^{N} U_{E,i}(\theta_i). \tag{3.22}$$

$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^{\mathsf{T}}$ 是摆角向量。令 $L = T - V$，对第 i 个摆应用拉格朗日方程，得到

$$I_i \ddot{\theta}_i + G_i \sin\theta_i + \sum_{j \ne i} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial U_{E,i}}{\partial \theta_i} + D_i(\dot{\theta}_i) = 0. \tag{3.23}$$

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

D_i 是耗散力矩，磁相互作用项遍历所有 $j \neq i$。把各摆方程排成一列，可写为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{D}(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(I_1, \ldots, I_N). \tag{3.24}$$

$\boldsymbol{M}$ 是惯量矩阵，$\boldsymbol{D} = (D_1, \ldots, D_N)^{\mathsf{T}}$ 是耗散力矩向量。

耗散项由单摆衰减提供参考。独立单摆的衰减曲线可由库仑摩擦与线性黏性阻尼共同描述：

$$D_i(\omega_i) = \tau_{f,i}\,\mathrm{sgn}(\omega_i) + b_i \omega_i, \tag{3.25}$$

$\omega_i = \dot{\theta}_i$，$\tau_{f,i}$ 是库仑摩擦力矩，b_i 是线性黏性阻尼系数（后文记作 c_i，即 $b_i \equiv c_i$），单位分别为 $\mathrm{N\,m}$ 和 $\mathrm{N\,m\,s}$。D_i 写在方程左侧，所以实际耗散力矩为 $-D_i$。

库仑摩擦在 $\omega_i = 0$ 处不光滑。模拟运动阶段直接保留符号函数；进入最终停摆阶段后，再用静摩擦条件判断摆能否保持静止。

3.6　数值实现

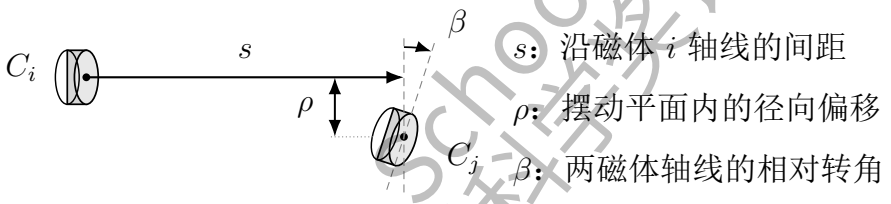


图 3.4： 一对磁铁的相对位置。C_i、C_j 为磁体中心。

3.6.1　三维磁势能查表

有限圆柱模型需要对两块磁铁的端面作四重积分。求解运动方程时会反复调用势能梯度，逐次积分耗时很长。磁铁规格固定后，相互作用只由相对位姿决定，因此先在规则网格上计算势能和梯度，求解时再插值。

一对共面磁铁的相对位置可由三个量确定：

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i, \qquad s = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_{t,i}, \qquad \rho = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_{r,i}, \qquad \beta = \theta_j - \theta_i. \tag{3.26}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 是从磁体 i 指向磁体 j 的中心位移，s 和 ρ 是它在磁体 i 轴向、径向的投影，β 是两块磁铁的相对转角。

2026 S-Tyau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

磁铁尺寸固定后，单位磁化强度下的势能核只依赖 s、ρ 和 β。MATLAB 在三维规则网格上计算

$$\widehat{U}, \qquad \frac{\partial \widehat{U}}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \beta}, \tag{3.27}$$

$\widehat{U}$ 是提出磁化强度因子后的几何势能核。程序保存它及三个偏导数，并用随机内点的高阶积分检查误差。动力学计算先把 θ_i, θ_j 换成 (s, ρ, β)，再用链式法则把查得的梯度换回摆角坐标：

$$\begin{pmatrix} \partial U_{ij}/\partial \theta_i \\ \partial U_{ij}/\partial \theta_j \end{pmatrix} = p_i p_j \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j \left[\frac{\partial (s, \rho, \beta)}{\partial (\theta_i, \theta_j)} \right]^{\mathsf{T}} \nabla_{(s,\rho,\beta)} \widehat{U}. \tag{3.28}$$

方括号给出相对位置随两个摆角的变化率。势能和力矩来自同一张表，避免二者在数值上不一致。

3.6.2 平衡位置与释放初态

磁铁在释放前已经互相排斥，不能把所有摆竖直的位置直接当作初态。先从总势能求自然平衡角 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{e}}$：

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{e}}) = \mathbf{0} \tag{3.29}$$

$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{e}} = (\theta_{e,1}, \ldots, \theta_{e,N})^{\mathsf{T}}$ 同时满足每个摆的保守力矩为零。在该位置对势能求二阶导数，得到局部刚度矩阵

$$\boldsymbol{K} = \nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} V \big|_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{e}}}. \tag{3.30}$$

$\boldsymbol{K}$ 正定时，该平衡局部稳定。

对于抬住第 r 个摆并等待其余摆停稳的操作，以保守条件平衡近似释放前状态：

$$\theta_r(0) = \theta_{e,r} + \Delta\theta_r, \qquad \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_i} \right|_{\boldsymbol{\theta}(0)} = 0 \quad (i \neq r). \tag{3.31}$$

$\Delta\theta_r$ 是第 r 个摆相对平衡位置的释放偏角。真实静摩擦允许多个停止位置，故此条件平衡只是一种理想化准备方式；实验重放使用实际初态。后文单点释放则让其余摆留在原自然平衡，两种初态分别报告。

3.6.3 ODE113 求解流程

平衡位置和释放状态确定后，把二阶方程交给数值求解器。令

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

$\boldsymbol{y}$ 是状态向量，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_N)^{\mathsf{T}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ 是角速度向量。式(3.24) 改写为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{\theta}} V(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\omega})] \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

2026 S-TIYAU High School Science Award
仅用于2026年度科学奖论文公示

基础动力学模型用 MATLAB 的 ODE113 积分；小幅谱检验用 DOP853，含干摩擦算例则用带停滞判定的 RK4，具体设置见附录D。每次调用先计算磁铁的位置和方向，再遍历全部 $i<j$，查询磁势能梯度，加入重力、地磁和耗散并返回 $\dot{\boldsymbol{y}}$。结果是各摆的 $\theta_i(t)$ 与 $\omega_i(t)$。

逐级减小求解容差后，角度峰值、相位和能量变化应保持稳定。计算一旦越出查表范围或达到最小允许间隙便停止，不作外插。

3.6.4 能量检查

轨迹平滑并不能证明求解正确，还要检查能量。总机械能为

$$E(t)=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\theta}}+V(\boldsymbol{\theta}). \tag{3.34}$$

无耗散时，$E(t)$ 应保持不变；加入耗散后，式(3.24) 给出

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\sum_{i=1}^{N}D_i(\omega_i)\omega_i. \tag{3.35}$$

$D_i(\omega_i)\omega_i$ 是第 i 个摆的耗散功率。对时间积分后应满足

$$E(t)+\int_0^t\sum_i D_i(\omega_i)\omega_i\,\mathrm{d}t'=E(0). \tag{3.36}$$

积分项是从释放到时刻 t 的耗散能量。

4 简正模态与释放位置选择

4.1 平衡点附近的模态展开

在第3节的自然平衡点附近令 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{eq}}$。展开势能，保留二次项及线性黏性阻尼，得到

$$V-V_{\mathrm{eq}}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}K\boldsymbol{q}+O(\|\boldsymbol{q}\|^3),\qquad M\ddot{\boldsymbol{q}}+C\dot{\boldsymbol{q}}+K\boldsymbol{q}=0,\quad C=\mathrm{diag}(c_i). \tag{4.1}$$

这里 c_i 是黏性系数，与支点间距 d_i 区分。K 为稳定平衡处的对称正定刚度矩阵。先令 $C=0$，求广义本征问题 [3]：

$$K\boldsymbol{\phi}_n=\omega_n^2M\boldsymbol{\phi}_n,\qquad \boldsymbol{\phi}_m^{\mathsf{T}}M\boldsymbol{\phi}_n=\delta_{mn}. \tag{4.2}$$

当各摆惯量同为 I 时，可用单位正交振型 $\boldsymbol{u}_n=\sqrt{I}\boldsymbol{\phi}_n$，组成 $U=(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_N)$。以 $a_n=\boldsymbol{u}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{q}$ 表示等惯量模态坐标，则

$$q_i(t)=\sum_n U_{in}\left[a_n(0)\cos\omega_n t+\frac{\dot a_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t\right],\qquad E_n^{(2)}=\tfrac{I}{2}(\dot a_n^2+\omega_n^2a_n^2). \tag{4.3}$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award 应用平2026区域初赛科学类论文公示

质量归一坐标为 $\alpha_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathsf{T}} M \boldsymbol{q} = \sqrt{I}\, a_n$，对应能量为 $(\dot{\alpha}_n^2 + \omega_n^2 \alpha_n^2)/2$。两种写法描述同一运动，只是归一化不同，代入能量式时要保持一致。振型给出各摆一起运动时的固定幅度比例；实际看到的轨迹，则是多个振型分量叠加的结果。

4.2　双摆的模态叠加与拍振

理想对称双摆的 $K = \left(\begin{smallmatrix} k & -c \\ -c & k \end{smallmatrix}\right)$，其中 $k > c > 0$，c 在此仅为耦合刚度。两种振型是同相的 $1:1$ 和反相的 $1:-1$，频率分别为 $\sqrt{(k-c)/I}$ 和 $\sqrt{(k+c)/I}$。端点静止释放 $(A, 0)$ 同时激发二者：

$$q_1 = \tfrac{A}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t), \qquad q_2 = \tfrac{A}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t). \tag{4.4}$$

初始时两个分量在第二摆相消；频率不同使这种抵消随后被打破，形成往返的拍振。当前实际双摆频率约为 0.768 和 1.038 Hz，振型比例分别为 $1:1.01$ 和 $1:-0.99$，慢变化尺度约为 $1/|f_2 - f_1| = 3.71$ s。

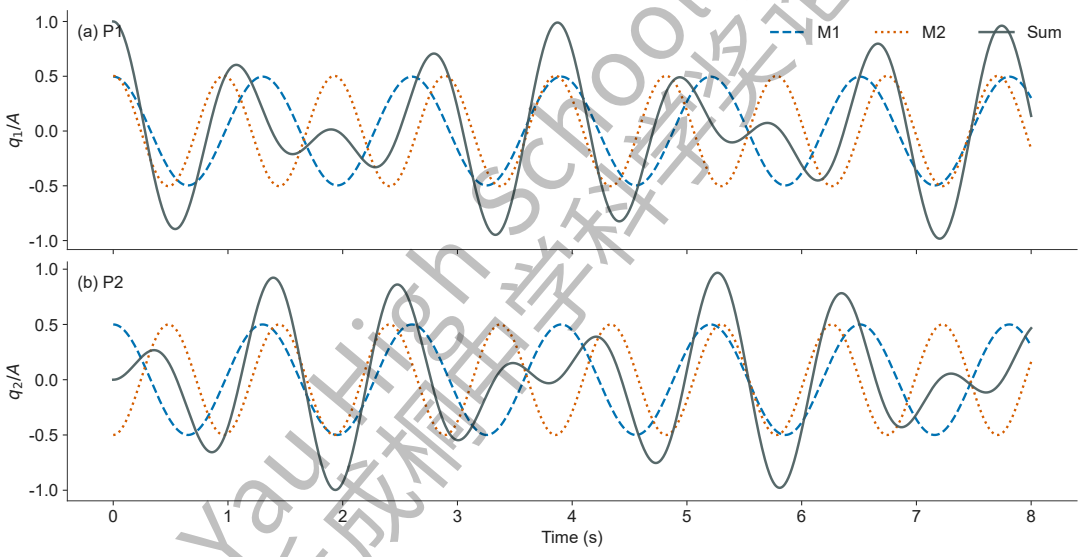


图 4.1: 双摆端点释放的模态叠加。初态为 P1 相对平衡偏移 $-1°$、初速度全为零；纵轴除以有符号初角。两条模态贡献在 P2 初始相消，随后形成明显响应。

4.3　从初态投影到模态能量

只将第 j 摆从原平衡偏移 A，其余初始偏移和全部速度为零，则 $a_n(0) = A U_{jn}$。正交性使总二次能量等于各模态能量之和，因此

$$E_n^{(2)}(0) = \tfrac{1}{2} I \omega_n^2 A^2 U_{jn}^2, \qquad p_{jn} = \frac{\omega_n^2 U_{jn}^2}{\sum_m \omega_m^2 U_{jm}^2}. \tag{4.5}$$

从几何投影到能量占比，中间还差一个频率平方。以双摆为例，两模态的几何投影接近各占一半，能量却约为 35:65；三摆中心释放时，最高频模态的几何投影约 64%，能量占

2026 S. -T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

比达到 83.4%。因此，振型图里“分量大”与能量上的“占比高”有关，却不是同一个量。本节基准采用 80 mm 支点间距、115 mm 支点至磁心距离、直径 25 mm 厚 3 mm

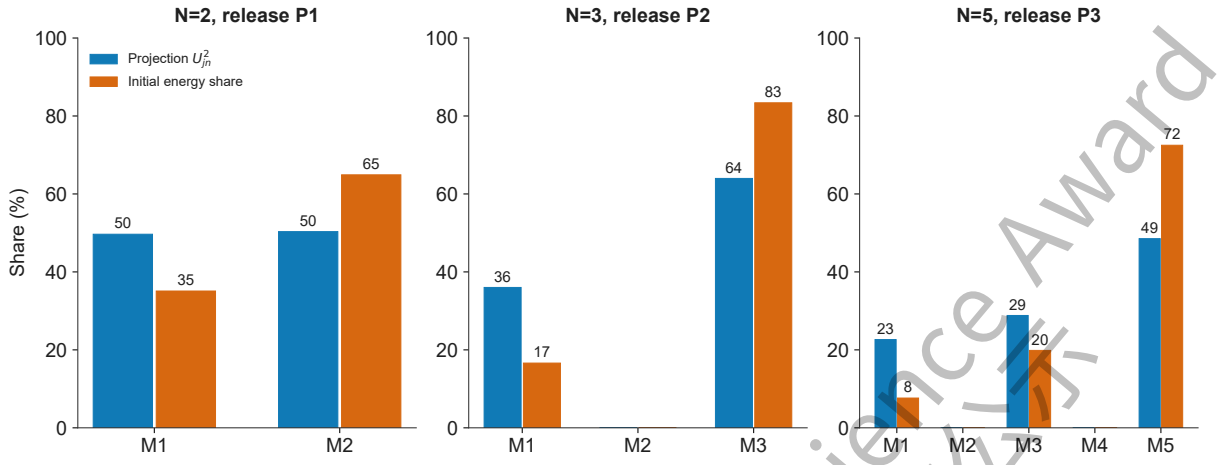


图 4.2: 几何投影与初始模态能量占比。蓝柱表示 U_{jn}^2，橙柱表示 p_{jn}；各面板中每种颜色分别归一为 100%。

的 N52 磁体，磁极交替排列、最左侧 N 极向右，$I = 8.247290711 \times 10^{-4}$ kg m^2。

4.4　三至五摆完整振型图谱

以下图谱沿用本节的同一组参数，分别求解三、四、五摆的平衡位置与完整刚度。各振型以第一摆分量为 1 展示；同号表示同相，异号表示反相，绝对值表示相对振幅。显示值作了舍入，后续计算使用完整精度。

4.4.1　三摆的中心节点与高频振型

M1：1.00 : 1.06 : 1.00，**三个摆基本同向。**中间摆稍大，但整体接近一起偏移。

M2：1.00 : -0.012 : -0.98，**两端反向，中间几乎不动。**在严格对称模型中，中心正好是节点：两端对中心的一阶作用相互抵消。实际中心分量很小但不等于零。

M3：1.00 : -1.92 : 1.04，**接近** 1 : -2 : 1。两端同向，中心反向，而且中心幅度约为端点的两倍。这种相邻反向的运动对应较强恢复作用，频率也最高。

三个振型的中心分量差别很大：M3 较大，M2 接近零。因此，从中心释放时，M3 容易被激发，M2 则很弱。M1 在中心也有分量，实际运动仍是多个模态的叠加。

2026 ST Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

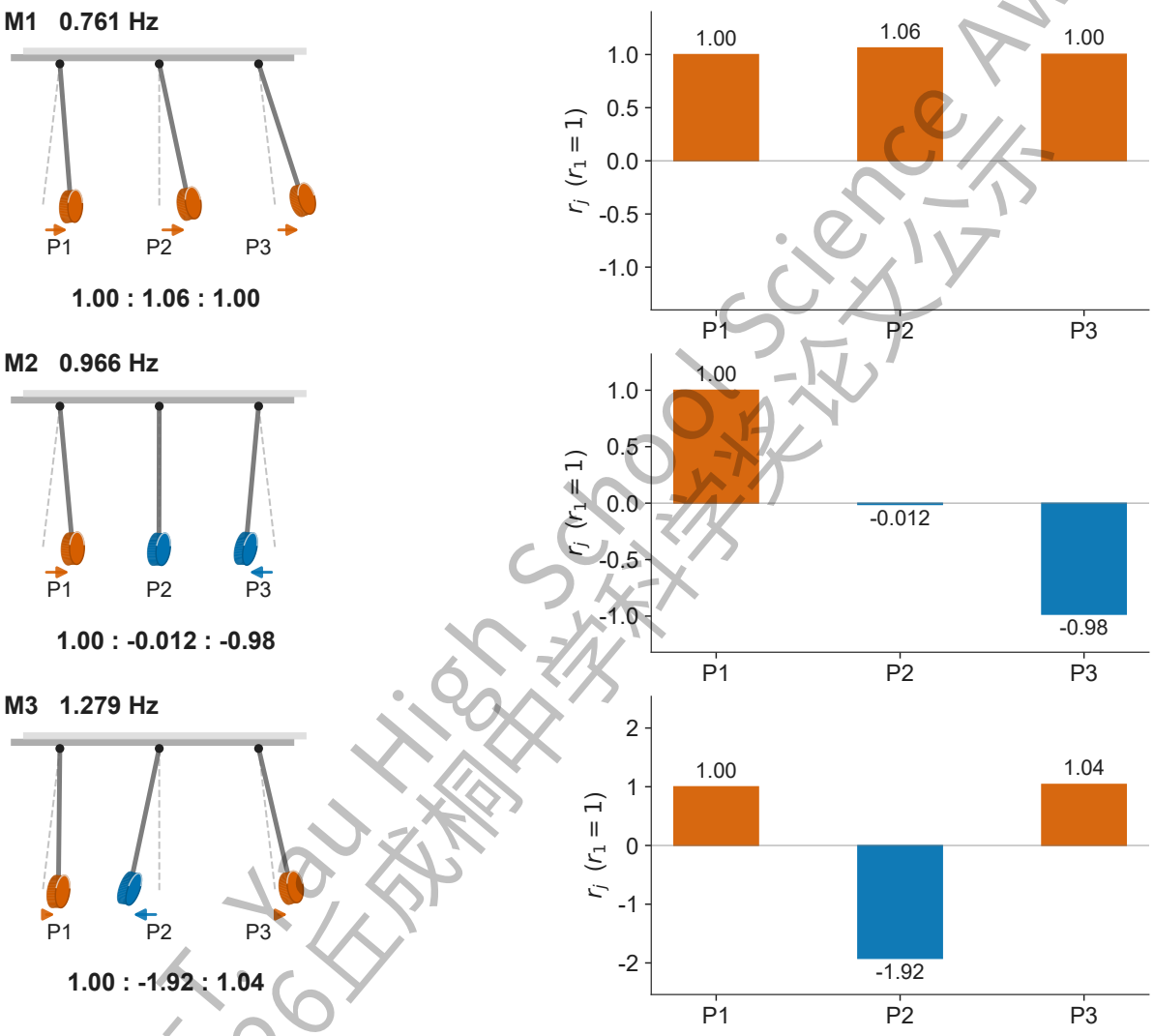


图 4.3: 三摆全部振型。直接比较中心 P2 的数字：M1 约 1.06，M2 约 −0.012，M3 约 −1.92。这些数说明同一个中心位置在不同模态中扮演完全不同的角色。比例以第一摆为 1，不能跨模态直接当作能量占比。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.4.2 四摆的内侧振型分量

M1：$1.00:1.09:1.09:1.01$。四个摆同向，内侧稍大。

M2：$1.00:0.36:-0.35:-1.00$。左半边与右半边反向，两个端点的幅度更大。

M3：$1.00:-0.91:-0.92:0.99$。两个端点同向，内侧两个摆向相反侧偏移，四个幅度接近。

M4：$1.00:-2.80:2.80:-0.99$。相邻摆依次反向，内侧振幅约为端点的 2.8 倍。

四摆没有单独的中心摆。M4 的两个内侧分量明显大于端点分量，因此释放 P2 或 P3 更容易突出 M4；若从端点释放，其他模态就会占有更多份额。

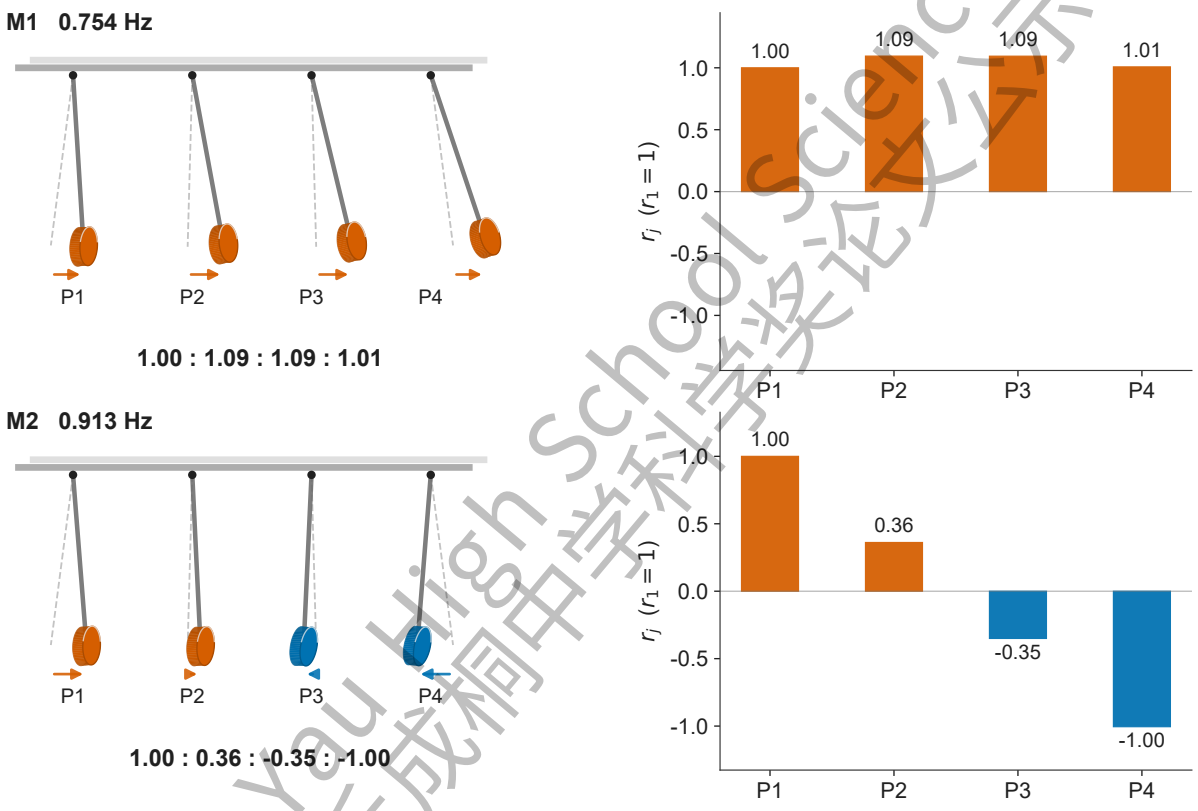


图 4.4: 四摆低频的两个振型。M1 各摆同向，M2 左右两组反向。M2 的较大分量位于两端，因此在端点施加初始偏移时，它比在内侧更容易被突出。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

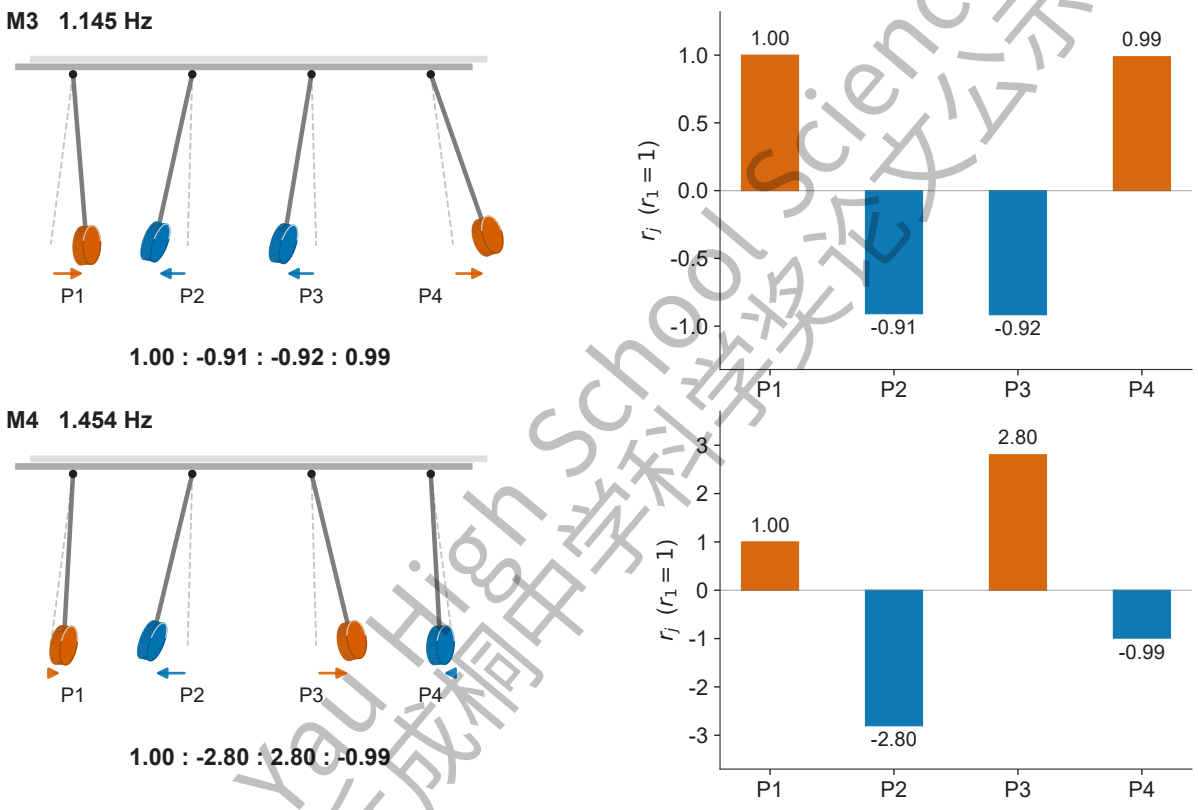


图 4.5: 四摆较高频的两个振型。M3 的端点与内侧反相，四个幅度接近；M4 逐摆交替反向，内侧幅度约为端点的 2.8 倍。数值比例使两种不同的相位结构能够被直接区分。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.4.3　五摆的中心振型分量

M1： 1.00 : 1.12 : 1.15 : 1.12 : 1.00。五个摆同向，中心略大。

M2： 1.00 : 0.56 : 0.003 : − 0.57 : − 0.99。左、右两侧反向，中心几乎不动。

M3： 1.00 : − 0.42 : − 0.96 : − 0.37 : 0.98。两端同向，内部三个摆向相反侧偏移，中心幅度仍明显。

M4： 1.00 : − 1.80 : 0.03 : 1.83 : − 1.06。两侧内部也各自反向，中心仍接近节点。

M5： 1.00 : − 3.45 : 4.92 : − 3.42 : 1.03。相邻摆交替反向，中心振幅约为端点的 4.9 倍，P2 和 P4 约为端点的 3.4 倍。

M2 和 M4 在 P3 处都接近节点，M5 的中心分量则很突出，中心释放因此会偏重 M5。具体占比要将各振型统一归一化后计算。M1 和 M3 在中心也有分量，仍会参与运动，不能忽略。

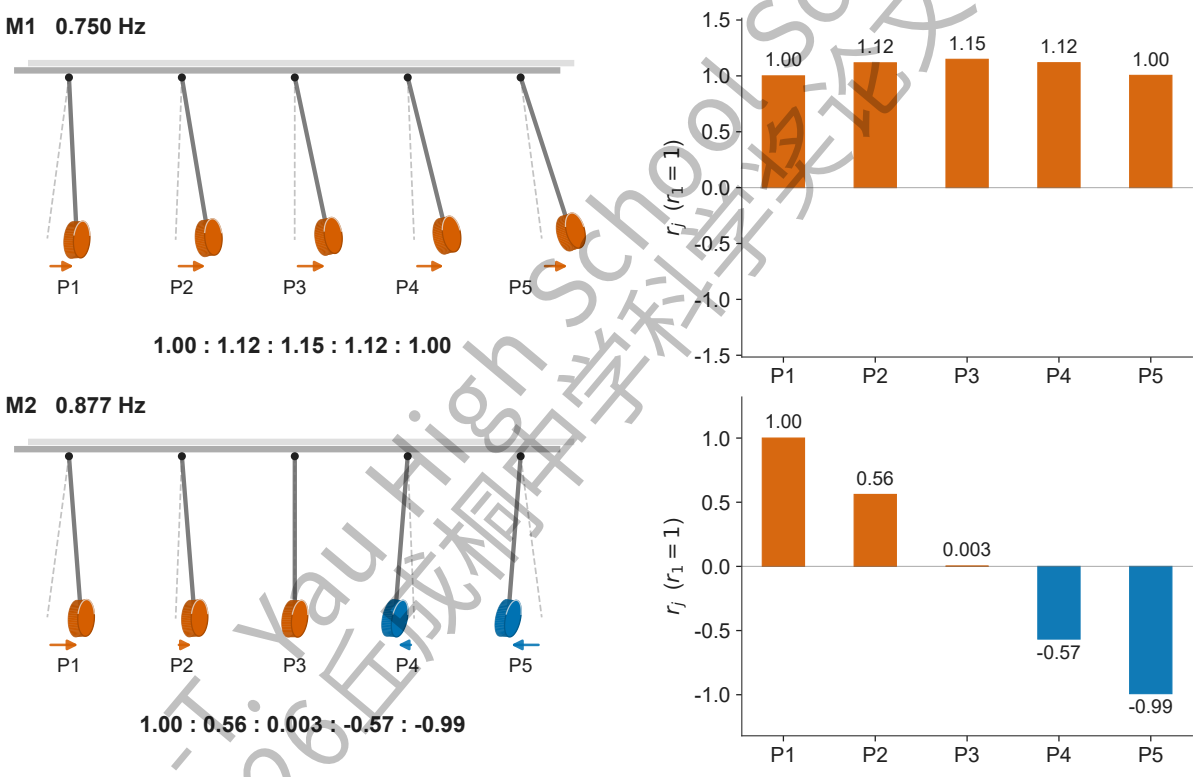


图 4.6： 五摆低频的两个振型。M1 基本同向，M2 左右反向且中心接近节点。M2 中心的 0.003 保留三位小数，避免把实际近节点误写成严格零。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

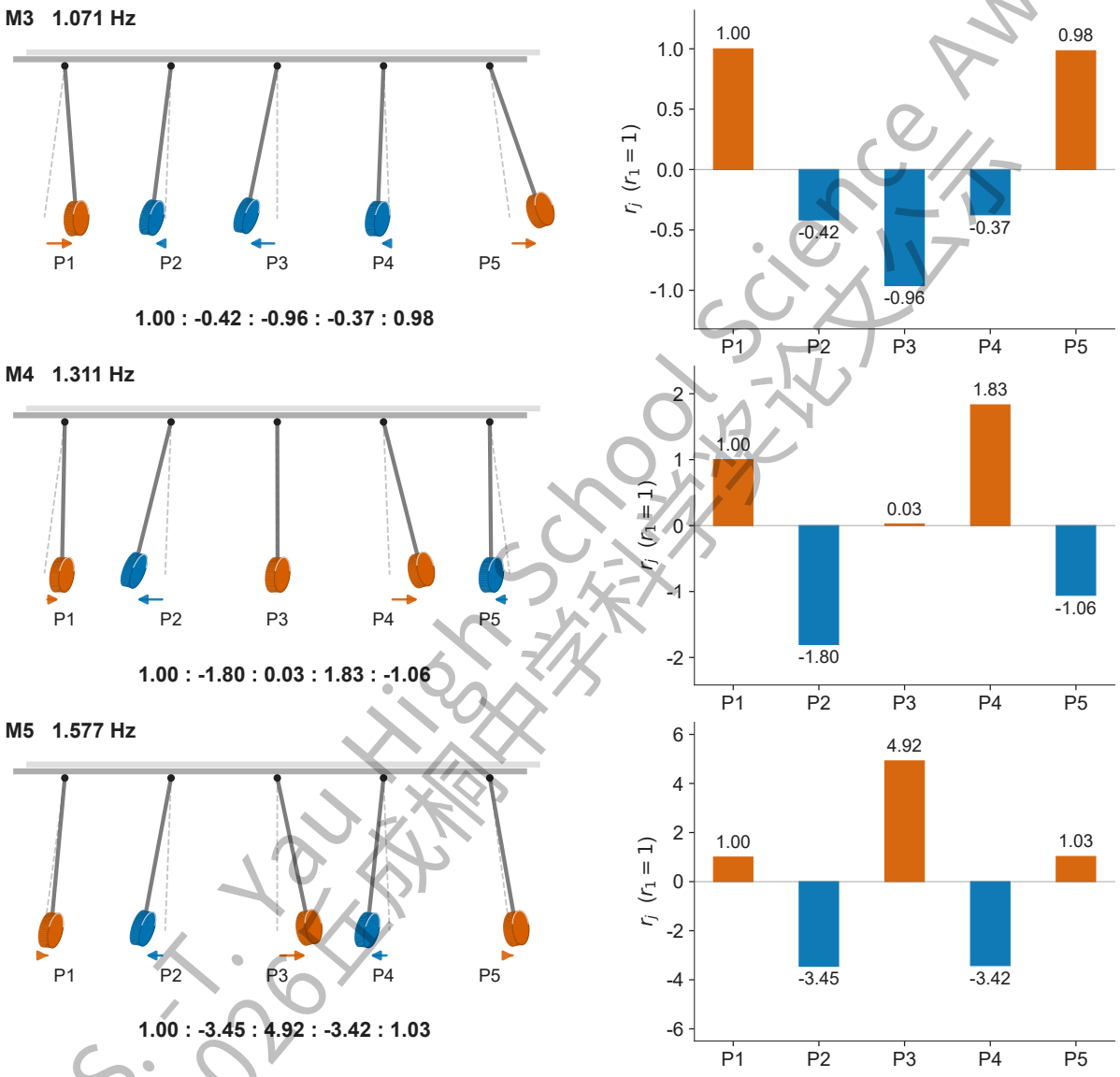


图 4.7: 五摆的 M3、M4 与 M5。M3 中心仍有明显分量，M4 中心再次接近节点，M5 中心分量最大。逐个比较中间 P3 的数字，就能判断中心初态会保留哪些模态、压低哪些模态。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.5 不同释放位置的模态组成

图4.8汇总 14 种单摆释放对应的 54 个占比。每一行代表一个释放位置，沿行比较就能看出：抬起这个摆时，初始能量主要分给了哪些模态。

双摆从任意一端释放，都是两个模态混合，反相模态较多。三摆的**端点释放**会显著激发 M2，约占 48% 至 50%；**中心释放**则使 M3 占 83.4%。四摆**内侧释放**使 M4 占约 65.2%，端点释放的组成较分散。五摆**端点释放**以 M2、M3 为主；**次外侧 P2、P4 释放**以 M4、M5 为主，合计约 82%；**中心释放**以 M5 为主，占 72.5%。

这组比较中，装置参数始终相同，频率和振型也相同。换一个摆释放，改变的是初始模态组合，随后看见的运动便随之改变。

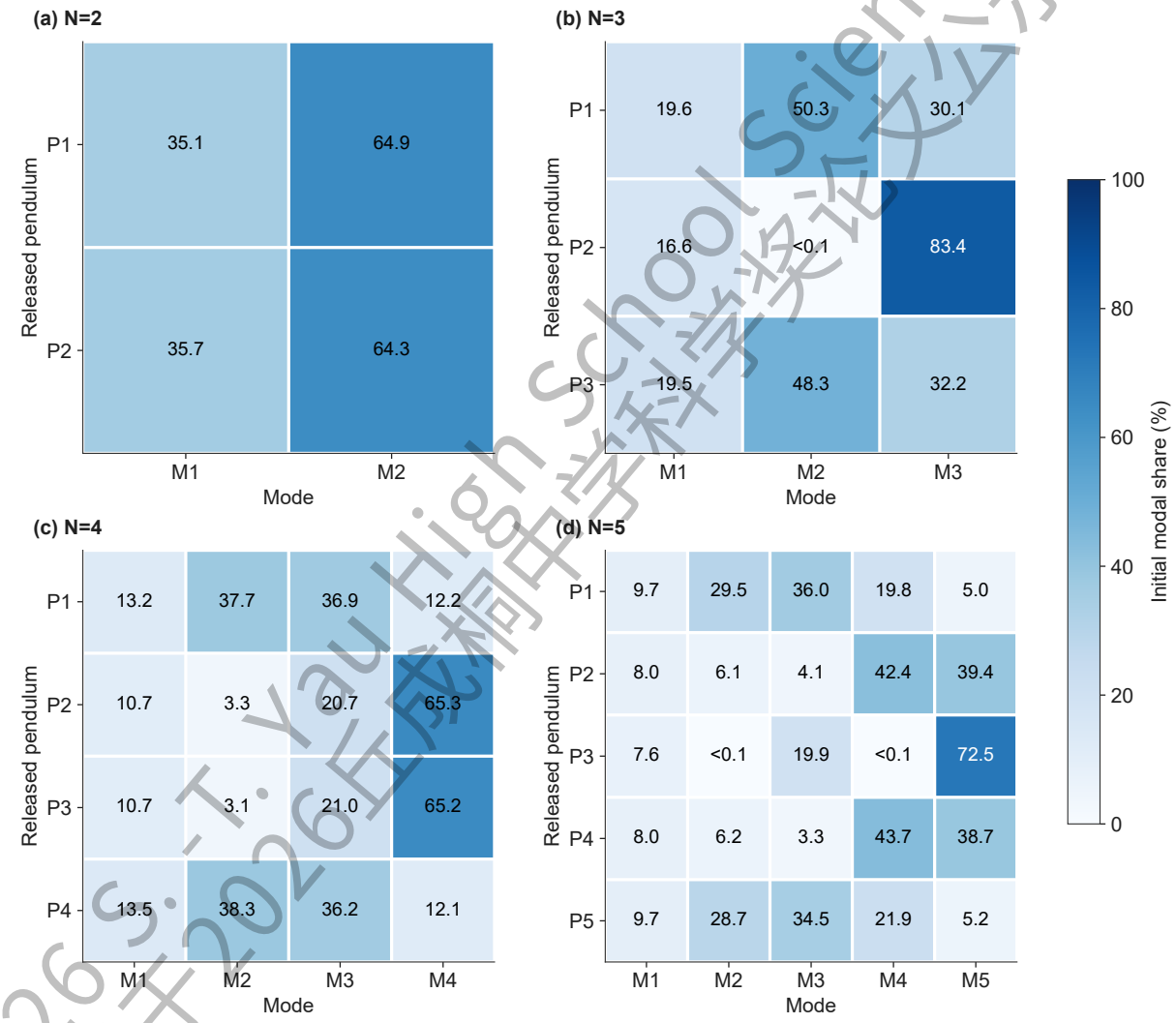


图 4.8: 2 至 5 摆全部单点静止释放的初始模态占比，单位%。行表示释放哪个摆，列表示模态编号。每一行加起来为 100%，显示舍入可能有小差异；小于 0.1% 的项统一标记。占比由原始完整精度振型与频率计算，不使用图中舍入后的比例。

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.6 从角度信号中提取模态频率

前面从刚度矩阵求出了频率。这些频率能否直接从角度信号中提取？傅里叶分析可以把时间曲线分解为不同频率的正余弦成分，较强的成分会在频谱中形成峰。

设 $q_i(t_\ell)$ 为第 i 摆第 ℓ 次采样的角度，去掉平均值后，计算 [9]

$$X_i(f)=\sum_{\ell=0}^{L-1} h_\ell\,[q_i(t_\ell)-\bar{q}_i]e^{-2\pi \mathrm{i} f t_\ell},\qquad S(f)=\sum_i |X_i(f)|^2. \tag{4.6}$$

L 是样本数，f 是频率，i 是虚数单位；窗函数 h_ℓ 减轻信号截断的影响。将各摆谱强度相加得到 $S(f)$，再从局部峰值读取频率。

对 2 至 5 摆均令 P1 偏移 -1° 后静止释放，用**完整、未经线性化的保守恢复力**计算角度，保留原黏性阻尼，不含库仑摩擦。与之比较的线性固有频率由同一组装置参数的刚度矩阵求出。32 秒信号中提取出的 14 个主峰与这些频率一一对应，最大绝对差约 0.000122 Hz，最大相对差约 0.0095%，见图4.9。

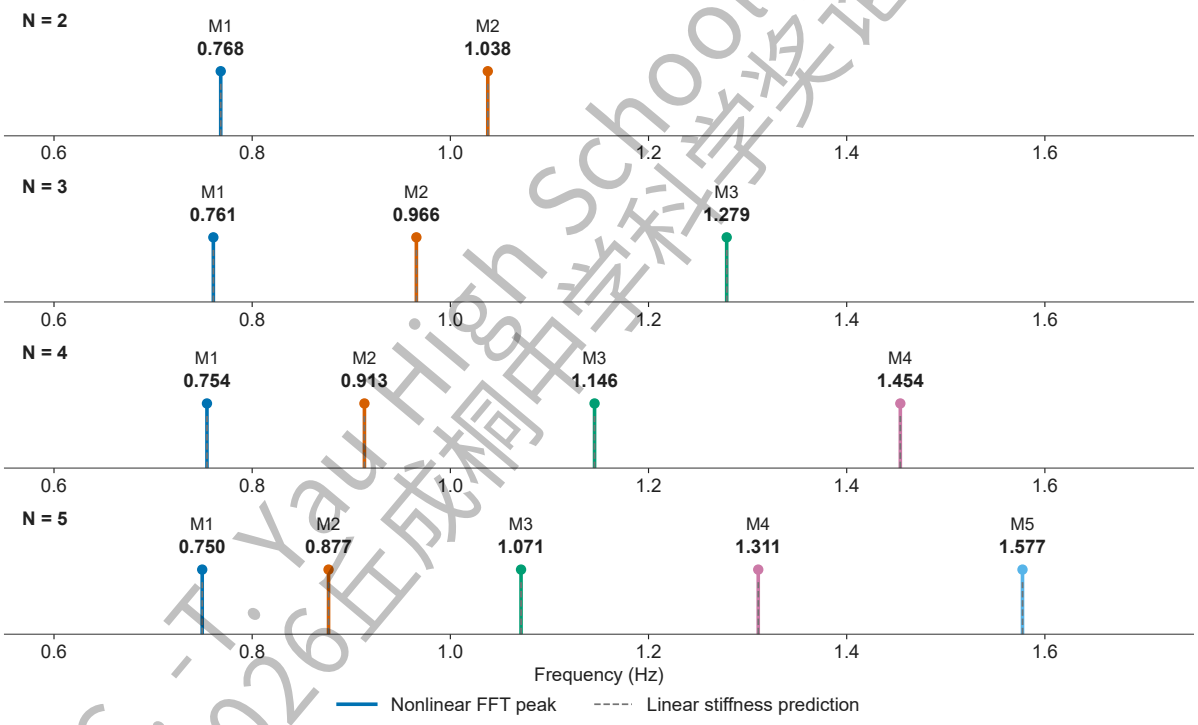


图 4.9: 完整非线性恢复力轨迹的主峰与线性刚度预测。四行依次为 2、3、4、5 摆；彩色实线与圆点为角度信号直接寻峰得到的频率，灰色虚线为刚度矩阵预测，二者在此尺度下接近重合。数字单位为 Hz；彩色实线标记等高，只表示峰的位置，不表示谱强度。

因此，**在这一小角度初态下，线性刚度很好地预测了完整恢复力模型的主频**。偏差同时包含有限振幅使恢复力偏离线性所造成的频移、阻尼频移和频谱提取误差。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.7 黏性阻尼下的模态演化

振型由恢复力决定，阻尼使振动逐渐减弱。将 $\boldsymbol{q} = U\boldsymbol{a}$ 代入式(4.1)，左乘 U^{T}，得到

$$I\ddot{\boldsymbol{a}} + (U^{\mathsf{T}}CU)\dot{\boldsymbol{a}} + I\,\mathrm{diag}(\omega_1^2,\dots,\omega_N^2)\boldsymbol{a} = 0. \tag{4.7}$$

本例各摆惯量相同，黏性系数也相同，因此 $C = c_v\mathbb{I}_N$，变换后的阻尼仍是对角形式。每个模态便独立满足

$$\ddot{a}_n + 2\beta\dot{a}_n + \omega_n^2 a_n = 0, \qquad \beta = \frac{c_v}{2I} = 0.02429\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{4.8}$$

求解时令 $a_n = e^{-\beta t}b_n$，代回式(4.8)后得 $\ddot{b}_n + (\omega_n^2 - \beta^2)b_n = 0$。因此振幅随时间减小，而 b_n 仍作简谐振动。记 $\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}$，静止释放的解为

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\beta t}\left(\cos\widetilde{\omega}_n t + \frac{\beta}{\widetilde{\omega}_n}\sin\widetilde{\omega}_n t\right). \tag{4.9}$$

正弦项保证零初速度。用此解重构各摆角度和速度，即可计算含耗散的能量变化。

第5.3节的能量图采用黏性线性模型，省略原模型中的库仑摩擦，以保持各模态独立演化；它的作用是研究线性叠加与耗散，不用于复现装置的全部摩擦过程。

若各摆阻尼不同，$U^{\mathsf{T}}CU$ 未必对角，各模态不再独立。库仑摩擦与静止阈值也不满足线性叠加；省略它是当前算例的明确设定。

4.8 线性近似的适用范围

前面的模态分析采用小幅初态。为检查这一近似，把同参数、同初态的线性恢复力轨迹与完整恢复力轨迹比较。先在两侧都去掉阻尼，考察 2 至 5 摆的全部 14 个单点释放位置；相对均方根误差在前 8 秒计算，轨迹以完整解为基准，恢复力以同一完整轨迹上的线性力为基准。两项均不超过 5% 才记为通过。

1 度时 14 个位置全部通过，最大轨迹误差 2.90%、恢复力误差 1.88%；3 度时仅 6 个通过，5 度时全部未通过。因此选 1 度作为共同工作幅度有数值依据。图4.10展示幅度增大后的偏离。5% 是选定容许误差，结果限于已测幅度、初态和 8 秒窗口，并非统一临界角。

2026 S. Yu, High School Science Award
仅用于2026年获得中学科学奖论文公示

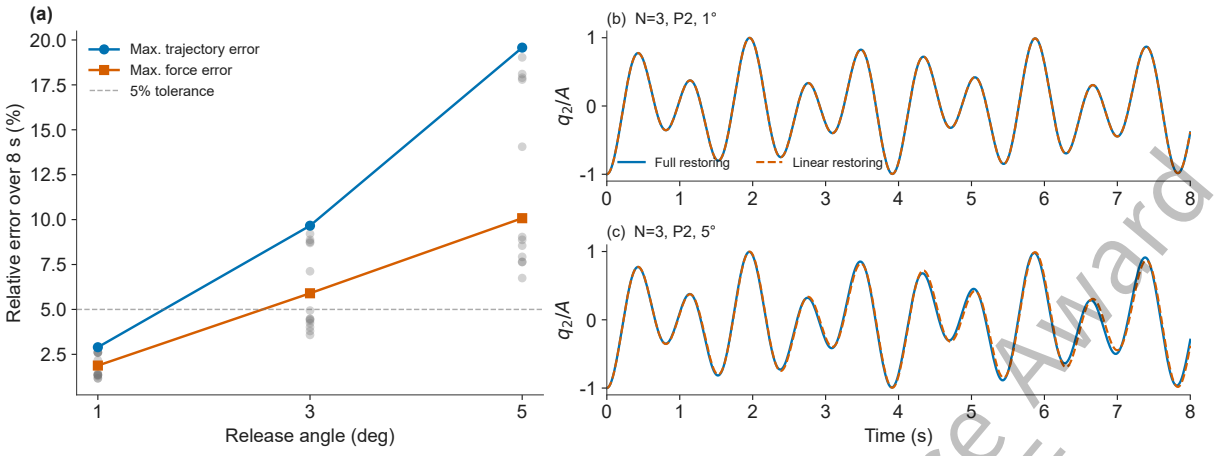


图 4.10: 无阻尼条件下的适用范围检查。左：灰点为各释放位置的轨迹误差，实线为 14 个位置中的最大值，连线仅连接采样点。右：三摆中心释放时，中间摆的归一化角度；1 度时两解接近，5 度时逐渐错位。

再保留原模型的黏性阻尼、库仑摩擦及停滞规则，复核三摆中心释放。1、3、5 度的轨迹误差约为 1.7%、5.4%、9.2%，仍只有 1 度通过。含库仑摩擦后，整个方程不再严格线性。

5 能量传递与有限时间谱聚焦

5.1 总能量与末端响应的统一定义

完整机械能 $E = T + V$ 由式(3.34)给出。以自然平衡能量为参考，初始超额能量和局部动能为

$$E_0 = E(t_0) - V(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{eq}}) > 0, \qquad T_i = \tfrac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2. \tag{5.1}$$

静止释放时初始动能为零，故分母必须包含整条链的初始超额势能。有限观察窗 $\mathcal{W} = [t_0, t_1]$ 内定义

$$\eta_K(t) = \frac{T_N(t)}{E_0}, \qquad \eta_K^* = \max_{t \in \mathcal{W}} \eta_K(t), \qquad t_K^* = \min\{t \in \mathcal{W} : \eta_K(t) = \eta_K^*\}. \tag{5.2}$$

η_K 只计末端动能，不包含末端局域势能。其分母是初始能量，区别于瞬时占比 $T_i / \sum_j T_j$。线性理论中改用 $E_0^{(2)} = \boldsymbol{q}_0^{\mathsf{T}} K \boldsymbol{q}_0 / 2$ 时，明确记为 $\eta_K^{(2)}$；线性与完整模型直接对照则使用同一个完整初始能量。

路径分析还需要规定相互作用能怎样分到各摆。完整模型采用每对磁势能均分：

$$E_i^{\mathrm{loc}} = T_i + V_{g,i} + V_{E,i} + \tfrac{1}{2} \sum_{j \neq i} U_{ij}, \qquad \Delta E_i = E_i^{\mathrm{loc}} - E_{i,\mathrm{eq}}^{\mathrm{loc}}, \tag{5.3}$$

$$J_{j \to i} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_j - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right), \qquad J_{i \to j} = -J_{j \to i}. \tag{5.4}$$

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

ΔE_i 可能为负，因而不作非负百分比分布。第5.2节另给满足对角占优条件的非负二次能量分配，用于线性图谱；两种分配均可核验总收支，但局部数值不能直接混比。长程耦合的成对能流已有相关研究 [10]，此处只用于有限链释放后的瞬态账本。

5.2 线性模型的局域能量与收支

本小节及下一小节的 E、E_i 均指平衡点附近的二次能量，采用第4节的等惯量、等黏性系数基准。完整刚度包含符号不同的远邻项，不能把所有 $-K_{ij}$ 都当成正耦合。为完整保留原矩阵，定义

$$b_{ij} = |K_{ij}|, \qquad s_{ij} = \operatorname{sgn} K_{ij}, \qquad \rho_i = K_{ii} - \sum_{j\neq i} |K_{ij}|. \tag{5.5}$$

本文 2 至 5 摆均已检查 $\rho_i > 0$，故二次势能可写为非负平方项之和：

$$V^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_i \rho_i q_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i<j} b_{ij}(q_i + s_{ij}q_j)^2, \tag{5.6}$$

$$E_i = \frac{1}{2} I \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2}\rho_i q_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{j\neq i} b_{ij}(q_i + s_{ij}q_j)^2. \tag{5.7}$$

第二行把每个成对项平均分给两端。展开平方即可验证 $\sum_i E_i = T + \boldsymbol{q}^{\mathsf{T}} K \boldsymbol{q}/2$，其中交叉项仍为原来的 $K_{ij}q_iq_j$；没有删边、取绝对值修补能量或改变动力学。$K_{ij} < 0$ 时，成对项为 $(q_i - q_j)^2$，对应熟悉的差位移耦合。本分配的非负性依赖 $\rho_i \geq 0$，不能直接推广至任意刚度矩阵。

对式(5.7)求导并代入运动方程，可得黏性模型的局域收支：

$$\dot{E}_i = -\sum_{j\neq i} J_{i\to j} - c_v \dot{q}_i^2, \tag{5.8}$$

$$J_{i\to j} = \frac{b_{ij}}{2}(q_i + s_{ij}q_j)(\dot{q}_i - s_{ij}\dot{q}_j), \qquad J_{j\to i} = -J_{i\to j}. \tag{5.9}$$

$J_{i\to j} > 0$ 表示在此分配约定下从 i 向 j 传递。全体相加时交换项抵消，因此

$$\dot{E} = -c_v \sum_i \dot{q}_i^2 \leq 0, \qquad E(t) + \int_0^t c_v \sum_i \dot{q}_i(s)^2\, ds = E(0). \tag{5.10}$$

这一关系也解释了总能量为什么只减不增，而局部色带仍可变厚。图像按 0.001 秒输出间隔计算，并核验总收支、每个摆的局域收支以及独立矩阵指数解；原始角度、速度、能量和有向能流均随补充数据保存。

5.3 二至五摆局域二次能量图谱

模态占比说明能量开始时分给了哪些振型，下面再看它怎样分布到各个摆上。2 至 5 摆均取 P1 偏移 $-1°$、其余偏移及全部初速度为零，保留完整刚度和原黏性系数，比较前 8 秒的变化。

2026S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

局域能量及其占比　按式(5.7)分配局域能量，各摆之和为系统总二次能量：

$$E(t)=\sum_i E_i(t)=\frac{1}{2}I\sum_i \dot{q}_i^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}}K\boldsymbol{q},\qquad \eta_i(t)=\frac{E_i(t)}{E(t)}\times 100\%. \tag{5.11}$$

左图画局域能量 E_i 的数值，单位为 μJ；右图画它占**当时剩余总能量**的百分比。两图的色带都从下到上对应 P1 至 PN：左图越厚，能量值越大；右图越厚，占比越高。把两图放在一起，就能同时看清总能量的减少和各摆之间的重新分配。

两个摆：清晰的往返交换。　图5.1中，蓝、橙色带轮流变厚。能量从一端转到另一端后又返回，总量一直减少。

这就是同相、反相模态叠加产生的拍振。两者频率不同，相对相位缓慢变化，合成运动便在两个位置轮流增强。频率差约 0.270 Hz，对应图中约 3.71 秒的慢变化尺度。

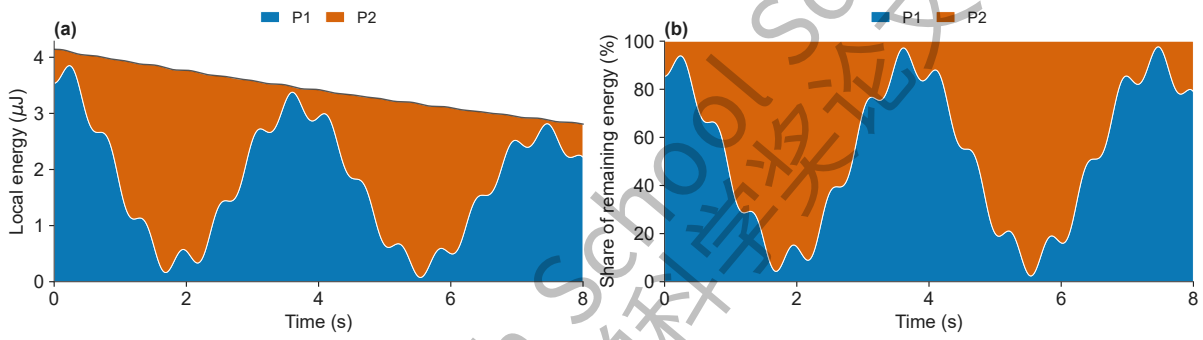


图 5.1：双摆局域能量的往返交换。（a）局域能量值；（b）当时剩余总能量中的百分比。蓝、橙分别为 P1、P2；色带厚度分别表示对应能量值或占比。

三个摆：中间摆能量的反复下降与回升　图5.2中，三个摆都曾在某些时刻占有最多能量。中间摆的占比反复下降，A 至 D 标出了四处低谷，其中最低约为 6.13%，仍不为零。下方三条能量曲线分别绘制，便于核对这些时刻的能量值。

这一现象可以从模态叠加来理解：不同模态在中间摆上的位移和速度贡献，有时相互加强，有时相互抵消，因而中间摆的运动会暂时减弱。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

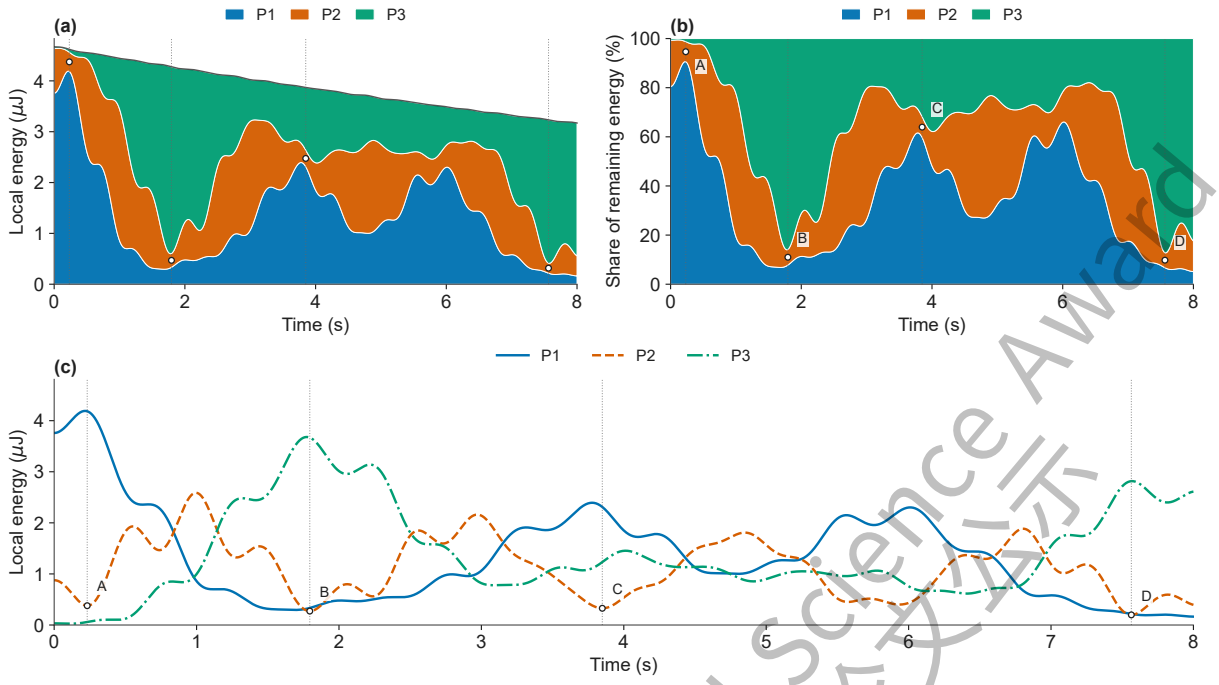


图 5.2: 三摆局域能量的分配。上方两张色带图和前文的双摆色带图绘制方法相同。下方为三条局域能量曲线，没有叠加，便于比较各摆的能量变化。图中 A 至 D 标出中间摆能量占比的四处低谷：百分比图中表现为橙色色带变薄，下方曲线显示这些时刻的能量值，仍不为零。

实验中的短时减弱另见第6.7节。

四个摆：能量可以同时分布在几个位置　图5.3中，两个内侧摆先分得较多能量；约 2 秒时，另一端 P4 的占比升到 71.0%。随后几个摆的色带同时变厚，能量重新分散。

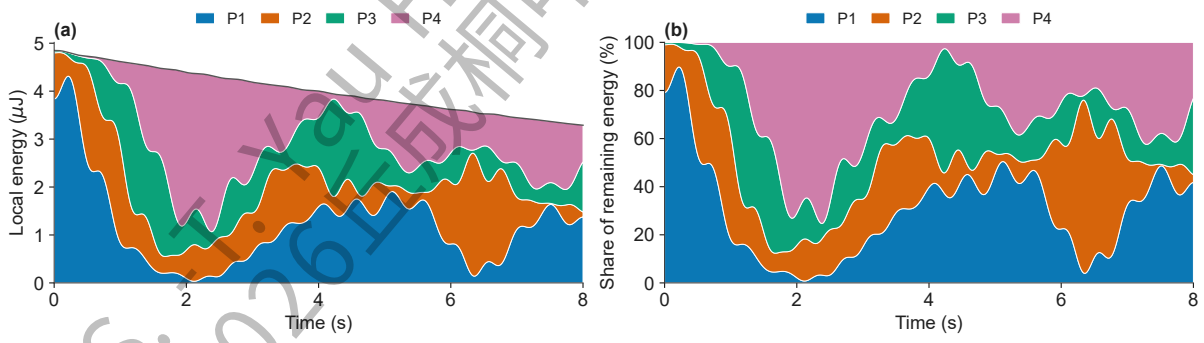


图 5.3: 四摆局域能量的分布。紫红色带为 P4，其余颜色与前图一致。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

五个摆：末端聚集与回流 五摆图中也能看到能量向另一端集中：约 2.52 秒时，P5 的能量占比达到本段记录中的最大值 76.6%。但能量没有一直留在末端。随后 P5 的色带变薄，靠近原释放端的色带又逐渐变厚，能量重新向原释放端集中。

与双摆相比，这里的变化不再只有一个清楚的往返节奏。五种模态以不同频率叠加，在各处形成不同的加强与抵消。若换一个摆释放，初始模态组成也会改变，能量的分布过程便会随之变化。

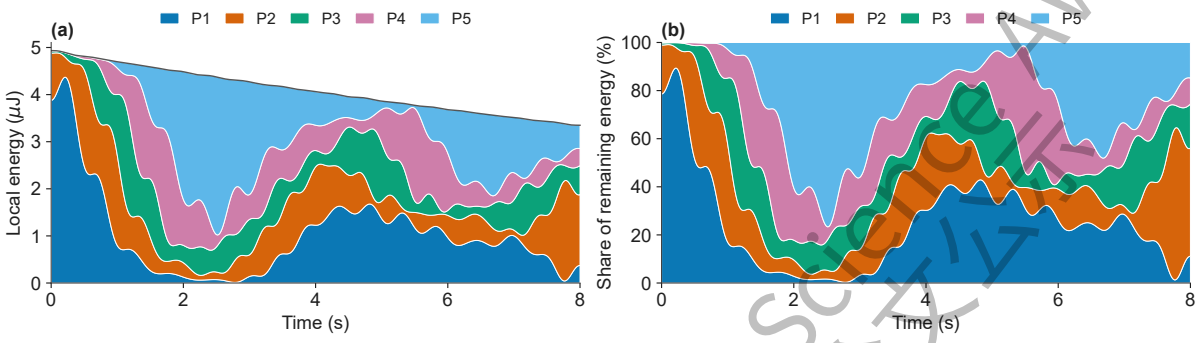


图 5.4: 五摆局域能量的分布。

总量衰减与局域分配 四组的总能量都在减少，各个摆分得的能量也在不断改变。相同的 1° 初始偏移对应不同的 $E(0) = K_{11}A^2/2$，因为各组 K_{11} 不同。但惯量和黏性系数相同，8 秒时都剩余约 67.8% 至 67.9%。弱阻尼下，周期平均能量近似按 $e^{-2\beta t}$ 衰减；总量变化相近，内部份额却可以很不同。

局域能量的重新分配不代表模态间的能量交换。本例中，每个模态独立演化，$E_n = I(\dot{a}_n^2 + \omega_n^2 a_n^2)/2$ 只按 $\dot{E}_n = -c_v \dot{a}_n^2$ 耗散。一个摆的角度却由多个模态组成，即 $q_i = \sum_n U_{in} a_n$；计算能量时将它平方，便会出现交叉项。这些项随着相位关系变化，让同一个摆分得的能量时多时少。

由于成对耦合势能由两端均分，初始没有移动的摆也会分得部分势能。

5.4 自由与移除中间摆的公平对照

两端支点固定在 0 和 160 mm，中间支点在 80 mm。我们比较中间摆自由和移除两组，端点位置、磁极和其他装置参数不变（图5.5）。各摆使用式(3.24)的完整恢复力、原黏性阻尼和库仑摩擦。静止附近按驱动力矩与摩擦阈值判断停摆和再起动。

释放操作是抬住左端，等待其余摆停稳，再释放。计算中，先求各组自然平衡 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{eq}}$，再固定左端偏角，使其余摆满足 $\partial V/\partial\theta_j = 0$，所有初速度均为零。两组匹配式(5.1)定义的初始超额势能。因此两组左端释放角通常不同。这个理想静力初态便于公平计算；真实静摩擦会使停稳位置略有不同，实拍后应以整组实测初角替换。

2026 T'ao High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

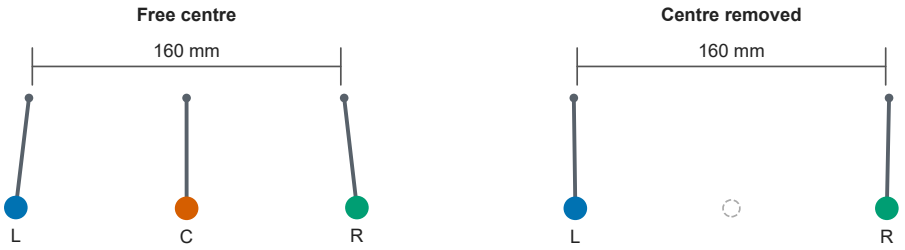


图 5.5: 自由与移除两组对照。L、C、R 表示左端、中间和右端；图示为各组自然平衡附近的构型，不按尺寸比例绘制。

5.4.1　振幅与峰值时刻

记 $q_i(t) = \theta_i(t) - \theta_{i,\mathrm{eq}}$。为对应肉眼看到的摆动，定义前 $T = 8$ 秒内的**最大摆幅**和振幅比

$$A_R^*(T) = \max_{0\le t\le T} |q_R(t)|, \qquad \rho_A(T) = \frac{A_R^*(T)}{|q_L(0)|}. \tag{5.12}$$

这里“摆幅”具体指相对自然平衡的最大偏角，不是峰峰值的一半，也不人为提取包络。它包括释放瞬间已有的偏角，不能把准备阶段的偏移误算成新传入的振动。

能量方面使用式(5.2)定义的末端动能产额。分别记录 A_R^* 与 η_K^* 首次达到最大值的时刻 t_A^*、t_K^*。它们不必相同：**摆到最远处时，速度接近零；动能最大时，摆通常还在途中。**振幅比也不能直接平方后当作传能效率。

据此，用两个差值量化中间摆的提升：

$$G_A = A_{R,\text{自由}}^* - A_{R,\text{移除}}^*, \qquad G_C = \eta_{K,\text{自由}}^* - \eta_{K,\text{移除}}^*. \tag{5.13}$$

G_A 用角度报告，G_C 用百分点报告。它们比较共同时间窗内各组自己的峰值，不要求峰值同时出现；η_K 只计右端动能，并非右端全部机械能或瞬时能流。

5.5　相同初始能量下的端点响应

先看自由组 5° 释放的例子。匹配相同初始能量后，移除组左端偏角约为 5.92°。图5.6把两组的角度和动能放在同一时间尺度上。

自由组右端最大摆幅约 3.21°，是左端初始偏角的 64.1%；移除组只有 0.53°，振幅比为 8.9%。中间摆因此带来约 **2.68° 的摆幅提升**。右端在自由组约 2.02 秒摆到最远处，移除组约 2.31 秒达到自己的最大偏角。两组动能峰值则更早，分别在约 1.76 秒和 2.03 秒出现。只看能量图，会漏掉随后摆到最远处的这一幕。

10° 参考释放时，自由组右端约在 2.02 秒摆到 7.68°；移除组最大只有 3.73°，而且要等到 6.25 秒。结合表5.1，三个能量档中都是自由组响应更强。不过，“更强”未必总对应“更早”：若某组运动很弱，早早出现一个小峰，也不能据此判断它传得更快。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

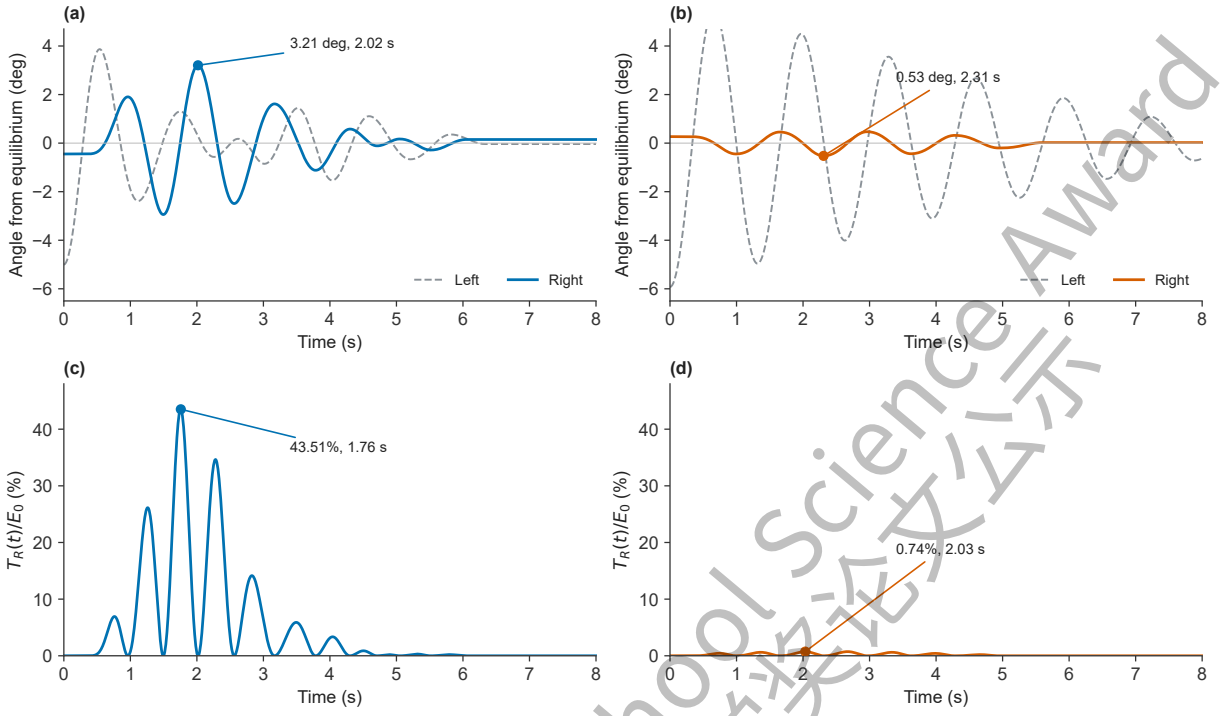


图 5.6: 5° 参考释放的完整含摩擦响应。左列为自由组，右列为移除组；上排为左、右端偏角，下排为右端动能比例。点与文字分别标记最大摆幅、最大动能及其时刻。两组共用坐标尺度。

表 5.1: 不同释放能量下的完整模型结果。每两行初始能量相同；初角列为实际左端偏角的大小。ρ_A 与 η_K^* 是不同的量，百分数不能混用。

状态	初角/°	A_R^*/°	ρ_A/%	t_A^*/s	η_K^*/%	t_K^*/s
自由	3.00	1.45	48.4	1.50	26.3	1.76
移除	3.57	0.17	4.9	0†	0.21	0.76
自由	5.00	3.21	64.1	2.02	43.5	1.76
移除	5.92	0.53	8.9	2.31	0.74	2.03
自由	10.00	7.68	76.8	2.02	60.6	1.75
移除	11.70	3.73	31.9	6.25	10.01	6.58

† 该组最大偏角就是释放瞬间的准备偏移，之后没有超过它；0 秒不能解释成振幅已瞬时传到右端。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

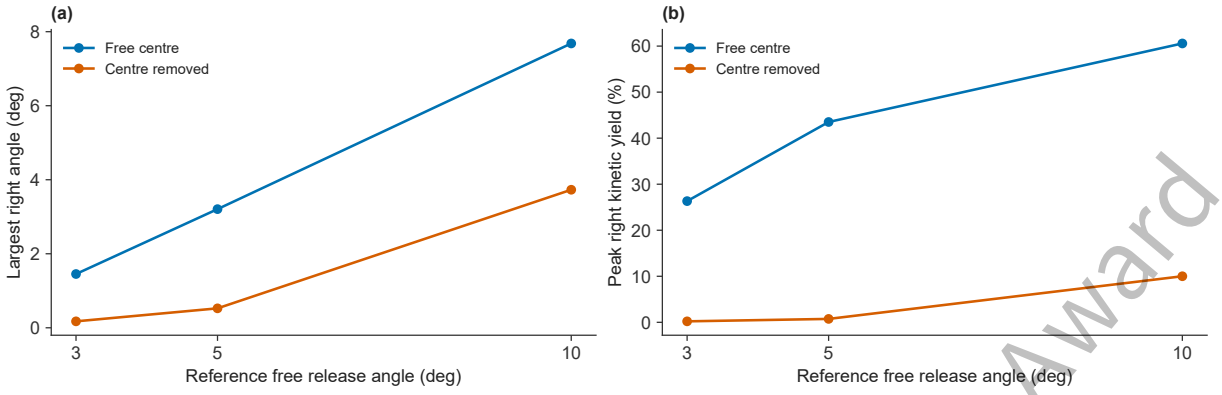


图 5.7: 三个释放能量下的峰值比较。（a）右端最大摆幅；（b）最大动能比例。横轴用自由组初角标记各能量档，移除组实际初角见表5.1。

5.6　完整轨迹的模态分解

5.6.1　用固定振型分解完整运动

为什么有中间摆时，右端能摆得更大？我们仍可使用平衡点附近的线性振型，但这次直接分解前面的含摩擦轨迹，不另算一套无摩擦结果。本组各摆惯量相同，取正交振型

$$K\boldsymbol{u}_n = I\omega_n^2\boldsymbol{u}_n, \qquad \boldsymbol{u}_m^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}_n = \delta_{mn}, \qquad a_n(t) = \boldsymbol{u}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{q}(t). \tag{5.14}$$

于是右端偏角与速度可以精确重构为

$$q_R(t) = \sum_n u_{Rn}a_n(t), \qquad \dot{q}_R(t) = \sum_n u_{Rn}\dot{a}_n(t). \tag{5.15}$$

初始条件通过 $a_n(0) = \boldsymbol{u}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{q}(0)$ 决定各分量的起点。振型描述每一部分如何分布到各个摆；相加时的方向决定它们在右端增强还是抵消。

这里的模态分解有一个限制：含摩擦时，$a_n(t)$ 已不再各自独立作简谐振动。令非线性恢复力的剩余部分为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}) = \nabla V(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{eq}} + \boldsymbol{q}) - K\boldsymbol{q}$，将式(3.24)投影后得到

$$I\ddot{a}_n + c_v\dot{a}_n + I\omega_n^2 a_n = -\boldsymbol{u}_n^{\mathsf{T}}\big[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\tau}_f\big]. \tag{5.16}$$

右侧仍包含非线性磁力与摩擦。所以，这一步只是用固定振型拆开已经算出的完整运动，帮助解释各分量怎样相加，并没有把含摩擦模型换成理想简谐系统。

5.6.2　位移与速度的同向叠加

在约 2.017 秒，自由组右端三个偏角分量约为

$$1.384^\circ + 1.442^\circ + 0.380^\circ = 3.206^\circ. \tag{5.17}$$

三个分量同向，右端因此摆到较大的角度。移除组在同一时刻却约为

$$-2.224^\circ + 2.174^\circ = -0.050^\circ, \tag{5.18}$$

2026 年 T. Yau High School Science Award 仅用于 2026 年度科学奖论文公示

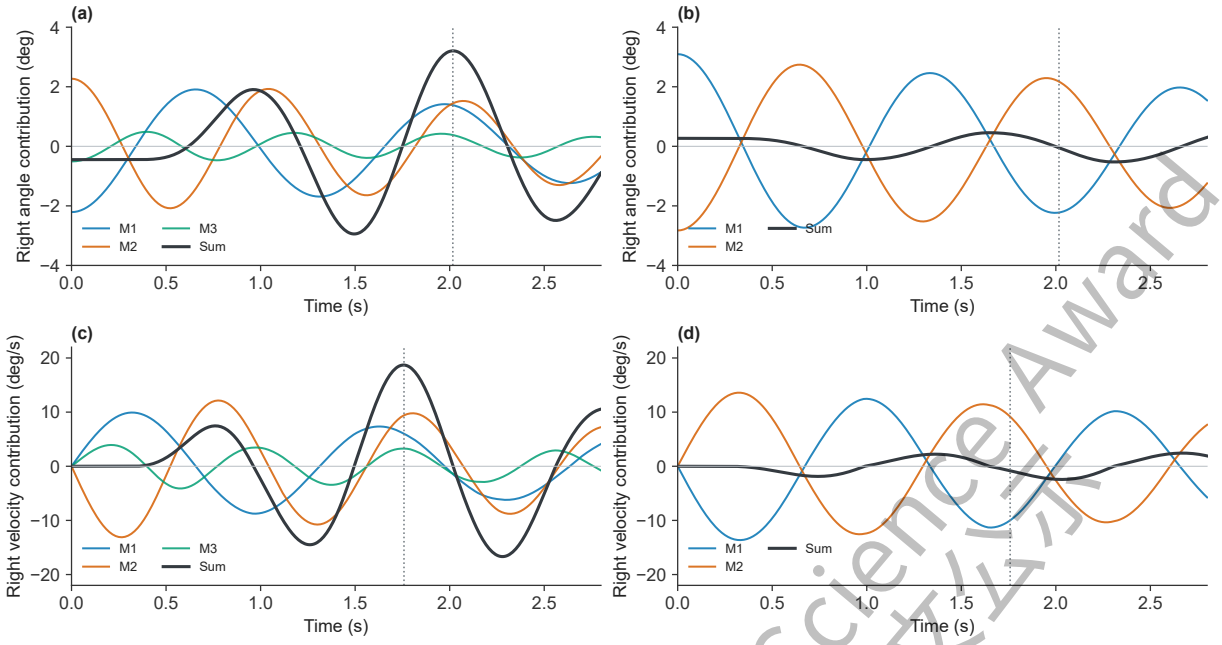


图 5.8: 5° 参考释放的完整轨迹在振型上的投影。左列为自由组，右列为移除组；上排分解偏角，下排分解角速度。M1 等按固有频率从低到高编号，深灰线为各分量之和。上排虚线均在 2.017 秒，下排均在 1.758 秒，分别对应自由组摆幅与动能的峰值附近。

几乎相互抵消。这说明右端摆得小，并不等于所有振型分量都小。

再看稍早的约 1.758 秒，自由组右端的速度分量约为 $6.02 + 9.41 + 3.27 = 18.70\ ^\circ/\mathrm{s}$；移除组则约为 $-9.99 + 9.16 = -0.83\ ^\circ/\mathrm{s}$。速度也有同样的相加与抵消关系，而动能取决于这个代数和的平方：

$$T_R = \tfrac{1}{2} I \Big(\sum_n v_n \Big)^2 = \tfrac{1}{2} I \sum_n v_n^2 + I \sum_{m<n} v_m v_n, \qquad v_n = u_{Rn} \dot{a}_n. \tag{5.19}$$

所以，**右端摆得最远与动得最快，都可以从分量的同向叠加理解，但发生的时刻不同。**交叉项只反映叠加效果，并不产生额外能量。

移除组的两种固有频率约为 0.7403、0.7820 Hz，自由组则为 0.7608、0.9658、1.2790 Hz。加入中间摆后，频率、振型和等待后的初角都变了。图5.8说明这些变化怎样影响分量的相加，但还不能把响应提升全部归给线性模态；摩擦同样在决定峰值和停摆时刻。这个分解适合解释已经发生的运动，能否提前预测，还要另作检验。

5.7　固定总长的间距扫描

保持两端总距离 160 mm，只改变中间支点距左端的距离 x。各位置重新求平衡和等待后初态，匹配原 80+80 mm、自由组 5° 释放的能量 $E_0 = 1.00901 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$，继续保留完整磁力和原摩擦。先在 40–120 mm 内每 4 mm 扫描，再在 76–84 mm 内每 0.5 mm 细扫。

原 80+80 mm 的最大动能比例约 43.51%，细扫候选 78.5+81.5 mm 约 43.66%，提高了 0.15 个百分点。摆幅的变化也很小：扫描最大值约 3.22°，原位置已有 3.21°。在这

2026 S.T. Qiu High School Science Award 仅用于2026正成同中学科学论文公示

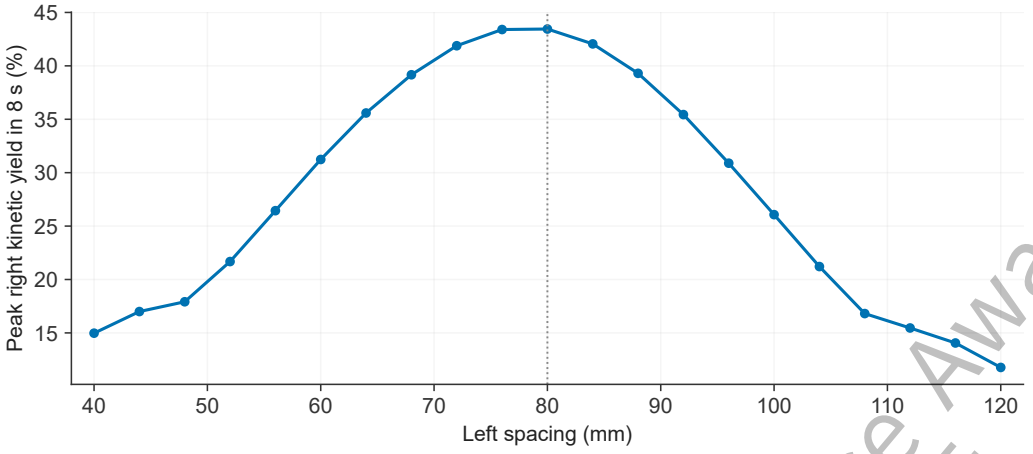


图 5.9: 固定总距离的间距扫描。纵轴为前 8 秒右端最大动能比例；虚线标记原等间距位置。正文只展示整体趋势，局部细扫数据保留用于核验。

组条件下，等间距布置已处于较高响应区域，继续微调的收益远小于保留或移除中间摆带来的差别。相比追求这点提升，先检验这一较大的对照差异更有意义。

明显偏离中间位置则不同：40+120 mm 和 120+40 mm 的最大动能比例约为 15.0% 和 11.8%。改变间距会同时改变振型、频率和初态，不能简单认为中间摆越靠近右端越好。本次结果只针对给定的释放能量、摩擦和 8 秒时间窗，不代表所有条件下的最优位置。

5.8　末端动能聚焦的静态上界

5.8.1　初始能量与末端参与度的匹配

前面的分解要先知道完整轨迹。我们接着追问：只知道初态、振型和频率，能否先估计末端动能的上限？先从保守线性系统讨论。设 M, K 正定，初态静止且 $\boldsymbol{q}_0 \neq 0$，以 $E_0^{(2)} = \boldsymbol{q}_0^{\mathsf{T}} K \boldsymbol{q}_0/2$ 归一。取质量归一模态 $\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_r = \omega_r^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_r$、$\boldsymbol{\phi}_r^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_s = \delta_{rs}$，令 $\alpha_r = \boldsymbol{\phi}_r^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{q}_0$，则

$$\boldsymbol{q}(t) = \sum_r \alpha_r \boldsymbol{\phi}_r \cos \omega_r t. \tag{5.20}$$

定义两组非负归一权重

$$p_r = \frac{\omega_r^2 \alpha_r^2}{2E_0^{(2)}}, \qquad h_r = I_N \phi_{Nr}^2, \qquad \sum_r p_r = \sum_r h_r = 1. \tag{5.21}$$

p_r 表示初态给第 r 模态的能量份额；h_r 表示该模态在末端速度坐标中的参与权重。由末端速度的模态展开，设 $b_r = \operatorname{sgn}(\alpha_r \phi_{Nr})\sqrt{p_r h_r}$，则

$$\eta_K^{(2)}(t) = \left[\sum_r b_r \sin \omega_r t\right]^2 \le \underbrace{\left(\sum_r \sqrt{p_r h_r}\right)^2}_{S} \le 1. \tag{5.22}$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

先用三角不等式和 $|\sin| \le 1$，再用柯西–施瓦茨不等式，就得到式(5.22)。其中 S 只由初态和振型决定，无需先积分运动方程。只有 $p_r = h_r$ 时，S 才能等于 1。这也说明，把能量尽量集中到某一个模态未必有利：若这个模态在末端的分量很小，末端响应仍会受到限制。

5.8.2 有限时间内的实现条件

当 $S > 0$ 时定义

$$C_K(t) = \frac{\left|\sum_r b_r \sin \omega_r t\right|}{\sum_r |b_r|}, \qquad \boxed{\eta_K^{(2)}(t) = S C_K(t)^2}. \tag{5.23}$$

S 给出上限，C_K 则表示某一时刻接近上限的程度。它同时受正弦幅值和正负抵消影响，因此不只是相位指标。要真正达到 S，所有 $b_r \neq 0$ 的项都须满足 $\operatorname{sgn}(b_r)\sin \omega_r t = \sigma$，且共同取 $\sigma = \pm 1$。换句话说，各项不但要同向，还要同时达到各自的速度极值。这比“同号叠加”更苛刻。于是

$$1 - \eta_K^{(2),*}(T) = (1 - S) + \left[S - \eta_K^{(2),*}(T)\right] \tag{5.24}$$

右侧第一项表示初始权重与末端权重不匹配造成的差距，第二项表示观察时间内还未达到 S 的差距。即使没有耗散，也可能出现第二种情况，不能把它当作损失的能量。求 $C_K(t)$ 的峰值仍需计算各模态随时间的变化，只是省去了完整非线性方程的积分。

5.8.3 理想镜像链的一个推论

若两端惯量相等、两端模态强度相等，且仅首端位移释放，则 $p_r = \omega_r^2 h_r / \mathbb{E}_h(\omega^2)$，于是

$$\boxed{1 - S = \frac{\mathrm{Var}_h(\omega)}{\mathbb{E}_h(\omega^2)}}. \tag{5.25}$$

只要末端同时包含多个不同频率，式(5.25)就给出 $S < 1$。这里讨论的是静止位移释放后末端能得到多少动能，与冲量传输或位移镜像传输的问题不同。实际基准刚度的镜像残差约为 0.33%–1.20%，并非严格镜像对称，不能直接套用这个等式。我们用合成镜像矩阵检查该推论，实际装置的结果仍按式(5.22)计算。

5.9 固定总长下的预先谱预测检验

三摆支点取 $[0, x, 160]$ mm，保留原磁极、地磁、重力和黏性参数，每个几何重求平衡。以 $x = 80$ mm、首摆负向 0.5° 释放的完整超额势能为共同 E_0^{full}，其他位置调整首摆角度以匹配该能量；其余初始偏移均为零。此处不加入干摩擦，用于检验小幅恢复力近似。

检验选取 $x = 64, 72, 80, 88, 96$ mm 及两组留出位置 68、92 mm，观察时间统一为 $T = 8$ s。全部谱预测均在这些工况的完整轨迹积分前保存；预先设定的比较标准是峰值

2026 S. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公众号

相对误差不超过 5%、峰值时间差不超过 0.10 s。这些数值用于判断预测是否符合预期，不是实验误差。留出位置没有用于拟合参数或修改判据。 七组峰值误差均小于 0.57%，

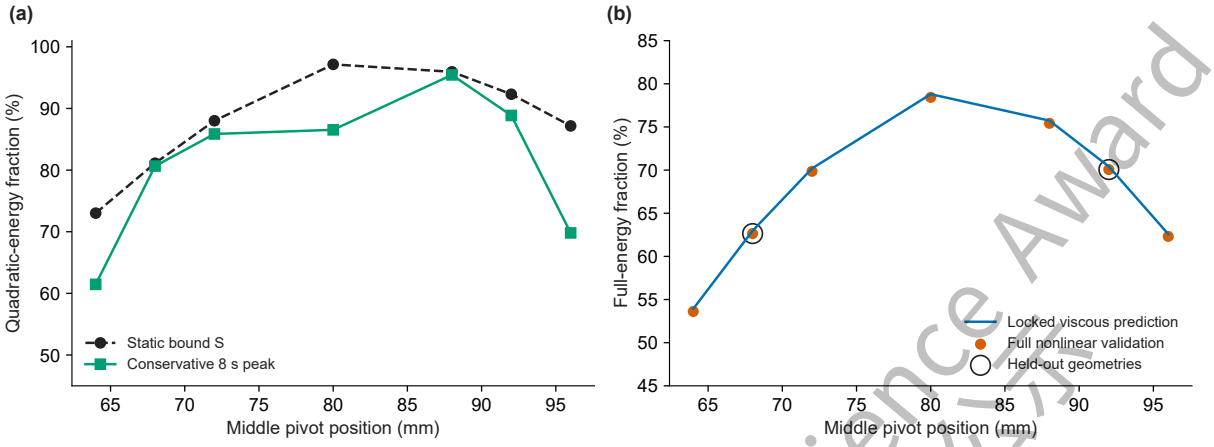


图 5.10: (a) 真实几何约束下的静态界和保守 8 秒峰值；(b) 先保存的黏性谱预测与完整非线性积分。圆圈标出留出位置。两面板分别采用图中标明的能量分母，(a) 为线性二次能量下的上界，(b) 以完整初始能量比较预测和积分结果。

表 5.2: 几何工况检验。星号为留出位置；两种产额均用完整初始能量归一。

x (mm)	预测产额 (%)	完整模型 (%)	相对误差 (%)	时间差 (s)
64	53.923	53.618	0.568	0.000
68*	62.971	62.643	0.524	0.000
72	70.189	69.861	0.470	0.004
80	78.799	78.424	0.478	0.000
88	75.733	75.418	0.417	0.000
92*	70.411	70.063	0.497	0.000
96	62.593	62.316	0.446	0.000

68 和 92 mm 分别约 0.524% 和 0.497%。峰值时间差最大 0.004 s，即本组一个输出间隔。$x = 68$ mm 积分加密后的峰值变化约 5.34×10^{-7} 个百分点，远小于线性近似偏差。

这里采用先保存谱预测、再计算完整轨迹的顺序。68、92 mm 也曾用于 5° 含摩擦扫描，此次检验的是小幅单点释放与仅黏性的条件。七组结果给出的误差都低于预设标准，说明在这组小幅条件下，模态信息已能较准确地估计末端峰值。

5.10 非线性恢复力与干摩擦的交叉对照

采用第5节 5° 参考释放的等待后初态，自由组与移除组分别匹配相同完整初始能量。

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

为避免把两个变化混为一谈，采用“线性/完整恢复力”与“仅黏性/黏性加干摩擦”的四种交叉对照；每组的四种模型共享相同初态和完整能量分母。按“线性恢复力

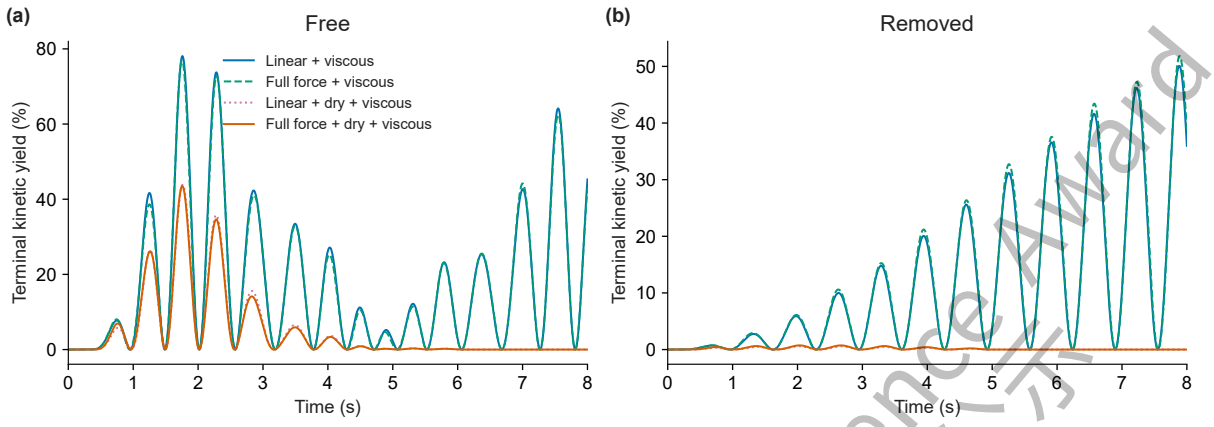


图 5.11: 相同初态下分开改变恢复力和干摩擦。仅用黏性谱预测不能量化实际含干摩擦装置，完整模型的数值结果亦不是实验数据。

仅黏性、完整恢复力仅黏性、线性恢复力含干摩擦、完整恢复力含干摩擦”的顺序，自由组峰值依次约为 78.09%、76.99%、43.82%、43.51%；移除组依次约 50.10%、51.83%、0.593%、0.740%。这里最显眼的变化来自干摩擦，尤其在移除组中，峰值降幅远大于替换恢复力模型的影响。因此，若只看到谱预测偏高就归因于非线性失谐，很可能找错主要原因；比较恢复力的影响时，摩擦条件必须相同。

6 实验结果与理论对照

这一节回到实验。我们先比较二至五摆的角度轨迹，再由实测角度估算各摆的相对动能分布，并分析空间展宽与频谱结构。固定旧参数的测角方法对照另列于附录B，与本节采用的参数条件区分。

6.1 完整模型与实验轨迹

第 i 个摆的均方根误差和归一化均方根误差定义为

$$\mathrm{RMSE}_i = \sqrt{\frac{1}{K_i}\sum_{k=1}^{K_i}[\theta_i^{\mathrm{sim}}(t_k) - \theta_i^{\mathrm{exp}}(t_k)]^2}, \tag{6.1}$$

$$\mathrm{NRMSE}_i = \sqrt{\frac{\sum_k[\theta_i^{\mathrm{sim}}(t_k) - \theta_i^{\mathrm{exp}}(t_k)]^2}{\sum_k[\theta_i^{\mathrm{exp}}(t_k) - \overline{\theta_i^{\mathrm{exp}}}]^2}}. \tag{6.2}$$

K_i 是第 i 个摆的有效帧数，t_k 是第 k 帧时刻。θ_i^{sim} 和 θ_i^{exp} 分别是理论角度和实验角度，横线表示实验平均值。RMSE 保留角度量纲，NRMSE 用实验角度的波动尺度归一化，便于比较不同摆的拟合质量。

2026 Shi Yan Hao Cup Middle School Science Award
仅用于2026年成都中学科学奖公示

6.1.1 二至五摆轨迹对照

图6.1至图6.4把实验角度和有限圆柱模型给出的轨迹画在同一时间轴上。暖橙色点为视频结果，深灰绿色实线为理论结果。

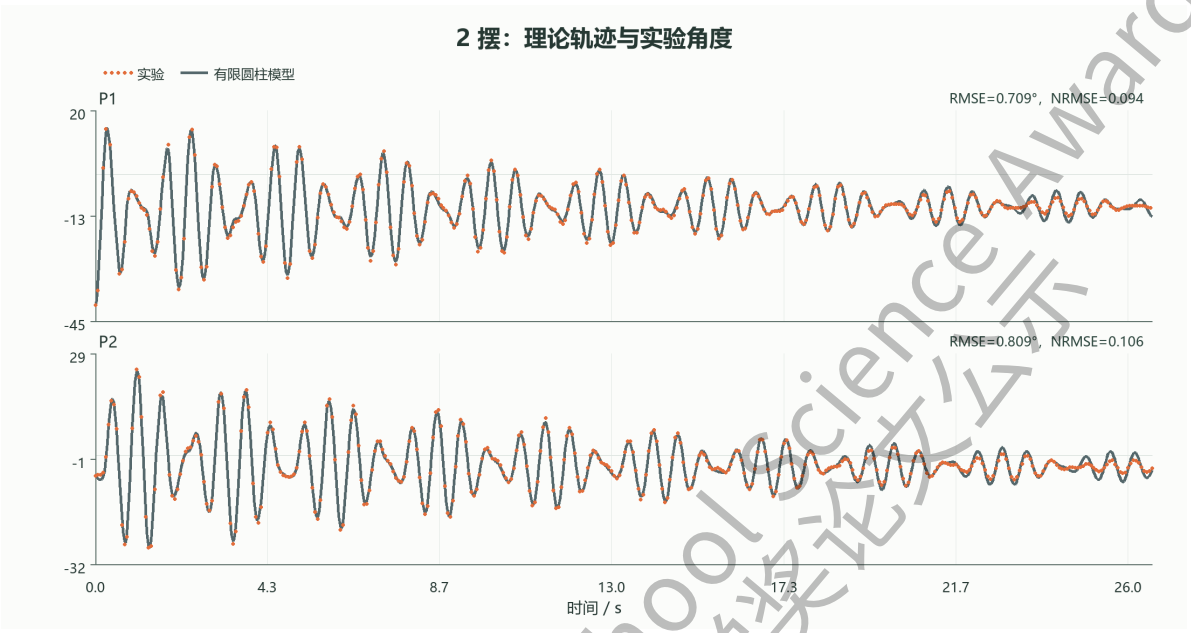


图 6.1：二摆实验角度与理论轨迹。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

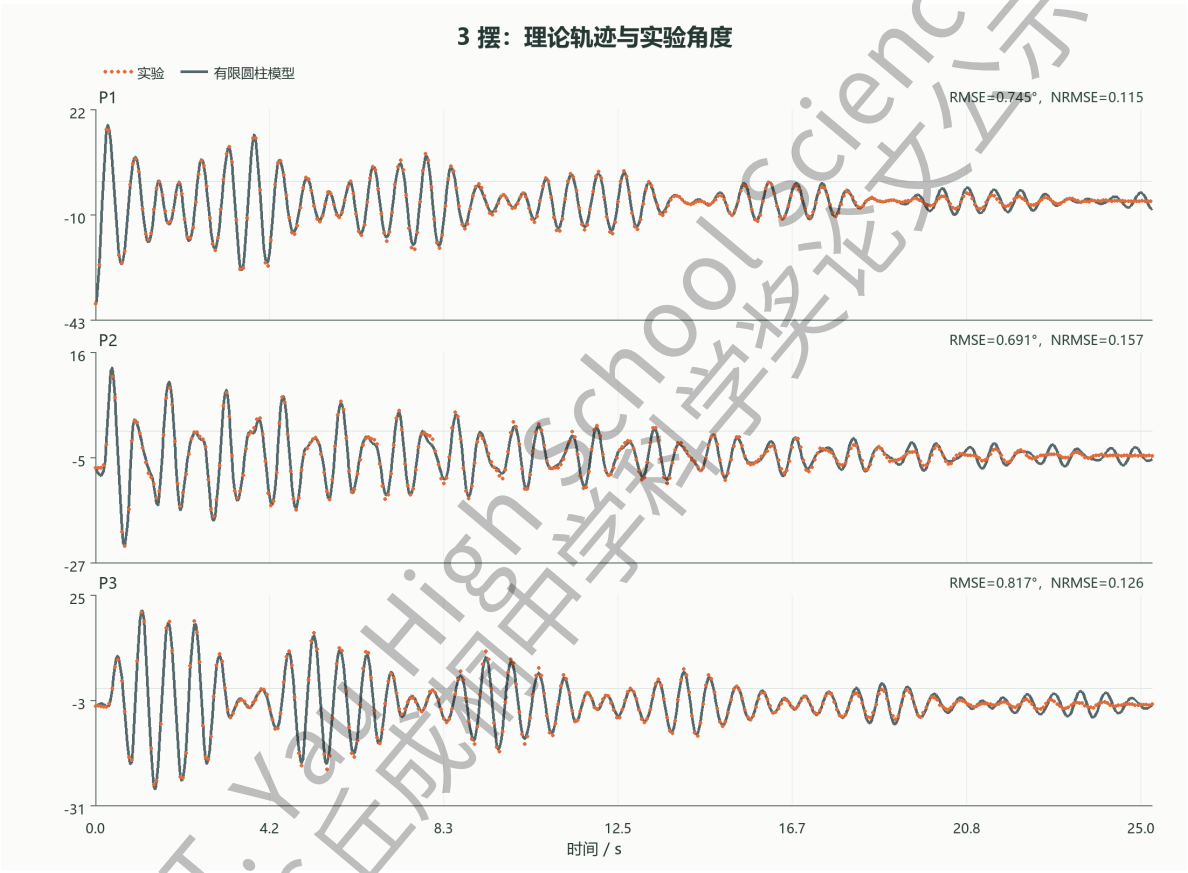


图 6.2: 三摆实验角度与理论轨迹。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

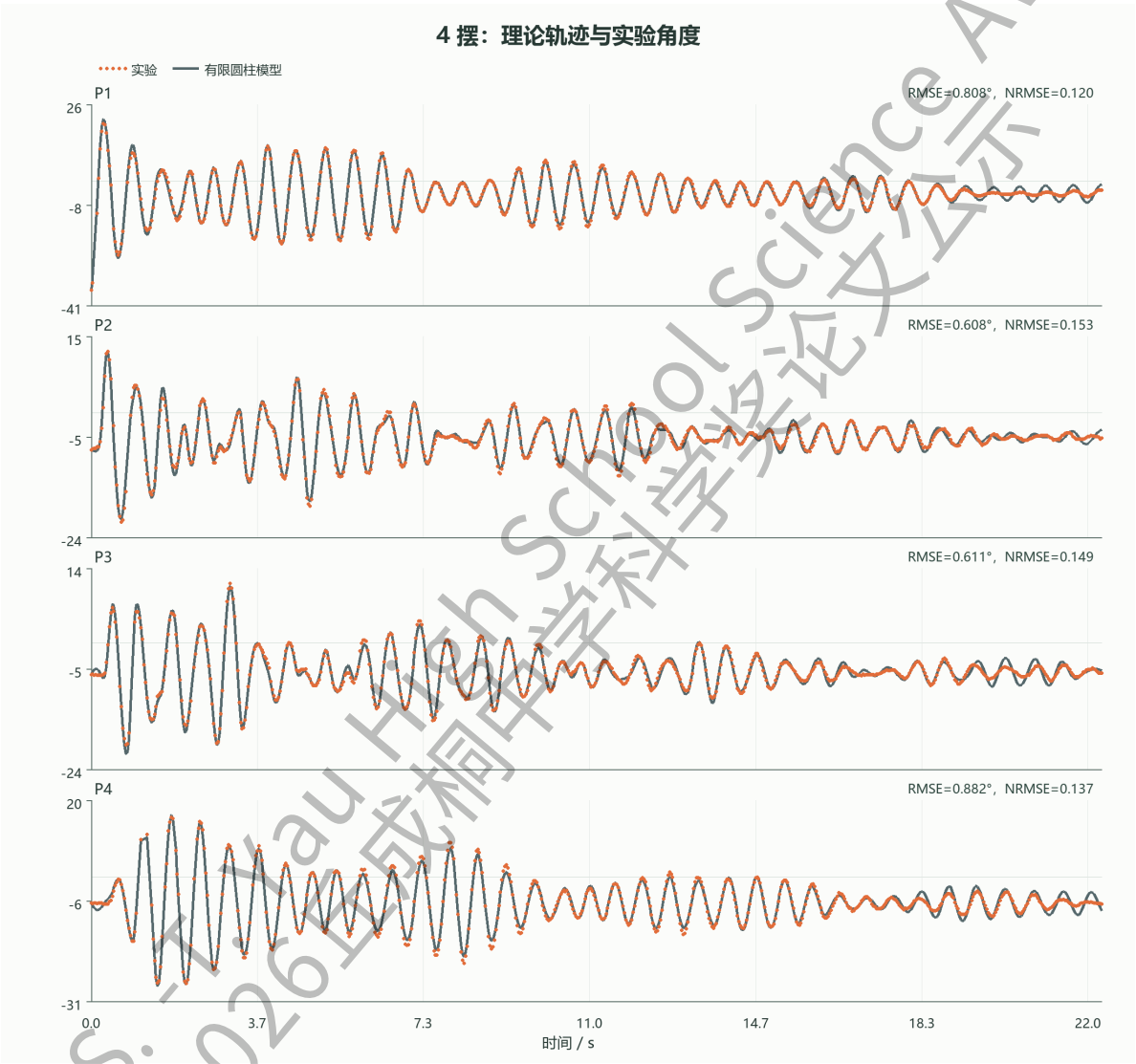


图 6.3: 四摆实验角度与理论轨迹。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

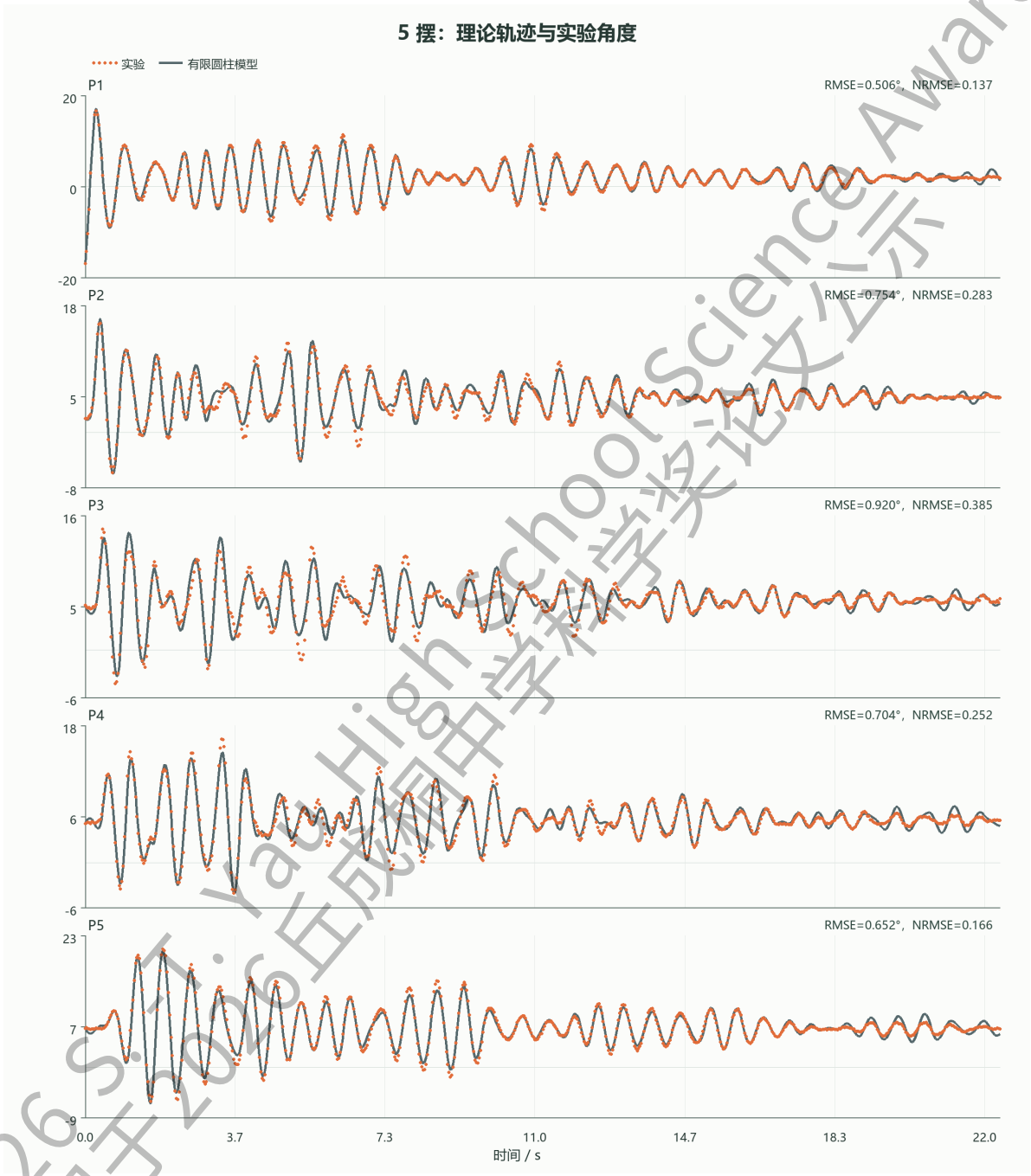


图 6.4: 五摆实验角度与理论轨迹。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

表 6.1: 二至五摆轨迹的逐摆误差

摆数	RMSE / °	NRMSE	查表与直接模型的最大角度差 / °
2	0.709，0.809	0.094，0.106	0.00054
3	0.745，0.691，0.817	0.115，0.157，0.126	0.00068
4	0.808，0.608，0.611，0.882	0.120，0.153，0.149，0.137	0.00035
5	0.506，0.754，0.920，0.704，0.652	0.137，0.283，0.385，0.252，0.166	0.00029

二至四摆的 NRMSE 为 0.094–0.157，理论曲线基本能跟住主要周期、拍振和衰减包络。五摆的两端仍较接近，三个内摆的 NRMSE 却增至 0.252–0.385；能量多次转移后，局部振幅和相位的偏差更明显。为什么内摆偏差较大？各摆阻尼不同、出平面运动和测角误差都可能有影响，但目前的对照还不能把它们分开。

查表是否引入了明显误差，可以单独检查。表6.1最后一列比较查表轨迹与直接积分有限圆柱模型的轨迹，最大角度差不超过 6.8×10^{-4}°，远小于理论与实验之间 0.506–0.920° 的 RMSE。可见，查表节省了重复端面积分的时间，而当前可见的轨迹差异主要不在这里。至于实验能量是否闭合，还需使用角速度和完整势能另作检查。

6.2 实验数据与计算流程

6.2.1 数据来源

本文分析与完整模型参数相对应的四条端点激发轨迹，摆数为 $N = 2, 3, 4, 5$，释放端统一记为 P1，接收端为 PN。每组输入由实验角度长表和对应的完整模型参数配置组成。角度采样率均为 30 Hz；记录长度为 22.30–26.60 s。角度零点采用完整模型配置中的观测偏置。

能量分析沿用轨迹对照中的装置、磁体、惯量和耗散参数，不在这一步重新拟合。这样，角度比较与能量计算使用的是同一组模型条件。

表 6.2: 四个实验工况及完整模型在真实平衡点的线性频率。频率用于解释频谱和固定模态投影，不表示当前大幅实验已经处于线性范围。

N	采样率/Hz	记录长度/s	E_0/mJ	平衡角范围/°	理论频率/Hz
2	30	26.60	2.940	−3.073 至 3.084	1.480, 1.817
3	30	25.27	3.321	−3.494 至 3.343	1.475, 1.690, 2.089
4	30	22.30	3.510	−3.682 至 3.692	1.470, 1.629, 1.900, 2.255
5	30	22.37	1.519	−5.575 至 5.403	1.340, 1.504, 1.774, 2.122, 2.490

2026 CJ YauHigh School Science Award
仅用于2026年成都中学科学奖论文公示

6.2.2 实验指标的选取

由实测角度求导并代入模型得到的初始能量归一化结果，尚未通过能量收支一致性检查。因此，本节不报告实验绝对传能效率，也不据此比较不同摆数的传能优劣。以下主要比较同一时刻各摆的相对动能分布、空间展宽和频谱结构；这些量描述观测到的运动分配，不替代完整机械能的收支验证。

6.3 实测动能分布与波动指标

6.3.1 相对瞬态动能分布

为了比较同一时刻各摆的运动贡献，定义

$$r_i^{(T)}(t)=\frac{T_i(t)}{\sum_j T_j(t)},\qquad \sum_i r_i^{(T)}=1. \tag{6.3}$$

图 6.5把 $r_i^{(T)}$ 随时间排列成二维图谱。亮色表示该时刻的动能主要集中在相应摆上。二摆主要表现为两端反复交替；摆数增加后，亮区同时出现在更多位置，且中间通道持续参与。图中的细密明暗条纹既包含摆间重新分配，也包含每个摆自身动能与势能的快速周期交换，因此不能把每一条明暗变化都解释为一次传播事件。

6.3.2 平滑动能占比

为提取热力图中的慢变化，先对每个摆的动能作相同时间窗平均，再定义

$$p_i(t)=\frac{\overline{T}_i(t)}{\sum_j \overline{T}_j(t)}. \tag{6.4}$$

图 6.6以五摆为例画出全部 $p_i(t)$。各条曲线多次交叉，末端 P5 可以短时占主导，但随后会下降并让位于其他位置。图中的 IPR 和参与率也持续变化，说明“集中”与“分散”在观测窗内反复出现。

6.3.3 波动强度、峰间隔与空间局域化

定义各摆平均占比 $\bar{p}_i=\langle p_i\rangle_t$，再用

$$F_p=\sqrt{\left\langle \sum_i [p_i(t)-\bar{p}_i]^2 \right\rangle_t} \tag{6.5}$$

量化整条链的占比分布波动；F_p 越大，表示动能占比在各摆之间切换越强。末端波动用 $\mathrm{std}(p_N)$ 表示。对平滑后的 $p_N(t)$ 寻找显著峰，并取相邻峰间隔的中位数，得到 T_{pk}。空间逆参与率定义为

$$\mathrm{IPR}(t)=\sum_i p_i(t)^2,\qquad N_{\mathrm{part}}(t)=\frac{1}{\mathrm{IPR}(t)}. \tag{6.6}$$

2026 ST Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

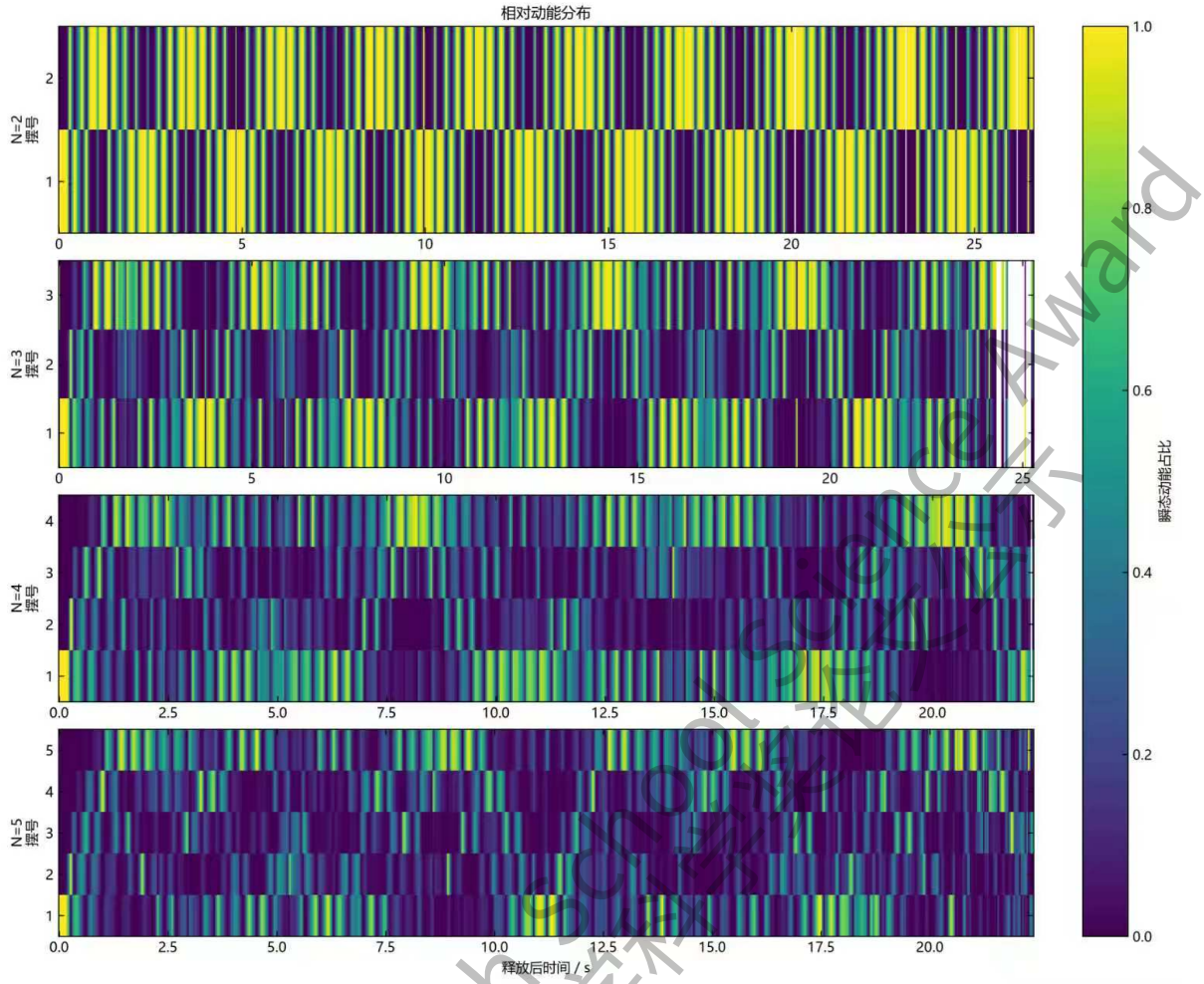


图 6.5: 二至五摆的相对瞬态动能分布，颜色标度统一为 0 至 1。低总动能时刻留白。图中可见反复的亮暗和位置切换，说明动能并非一次到达末端后永久停留，而是在有限链中多次重新分配。

若动能均匀分布在 N 个摆上，则 $\mathrm{IPR} = 1/N$；若几乎集中在一个摆上，则接近 1。

F_p 从二摆的 0.502 降至四摆的 0.381，到五摆又回升至 0.395；末端占比的标准差则从 0.355 连续降至 0.229。这与图中末端占比波动减弱的现象一致。相比之下，T_{pk} 变化很小，快速明暗条纹没有随链长明显拉长。这些条纹混合了局部振动和模态叠加的影响，用它们的间隔代表整条链的传输时间并不合适。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026正成桐中学科学奖

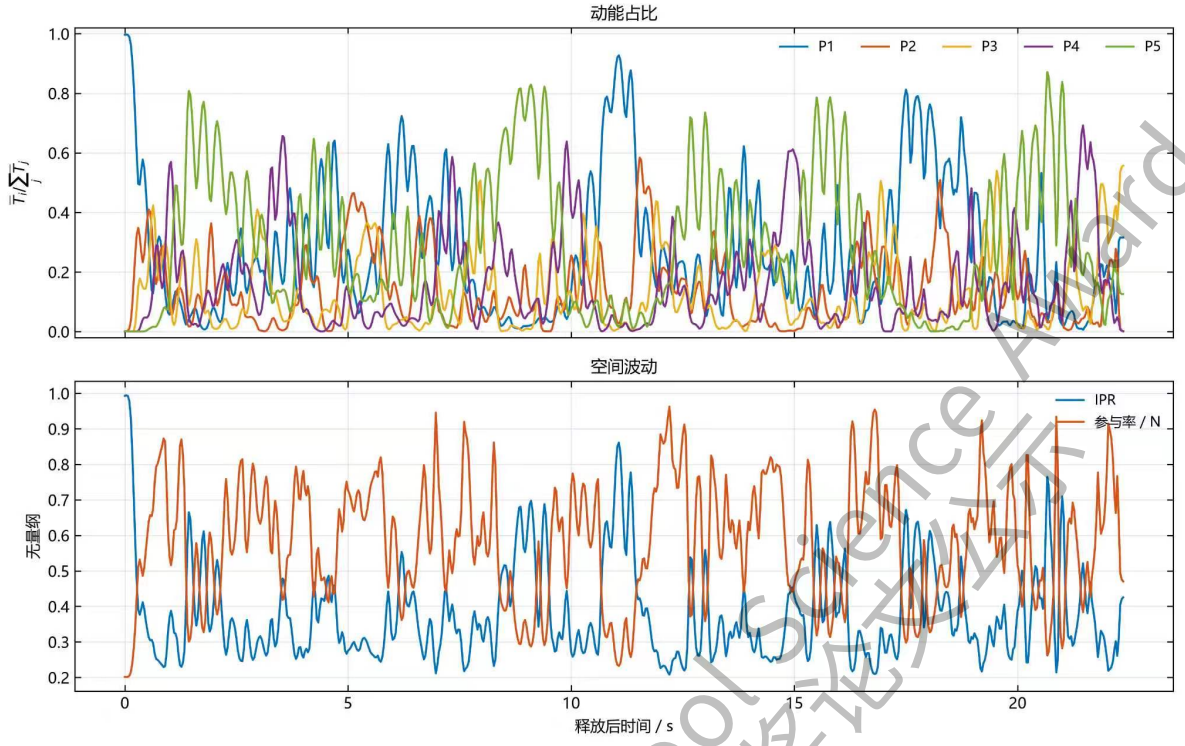


图 6.6: 五摆平滑动能占比及空间局域化指标。上图为 $p_i(t)$；下图为 IPR 与归一化参与率。折线是图 6.5的定量补充，但仍只描述动能，不替代完整局域机械能。

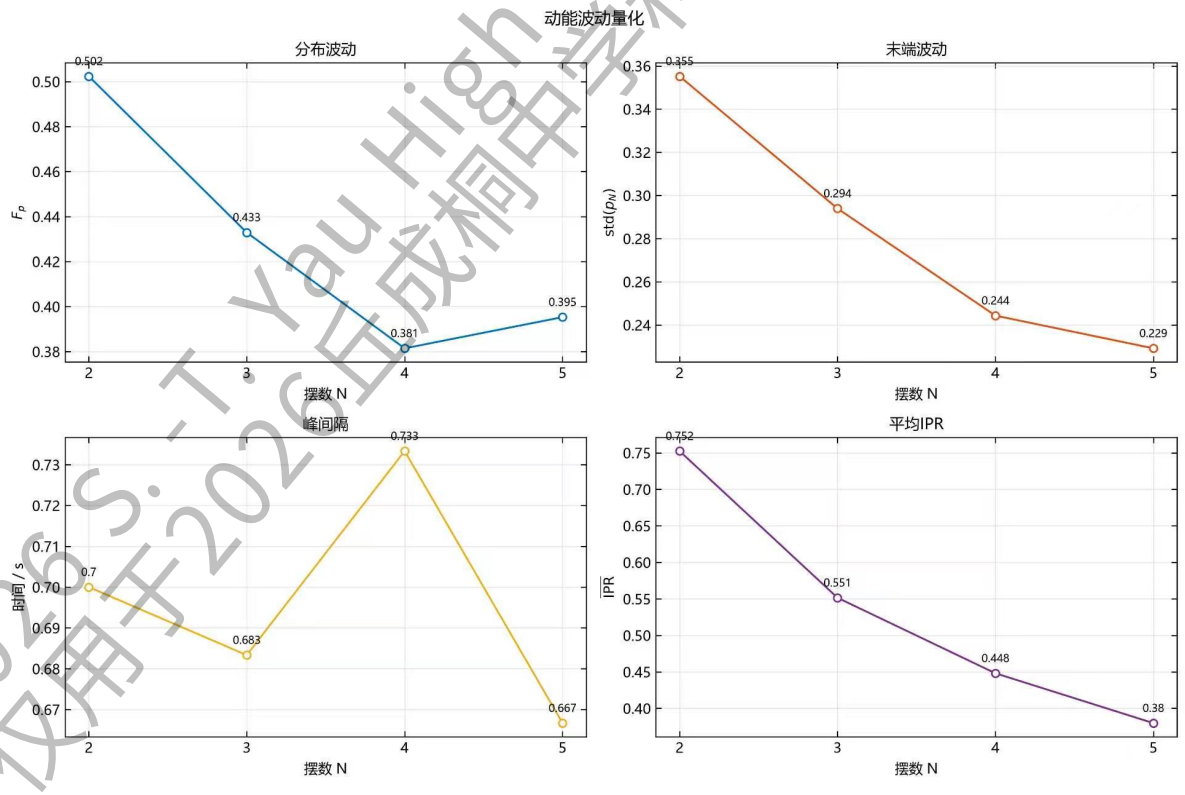


图 6.7: 动能图谱的四个量化指标。圆点是四个离散实验工况，连线仅帮助辨认趋势。平均 IPR 随 N 下降最稳定；末端波动也持续减弱。峰间隔集中在 0.667–0.733 s，未呈单调的摆数依赖。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

6.3.4 空间分布的定义

每一帧只有二至五个摆的位置，难以据此可靠地拟合连续的高斯包络。更直接的办法是保留各摆的离散位置：用支点坐标 X_i 和式 (6.4)的权重，定义

$$x_T(t)=\sum_i X_i p_i(t),\qquad \sigma_T^2(t)=\sum_i [X_i-x_T(t)]^2 p_i(t). \tag{6.7}$$

x_T 表示平滑动能分布的离散中心，σ_T 表示空间宽度。对给定的起止时刻，展宽为

$$\Delta\sigma_T=\sigma_T(t_{\mathrm{end}})-\sigma_T(t_{\mathrm{start}}). \tag{6.8}$$

若在首次外传、明显反射之前选取近似线性的一段，则可拟合

$$v_x^{(\mathrm{app})}=\frac{\mathrm{d}x_T}{\mathrm{d}t}. \tag{6.9}$$

它是首次外传区间内的动能中心表观漂移率，不是无限周期链的严格群速度。其数值还依赖平滑窗、拟合区间、支点坐标和边界反射开始时刻，报告时必须同时给出这些条件。

6.4 末端响应与空间展宽

6.4.1 动能峰值时间与空间分布

为描述末端响应的时间，记观测窗内末端动能首次达到最大值的时刻为 t_K^*。表 6.3汇总峰值时间、动能分布展宽与占比波动指标，比较的是各条录像中的运动特征。

表 6.3: 四个实验工况的末端动能峰值时间、空间展宽与占比波动指标。

指标	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
t_K^*/s	1.200	2.200	2.233	1.467
$\Delta\sigma_T/\mathrm{mm}$	8.95	29.96	68.79	87.01
$\overline{\mathrm{IPR}}$	0.752	0.551	0.448	0.380
F_p	0.502	0.433	0.381	0.395
$\mathrm{std}(p_N)$	0.355	0.294	0.244	0.229
T_{pk}/s	0.700	0.683	0.733	0.667

t_K^* 为 1.200、2.200、2.233 和 1.467 s，不随 N 单调增加。因此，当前实验不支持“链越长，传递越慢”的简单说法，也不能用链长除以 t_K^* 直接称为群速度。

6.4.2 有限链传播量与群速度的区别

若额外假设无限均匀链、相同点质量 m、间距 a，且仅有最近邻平移弹簧刚度 κ，才得到

$$\omega(k)^2=\frac{g}{l}+\frac{4\kappa}{m}\sin^2\frac{ka}{2},\qquad v_g(k)=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\kappa a\sin(ka)}{m\omega(k)}. \tag{6.10}$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

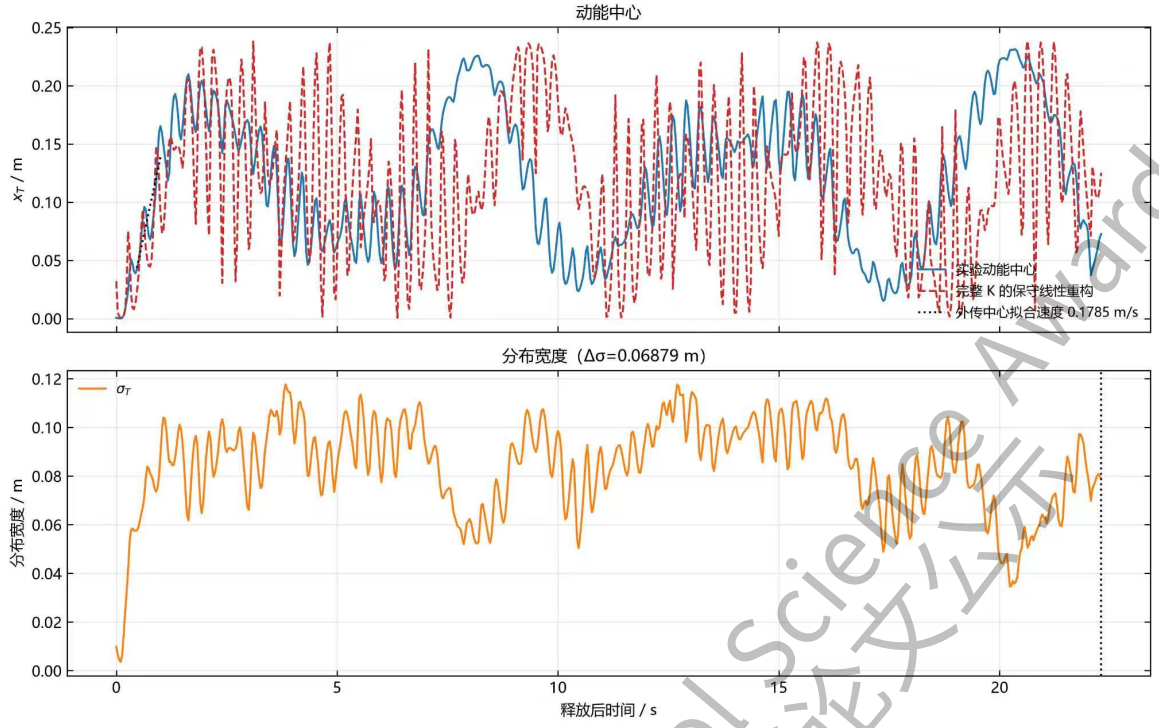


图 6.8: 四摆动能中心与空间宽度。原图中的表观斜率 0.1785 m/s 未附拟合起止区间和误差，故仅保留图示，不作为已核验的传播速度。中心可因反射和回流而退回。

这个无限链公式与我们的装置有几处关键差别：磁体间存在远邻作用，各摆惯量不完全相同，平衡位置有偏移，而且链只有二至五个摆。我们得到的是有限个固有频率，还没有近似连续的波数或窄带波包，因而无法给出唯一的实验群速度。对本装置，更适合直接比较完整模型或完整 $\boldsymbol{K}$ 给出的有限链响应、能流到达时间，以及实验中的 $x_T(t)$。从 x_T 拟合出的斜率仍记为 $v_x^{(\mathrm{app})}$。

6.5 实测频谱与固定模态诊断

6.5.1 短时傅里叶变换

令 $q_i[n] = \theta_i(n\Delta t) - \theta_{i,\mathrm{eq}}$，采样率 $f_s = 1/\Delta t$，窗函数为 $w[r]$，窗长为 L_w，滑窗步长为 H。短时傅里叶变换为

$$X_i[p,k] = \sum_{r=0}^{L_w-1} q_i[pH+r]\,w[r]\exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i} k r}{N_F}\right). \tag{6.11}$$

本文采用 Hann 窗，窗长 2.0 s，重叠比例 90%，并按单边角位移功率谱密度显示

$$S_i[p,k] = c_k \frac{|X_i[p,k]|^2}{f_s \sum_r w[r]^2}, \qquad c_k = \begin{cases} 1, & k=0，或 N_F \text{ 为偶数且} k = N_F/2, \\ 2, & \text{其余单边频率点.} \end{cases} \tag{6.12}$$

这里 $N_F \geq L_w$ 为变换点数，单边索引为 $0 \leq k \leq \lfloor N_F/2 \rfloor$。此式采用单边功率谱密度归一化 [9]。下文用谱图比较频带位置和相对结构，机械能则由角度、角速度及势能单独

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

计算。S_i 的单位为 $\mathrm{rad}^2/\mathrm{Hz}$。它表示角度信号在时频平面上的谱强度，不是以瓦特为单位的机械功率，也不能直接当作模态能量。

四摆全局频谱的主要峰位于约 1.5–2.3 Hz，见图 6.9；完整刚度矩阵给出的频率为 1.470、1.629、1.900 和 2.255 Hz。两者落在相同频段，说明固定模态有助于识别实测频带。不过，峰高除了受到模态参与程度影响，还与观测位置、振型分量及谱处理有关，不能直接当成初始模态能量占比。

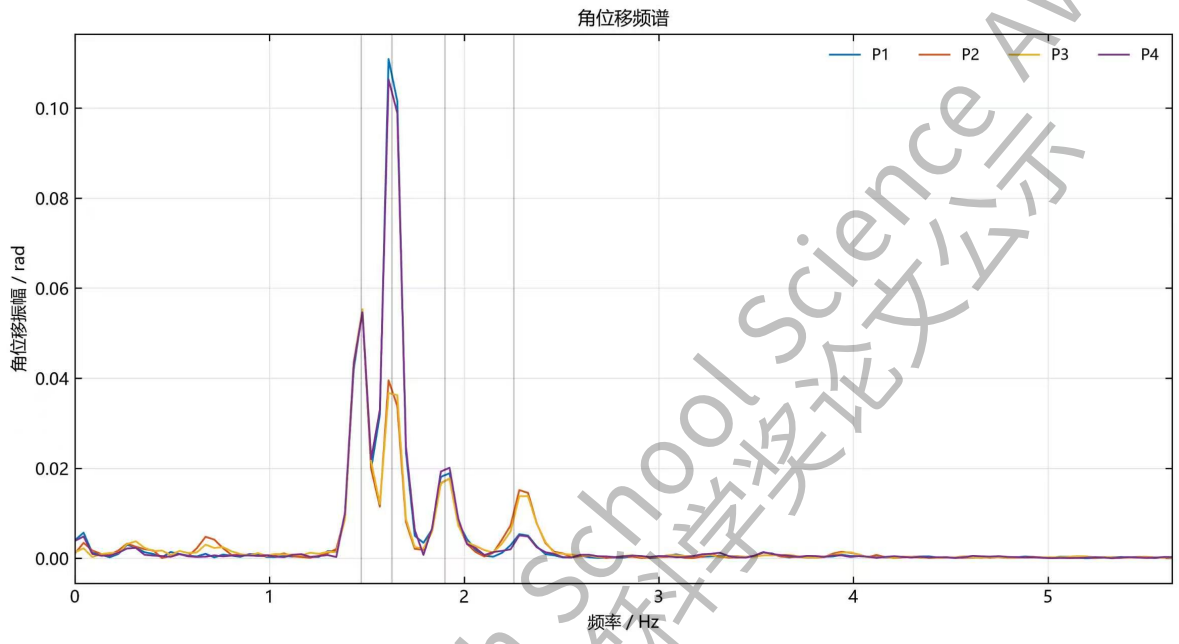


图 6.9: 四摆角位移全局频谱。彩色折线对应 P1–P4，灰色竖线为完整模型在真实平衡点的线性固有频率。频率位置用于模态识别，谱峰高度不等于模态机械能。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

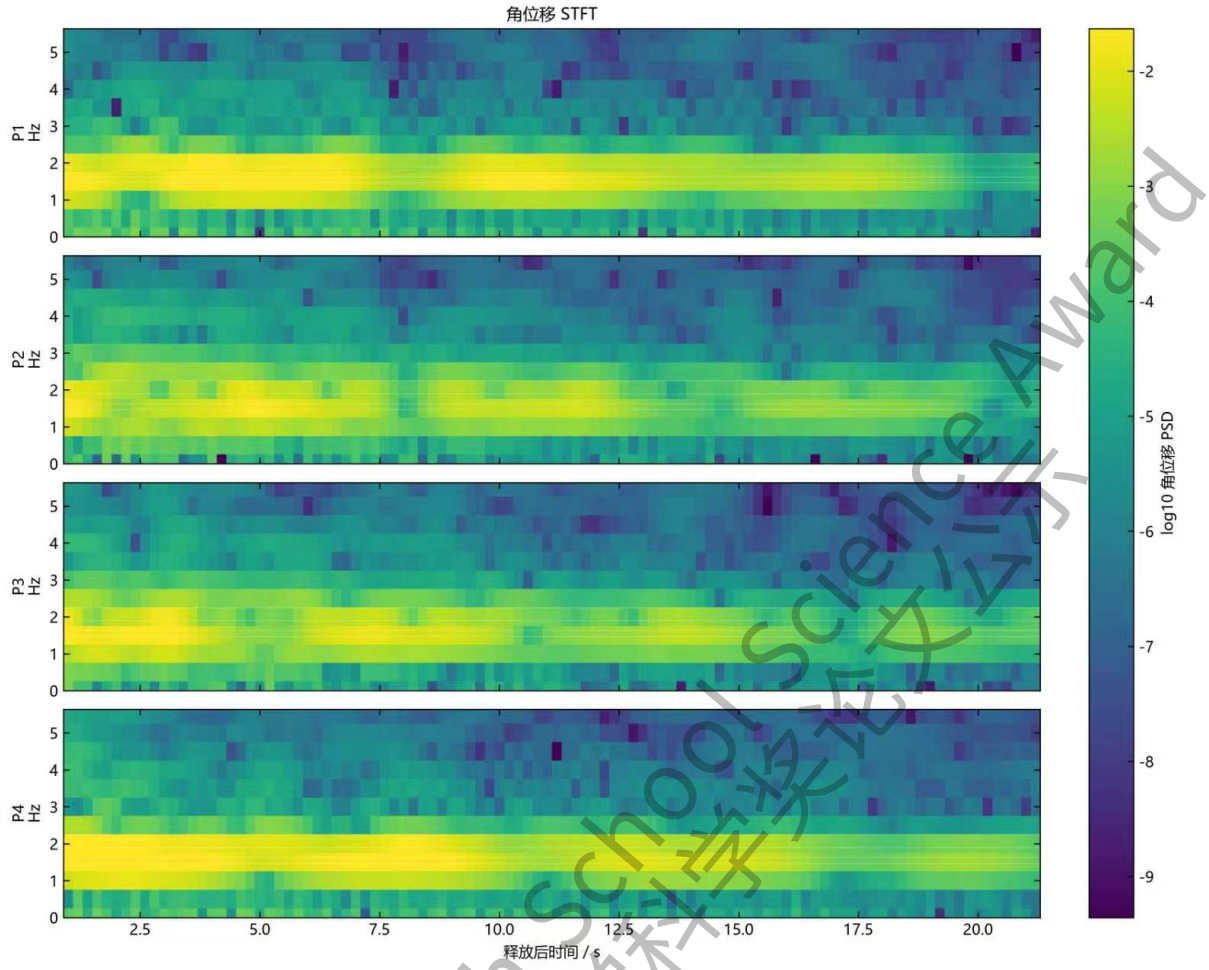


图 6.10: 四摆角位移 STFT。主要频带在观测窗内持续存在并随耗散减弱；不同通道的频带强度不同，反映释放初态、振型分量和观测位置共同选择了可见模态。两秒窗无法严格分开所有相近成分，零填充也不能提高真实频率分辨率。

6.5.2 实验轨迹的模态投影

使用式(4.2)的质量归一基底。为区别等惯量坐标 a_n，本小节使用 $\alpha_n = \boldsymbol{\phi}_n^{\mathsf{T}} M\boldsymbol{q}$；原图保留其模态编号。将实验偏移投影到固定线性模态基底，得到

$$\alpha_\nu = \boldsymbol{\phi}_\nu^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{q}, \qquad \dot{\alpha}_\nu = \boldsymbol{\phi}_\nu^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}, \qquad \mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_\nu^2 + \omega_\nu^2 \alpha_\nu^2). \tag{6.13}$$

在线性保守模型中，$\mathcal{E}_\nu^{(2)}$ 保持不变；实体摆上的局域运动变化来自多个模态的相位叠加。对于当前含耗散、较大振幅的实验，式 (6.13)只表示“投影到平衡点线性基底后有多少二次能量”，不能替代式 (3.34)的完整非线性能量。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

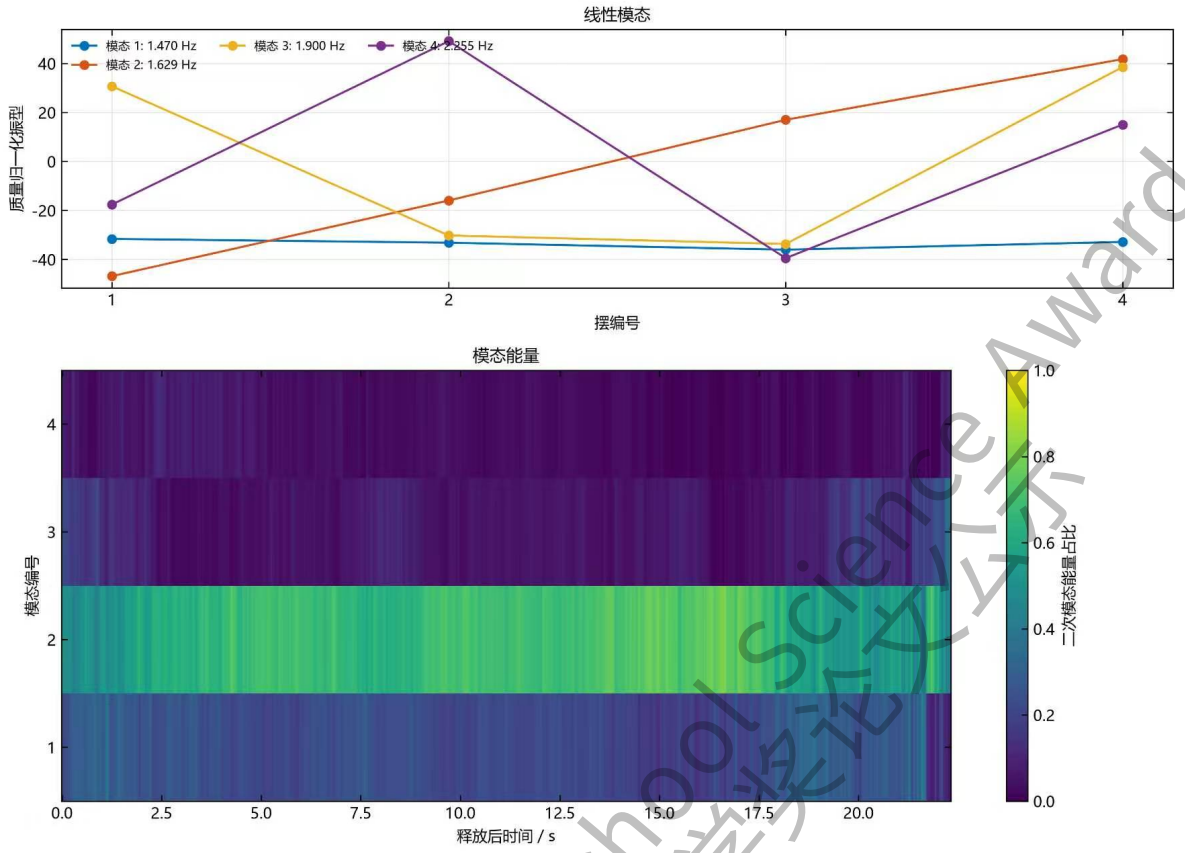


图 6.11: 四摆的质量归一化振型及实验轨迹的二次模态能量占比。完整矩阵给出四个固定振型；实验投影中第二模态占比较大，但其他模态仍持续参与。下图是线性基底诊断，不表示非线性系统发生了严格的模态间能量交换。

6.5.3 完整刚度矩阵的线性重构

对于一般惯量矩阵，式(4.3)写成质量归一形式：

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{lin}}(t) = \sum_{\nu} \boldsymbol{\phi}_{\nu} \left[\alpha_{\nu 0} \cos \omega_{\nu} t + \frac{\dot{\alpha}_{\nu 0}}{\omega_{\nu}} \sin \omega_{\nu} t \right]. \tag{6.14}$$

重构使用同一实测初态。图 6.12中，线性重构在初期能跟住主要频率和相位，之后却逐渐错位，也无法给出实验中的衰减。这并不难理解：这些实验的首摆偏移约为 25°–36°，而第4节的轨迹检验主要针对 1° 附近的小幅运动。因此，固定模态在这里适合解释频带和空间形状，长期轨迹仍需完整的耗散模型。

2026 Shanghai Yaohua School Science Award
仅用于2026年成都中学学术论文公示

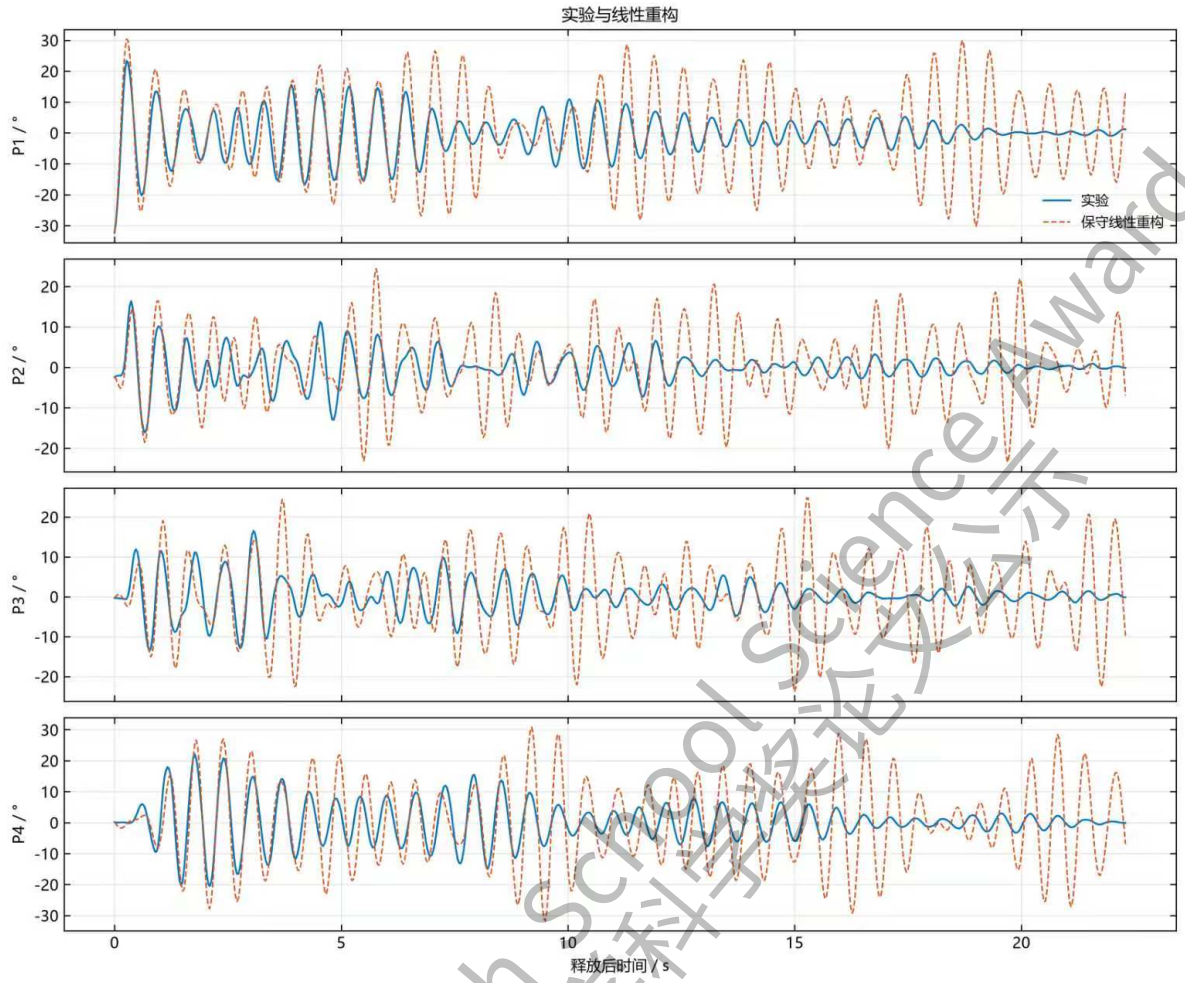


图 6.12: 四摆实验角位移与完整 $\boldsymbol{K}$ 的保守线性重构。两者使用相同的完整模型释放初态。随时间增大的幅值与相位差表明，固定线性模型不能精确复现当前大幅、耗散实验；这也限定了群速度和模态能量解释的适用范围。

6.6 偶数与奇数代表工况

镜像对称的奇数链中，反对称振型满足

$$\phi_{i\alpha} = -\phi_{N+1-i,\alpha}, \tag{6.15}$$

所以中心分量为零；但这只约束该反对称模态。实际端点释放还会激发对称模态，中心摆仍可运动。偶数链没有单独的中心摆，却不意味着所有模态在所有位置都无节点。拍振同样取决于频率分裂、初态投影和观测位置，而不是由奇偶性单独决定。

五摆相对四摆的 $\Delta\sigma_T$ 从 68.79 增到 87.01 mm，平均 IPR 从 0.448 降到 0.380。问题在于，从四摆换成五摆，链长与奇偶性同时改变，初态和 E_0 也没有严格匹配，仅凭这两条轨迹无法分清原因。要追问奇偶性的作用，至少应在相同间距、相同无量纲 E_0、相同释放方式和观察时间下，重复多组奇数链与偶数链实验，并在统计比较中同时考虑链长。

2026 S.T. Yau High School Science Award 研究论文公示 截止于2026年成绩单

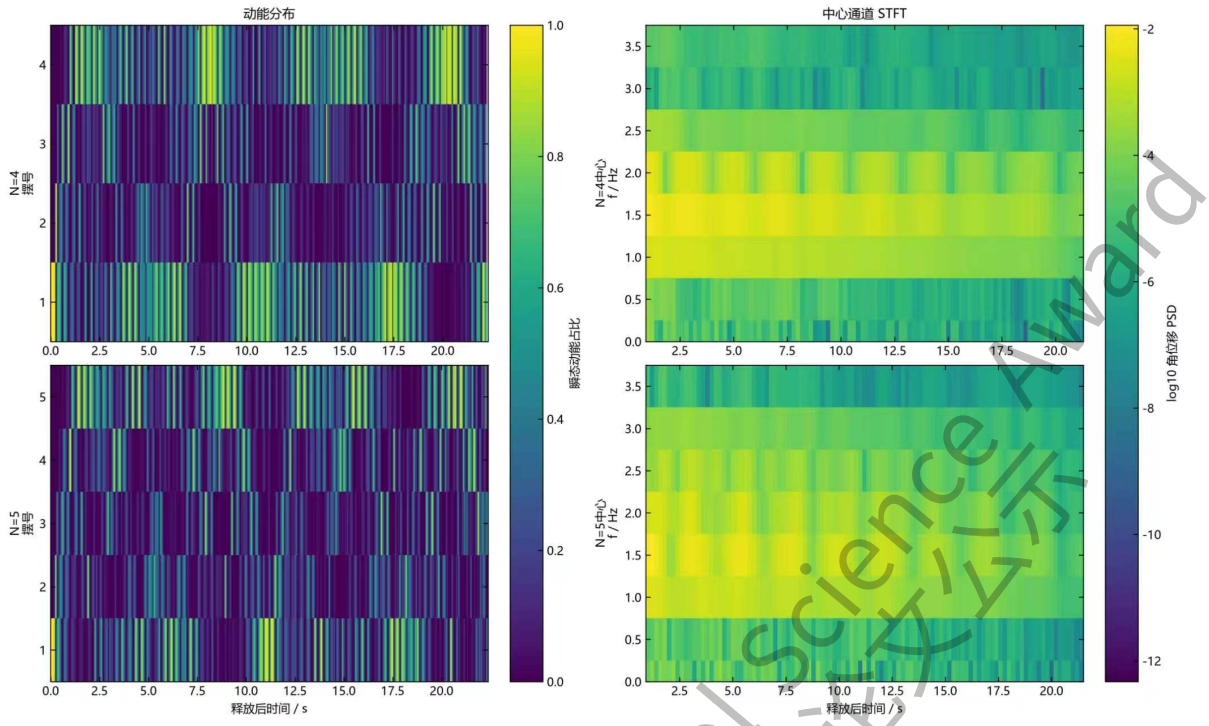


图 6.13: 四摆与五摆代表工况的动能分布和中心通道 STFT。五摆表现出更大的展宽和更低的平均 IPR，中心频带结构也与四摆不同。但两组仅各有一次轨迹，且 E_0、释放初态和阻尼并未严格匹配，因此只能描述差异，不能把差异归因于奇偶性。

6.7 三摆中间摆的短时运动减弱

我们从视频追踪得到的角度曲线中寻找相应现象。以三摆实验 3-3 为例，图6.14标出的 5.67 至 5.97 秒内，中间摆的角度变化范围约为 0.70°，两端分别为 7.17° 和 14.68°。也就是说，两端仍在明显运动时，中间摆的角度曲线已经接近平坦。局部放大图还能看到，这段前后它都在明显摆动，角速度也经历了降低后再回升的过程。

曲线确实记录了肉眼看到的短时减弱，但它的成因还不能只凭这张图确定。第4节的模态叠加提供了一种解释：各分量在中间摆上暂时抵消。然而，这次实验释放角度较大，又有摩擦，与 1° 线性算例的条件不同。要判断模态抵消是否起主要作用，还需在匹配初态和摩擦条件后作对照。

2026 S. Yu High School Science Award
仅用于2026年度高中科学奖论文公示

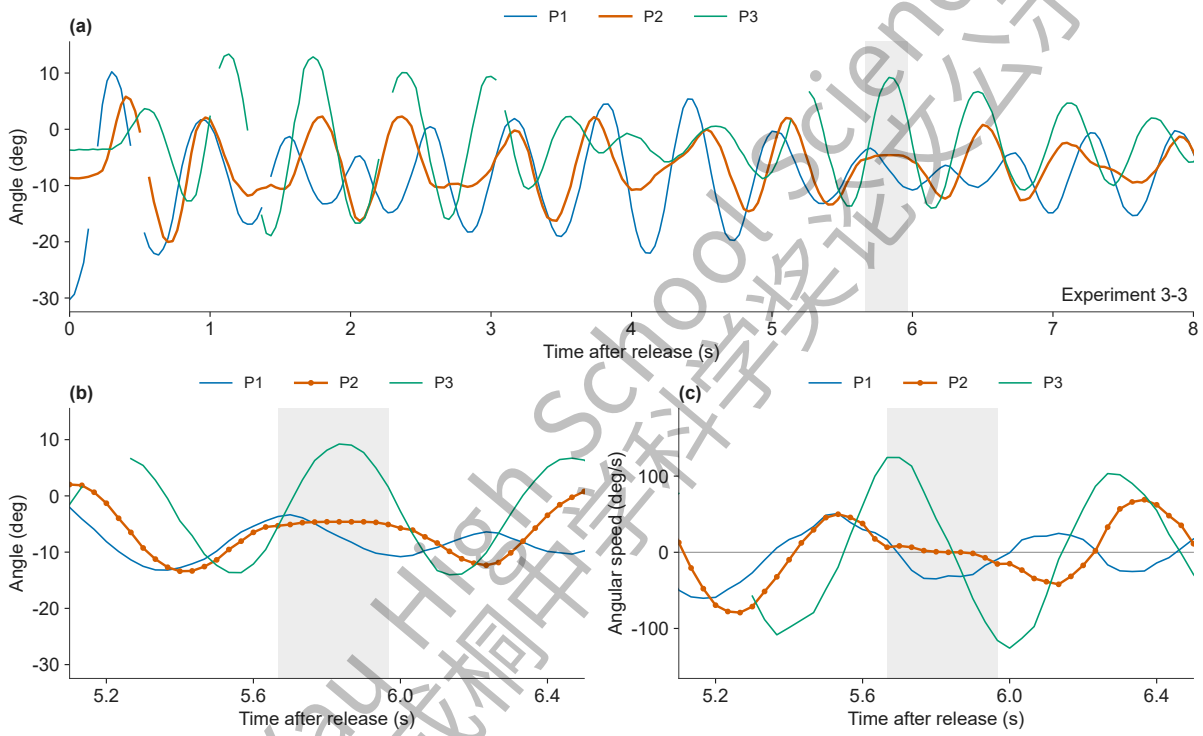


图 6.14: 实验 3-3 中间摆的短时运动减弱。（a）释放后前 8 秒的三摆角度；（b）局部角度放大；（c）同一区间的角速度。灰色区域为 5.67 至 5.97 秒，对应中间摆短时近乎停住的“急停”现象，并非严格静止。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

7 结论与展望

磁性牛顿摆的复杂运动，可以从同一套动力学方程逐步理解。保留磁体尺寸、所有磁体对的作用以及摆体惯量后，模型能描述二至五摆的主要周期、拍振与衰减。查表轨迹与直接计算的差别远小于理论与实验的差别，因此在本文的精度要求下，可以用预先计算的势能表代替每一步的端面积分。

改变释放位置，改变的是各模态开始时的组合。三摆、五摆从中心释放时，最高频模态分别占 83.4% 和 72.5%，这不能只看振型图上的幅度，还要计入频率平方。多个模态的位移和速度有时相互加强，有时抵消，于是单个摆会暂时慢下来；非负的模态能量本身却不会互相抵消。主频吻合也不代表整条轨迹都准确，前 8 秒的误差扫描说明，线性近似随振幅增大而逐渐失效。

在总距和初始能量相同、包含摩擦的模型对照中，保留中间摆明显增强了末端响应。以 5° 参考释放为例，末端最大摆幅从移除组的 0.53° 增至自由组的 3.21°。固定振型的分解解释了峰值时各分量怎样同向相加；静态上界则把问题向前推进了一步，使我们能在完整积分前估计响应。但实际峰值还取决于各分量何时配合，以及摩擦消耗了多少能量。小幅几何检验支持谱预测在限定条件下使用，干摩擦对照则表明，不能把这一预测直接搬到所有实验中。

实验记录了往返响应、能量分散和中间摆的短时运动减弱。对这组研究而言，一个有用的判断是：先比较是否保留中间摆，比追求约 0.15 个百分点的间距优化更有意义。后续可在相同初始能量、观察时间和耗散条件下重复这一对照，并将参数变化对峰值及到达时间的影响一并考虑。沿着这条思路，研究还可以扩展到更长的摆链，以及不同磁体规格下的模态选择与传能。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

参考文献

[1] International Young Physicists' Tournament. Problems for the 39th IYPT 2026, Problem 15: Magnetic Newton's cradle. 2025. https://iypt.org/problems/iypt-2026-problems/.

[2] N. Derby, S. Olbert. Cylindrical magnets and ideal solenoids. American Journal of Physics, 78(3): 229–235, 2010. https://doi.org/10.1119/1.3256157.

[3] Y.-J. Lee. Coupled Oscillators, Normal Modes. MIT OpenCourseWare, 8.03SC Physics III, 2016. https://ocw.mit.edu/courses/8-03sc-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2016/resources/mit8_03scf16_lec4/.

[4] R. Vaia. Dispersionless pulse transport in mass-spring chains: All possible perfect Newton's cradles. Physical Review E, 102: 023005, 2020. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.023005.

[5] H. Schérer, L. Vinet, A. Zhedanov. Analytic "Newton's cradles" with perfect transfer and fractional revival. Annals of Physics, 439: 168790, 2022. https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.168790.

[6] OpenCV. Detection of ArUco Markers. OpenCV 4.12.0 documentation. https://docs.opencv.org/4.12.0/d5/dae/tutorial_aruco_detection.html.

[7] OpenCV. Basic concepts of the homography explained with code. OpenCV 4.5.1 documentation. https://docs.opencv.org/4.5.1/d9/dab/tutorial_homography.html.

[8] NOAA NCEI Geomagnetic Modeling Team; British Geological Survey. World Magnetic Model 2025. NOAA National Centers for Environmental Information, 2024. https://doi.org/10.25921/aqfd-sd83.

[9] SciPy Developers. Signal Processing: Spectral Analysis. SciPy documentation. https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/signal.html.

[10] S. Iubini, P. Di Cintio, S. Lepri, R. Livi, L. Casetti. Heat transport in oscillator chains with long-range interactions coupled to thermal reservoirs. Physical Review E, 97: 032102, 2018. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.032102.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

致谢

本研究的灵感源自 2026 年 IYPT 第 15 题“磁性牛顿摆”。原题关注相斥磁铁受到扰动后的运动现象，以及这一系统与普通牛顿摆的异同。

PT 比赛虽已告一段落，我们对磁性牛顿摆这个有趣系统的好奇却没有就此止步。拍频、能量沿摆链的传递，以及部分摆在运动中短暂近乎停滞的现象，都令我们着迷。几个构造简单的磁摆，经耦合便呈现出丰富的运动形态，仿佛一排随鼓点摇曳起落的舞者，交错的舞步看似凌乱，实则蕴含着物理的节拍。这份好奇促使我们继续探索，尝试以更系统、严谨的研究，理解这些现象背后的物理机制。

本研究由三位成员分工协作完成。高钰棠负责选题与研究规划、线性理论分析、实验追踪与数据处理，以及相关理论、追踪内容、摘要和致谢的撰写；江云琪负责基础模型的建立与数值求解，以及理论与实验的对照，撰写模型及对应结果；王井然负责实验装置设计与能量传递的定量分析，撰写装置、实验方案及传能结果。论文各部分由承担相应研究工作的成员撰写，最终由高钰棠统一整理与排版。

从选题与规划到实验与分析，我们始终团结一心，追求完美，在困难面前彼此支持。实验装置起初不够稳定，我们便反复调整结构、更换零件，逐步改善实验的稳定性与可重复性；视觉追踪涉及复杂的计算与误差传播，我们便逐项排查误差来源、改进算法，将繁琐的手动打点转化为自动化的数据采集与处理；面对模型推导与数值求解中的难点，我们便重新梳理物理假设、核查推导、调试代码，在一次次修正中加深理解。研究的推进并非一帆风顺，而那些看似停滞的时刻，也让我们学会了耐心地面对未知，以证据检验判断。

AI 使用说明。本研究使用的 AI 工具包括 ChatGPT、Codex 和 Gemini，所用模型包括 GPT-5 Sol、GPT-6 Astra 和 Gemini 3.1 Pro。经指导老师事先许可，我们自 2026 年 8 月 12 日研究启动起，借助 AI 讨论理论知识、学习推导方法，并辅助编写和调试数值求解代码。这类使用持续至准备整理论文阶段，三位队员各自大致每两天使用一次，集中开展实验的阶段未使用 AI。具体环节包括小角度近似、势能 Hessian 与模态叠加的讨论，以及数值求解、数据分析和 STL 转动惯量计算工具的编写与调试。采用 ArUco 标记进行视觉追踪与测量的想法由我们在研究初期提出，相关精准测量功能的具体实现是在 AI 辅助下完成的。对于 AI 提供的推导，我们首先完整、详细地学习和理解，再根据研究问题与论文论述的需要修改、补充或删减，加入定性解释，并及时纠正发现的错误。

后续材料与论文整理中，AI 还参与了公式与研究材料整理、图表及文字草稿生成、语言润色和 LaTeX 排版；本次致谢补充也使用了 Codex 进行材料核对与文字整理。相关聊天记录及其他辅助材料随补交材料提供，以供核查。

李玲燕老师是上海市民办平和学校的物理教师，也是我们的指导老师，对本研究的指导为无偿指导。在此，我们衷心感谢李老师在选题、实验设计及研究讨论中给予的悉心指导与支持；感谢学校老师给我们提供实验教室。也感谢队友：对科学的热情、对细

2026 Young Scholar Science Award 仅用于2026年度青少年科学奖公开展示

节的执着，以及遇到困难时的信任与担当，让最初的好奇逐渐成为一项共同完成的研究。这段经历带给我们的，不仅是对磁摆运动的进一步理解，更是继续追问、深入求索的勇气与习惯。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

附录

A 单摆阻尼参数标定

A.1 模型与拟合方法

移除其余磁摆后，记录三组单摆自由衰减，用同一组参数拟合转折点振幅。固定转动惯量 $I = 9.389337 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$、重力力矩系数 $K_g = 8.20 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m}$，比较常值动摩擦、线性阻尼、二次速度阻力及其组合：

$$I\ddot{\theta} = -K_g \sin\theta + T_\mathrm{d}, \tag{A.1}$$

$$T_\mathrm{d} = -\tau_f \,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) - b\dot{\theta} - c|\dot{\theta}|\dot{\theta}. \tag{A.2}$$

系数均非负，τ_f、b、c 的单位依次为 $\mathrm{N\,m}$、$\mathrm{N\,m\,s}$、$\mathrm{N\,m\,s^2}$，计算使用弧度。

单摆角度沿用原 ArUco 姿态追踪结果。以平滑序列末尾 20%（至少 12 点）的中位数确定平衡角，用约 0.08 秒的二阶 Savitzky–Golay 窗口寻找转折点。振幅取自未平滑角度，在候选峰前后各两帧内取两个极值的中位数；检查正负交替后，保留不小于 1° 的峰。

模型从每组首个保留峰、零初速度开始积分，按峰序号与实验配对。各组残差除以峰数的平方根后，采用 `soft_l1` 稳健损失拟合，尺度为 $0.15\pi/180$ 弧度；表中 RMSE 按全部峰的未归一化残差计算。积分用 $\tanh(\dot{\theta}/\omega_s)$ 近似符号函数，$\omega_s = 0.005\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$。

A.2 耗散形式比较

三组实测频率与小幅理论值 $f_0 = (2\pi)^{-1}\sqrt{K_g/I} = 1.487338\,\mathrm{Hz}$ 的相对偏差均小于 1%。七种模型比较时，第三组统一裁去前 20 个已提取峰，共保留 261 个峰。

表中比较分数为 $\mathrm{BIC}^* = N\ln(\mathrm{RSS}/N) + k\ln N$，其中 RSS 为未加权残差平方和，$k$ 为耗散系数个数；它用来辅助选择模型。$\tau_f + b$ 的分数最低，增加二次项 c 后 RMSE 几乎不变，因此采用动摩擦与线性阻尼的组合。

A.3 参考参数

为检查第三组早期波动的影响，分别裁去 15、20、25、30 个峰，其余处理相同，结果见表A.2。

以裁剪 25 个峰的结果作为参考，耗散力矩为

$$\begin{aligned} T_\mathrm{d} &= -\tau_f \,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) - b\dot{\theta}, \\ \tau_f &= 1.08 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,m}, \qquad b = 3.80 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,m\,s}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2025日成桐中学科学奖公示

表 A.1: 同一裁剪条件下七种耗散模型的比较。模型名称只表示保留的非零候选系数，实际力矩形式见式(A.2)。

模型	RMSE（度）	$\Delta\mathrm{BIC}^{*}$
$\tau_f + b$	1.460	0.00
$\tau_f + b + c$	1.460	5.54
$\tau_f + c$	1.494	12.19
τ_f	1.576	34.32
b	1.909	134.50
$b + c$	1.909	140.06
c	2.791	332.75

表 A.2: 全部已计算的第三组裁剪条件。各行保留的数据不同，RMSE 不能作为同一测试集上的优劣排名。

裁剪峰数	总峰数	τ_f（$10^{-5}\,\mathrm{N\,m}$）	b（$10^{-6}\,\mathrm{N\,m\,s}$）	RMSE（度）
15	266	1.204	2.101	1.643
20	261	1.076	2.959	1.460
25	256	1.078	3.804	0.702
30	251	1.058	4.101	0.814

对应 256 个峰的包络拟合 RMSE 为 0.702°。模型比较固定使用裁剪 20 个峰的数据，参考参数取自 25 个峰的设置，两者分别列出。

2026 S. -T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

B 测角方法对照与固定参数基线

作为测角定义的检查，我们比较了原有三维姿态处理与图像二维处理。原三维处理在两次录像中的右摆初角均与画面偏转方向不符。图像二维得到的右摆初角分别为 $+1.775°$、$+2.308°$，原三维结果为 $-5.969°$、$-5.206°$。图像二维结果与画面中的轻微右偏相符，但目视判断只支持方向检查，不能提供精确角度真值；这一现象也不能说明三维方法普遍不适用。

图B.1比较了两次录像中各摆的完整角度序列及初始局部。两摆在所选片段内均获得连续有效的二维观测，有效比例为 100%。这反映本批数据的检测连续性，不代表测角没有系统偏差。

为检查处理方法变化对理论比较的影响，我们固定原有物理参数，不拟合观测零偏。两方法分别使用各自测得的初角，并均以最初两帧的角度差商估计初速度；后者对噪声敏感，并非独立测得的释放速度。评分仅采用两方法共同有效的原始观测，排除插值点，定义

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k\in\mathcal{V}}\left[y_p(t_k)-\theta_{p,\mathrm{model}}(t_k)\right]^2}, \tag{B.1}$$

其中 $\mathcal{V}$ 为共同有效样本集合，N 为其样本数，结果以度表示。

表 B.1: 固定原物理参数时的全时段角度 RMSE。比较同时包含观测序列及其初态输入变化的影响。

录像	摆	样本数	旧三维（度）	图像二维（度）
第一次	P1	762	13.307	11.032
第一次	P2	767	15.499	11.135
第二次	P1	831	12.029	9.976
第二次	P2	821	13.965	9.801

改用图像二维后，四条曲线的理论残差都减小了，但仍约为 10–11 度。图B.2显示，主要改善在于后段整体偏移减小，前段的振荡残差仍很明显。这样的改善有用，却还不能等同于测角精度提高：物理参数、初态估计和几何偏差都在同时影响理论对照，需要分别检查。

2026 Shi Yuan High School Science Award
仅用于2026年成稿中学科学论文公示

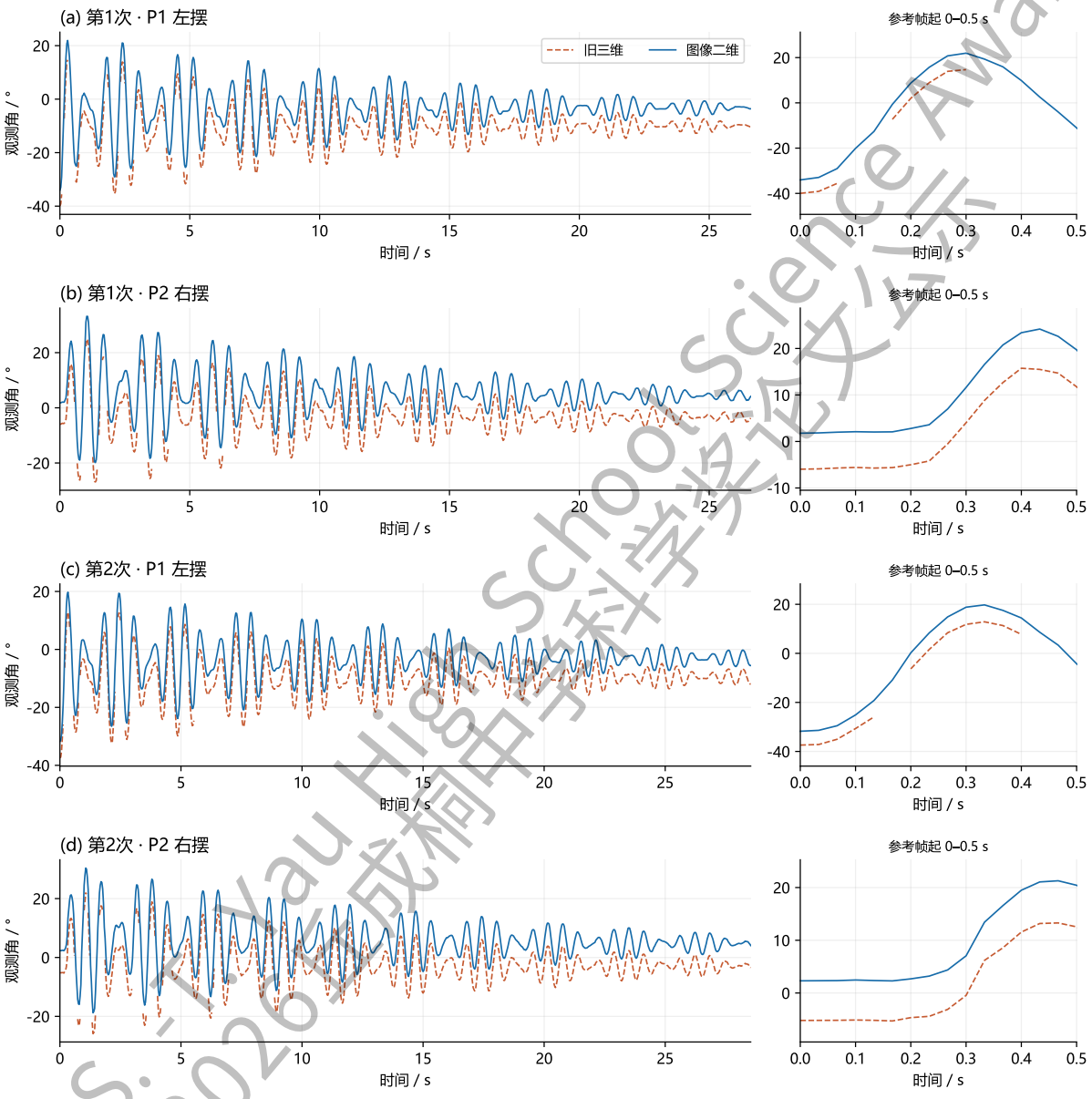


图 B.1: 旧三维与图像二维的观测角。左列为全时段，右列为参考帧起 0–0.5 秒；四行依次为第一次左、右摆和第二次左、右摆。两方法使用相同时间原点，不作时间平移或零点对齐。局部图纵轴范围分别设置，断线表示无效观测。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

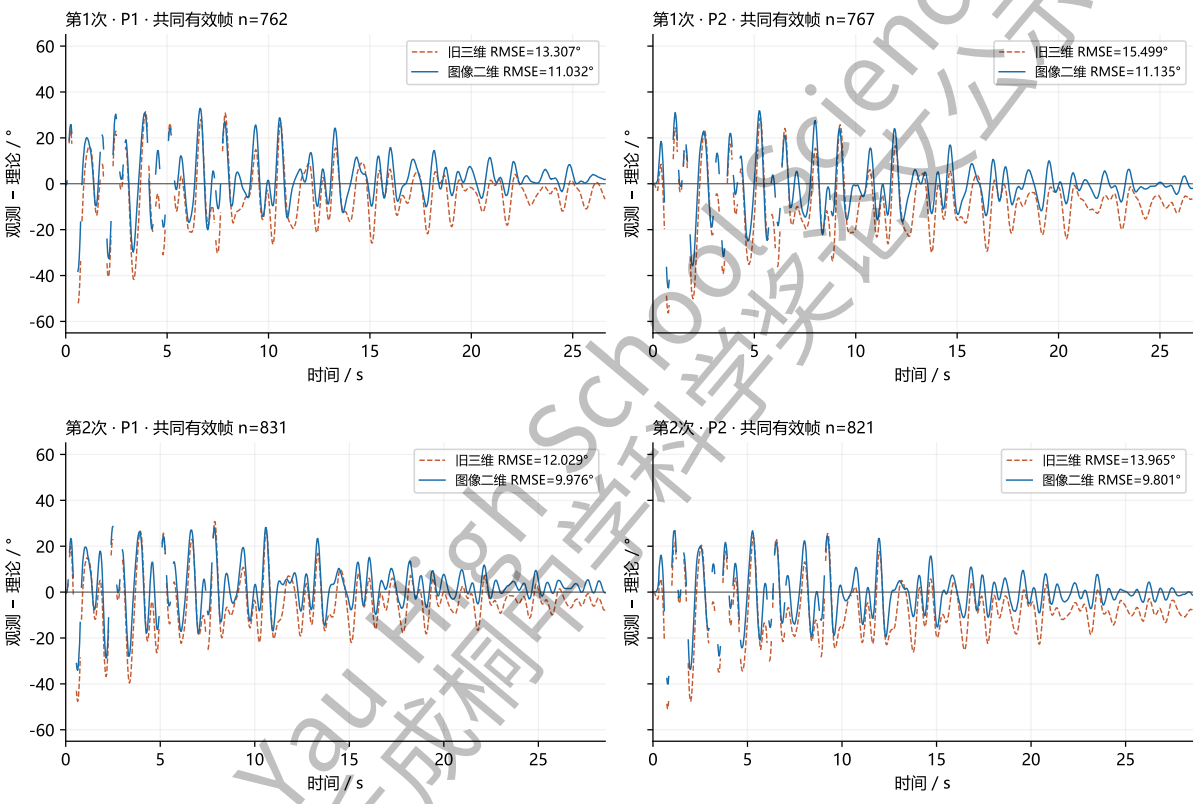


图 B.2: 观测角减理论角的残差。各面板共用纵轴范围，评分与表B.1采用相同样本，缺口不插值连接。纵轴表示理论残差，而非相对独立角度真值的测量误差。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

C 谱聚焦的补充检验与敏感性

C.1 二至五摆的有限时间聚焦

采用第4节的相邻支点间距 80 mm、首摆相对自然平衡点负向 1° 静止释放，其他初始偏移为零。不同摆数的总链长不同，此比较不等同固定总长的器件效率排名。表中保守与黏性结果均采用对应二次初始能量归一。本附录线性公式中的 η_K 均指正文的 $\eta_K^{(2)}$；完整恢复力结果的归一方式另行注明。 二摆在 8 秒内已接近静态上界，四、五摆则还

表 C.1: 二至五摆基准。所有峰值限制在前 8 秒。

N	S (%)	保守峰值 (%)	峰值时刻 (s)	黏性峰值 (%)
2	97.63	97.58	5.538	87.82
3	97.15	86.54	7.559	78.33
4	96.29	74.88	2.394	66.66
5	96.82	76.54	2.518	67.73

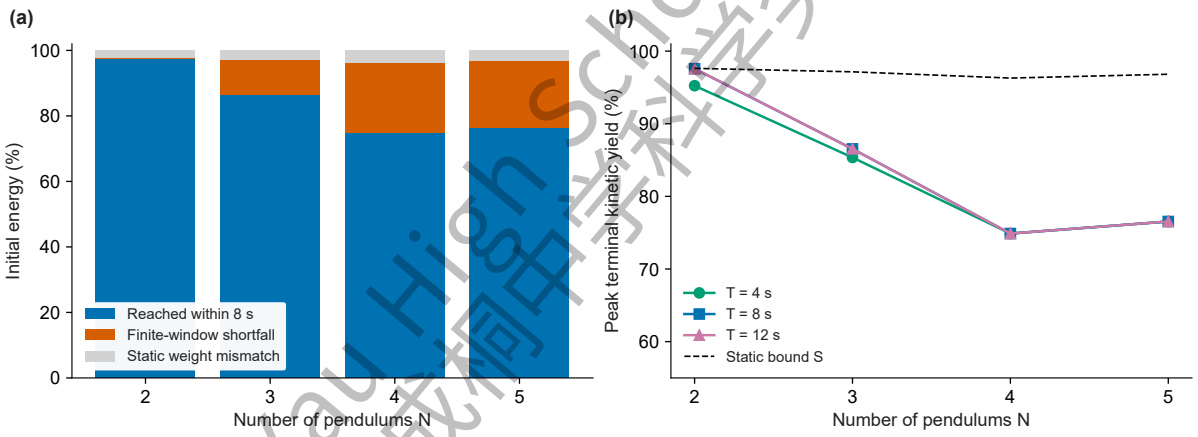


图 C.1: (a) 初始能量的三项分解：前 8 秒达到的末端动能、相对静态界的不足、静态权重失配。(b) 改变观察窗后的保守峰值。上界接近并不意味着同一时间窗内表现接近。

分别差约 21 和 20 个百分点。但五摆的 8 秒峰值略高于四摆，可见“摆越多，聚焦越差”并不符合这组结果。观察时间也会影响比较：有些模态可能需要更久才接近同向叠加。有限时间内的最大值、无限时间的上确界，以及能否在某个时刻真正取到上界，是三个不同的问题。

若记 $f(t)=\sum_r b_r \sin\omega_r t$、$L=\sum_r |b_r|\omega_r$，网格包含 $0,T$，最大步长为 Δ，则以 $m=\max_{\text{grid}}|f|$ 得到

$$m^2 \le \eta_K^*(T) \le \min\{S,(m+L\Delta/2)^2\}. \tag{C.1}$$

由 $|f'|\le L$ 可以估计采样间隙内可能漏掉的峰值。本文基准取 $\Delta=0.001$ s，所得上下界保留在数据表中。这个界约束峰值大小，并不对峰值出现时刻给出同样严格的保证。

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

C.2 模态权重与回顾检验

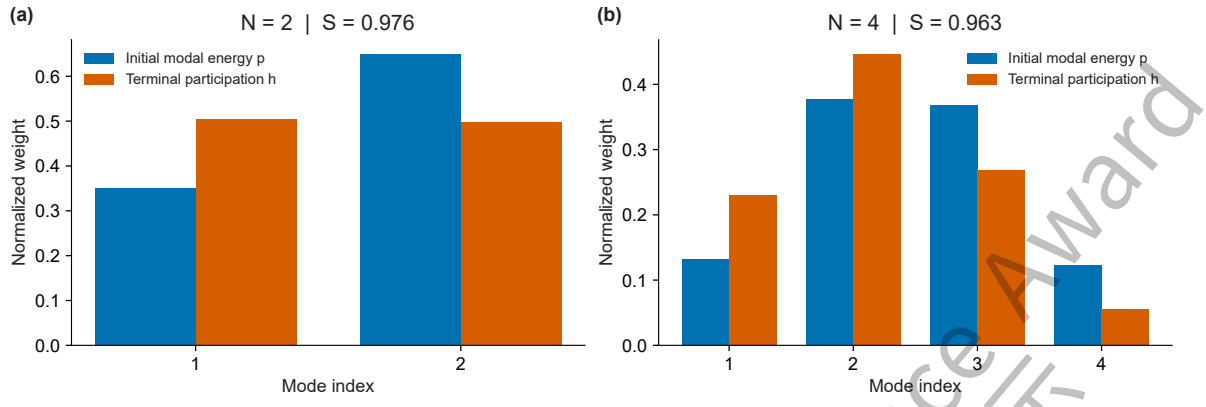


图 C.2: 二摆与四摆的初始模态能量 p_r、末端参与度 h_r。归一权重的接近程度决定静态上界，不能仅凭初态激发了多少个模态判断聚焦强弱。

对于 $\mathbf{C} = 2\beta\mathbf{M}$ 的非负比例黏性阻尼，各模态独立耗能；欠阻尼下，令 $\omega_{dr} = \sqrt{\omega_r^2 - \beta^2}$，末端速度为

$$\dot{q}_N(t) = -\sum_r \phi_{Nr}\alpha_r \frac{\omega_r^2}{\omega_{dr}} e^{-\beta t}\sin\omega_{dr}t. \tag{C.2}$$

每个模态的速度绝对值仍不超过初始模态能量允许的极值，因此 S 仍是此类黏性线性系统的上界；但 C_K 必须改用阻尼后的速度贡献。非比例阻尼、干摩擦和非线性不直接服从这一固定初始权重的界。回顾检验与已有轨迹使用相同采样时刻，二至五摆峰值的

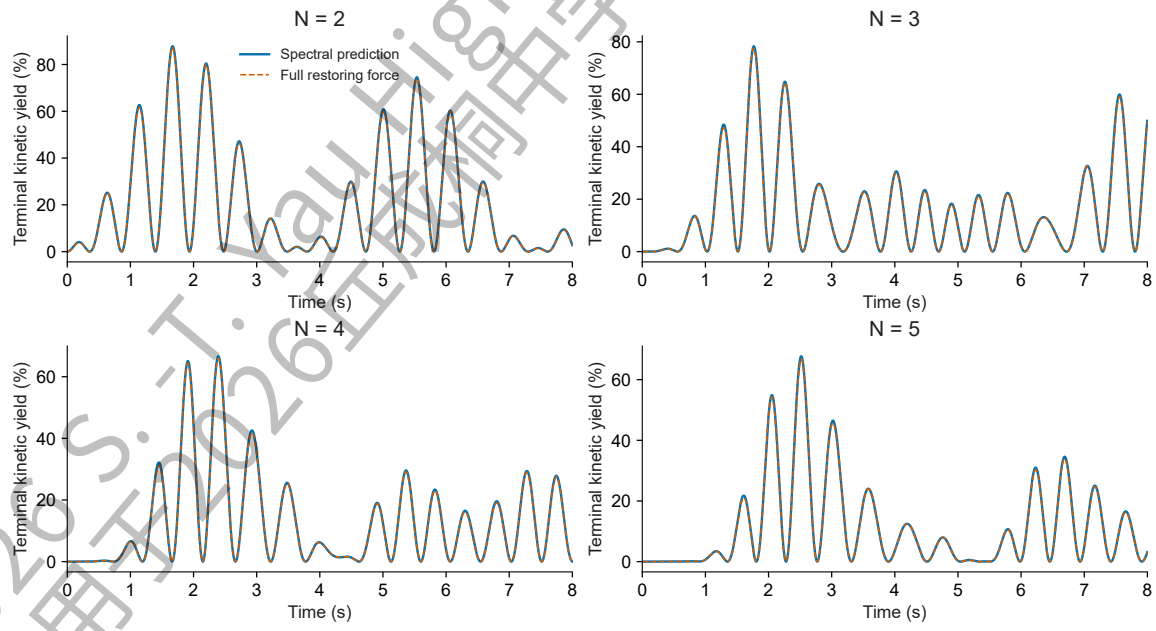


图 C.3: 与已有完整非线性恢复力轨迹的回顾比较。两模型使用相同原黏性阻尼，均不含干摩擦；本图统一除以二次初始能量以检验曲线近似，不作为完整非线性系统的能量上界。

相对误差依次约为 0.57%、0.94%、0.84%、1.27%。另用矩阵指数计算同一线性方程，最大状态差约为 1.9×10^{-14}，两种计算实现一致。

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

C.3 完整时间窗的成对能流

末端动能指标不依赖局域势能分配；但解释路径时必须明确约定。按第5.2节的非负二次能量分配，约定 $J_{ij} > 0$ 表示 $i \to j$，$Q_{ij} = \int_0^T J_{ij}\,dt$ 为有符号净交换。它与完整势能均分下的局域量分别使用，净流允许回流抵消。8 秒时，$Q_{12}/E_0 = 0.6743$、$Q_{23}/E_0 = 0.6945$、$Q_{13}/E_0 = -0.02037$。**端点直接耦合在此窗内的净交换方向与相邻通路不同**，故不能把全链理解成单向逐级传递，也不能把三项当作互斥的效率百分比。末端账本为 $0.55942 = 0.00708 + 0.69455 - 0.02037 - 0.12184$，依次对应末端最终能量、初始分配、两条净输入和末端耗散，均除以 E_0。

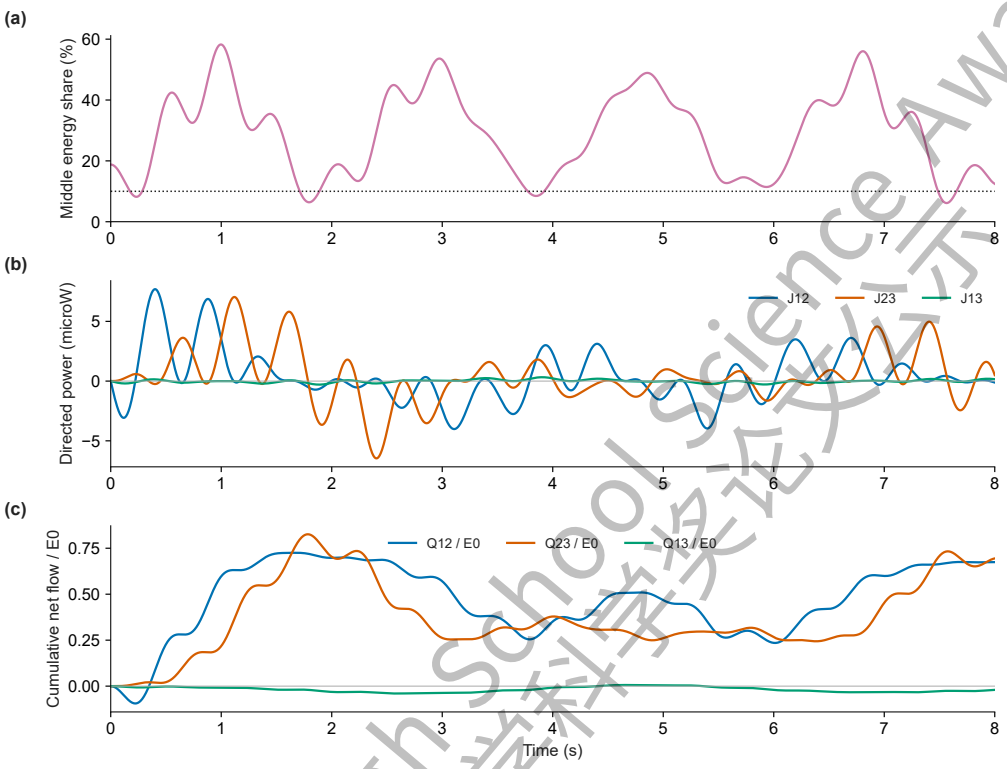


图 C.4: 三摆、负向 1° 单点释放、原黏性阻尼下的全 8 秒账本。(a) 中间摆局域份额；(b) 相邻及端点直接能流；(c) 累计有符号净交换。10% 虚线是描述性阈值，不是临界物理常数。

C.3.1 低储能阶段的持续交换

在整个 8 秒窗口内，先按 $E_2/E_{\text{total}} \le 10\%$ 筛选，再同时要求 $J_{12} > 0, J_{23} > 0$，总时长约 0.283 s。3.791–3.922 s 为其中一段，平均输入和输出约为 1.79、1.64 μW。阈值改为 8%、12% 后，总时长分别约 0.066、0.366 s：现象不是仅由一个时刻产生，但持续时长依赖阈值。

这个例子说明，中间摆存有的能量较少时，仍可能同时有能量流入和流出。它并没有严格静止，也不是所有低储能区间都恰好收支平衡。实验 3-3 采用了不同幅角和初态，不能把其中的短时减弱与这里的窗口逐点对应。成对能流还取决于局域能量的分配约定，这里的解释只适用于本节所选定义。

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026年丘成桐中学科学奖论文公示

C.4 惯量和摩擦扰动下的比较

保持第5节 5° 参考释放的完整初始能量 $E_0 = 1.00901 \times 10^{-4}$ J、端点总距 160 mm 和 8 秒窗口，对自由 $x = 80$ mm、移除中间摆、自由 $x = 78.5$ mm 三种构型分别计算七组情景：原参数、共同惯量 ±10%、共同黏性系数 ±20%、共同干摩擦力矩 ±20%，共 21 组。每次重求平衡和等待后初态，保持原重力和磁参数。

每次只改变一种参数，而且所有摆共同改变。上述扰动幅度是为比较而设定的，不是实测误差，也没有包含多个参数同时波动的情况。尤其是只改惯量而保留重力项，用于单独观察惯量的作用；它并不对应给真实摆体直接加质量。自由组的峰值范围为

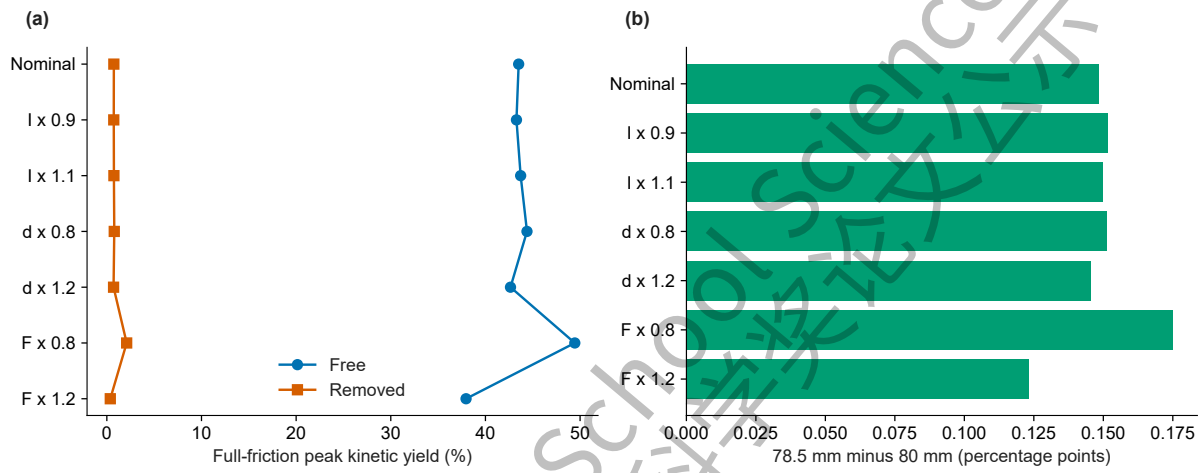


图 C.5: 原完整非线性恢复力、黏性与干摩擦下的 21 组情景。(a) 自由与移除对照；(b) 同一扰动下 78.5 mm 相对 80 mm 的改善。横轴 (b) 单位为百分点，不是相对百分比。

37.95%–49.44%，移除组为 0.364%–2.095%。在全部规定情景中，自由中间摆的响应均明显更强。

78.5 mm 相对 80 mm 的提升为 0.123–0.175 个百分点，原参数下为 0.1485 个百分点。这个小优势在已检查的扰动中都还存在，并非一改参数就消失。不过，它始终远小于保留与移除中间摆的差别，也不足以把 78.5 mm 称为普遍最优位置。

原参数两种自由构型的 RK4 子步从 4 增至 8 后，峰值最大变化约 0.00568 个百分点，小于两者差值。21 组的最大能量账本残差为 $3.23 \times 10^{-5} E_0$。这些核验约束数值误差，不能取代摩擦参数的独立标定。

C.5 参数与数学边界

C.5.1 参数与数值核验

沿用原库：支点至磁体中心 115 mm，磁体直径 25 mm、厚 3 mm、N52；三摆极性 $+, -, +$，移除后两端 $+, +$。共同惯量 $I = 8.24729 \times 10^{-4}$ kg m^2，黏性系数 $c_v = 4.00692 \times 10^{-5}$ N m s，干摩擦力矩 5.94392×10^{-5} N m。完整势能保留所有磁体对、重

2026 S. Tyau High School Science Award 仅用于2026江成桐中学科学奖论文公示

力和原配置地磁，未重新拟合。地磁使用原配置上海位置、2026-09-11 及装置方位；不是本轮实地磁场测量。

几何检验采用 DOP853，rtol $= 2\times10^{-9}$、atol $= 2\times10^{-12}$，最大步长 0.025 s，输出间隔 0.004 s；68 mm 工况进一步加密。所有几何均检查平衡残差、Hessian 步长变化及采样间隙，最大能量账本残差约 $8.31\times10^{-7}E_0$。干摩擦沿用原静止判定和投影 RK4，输出 120 Hz、每输出 4 子步，角速度阈值 0.01°/s，并对代表工况使用 8 子步核验。未将干摩擦系统当作光滑系统处理。

数值检查包括双摆解析解、非等惯量矩阵指数、带符号耦合的局域收支、无效输入处理、理想镜像恒等式和阻尼上界。研究所用的 26 个来源文件均记录了哈希，用于核对版本。数组、预测保存记录、能量归一化说明及核验结果的路径随源包数据索引保存。

C.5.2　简并与初速度

当前二至五摆实际基准的频率互异。存在简并时，逐模态上界可能依赖简并子空间所选的基底。可先按相同频率合并 b_r，再使用

$$\eta_K(t)=\left[\sum_{\lambda}B_\lambda\sin(\sqrt{\lambda}t)\right]^2,\quad B_\lambda=\sum_{r:\omega_r^2=\lambda}b_r,\quad S_{\mathrm{inv}}=\left(\sum_{\lambda}|B_\lambda|\right)^2\le 1. \tag{C.3}$$

其值不依赖简并子空间内部的正交换基。近简并但不同的频率不能任意合并，否则会抹去长期相位差。

若初速度非零，模态初速度 $\nu_r=\boldsymbol{\phi}_r^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{q}}_0$ 需保留，模态速度为 $\nu_r\cos\omega_r t-\omega_r\alpha_r\sin\omega_r t$，初始模态能量为 $(\nu_r^2+\omega_r^2\alpha_r^2)/2$。本文静止释放的数值权重不能直接用于这类初态。$S=0$ 时末端线性响应恒为零，代码将实现因子约定为零以避免除零。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

D　摆杆参数计算与数值检查

D.1　摆杆的三点取轴、转动惯量与重力力矩

摆杆并不是规则细棒，而且 STL 原点未必就在轴孔中心，直接绕模型原点求惯量容易用错转轴。我们先对网格积分，求出质心和惯性张量，再用轴孔圆周上的三点确定实际轴线。下面按 MATLAB 计算说明列出步骤。质量用 m 表示，与正文的惯量矩阵 M 区分。

D.1.1　由 STL 网格求质量分布

STL 用三角面片表示物体表面。对闭合、面片朝向一致的网格，设第 k 个面片的顶点为 $\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{c}_k$，它与原点构成的有向四面体体积为

$$V_k=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}_k\cdot(\boldsymbol{b}_k\times\boldsymbol{c}_k),\qquad V=\sum_k V_k,\qquad \boldsymbol{C}=\frac{1}{V}\sum_k\frac{V_k}{4}(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{b}_k+\boldsymbol{c}_k). \tag{D.1}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为均匀密度模型的质心。求和须保留各项的符号，不能逐项取绝对值。采用朝外的面片顺序时，总体积应为正。

用实测质量确定等效密度 $\rho=m/V$。为写清惯性张量的计算，令 $\boldsymbol{s}_k=\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{b}_k+\boldsymbol{c}_k$，体积二阶矩为

$$\boldsymbol{Q}=\int_V \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}V=\sum_k\frac{V_k}{20}\left(\boldsymbol{s}_k\boldsymbol{s}_k^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{c}_k^{\mathsf{T}}\right). \tag{D.2}$$

以 $\mathbf{1}_3$ 表示三阶单位矩阵，绕模型原点和绕质心的惯性张量分别为

$$\boldsymbol{I}_O=\rho\left[\operatorname{tr}(\boldsymbol{Q})\mathbf{1}_3-\boldsymbol{Q}\right], \tag{D.3}$$

$$\boldsymbol{I}_C=\boldsymbol{I}_O-m\left[(\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{C})\mathbf{1}_3-\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\right]. \tag{D.4}$$

坐标先统一换算为米，质量用千克。实测总质量只能校准总量；若打印件填充不均匀，或模型中混有磁铁、螺钉等不同材料，就应分部件计算，不能仅靠一个等效密度恢复真实质量分布。

D.1.2　用轴孔圆周上的三点确定转轴

在轴孔同一圆形截面的圆周上选取三个不共线点 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$。三点须属于同一圆周；圆柱侧面上任取三点并不能确定轴线。记

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1,\qquad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1,\qquad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}. \tag{D.5}$$

圆面法向和圆心分别为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}, \tag{D.6}$$

$$\boldsymbol{P}_c=\boldsymbol{P}_1+\frac{\left(\|\boldsymbol{u}\|^2\boldsymbol{v}-\|\boldsymbol{v}\|^2\boldsymbol{u}\right)\times\boldsymbol{w}}{2\|\boldsymbol{w}\|^2}. \tag{D.7}$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

于是轴线为 $\boldsymbol{P}_c + \lambda \boldsymbol{n}$。选点时应尽量分散；三点接近共线会使分母很小，放大选点误差。计算后可检查三个点到 $\boldsymbol{P}_c$ 的距离是否相等，以及 $\boldsymbol{n}$ 是否同时垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$。

D.1.3 换算到实际转轴

令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{P}_c$，去掉其沿轴方向的分量，得到质心到轴线的垂直距离

$$d = \|\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\| . \tag{D.8}$$

由平行轴定理，摆杆绕该轴的转动惯量为

$$I_{\text{rod}} = \boldsymbol{n}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{I}_C \boldsymbol{n} + md^2. \tag{D.9}$$

这里用的是质心到轴线的距离，不能直接用质心到圆心或 STL 原点的距离代替。将圆心沿轴线平移，或把 $\boldsymbol{n}$ 换成 $-\boldsymbol{n}$，算出的惯量都应不变。

对于正文采用的水平转轴，以摆杆质心位于轴下方时为 $\theta = 0$，重力势能和恢复力矩为

$$V_{g,\text{rod}} = mgd(1 - \cos\theta), \qquad \tau_{g,\text{rod}} = -mgd\sin\theta, \qquad K_G = mgd. \tag{D.10}$$

K_G 是重力力矩的系数，实际力矩还含 $-\sin\theta$。若转轴倾斜，则应先取重力在垂直于轴线的平面内的分量；一般式为 $\tau_g = \boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{r}(\theta) \times m\boldsymbol{g}]$，不能直接套用 $K_G = mgd$。

摆杆算得的 I_{rod} 和 K_G 分别计入正文 I_i 和 G_i。磁铁与夹具若未包含在摆杆模型中，需要另加；若已分材料计入，则不再重复计算。各部件的重力项应按实际质心方向合成，只有零角度时各质心都位于转轴下方的同一径向线上，才可直接把各自的 mgd 相加。

D.2 主要符号

符号	含义	单位
θ_i, q_i	相对竖直角、相对自然平衡偏角	rad
I_i, M	绕实际支点的惯量、惯量矩阵	kg m^2
G_i, K	重力力矩系数、平衡点刚度矩阵	N m
c_i, C	黏性阻尼系数、阻尼矩阵	N m s
d_i	相邻支点间距	m
$\tau_{f,i}$	库仑摩擦力矩的大小	N m
U_{in}, ϕ_{in}	单位正交、质量归一模态分量	依归一化
a_n, α_n	等惯量、质量归一模态坐标	依归一化
$E_0, E_0^{(2)}$	完整初始超额能量、初始二次能量	J

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

符号	含义	单位
$\eta_K, r_i^{(T)}$	末端动能相对初始能量、瞬时动能占比	1
$E_i^{\mathrm{loc}}, E_i^{(2)}$	完整势能均分局域能量、非负二次分配	J
$J_{i\to j}, Q_{i\to j}$	有向瞬时能流、有符号累计交换	W、J
S, C_K	静态聚焦上界、有限时间实现因子	1
x_T, σ_T	离散动能中心、空间宽度	m

个别保留图中 d 或 b 表示黏性系数，模态与传能部分记为 c_i；标定附录的 b, c 分别表示线性和二次速度阻力。查表相对转角 β 与模态衰减率也分属不同语境，不相互代入。

D.3　各类结果的参数边界

结果组	条件及解释范围
小幅模态基准	2–5 摆，间距 80 mm，磁心距 115 mm，25 mm 直径、3 mm 厚 N52 磁体；$I = 8.247290711 \times 10^{-4}$ kg m^2，$c_i = 4.0069177971 \times 10^{-5}$ N m s。能量图取首摆 $-1°$、其余自然平衡、零初速度，仅黏性，前 8 秒。
自由与移除	端点总距 160 mm，等待后初态，匹配完整 E_0；保留全部磁体对和原地磁、黏性、干摩擦。参考干摩擦力矩 5.94392×10^{-5} N m，角速度阈值 0.01°/s。
谱几何检验	$x = 64, 68, 72, 80, 88, 92, 96$ mm，80 mm 的 $-0.5°$ 单点释放作能量参照；仅黏性，前 8 秒，各几何重新求平衡。先保存预测再积分，与既有 5° 摩擦扫描区分。
实测传能	2–5 摆各一条代表角度记录，30 Hz，记录长 22.30–26.60 s；按各组重放参数和初态计算，E_0 见表6.2。重放配置库仑项为零，不与含干摩擦预测合并。
单摆标定	$I = 9.389337 \times 10^{-5}$ kg m^2，$K_g = 8.20 \times 10^{-3}$ N m；与多摆基准不是同一惯量。参数换算沿用原配置，已含装置倍率 2.3，不重复相乘。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

D.4 主要数值检查

自由与移除主对照输出 120 Hz，每步两个 RK4 子步；5° 两组加密至 240 Hz 后，最大摆幅变化小于 0.0003°，峰时变化不超过 0.0042 s。间距粗扫、细扫及候选点核验依次用 1/120、1/240、1/480 s 步长，候选点能量账本残差小于 $10^{-5}E_0$。谱几何检验的 DOP853 容差、步长及账本误差见附录C；主频提取和线性范围的分析分别见第4.6、4.8节。

减小步长可以检查离散误差，却不能检验装置参数是否测准。基础模型、单摆标定、线性谱和干摩擦计算使用不同求解器，复算时应按各自的设置执行。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

E 核心代码摘录

下面摘录三个计算环节的代码：从势能表求角度梯度、计算模态权重、求有限时间响应。前者来自 `step1_model/system_model.py`，后两者来自 `spectral.py`。源包附有原文件副本和 SHA-256，具体来源见`核心代码/来源.json`。

这些 Python 代码用于模态、传能和谱检验；第3节的基础轨迹求解使用 MATLAB ODE113。复算时按对应任务选用。

E.1 磁势能查表与角度梯度

以下为 `potential` 方法中的核心累加过程。每个 `record` 包含一对磁体及其相对几何；查表返回单位磁化强度下的势能与 (s, ρ, β) 梯度。链式法则将其变成两摆角度梯度，再累加到总势能梯度，对应式(3.28)。此段使用前文已建立的配置、几何雅可比与查表对象，不能脱离模型类单独运行。

```
        for table, records in lookup_groups.values():
            coordinates = np.array([[item[4].s_m, item[4].rho_m, item[4].beta_rad] for item in records])
            kernel_values, kernel_gradients = table.evaluate_many(coordinates)
            for record, kernel_u, kernel_grad in zip(records, kernel_values, kernel_gradients):
                i, j, pi, pj, geom = record
                scale = pi.polarity * pj.polarity * pi.magnetization_A_per_m * pj.magnetization_A_per_m
                energy_ij = scale * kernel_u
                gradient_angles = scale * (geom.jacobian.T @ kernel_grad)
                magnetic += energy_ij
                pair_energy[i, j] = pair_energy[j, i] = energy_ij
                pair_gradients[i, j, :] = gradient_angles
                pair_gradients[j, i, :] = gradient_angles[::-1]
                gradient[i] += gradient_angles[0]
                gradient[j] += gradient_angles[1]
```

保守驱动力矩取总势能梯度的负值；总梯度在此前已包含重力和地磁项：

```
    def conservative_drive_torque(self, theta: np.ndarray) -> np.ndarray:
        return -self.potential(theta).gradient_Nm
```

`energy_ij` 单位为 J，`gradient_angles` 单位为 N m。成对循环只遍历 $i < j$，避免重复计入相互作用。

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

E.2 质量归一模态与静态聚焦上界

输入为对称正定刚度矩阵 K、转动惯量数组 m 和静止释放偏角 q0。数组 m 在此表示 I_i，不是质量；q0 以弧度给出。eigh 直接解广义本征问题，并返回质量归一振型。p 与 h 分别对应初始模态能量份额和末端参与权重，S 为式(5.22)的静态上界。

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh


def spectrum(K,m,q0):
    K=np.asarray(K,float);m=np.asarray(m,float);q0=np.asarray(q0,float)
    if K.shape!=(len(m),len(m)) or q0.shape!=m.shape or np.any(m<=0):
        raise ValueError('incompatible shapes or nonpositive inertia')
    if not np.all(np.isfinite(K)) or not np.allclose(K,K.T,rtol=1e-12,atol=1e-14):
        raise ValueError('K must be finite and symmetric')
    lam,phi=eigh(K,np.diag(m))
    if min(lam)<=0:raise ValueError('stable positive-definite K required')
    w=np.sqrt(lam);alpha=phi.T@(m*q0);E0=.5*np.sum((w*alpha)**2)
    if E0<=0:raise ValueError('nonzero rest-release energy required')
    p=(w*alpha)**2/(2*E0);h=m[-1]*phi[-1]**2
    b=np.sqrt(m[-1]/(2*E0))*w*alpha*phi[-1]
    B=np.abs(b).sum();S=B**2
    if S>1+1e-10:raise ArithmeticError('Cauchy bound violated')
    return dict(K=K,m=m,q0=q0,w=w,phi=phi,alpha=alpha,E0=E0,p=p,h=h,b=b,S=S,B=B)
```

返回值 E0 为 $E_0^{(2)}$，不能与完整非线性超额势能混用。若需用完整初始能量归一，须明确乘入 $E_0^{(2)}/E_0^{\mathrm{full}}$；转换后的线性预测仍不构成完整非线性系统的上界。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

E.3 比例黏性响应与窗口峰值

response 使用静止初态及 $C = 2\beta M$ 的欠阻尼解；beta=0 给出保守响应。返回数组的行对应时间、列对应摆。peak_metrics 搜索给定窗口的末端动能峰值，同时给出静态失配、实现因子和网格误差上界，与附录C的误差说明一致。

```
def response(z,t,beta=0.):
    """Rest release; C=2 beta M, underdamped only. Returns q and angular velocity."""
    if beta<0 or beta>=min(z['w']):raise ValueError('nonnegative underdamped beta required')
    t=np.asarray(t);w=z['w'];wd=np.sqrt(w*w-beta*beta);dec=np.exp(-beta*t[:,None])
    s=np.sin(t[:,None]*wd);c=np.cos(t[:,None]*wd)
    a=z['alpha']*dec*(c+beta/wd*s)
    av=-z['alpha']*dec*w*w/wd*s
    return a@z['phi'].T,av@z['phi'].T


def peak_metrics(z,t,beta=0.):
    q,v=response(z,t,beta);eta=.5*z['m'][-1]*v[:,-1]**2/z['E0']
    i=int(np.argmax(eta));w=z['w'];wd=np.sqrt(w*w-beta*beta)
    g=np.exp(-beta*t[:,None])*w/wd*np.sin(t[:,None]*wd)
    terms=g*z['b'];den=np.abs(terms[i]).sum()
    # C measures absolute realization relative to modal speed limits, not pure phase.
    C=np.sqrt(eta[i]/z['S']) if z['S']>0 else 0.
    L=float(np.sum(abs(z['b'])*w/wd*(wd+beta)))
    upper=min(z['S'],(np.sqrt(eta[i])+L*np.max(np.diff(t))/2)**2)
    return dict(eta=float(eta[i]),time=float(t[i]),S=float(z['S']),C=float(C),
                bound_gap=float(z['S']-eta[i]),weight_loss=float(1-z['S']),
                grid_upper=float(upper),grid_error_bound=float(max(0,upper-eta[i])),
                cancellation_ratio=float(abs(terms[i].sum())/den) if den else 0.,
                terms_at_peak=terms[i].tolist(),q,v,eta
```

调用时 t 须为严格递增的一维数组，至少含两点并覆盖 $[0, T]$ 的两端。峰值时刻是采样网格上的时刻；grid_upper 约束峰值大小，不给出同等严格的峰时误差界。该解析响应不包含干摩擦、非比例阻尼或非线性恢复力。

2026 S. -T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示