参赛学生姓名：　易俊熹　吴宇融

中学：　重庆市育才中学校

省份：　重庆市

国家/地区：　中国

指导老师姓名：　张程鑫

指导老师单位：　重庆市育才中学校

论文题目：　一种磁力炮的加速机制及其实验研究

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

一种磁力炮的加速机制及其实验研究

——发射判据、耗散修正与构型相图

易俊熹 吴宇融

重庆市育才中学校 参赛学科：物理

摘 要 磁加速炮是一个不含外部能源、却能使钢球动能提高一个数量级的桌面装置，其能量来自钢球在磁体两侧重新排布所释放的磁结合能。已有工作建立了可用的能量核算框架，但对“钢球在磁体两侧如何分布”这一构型自由度，既没有给出能否发射的一般判据，也没有解释判据边界为何落在特定位置。本文以入射侧与出射侧的预置球数 (j,k) 为核心变量，系统研究这一构型自由度。在理想化假设下，本文证明装置能够发射的充要条件为 $k \geq j+2$；这个判据只用到一点：磁结合能恒为正、且随距离单调减小；至于它具体是什么函数，判据并不关心。本文进一步证明 $k = j+1$ 时净释放的磁能严格为零，并给出一个不需任何计算的对称性论证：此时发射前后的两个构型互为镜像，而软磁钢球的相互作用能只依赖磁感应强度的平方，故两构型磁能相等——这是一条不含任何可调参数、可直接证伪的预言。随后设磁结合能为 C/r^n，并引入碰撞恢复系数，得到出射速度的显式公式、判断最优出射球数的解析式与完整的构型相图，并说明有限最优球数的存在只能源于碰撞耗散而非磁学。在此基础上，本文对 21 个构型逐一试验：$k \leq j+1$ 的六个构型均未发射，与发射判据和镜像对称结论相符；15 个可发射构型的实测相图复现了“行间陡、行内平”的结构与入射侧留空的主导作用。势能指数由静态拉脱力称量直接测得 $n = 2.18$，以之为输入、由出射速度拟合得等效恢复系数 $e = 0.872$，15 个构型的均方相对偏差为 15%；偶极模型的 $n = 6$ 则无论恢复系数取何值，偏差都在 59% 以上。有效指数显著小于偶极模型的 6，这一偏差可归于近场效应、球链自身的导磁与第 1 格的磁化饱和，为模型的下一步修正指出了方向。全文最后按对模型假设的依赖程度把结论分为三层，汇总五条可以拿去和实验对照的结论，并指出其中哪几条本文尚未检验、还需补做哪些测量。

关键词 磁加速炮；构型优化；发射判据；镜像对称；恢复系数；构型相图

2026 Qiu Chengtong Middle School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

目　录

1　引言 **4**

2　磁炮出射动力学理论与数值模拟 **7**

2.1　多体磁炮体系及其理想发射机制 7

2.2　磁势能模型与碰撞耗散 10

2.3　出射动力学与构型优化相图 12

2.4　理论推论与实验可检验性讨论 15

3　实验研究与速度优化验证 **17**

3.1　实验装置与测量方法 17

3.2　构型相图的实测结果 18

3.3　模型标定与理论对比 22

4　结论与展望 **25**

致谢 **27**

参考文献 **27**

附录 A　等质量弹性碰撞与牛顿摆型链式传递 **28**

附录 B　构型能量差定理 **29**

附录 C　一般情形的动力学方程与数值方法 **30**

附录 D　构型相图对参数的敏感性 **31**

附录 E　有量纲算例与模型局限讨论 **32**

附录 F　误差分析与讨论 **35**

附录 G　拉脱力标定与球链导磁效应的检验 **36**

附录 H　实验细节与拟合方法 **37**

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

1 引言

磁加速炮（magnetic cannon，俗称高斯步枪 Gauss rifle）是一个结构极为简单的桌面装置：在水平导轨上放置一枚永磁体，其一侧紧贴排列若干钢球；当另一枚钢球以很低的初速度滚向磁体时，链条末端的钢球会以远高于入射速度的速度被弹射出去。整个装置不含任何外部能源，却能使钢球的动能增加一个数量级以上，这一反差使它成为演示能量转换的经典教学装置。

其物理机制并不神秘：入射球被磁体吸引而加速，把磁场能转化为动能；这份动能经由钢球之间的碰撞传递到链条末端；末端球再克服磁体对它的剩余吸引而逸出。装置之所以能让出射速度大于入射速度，是因为发射前后钢球在磁体周围的排布发生了改变，体系落入了一个磁能更低的构型；两个构型的磁能之差就是理想情形下可以拿来加速的能量，它转化为出射球的动能。磁体本身既不提供也不消耗净能量，它的作用是提供一组深浅不同的势阱。

然而，这个看似简单的过程同时牵涉到三个并不初等的物理问题：软磁材料在非均匀磁场中的感应磁化与相互作用能分布、冲量在预压缩接触球链中的传播、以及碰撞过程中的能量耗散。三者缺一，都无法定量预言出射速度。这使磁加速炮成为一个“现象简单、机理丰富”的研究对象。

磁加速炮虽是桌面装置，其核心问题，如何把分布储存的场能高效地集中到单个弹体上，与宏观电磁发射技术是同一个问题。线圈炮（coilgun）通过多级线圈依次励磁推进弹体，轨道炮（railgun）依靠洛伦兹力沿导轨加速电枢、再由电枢推动弹丸，航天领域设想的质量投射器（mass driver）则是二者的大尺度延伸。这些系统共同面临的核心矛盾是：级数越多、结构越长，理论上可获得的末速度越高，但每一级的能量传递损失会逐级累积，最终使速度饱和。文献 [3] 对以轨道炮实现空间发射的评估、文献 [4] 报道的多级磁阻式线圈发射器实测数据，都印证了这一点。

磁加速炮以纯机械、纯永磁的方式复现了这一矛盾：它同样有“级”的概念，同样存在传递效率随链长衰减的问题，同样存在速度饱和。区别只在于它的能量来自静磁场而非电流，因而可以在完全不涉及电路、脉冲功率与热管理的前提下，把“多级加速中的能量传递与损失”这一核心动力学单独剥离出来研究。就此而言，对磁加速炮的定量研究对宏观电磁发射系统的构型设计具有方法论上的参考价值。

尽管磁加速炮作为演示实验流传已久，对其进行系统定量研究的文献数量有限，其中最具代表性的是 2017 年发表的两项独立工作。

在理论建模方面，Chemin 等人在 *American Journal of Physics* 上发表了迄今最完

2026 Qiu Chengtong Middle School Science Award 仅用于2026年丘成桐中学科学奖论文参评

整的磁加速炮模型 [1]。他们把发射过程分解为加速、链内传递、出射三个阶段，并对每一阶段分别建模：加速阶段由实测的磁力–距离曲线积分得到可用磁能，其中钢球被处理为永磁体磁场中的感应偶极子，相应的磁力按距离的负七次方衰减；链内传递阶段引入赫兹接触力学 [5] 与 Nesterenko 孤立波理论 [6,7]，用一个经验的传递效率 γ 描述；出射阶段则扣除末端球所受的剩余磁吸引。最终给出的能量平衡关系为

$$K_{\text{final}} = \gamma^{n+m+1}\left[K_{\text{init}} + U_n - U_{m-1}\right] \tag{1}$$

其中 n、m 分别为磁体入射侧与出射侧的钢球数，U_n 为入射球可释放的磁能，U_{m-1} 为末端球逸出所需克服的剩余磁结合能。他们进一步将该式推广至 N 级串联，得到末级动能随级数增加而趋于饱和的结论，饱和值为 $K_{\max} = (\gamma U_n - U_{m-1})/(1-\gamma)$。

几乎同时，Andersson 等人在 *Emergent Scientist* 上报道了一项独立研究 [2]。他们同样采用逐次碰撞的能量核算，但把耗散更明确地表述为恢复系数的连乘：总传递效率写作 $e_{\text{tot}} = e_{\text{bm}}^2 e_{\text{bb}}^n$，其中 e_{bm}、e_{bb} 分别为球–磁体与球–球碰撞的恢复系数；模型中还计入了钢球滚动带来的转动惯量修正。

在实验检验方面，文献 [1] 用高速摄影（8000 帧/秒）直接测量了入射球的加速过程，用精密天平测得磁力–距离曲线，用高斯计验证了磁场的偶极衰减，并通过摆锤释放高度控制入射动能，测量了链长 2 至 7 球时的传递效率。其关键定量结果包括：不含磁体的五球链传递效率约 0.83，含磁体时降至约 0.61；传递效率随链长近似线性下降，可拟合为 $\gamma = \gamma_0 - 0.024(n+m+1)$，$\gamma_0 = 0.95$。这说明磁体所在环节的损失显著大于普通球–球碰撞，作者将其归因于烧结磁体内部的耗散与冲量波的部分反射。在构型方面，他们报告最优配置为入射侧不放球（$n=0$）、出射侧放三球（$m=3$），并用十级串联实验验证了速度饱和的预言。文献 [2] 则用激光光电门测速，系统改变了磁体数量（3 至 9 枚）、钢球尺寸与入射初速度，报告最优磁体数为 6 枚，且最优间隔球数随钢球尺寸变化。

上述工作已经为磁加速炮建立了可用的定量框架。但在“钢球如何在磁体两侧分布”这一构型自由度上，现有研究仍存在明确的空白。

其一，“能否发射”缺乏一般判据。两篇文献都注意到某些构型根本不发射：文献 [1] 指出“在该构型下 $m=1$ 时没有球被弹出”，文献 [2] 则说明“$n=0$ 的情形被排除，因为不发生弹射”。但这两处都是在固定另一参数下的个别观察，并未给出一个同时依赖两侧球数的一般条件。文献 [1] 中虽出现过 $m > n+2$ 这一不等式，但其含义是“此时磁学损失可以忽略”的近似成立条件，与能否发射无关。因此，发射与否在构型平面上的边界至今没有被明确写出。

其二，边界的位置缺乏解释。既有工作对不发射现象只作了现象性记录，没有说

2026 Qiu Chengtong Middle School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

明为什么边界恰好落在某处，也没有给出任何不依赖具体磁势能模型的论证。

其三，没有人把各种构型一个一个测过来。文献 [1] 的实验固定 $m=3$ 而改变 $n=0,1,2$，文献 [2] 固定其它条件改变间隔球数，均未对 (n,m) 的组合作矩阵式的系统测量，因而无法给出完整的构型相图。

针对上述空白，本文的工作包括四个方面：

(1) 给出发射的精确判据。沿用文献 [1] 的能量核算框架，本文证明：设入射侧预置 j 枚钢球、出射侧预置 k 枚钢球，则装置能够发射的充要条件为

$$k \geq j+2 \tag{2}$$

即出射侧球数至少须比入射侧多两枚。这个判据只依赖磁结合能恒为正、且随距离单调减小这两点，与它具体是什么函数无关，因而对任何磁相互作用模型都成立。

(2) 给出边界位置的对称性解释。本文进一步证明，当 $k=j+1$ 时净释放的磁能严格为零，且该结论有一个不需要任何计算的证明：此时发射前后的两个构型互为关于磁体的中心平面的镜像，而软磁钢球的相互作用能只依赖于磁感应强度的平方、与磁极正负无关，故两构型磁能相等。这一结论不含任何可调参数，是一条可直接证伪的预言，同时也解释了为何边界恰好出现在 $k=j+2$ 而非别处。

(3) 对构型平面作了系统的实验检验。本文试验了 21 个 (j,k) 构型：$k \leq j+1$ 的六个构型全部不发射，$j \leq 2$ 内的发射边界为 $k \geq j+2$，与上述两条判据相符；15 个可发射构型的相图呈现“行间陡、行内平”的结构，去掉各行的阈值构型后行内极差只有 14%–22%，而行间峰值相差 3.6 倍与 7.3 倍。

(4) 直接测定了势能指数，并以之为输入完成了理论与实验的定量对比。由第 2、3 格拉脱峰值力之比反解得 $n=2.18$；以此为输入，由 15 个构型的出射速度拟合得等效恢复系数 $e=0.872$，均方相对偏差 15%。偶极模型的 $n=6$ 被排除：无论恢复系数取何值，偏差都不低于 59%。相邻两格结合能之比由理论的 64 降到实测的 4.5。

本文的能量核算框架承袭自文献 [1]，并非本文首创；本文的贡献在于补足其中关于发射边界的部分，并把构型自由度从个别取值扩展为在 (j,k) 平面上系统地逐个测量。

第 2 章建立理论模型：先在理想化假设下推导出射速度并给出发射判据，再引入磁势能的具体形式与碰撞耗散，得到完整的构型相图，最后按可靠程度把结论分

2026 Shiu-Yau Hsien School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

层，并汇总五条可以拿去和实验对照的结论（逐节安排见该章章首）。第 3 章介绍实验装置与测量方法，给出 (j,k) 构型相图的实测结果并与理论值定量对比。第 4 章总结全文并给出后续方向。碰撞理论中较基础的部分、构型能差定理的独立证明、数值方法、相图对参数的敏感性、有量纲算例与模型局限、误差分析、拉脱力标定推导以及实验与拟合的技术细节，分别置于附录 A 至附录 H。

2 磁炮出射动力学理论与数值模拟

本章建立磁加速炮的动力学模型。2.1 节在理想化假设下推导出射速度，得到与磁场模型无关的发射判据；2.2 节给出磁势能的具体形式与碰撞耗散的描述；2.3 节合成完整的出射速度表达式，导出最优球数的判据与构型相图；2.4 节按可靠程度把全章结论分层，汇总五条可以拿去和实验对照的结论。相图对参数的敏感性、以及一个代入具体数值的算例与模型局限讨论，分别置于附录 D 与附录 E。

2.1 多体磁炮体系及其理想发射机制

考虑一个单组磁加速炮系统：一枚永磁体（质量 M，沿导轨方向半长 a）固定于水平低摩擦导轨上，两侧紧贴排列同规格钢球（单球质量 m，半径 R），二者的质量比记为 $\mu = M/m$，几何比记为 $\alpha = a/R$。定义入射球飞来的一侧为入射侧，另一侧为出射侧，预置钢球数分别记为 j 与 k（$j \geq 0$，$k \geq 1$），格号 i 自紧贴磁体的一格起算，第 i 枚球的球心至磁体中心的距离记为 d_i。设入射球的初速度为 v_0，撞击磁体一侧球链瞬间的速度为 v_1，末端出射球脱离磁场后的速度为 v_{out}。(j,k) 是本文的核心构型参数，寻找使 v_{out} 最大的 (j,k) 即为速度优化问题。

钢球彼此紧贴，故球心位置不能连续取值：磁体端面距中心为 a，紧贴端面的第一枚球球心距中心 $a+R$，其后每枚再远 $2R$，因而任一侧第 i 枚球的球心至磁体中心距离为

$$d_i = a + (2i-1)R, \qquad i = 1,2,3,\ldots \tag{3}$$

入射侧的 $d_1,\ldots,d_j$ 已被预置球占据，入射球被磁体捕获后只能停在下一个空位：

$$r = d_{j+1} = a + (2j+1)R \tag{4}$$

$j=0$ 时入射球直接停在 d_1；$j \geq 1$ 时停靠位置逐格后退。式 (4) 是本章全部结果对 j 的依赖来源，也是含预置球构型与不含预置球构型的根本差别。

本节采用如下理想化假设：(A1) 运动严格一维，忽略摩擦与空气阻力；(A2) 碰撞为瞬时过程，碰撞期间各物体位置不变、磁力不做功；(A3) 磁相互作用成对可加，

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

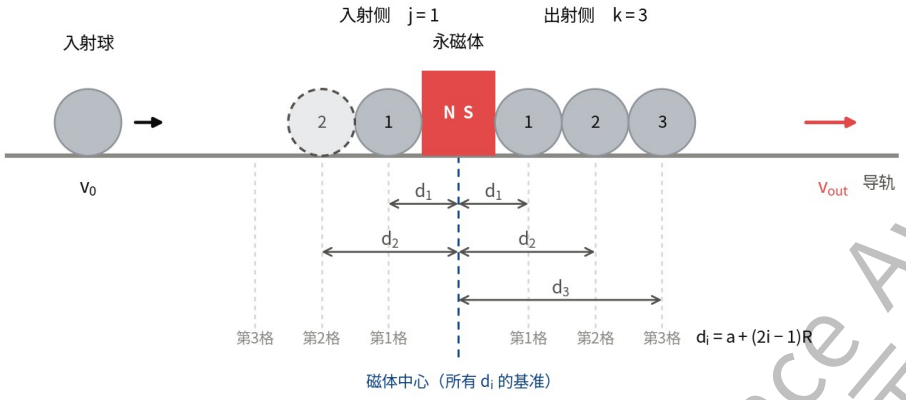


图 1　单组磁加速炮的构型。(j,k) 为待优化的构型参数，图示为 $j=1$、$k=3$ 之一例。虚线圆为入射球被磁体捕获后的最终停靠位置：入射侧第 1 格已被预置球占据，入射球只能停在第 $j+1$ 格。图下方的灰色虚线为格位，各 d_i 均以磁体中心为基准。

且只存在于磁体与钢球之间，忽略钢球间的磁耦合；(A4) 钢球为软磁材料，无剩磁，仅被感应磁化且无磁滞；(A5) 碰撞完全弹性（本节专用，2.2 节放松）。

假设 (A2) 可由量级估计验证：钢–钢赫兹接触的碰撞持续时间 $\tau_c \sim 5R/c$，取钢中弹性波速 $c \approx 5\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$、$R \approx 5\ \mathrm{mm}$，得 $\tau_c \sim 10\ \mu\mathrm{s}$；而钢球在磁场梯度中完成一次加速或逃逸的时标为毫秒量级。二者相差约两个数量级，故 (A2) 是很好的近似。

下面推导出射速度。设单枚钢球与磁体相距 r 时的相互作用势能为 $U(r)$，取 $U(\infty)=0$。由 (A4)，感应磁矩总顺着外场，相互作用能正比于 $-|B|^2$，故磁体对钢球恒为吸引。定义磁结合能

$$W(r) \equiv -U(r) > 0, \qquad \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} < 0, \qquad W(\infty) = 0 \tag{5}$$

其意义为把位于 r 处的钢球移至无穷远所需做的功。本节全部推导只用到 W 恒为正、且随距离单调减小这两点，不需要知道它的函数形式，因而结论对任何磁相互作用模型都成立。

加速阶段中，磁力为保守力，由动能定理，入射球自无穷远静止释放、落至停靠位 d_{j+1} 时

$$v_1 = \sqrt{\frac{2W(d_{j+1})}{m}} \tag{6}$$

由式 (4)，j 增大使 d_{j+1} 增大而 W 递减，故入射侧每多一枚预置球，撞击速度就下降一格。

碰撞阶段则是：在完全弹性碰撞假设下，动量在等质量钢球链中以牛顿摆模式传递（详见附录 A）：入射球的速度 v_1 经逐次碰撞无损地传递给末端出射球，其余各

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

球静止且位置未变。链中唯一质量不匹配的单元是磁体，其影响见 2.2 节；本节讨论的是完全弹性的理想链，磁体质量并不进入结论，故先取 $\mu = 1$。

出射阶段中，末端球原静止于 d_k，获得速度 v_1 后须反抗磁力做功 $W(d_k)$ 方能逸出，故 $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{out}}^2 + W(d_k)$。代入式 (6) 得本节核心结果：

$$v_{\text{out}} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[W(d_{j+1}) - W(d_k)\right]} \tag{7}$$

式 (7) 的物理意义是：体系释放的净能量等于两处磁结合能之差：入射球自无穷远落入 d_{j+1} 释放 $W(d_{j+1})$，末端球自 d_k 逸出消耗 $W(d_k)$。引言中所说的“落入更低的磁能态”，在这里就是 $W(d_{j+1}) > W(d_k)$ 这一个不等式。

式 (7) 另有一条不依赖碰撞细节的推导：直接比较发射前后两个静态构型的总磁能，其中入射侧的 $d_1, \ldots, d_j$ 与出射侧的 $d_1, \ldots, d_{k-1}$ 逐项对消，只余两个端点项，得

$$U_i - U_f = W(d_{j+1}) - W(d_k) \tag{8}$$

与式 (7) 完全一致。两条独立路径给出同一结果，其中构型能差路径不使用碰撞的任何图像，因而是对式 (7) 的严格检验。完整证明见附录 B。

推论 1（发射阈值） 净释放的磁能为正的充要条件是 $W(d_{j+1}) > W(d_k)$。由 W 严格单调递减，这等价于 $d_{j+1} < d_k$，再由式 (3) 等价于 $j+1 < k$，即

$$k \geq j+2 \tag{9}$$

出射侧球数至少须比入射侧多两枚，装置才可能发射。$j = 0$ 时需 $k \geq 2$（“一进二出”是最小可发射构型）；每在入射侧增加一枚球，出射侧的最小球数相应增加一枚。这个判据只依赖 W 恒为正、且随距离单调减小，与它的函数形式无关。

推论 2（镜像对称） 当 $k = j+1$ 时式 (8) 给出零，净释放的磁能严格为零。从对称性看，此时发射前后的初末构型互为关于磁体的中心平面的镜像；鉴于软磁材料的感应磁能仅依赖于 B^2 而与磁极符号无关，且磁体几何对称，初末态磁能必然相等。这一基于对称性的结论不依赖 W 的具体函数形式，甚至不依赖假设 (A3)，为后续排查实验系统误差（导轨倾斜、磁体不对称、球材剩磁）提供了绝对的对照基准：若 $k = j+1$ 时末端球仍被明显弹出，即说明装置本身有问题。

推论 3（上界与单调性） 由式 (7) 与 $W > 0$：$v_{\text{out}} < v_1$ 严格成立；v_{out} 是 k 的严格单调增函数；$k \to \infty$ 时 $v_{\text{out}} \to v_1^-$。因此理想模型中不存在有限的最优出射球数。若实验观察到出射速度在某有限 k 处取极大后下降，该极值不可能源于磁学，只能源于碰撞耗散，这为 2.2 节引入恢复系数提供了直接的实验动机。

需要区分两个不同的问题：$k \geq j+2$ 回答“能否发射”，是必要条件；“怎样最快”则由 2.3 节的 k^* 回答，二者数值上并不重合。

2026 Qiu Tong Yu High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公开展示

2.2 磁势能模型与碰撞耗散

2.1 节的结果在结构上是严格的，但有两处未定。其一，磁结合能 $W(r)$ 只用到“恒为正”和“随距离减小”这两条，没有具体形式，因而算不出任何数值。其二，推论 3 给出的“出射速度随 k 严格单调上升、不存在有限最优球数”与实验现象相悖，实验中每个入射侧球数都对应一个有限的最优出射球数。

本节先给出 $W(r)$ 的幂律形式与它的标定办法，再引入碰撞耗散，为 2.3 节合成完整的出射速度表达式作准备。

先看幂律形式与其适用条件。钢球为软磁材料，其磁矩并非固有，而是由磁体的磁场感应产生：在线性响应区内感应磁矩 $\mu_{\mathrm{ind}} \propto B$，偶极子在外场中的相互作用能 $U = -\mu_{\mathrm{ind}} \cdot B \propto -B^2$ 恒为负，与 2.1 节“磁体对钢球恒为吸引”一致。对偶极子场 $B \propto r^{-3}$，相互作用能随距离按幂律衰减，于是

$$W(r) = \frac{C}{r^n}, \qquad n = 6 \tag{10}$$

相应的磁力按 $F = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r = nC/r^{n+1} \propto r^{-7}$ 衰减，这一指数有实验支持：文献 [1] 用精密天平实测磁力–距离曲线，所得幂指数正是 -7。不过文献 [1] 用的是圆柱形磁体，与本文的立方磁体几何不同，这个数值只能作参考；本文最终使用的指数由第 3 章的静态拉脱力称量直接测定。式 (10) 依赖偶极近似与磁化未饱和两个前提，而二者都在最靠近磁体处最先失效：本文中 $d_1 = a + R$ 与磁体半长 a 同量级，且紧贴磁体的第 1 枚球内部磁感应强度与碳钢的饱和值同量级，故第 1 格的 W_1 很可能被高估。所幸这一“近处陡、远处平”的势垒分布本身才是后续优化的物理基础，而指数 n 可以绕开磁场建模、由静态拉脱力测量直接定出。本文做了这项测量（3.1 节）：由第 2、3 两格拉脱峰值力的比值反解得 $n = 2.18$，这一步只用到力的比值，不需要力的绝对定标；绝对标度（即常数 C）仍由第 3 章的整批出射速度定出。

将式 (3) 的 $d_i = a + (2i-1)R$ 代入式 (10)，并引入几何比 $\alpha = a/R$，得

$$W_i \equiv W(d_i) = \frac{C}{R^n}\,(\alpha + 2i - 1)^{-n} \tag{11}$$

取 $\alpha = 1$（磁体半长与球半径相当）则 $d_i = 2iR$，$W_i \propto i^{-n}$。以第 1 格为 100，各格结合能列于表 1。

相邻两格之比为 $(1 + 1/i)^n$，随 i 迅速趋近 1：$n = 6$ 时由第 1 格到第 2 格衰减 64 倍，而由第 4 格到第 5 格仅衰减 3.8 倍。这一“近处陡、远处平”的分布是后文全部定量结论的来源，也说明指数 n 越大，入射侧多放一枚球的损失就越大。

式 (10)、(11) 中的指数可以不依赖任何磁场测量而直接标定：把 i 枚钢球紧贴排列于磁体一侧，缓慢拉脱最外侧那枚并记录脱离前的峰值拉力 F_i，相邻两格峰值力

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

表 1　各格磁结合能（以 $W_1 = 100$ 归一，$\alpha = 1$）

格号 i	1	2	3	4	5	相邻比 W_i/W_{i+1}
$n = 3$	100	12.50	3.704	1.563	0.800	$8.0 \to 1.95$
$n = 4$	100	6.250	1.235	0.391	0.160	$16.0 \to 2.44$
$n = 6$	100	1.563	0.1372	0.0244	0.0064	$64.0 \to 3.81$

之比只依赖 n 与 α，因而不需要力的绝对定标即可反解出指数。这一标定方式同时提供了对假设 (A3) 的直接检验：紧贴排列的钢球本身被磁化，整条球链构成一条低磁阻的磁通路径，故实测的 F_1/F_2 应小于孤立球模型给出的值，而这一偏差量本身即是球链导磁效应强弱的度量。推导、公式与判别方法见附录 G。

再看碰撞耗散。放松假设 (A5)，定义恢复系数 $e \in (0,1]$ 为碰后分离速度与碰前接近速度之比：

$$e = \frac{|v_B - v_A|}{|u_A - u_B|} \tag{12}$$

$e = 1$ 为完全弹性，$e = 0$ 为完全非弹性。钢–钢碰撞的恢复系数一般在 0.85–0.95 之间。本文没有单独测过这个量，第 3 章给出的 $e = 0.872$ 是由速度数据拟合出来的、整条链的等效值。

对质量 m_A 的球以速度 u 撞击静止的质量 m_B，由动量守恒与式 (12) 联立即可解出碰后速度。等质量时被撞球得 $\frac{1+e}{2}u$，撞击球只剩 $\frac{1-e}{2}u$（$e = 0.9$ 时仅为入射速度的 5%，残余动能只余 0.25%，这解释了为什么入射球撞击后基本停留在 d_{j+1} 处）；单次等质量碰撞的能量损失比例为 $(1-e^2)/2$，$e = 0.95$、0.90、0.85、0.80 分别对应 4.9%、9.5%、13.9%、18.0%。推导与式 (A.3)、(A.4) 见附录 A。

由式 (A.3)，$e > 0$ 时恒有 $v_B - v_A = eu > 0$，即碰后被撞球总是快于撞击球，两者随即分离而不会二次碰撞；因此链中的碰撞严格按顺序一对一对发生，各次的速度因子可以直接连乘（$e = 0$ 时两球碰后粘连，这一图像失效，所幸钢球远离该极限）。完整的碰撞链为：入射球 $\to$ j 枚预置球 $\to$ 磁体 $\to$ k 枚出射球。其中等质量碰撞共发生

$$N_{\mathrm{eq}} = j + (k-1) = j + k - 1$$

次(入射球至磁体 j 次,磁体至出射末端 $k-1$ 次);唯一质量不匹配的环节是“球 $\to$ 磁体 $\to$ 球”,连续应用两次式 (A.3)(取 $\mu = M/m$)得该环节的速度因子为 $(1+e)^2\mu/(1+\mu)^2$。二者相乘得冲量透射因子

$$\Lambda(e,\mu,j,k) = \frac{(1+e)^2\mu}{(1+\mu)^2}\left(\frac{1+e}{2}\right)^{j+k-1} \tag{13}$$

2026 Qiu Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

$e=1$ 且 $\mu=1$ 时 $\Lambda=1$，退化为 2.1 节的理想牛顿摆。Λ 是速度的传递比，故动能的传递比为 Λ^2。它随链长按 q^{j+k-1} 衰减：$e=0.90$ 时链长每增一节 Λ 乘 0.95，链长 8 时已降到 0.60；e 由 0.95 降到 0.80，同一链长下 Λ 减半有余。完整数值见附录 D 的表 D.3。

这里有一处不能忽略的前提：磁体虽被固定于导轨，但这个约束的响应时间在毫秒量级（依据见附录 H：热熔胶层的等效刚度对应 0.17–1.1 ms 的固有周期），远大于碰撞持续时间 $\tau_c \sim 10\,\mu$s，故约束来不及提供反力，碰撞瞬间磁体的惯性由自身质量决定。若磁体被刚性固接于实验室参考系（等效 $\mu\to\infty$），由式 (A.3) 得 $\Lambda\to 0$，入射球将原速弹回，装置根本不发射。

式 (A.3) 中的磁体因子 $(1+e)^2\mu/(1+\mu)^2$ 在 $\mu=1$ 时取最大值，似乎意味着质量匹配的磁体最优。但文献 [1] 实测：不含磁体的五球链传递效率约 0.83，含磁体时降至 0.61；而式 (A.3) 在 $e=0.9$、$\mu\approx 1.8$ 时给出的磁体因子为 0.83，仍高于实测所反映的 $0.61/0.83\approx 0.73$。这表明磁体处的损失不只来自质量失配，还须计入烧结磁体内部的耗散与冲量波在界面的部分反射，二者本文均未建模。

因此本文不把 μ 当作一个可以独立调节的参数，式 (A.3) 中的磁体因子应理解为一个可由实验标定的有效系数。其实测方法为：测量同长度纯球链的速度传递效率，再测量含磁体球链的传递效率，取二者之比。

2.3 出射动力学与构型优化相图

碰撞链使末端球获得速度 Λv_1，其中 v_1 由式 (6) 给出；该球随后需反抗磁力做功 W_k 方能逸出。合并得

$$v_{\text{out}}=\sqrt{\Lambda^2\left(v_0^2+\frac{2W_{j+1}}{m}\right)-\frac{2W_k}{m}} \tag{14}$$

取 $v_0=0$ 并代入式 (11)，得完全无量纲的形式

$$\frac{v_{\text{out}}}{u_0}=\sqrt{\Lambda^2(\alpha+2j+1)^{-n}-(\alpha+2k-1)^{-n}},\qquad u_0\equiv\sqrt{\frac{2C}{mR^n}} \tag{15}$$

其中 u_0 是由体系参数组合出的唯一速度标度，相当于把一枚钢球从距磁体一个球半径处拽到无穷远所释放的能量对应的速度。式 (15) 表明，出射速度的构型依赖完全由 e、μ、j、k 与两个常数 α、n 决定，磁体的绝对强度只通过 u_0 整体缩放：换一块更强的磁体会让所有构型同比例变快，却不改变哪个构型最优。

式 (15) 在三种极限下给出正确的退化行为：

1. $e=1$、$\mu=1$ 时 $\Lambda=1$，回到 2.1 节的理想结果式 (7)；

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖论文公示

2. $k = j+1$ 时两个 W 相等，根号内为 $(\Lambda^2-1)W_{j+1} < 0$，即不发射。这与推论 2 相容：理想情形下该构型净释放的磁能恰为零，计入耗散后则严格为负；

3. $k \to \infty$ 时第二项趋于零，但第一项因 $\Lambda \to 0$ 也趋于零，故 $v_{\text{out}} \to 0$。这与推论 3（理想情形下趋于上界 v_1）形成对照，正是耗散带来的定性改变。

值得注意的是根号内两项并不对称：Λ^2 只乘第一项而不乘第二项，因为碰撞损失发生在末端球获得速度之前，它获得速度之后才去克服剩余势垒 W_k，该过程是纯磁学的，不涉及碰撞。

这一不对称正是构型优化的核心矛盾：增大 k 时，第一项因多一次碰撞而乘以 $[(1+e)/2]^2 < 1$，是碰撞的衰减；第二项因出射点后移而减小，是磁势能的增量。二者竞争决定最优球数，也正是理想模型（$\Lambda \equiv 1$，只有增量没有衰减）中不存在有限最优的原因。下面把这一竞争写成定量判据。

本文的拉脱力称量只用来定出指数（3.1 节），没有测出完整的拉脱力–位移曲线。若今后测得球链的导磁效应显著，可以绕开对磁场分布的建模：把式 (14) 中的 W_i 直接换成实测的链式结合能 W_i^{exp}，即球链中第 i 枚球分离至无穷远所需做的功，由拉脱力–位移曲线积分得到：

$$v_{\text{out}} = \sqrt{\Lambda^2\left(v_0^2 + \frac{2W_{j+1}^{\text{exp}}}{m}\right) - \frac{2W_k^{\text{exp}}}{m}} \tag{16}$$

作此替换后，2.1 节至本节的推导结构不变，而定量预测不再依赖任何磁场模型假设，只依赖一组可以独立测量的输入。

正文的解析式不含导轨摩擦与空气阻力。需要计入时可对运动方程直接数值积分，方法与收敛性检验见附录 C；本文的做法是以解析式为主，摩擦的影响另在附录 F 中单独估计：接近段的阻力对速度的影响为 0.3%–4%（$j = 2$ 行最大），测速区间内的减速则使线性拟合给出的区间平均速度比区间起点速度低 0%–25%（中位数 7%）。在本文的参数范围内，数值解与式 (15) 的偏差小于 1%，故后文的定量结果直接采用解析式。

下面导出最优球数的解析判据。设 $q \equiv (1+e)/2$。由式 (A.3)，出射侧每增加一枚球，Λ 就乘以 q。于是把 k 增至 $k+1$ 时，式 (15) 根号内的改变量为

$$\Delta = (W_k - W_{k+1}) - (1-q^2)\Lambda^2(k)W_{j+1}$$

左项是出射点后移一格所省下的势垒，右项是多一次碰撞所损失的能量。最优球数 k^* 就是磁势能的增大首次及不上碰撞的衰减的那一格：

$$k^* = \min\left\{k:\ W_k - W_{k+1} \le (1-q^2)\Lambda^2(k)\,W_{j+1}\right\} \tag{17}$$

2026 · Tsinghua High School Science Award
仅用于2026年丘成桐中学科学奖论文公示

式 (17) 与直接对表 2 逐行取极大所得的结果一致，但它把最优的成因显式地写了出来：

- 磁势能增量 $W_k - W_{k+1}$ 随 k 迅速衰减（$n = 6$ 时按 k^{-7}）；
- 碰撞衰减 $\propto \Lambda^2(k)$ 随 k 缓慢衰减（按 q^{2k}，$e = 0.9$ 时公比 0.90）。

两条曲线必然相交，交点即 k^*。由此可见有限最优的存在与 W 的具体形式无关，只要求磁势能增量的衰减比等比数列更快，这解释了为什么 n 的取值只影响 k^* 的数值而不影响其存在性。

同理，出射侧球数的上界由根号内为正给出：

$$\Lambda^2(k)\, W_{j+1} > W_k \tag{18}$$

式 (18) 即实际的发射条件，下文将说明它比 2.1 节的理想判据 $k \geq j+2$ 更严。

据此可以算出构型相图。取 $\alpha = 1$、$n = 6$、$\mu = 1$、$e = 0.90$，由式 (15) 算得表 2。

表 2　相对出射速度（以 $j = 0$、$k = 2$ 为 1.0000；$n = 6$，$e = 0.90$，$\mu = 1$）。“—”表示根号内非正，即实际不发射，故每行第一个有数值的格即实际最小可发射球数；下划线标出理想判据 $k = j+2$ 所在的格。$j \leq 3$ 各行两者重合，$j = 4$ 行则错开一格（下划线落在 $k = 6$ 的“—”上），这一错位即下文第一条推论所指的边界偏移。粗体为各行最大值，即最优出射球数 k^*。$j = 3$、4 两行的极大较平坦，粗体位置依五位有效数字判定（$j = 4$ 行 $k = 8, 9, 10$ 分别为 0.00426、0.00431、0.00421）。

$j\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	—	**1.0000**	0.9593	0.9121	0.8666	0.8233	0.7821	0.7430	0.7059	0.6706
1	—	—	0.1053	**0.1068**	0.1025	0.0976	0.0928	0.0882	0.0838	0.0796
2	—	—	—	0.0243	**0.0274**	0.0270	0.0259	0.0247	0.0235	0.0224
3	—	—	—	—	0.0068	0.0096	**0.0099**	0.0097	0.0093	0.0089
4	—	—	—	—	—	—	0.0038	0.0043	**0.0043**	0.0042

基于表 2 的构型相图，可以得出三条能与实验直接对照的推论。

首先，实际的发射边界比理想判据更严，而且严出多少与恢复系数直接有关。表 2 中“—”区域的边界并不等于推论 1 给出的 $k \geq j+2$。例如 $j = 4$、$k = 6$ 满足理想判据，在无耗散时应当发射，但由式 (18) 计入碰撞损失后根号内变负，实际不发射。其原因是链长增加使 Λ 按 q^{j+k-1} 衰减，而磁势能增量的增长赶不上这一衰减。故 $k \geq j+2$ 是必要条件而非充分条件。

实际发射边界还随恢复系数移动：e 越小，Λ 衰减越快，边界越向右移。这一依赖关系、以及它作为 e 标定途径的可行性与限制，列于附录 D。

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖论文公示

其次，每个入射侧球数都对应一个有限的最优出射球数。理想模型中不存在有限最优（推论 3），而表 2 每一行都出现极大值，其成因已由式 (17) 写明：磁势能增量随 k 的增长赶不上透射因子按 q^{j+k-1} 的衰减。这正是推论 3 所指出的、可用来判定耗散是否起作用的实验特征。

由表 2，只有 $j=0$ 时最优点与阈值重合；$j\geq 1$ 时 k^* 依次为 4、5、7、9，均高于阈值一至三格，$j\geq 2$ 后近似有 $k^*\approx 2j+1$。其物理原因是：磁势能增量的饱和尺度由入射球的停靠位置 d_{j+1} 决定，入射侧压得越深，出射侧就须拉得越远才能使 $W_k \ll W_{j+1}$，而碰撞损失又限制了链长，二者竞争给出有限极值。

最后，入射侧放不放球，比出射侧放几枚球重要得多。由表 2，$j=0$ 的最优值为 1.0000，而 $j=1$ 的最优值仅 0.1068，相差约十倍；$j=2$ 更降至 0.0274。其来源是预置球把入射球的停靠位置由 d_1 推至 d_{j+1}，而由表 1，$n=6$ 时 $W_2/W_1=1/64$。

因此在构型优化中，入射侧是否留空比出射侧球数重要得多：调整 k 至多带来百分之几十的变化，而 j 由 0 变为 1 就损失一个数量级。该结论与文献 [1] 报告的最优构型（入射侧不放球、出射侧三球）在定性上一致；本文的 $j=0$ 行给出的最优为 $k^*=2$，与文献的 $m=3$ 相差一格，这一差异可归因于二者的几何比 α 与恢复系数不同，也正是需要由实验判定的量。

这些数值随势能指数 n 变化很明显，具体依赖同样列于附录 D。

与此对照，推论 1（发射阈值）与推论 2（镜像对称）两条结论不含任何可调参数，完全不受 n 取值影响；式 (17) 所揭示的“有限最优必然存在”这一定性结论同样不依赖 n。因此本节的全部数值都随 n 而变，应与前两条不含参数的结论区别对待；2.4 节将按这一区别把全章结论分层。

2.4 理论推论与实验可检验性讨论

本章各条结论的可靠程度并不相同。按所依赖假设的强弱可分三层：越靠上的结论一旦和实验对不上，要动的就越是模型最根本的部分。这一分层直接决定第 3 章的实验顺序。

层 Ⅰ、Ⅱ 的结论不含任何可调参数，因此是真正可证伪的；层Ⅲ的数值应视为待标定的预测，其偏差本身即携带信息（见下文关于发射边界的一条）。

据此可以把全章的结论归纳成五条能直接拿去和实验对照的话。

首先，实际的发射边界比理想判据更严。真实边界由 $\Lambda^2 W_{j+1} > W_k$ 给出，部分满足 $k\geq j+2$ 的构型（如 $j=4$、$k=6$）实际并不发射；边界相对理想判据的偏移量可用来反推恢复系数 e，办法见 2.3 节。其次，每个 j 都对应一个有限的最优出射球

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学生科学奖公示

表 3　理论结论按可靠程度的分层

层级	结论	所依赖的假设
Ⅰ. 无参数	$k=j+1$ 时净释放的磁能严格为零（推论 2）	钢球软磁、磁体几何对称
Ⅱ. 仅依赖 W 的定性性质	发射阈值 $k\geq j+2$（推论 1）；构型能差式 (8)	$W>0$ 且严格单调递减，碰撞瞬时 (A2)
Ⅱ.	$v_{\text{out}}<v_1$ 且随 k 单调增（推论 3）	同上
Ⅲ. 依赖势能形式与数值	表 2 至表 D.2 的全部数值；k^* 的具体取值	$n=6$、$\alpha=1$、假设 (A3)

数 k^*，且一般有 $k^*>j+2$。理想模型中不存在有限最优，故实验若测得极值即直接证明耗散的存在；数值上各行的最优依次为 $k^*=2,4,5,7,9$，仅 $j=0$ 时与阈值重合，$j\geq 2$ 后近似有 $k^*\approx 2j+1$。第三，入射侧是否留空是最重要的构型自由度：j 由 0 变 1 使出射速度下降约一个数量级（相对值由 1.0000 降至 0.1068），其来源是停靠位置由 d_1 推至 d_2，而 $W_2/W_1=2^{-6}=1/64$。第四，$k=j+1$ 时净释放的磁能严格为零；这一条不含任何自由参数，宜作实验的对照组，若测得末端球明显被弹出，即说明装置有系统误差。

最后一条关于标度。由式 (14)，$v_{\text{out}}\propto\sqrt{W}\propto\sqrt{F_1}$，即出射速度与磁体拉脱力的平方根成正比。在几何不变（α、n 不变）的前提下更换更强的磁体使 F_1 增大一倍，各构型的出射速度应一律增大 $\sqrt{2}\approx 1.41$ 倍，而构型相图的形状（发射边界与 k^* 的位置）完全不变，因为 C 只是式 (11) 的整体标度，不进入式 (17) 的判据。这一条把“磁体有多强”与“球怎么排”两件事彻底分开，是检验幂律模型的最直接方式。

按表 3 的分层，镜像对称结论属层Ⅰ；发射边界、有限最优与平方根标度三条属层Ⅱ；入射侧留空的定性方向属层Ⅱ，而其定量幅度属层Ⅲ。

第 3 章即按这一分层依次检验：先以层Ⅰ的镜像对称结论校验装置本身无系统误差，再把构型平面上的组合一个一个测过来、画出相图，以检验发射边界与有限最优两条，最后以静态称量测得的势能指数为输入，由整批速度数据标定恢复系数。有两点需要预先说明：上文所说的“用边界偏移反推 e”在本文测到的构型范围内用不上，因为表 D.1 显示 $j=0$、1 两行的边界对 e 完全不敏感，而本文只测到 $j=2$，恢复系数因而只能由速度数据拟合得到；平方根标度律需要换一块磁体后把全部构型重测一遍，本文未做。

2026 Tsinghua High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

3 实验研究与速度优化验证

本章按第 2 章结论的可靠性顺序组织：先检验不含可调参数的发射判据与镜像对称结论，再把构型平面上的组合逐个测出相图，最后以静态称量测得的势能指数为输入，用相图标定恢复系数并与理论定量对比。共覆盖 15 个有末端球射出的构型与 6 个没有的构型。

3.1 实验装置与测量方法

装置即图 1 所示的单组磁加速炮。永磁体为边长 10 mm 的钕铁硼立方体，质量 $M = 7.4$ g，用热熔胶固定于水平塑料轨道中部；钢球直径 10 mm，单球质量 $m = 4.1$ g，与密度 $7.85\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ 的实心钢球相符。于是磁体半长 $a = 5.0$ mm 与球半径 $R = 5.0$ mm 相等，$\alpha = a/R = 1.00$，$\mu = M/m = 1.80$；由式 (3)，$d_i = 2iR = 10i$ mm，各格等间距。第 2 章各表取 $\alpha = 1$，与本装置一致，可逐项对照；它们另取 $\mu = 1$，但本章引用的量对 μ 并不敏感：由 $\mu = 1$ 改为 1.80，表 2 各相对值的改变只有 0.1%–0.9%，发射边界与最优球数的位置完全不变。所用器材见图 2。



图 2 实验器材。钕铁硼立方磁体（边长 10 mm）、直径 10 mm 的碳钢球、亚克力导轨与沿轨固定的刻度尺；数显测力计（电子吊秤）用于称量拉脱峰值力，热熔胶枪用于固定磁体，细棉线用于称量时连接钢球与测力计，高亮 LED 照明灯用于保证高速摄影的曝光。

除出射速度外，本文还称量了拉脱峰值力。把 i 枚钢球（$i = 1, 2, 3$）紧贴排列于磁体一侧，将导轨竖直放置、磁体在下，用细线粘住最外侧那枚钢球并挂在数显测力计（电子吊秤，分度 0.1 N，带峰值锁存）上，缓慢向上提拉，读取脱离前的峰值示数。竖直提拉时钢球重力 $mg = 0.040$ N 不到半个分度，可以忽略；磁力沿导轨轴向，球与槽壁之间没有法向压力，摩擦也可忽略。第 1、2、3 格的峰值力分别为 18.7

2026 Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖论文公开

N、9.8 N 与 2.7 N（表 G.1）。由式 (G.1)，相邻两格峰值力之比只依赖势能指数与几何比，因而不需要力的绝对定标即可由式 (G.2) 反解 n。第 2、3 格之比 $F_2/F_3 = 3.63$，反解得 $n = 2.18$（$n = 6$ 的理论值为 17.1）；第 1、2 格之比 $F_1/F_2 = 1.91$，形式上对应 $n \approx -0.07$，已不能用一条幂律解释：紧贴磁体的第 1 格由接触面处的磁通汇聚主导，峰值力虽大，却不携带相应的长程结合能（见 3.3 节与附录 G）。发射过程真正涉及的是 $k \geq 2$ 的势垒（$d \geq 20$ mm），故本文取 $n = 2.18$，按这一幂律相邻两格结合能之比 $W_1/W_2 = 2^{2.18} = 4.5$（理论值 64）。实测的 F_1/F_2 远小于理论值 128，2.2 节据球链导磁效应作出的“实测比值应小于 128”这一预期因而得到证实。这一测定完全不用出射速度，是本章对势能指数的直接测量。

出射球用 240 f/s 高速摄影记录,逐帧标定位置,相邻两点的时间间隔 $\Delta t = 1/240$ s；自末端球离开初始位置 2 cm 处开始取点。

2 cm $= 4R$ 恰好是两个格距，故测到的不是“脱离磁场后”的末速度，而是只逃逸两格时的速度；本章此后一律用与这一口径一致的

$$v_{\mathrm{meas}}(j,k) = u_0\sqrt{\Lambda^2(\alpha+2j+1)^{-n} - (\alpha+2k-1)^{-n} + (\alpha+2k+3)^{-n}} \tag{19}$$

与实验比较（推导见附录 H）。这一修正对 $j = 0$ 行只有 2%–7%，但对 $j = 1$、2 两行紧邻阈值的构型，测点处的剩余结合能 W_{k+2} 可与实测动能相当甚至远大于它——$(2,4)$ 在测点处的剩余结合能约 0.20 mJ，而实测动能只有 0.018 mJ，不修正会得出完全错误的标定值。

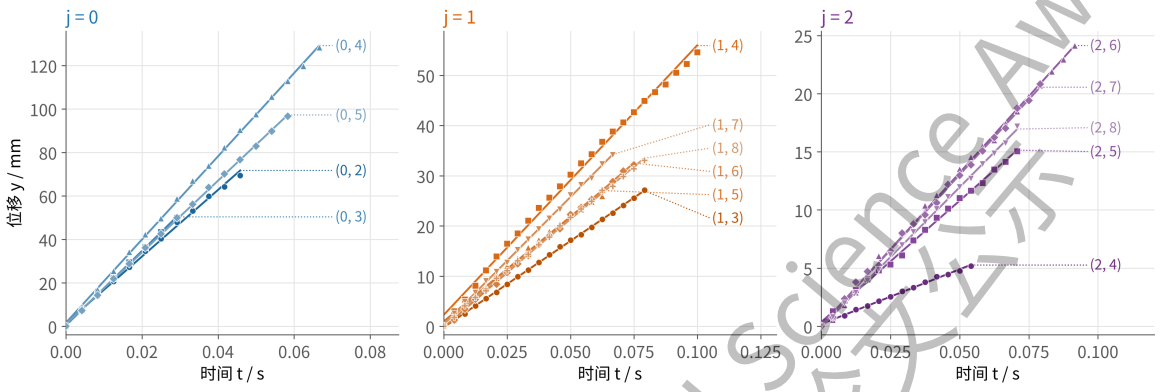
图 3 给出全部 15 组的位移–时间曲线。各组在测速区间内都很好地保持匀速：线性拟合的 R^2 全部不低于 0.995，斜率标准误 0.4%–1.9%，我们即取斜率为实测速度；区间内残余的减速留到附录 F 处理。

由式 (19)，速度对构型的依赖只由 u_0、n、e 三者决定，α 与 μ 已实测。其中指数已由本节的称量独立定出，e 与 u_0 则由速度拟合给出（3.3 节）。

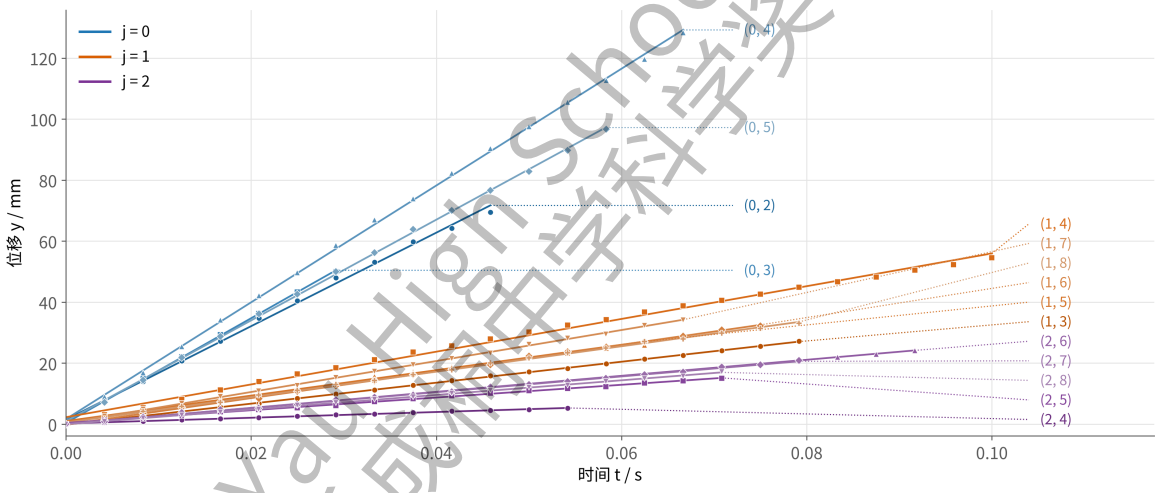
3.2　构型相图的实测结果

先试验 $k \leq j+1$ 的六个构型 $(0,1)$、$(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$、$(2,2)$、$(2,3)$，均未观察到末端球被弹出；而 $k = j+2$ 的 $(0,2)$、$(1,3)$、$(2,4)$ 都有末端球射出。本章对“发射”的判定完全按实际看到的现象：末端球被弹出，并在离开原位 2 cm 之后仍以可测的速度前进；它比推论 1 的“净释放的磁能为正”弱，因为后者要求逃逸到无穷远，而录像只跟踪到 2 cm 之外十几厘米以内。按这一判据，$j \leq 2$ 内的边界为 $k \geq j+2$，与推论 1 一致，且三行在边界两侧都有实测点。3.3 节将指出 $(2,4)$ 是否真正逃逸到无穷远还不能由模型判定。图 4 给出其中四个构型发射前后的对照。

2026 Qiu Yuhui School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示



(a) 按 j 分组



(b) 三组合并于同一坐标

图 3　全部 15 组出射段的位移–时间曲线。点为逐帧读出的位置，直线为线性拟合，标注为构型 (j,k)；均以各自的取点起点（末端球位移 2 cm 处）为原点，时间按 240 f/s 的实际帧间隔计，(a) 按入射侧预置球数 j 分为三组（三图纵轴范围不同），(b) 把三组画在同一坐标中，颜色区分 j。各组最慢的一条都是该行的阈值构型 $k = j+2$，除去它们后组间间距远大于组内分散；(b) 中三组斜率按 j 明显分层，即 3.2 节所说的“行间陡、行内平”。

2026 CT Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

$(0,1)$、$(1,2)$、$(2,3)$ 正是 $k=j+1$ 的镜像构型，不发射与推论 2 相容：理想情形下净释放的磁能为零，计入耗散后为负。这组构型是反向的对照：若其中任一测出显著速度，就说明装置有导轨倾斜、磁体的中心平面偏斜或钢球剩磁一类的系统误差，其后的结果都不可信；我们没有观察到这种情况，但只作了定性观察，未记录末端球的最大位移，把对照变为定量只需补记这一个数。另外，表 D.1 指出 $j=0$、1 两行的发射边界对 e 完全不敏感，故本次测量无法用发射边界的偏移反推恢复系数。

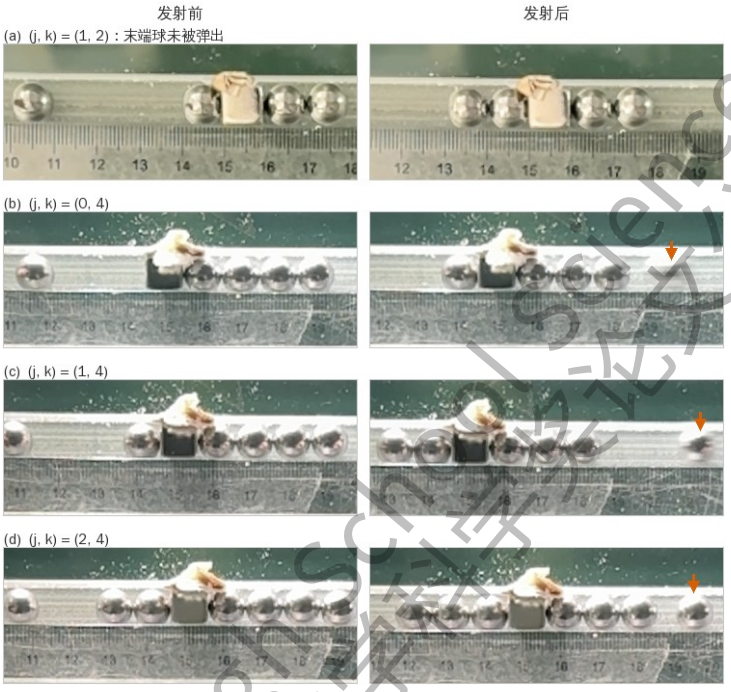


图 4　四个构型发射前后的对照。左列为入射球尚在远端时的初始构型，右列为入射球已停靠、末端球已离开之后。(a) $(1,2)$ 是 $k=j+1$ 的镜像构型，入射球停靠后出射侧球链原样不动；(b)–(d) 的末端球都被弹出，箭头指出它离开球链后的位置，(b)、(c) 中它带有明显的运动模糊。三者的入射球停靠位置随 j 依次由 d_1 后移至 d_2、d_3，即 2.4 节所指出的、最重要的那一个构型自由度。各分图只作裁切、未作缩放；(a) 摄于另一次装配，胶层较多，摄影比例也比其余三例大约 12%，可由图中的尺子读出。

对 $j=0$、1、2 三行分别逐个改变出射侧球数，结果列于表 4，随 k 的变化见图 5。三行分别落在 1.53–1.91、0.34–0.54 与 0.094–0.26 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。各行最慢的都是该行的阈值构型 $k=j+2$，去掉它之后行内相对极差只有 14%、22% 与 21%，而三行峰值之间相差 3.6 倍与 7.3 倍。这一“行间陡、行内平”的结构不依赖任何拟合，本身就说明入射侧的构型自由度远比出射侧重要。

推论 3 预言速度随 k 严格单调上升、不存在有限最优，而实测三行都不单调，最大值分别在 $k=4$、4、6；按推论 3 的论证，磁势能增量随 k 单调递减只会让速度上升，故极值只能来自碰撞耗散。但要分清两段。上升段清楚：三行由阈值构型到峰值分别上升 25%、56% 与 179%，而按附录 F 给出的约 15% 单点分散，两点之差的期

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖公示

表 4　实测速度（末端球位移 2 cm 处起的线性拟合斜率，时间按 240 f/s 实际帧间隔计），单位 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$j\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	×	1.533	1.716	**1.915**	1.651	—	—	—
1	×	×	0.344	**0.537**	0.417	0.437	0.508	0.416
2	×	×	×	0.094	0.209	**0.263**	0.259	0.240

粗体为各行最大值；“×”表示试验过但未观察到末端球射出，六个这样的构型是 (0,1)、(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)、(2,3)；“—”表示未做测量。

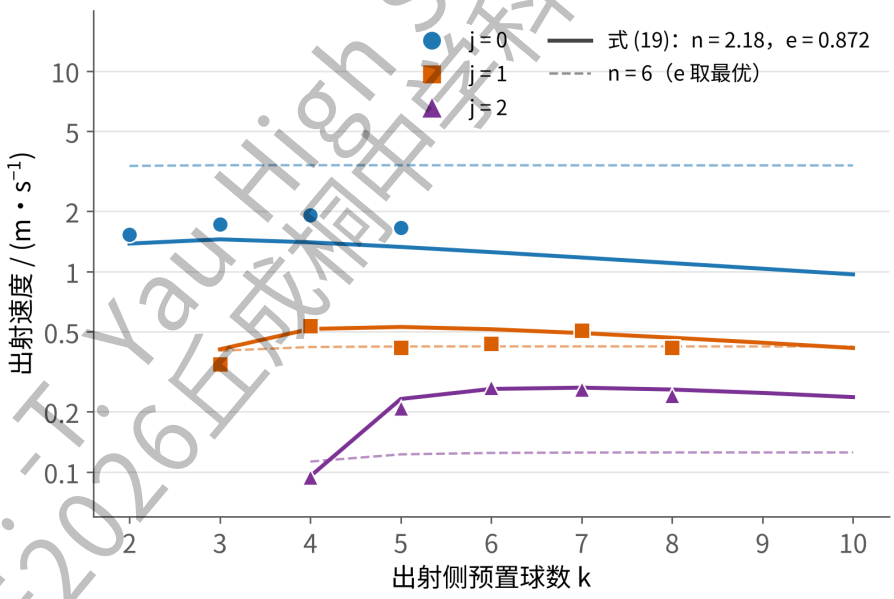


图 5　实测速度与标定模型。实线为 3.3 节标定的式 (19)（$n = 2.18$ 由拉脱力称量测得，$e = 0.872$，$u_0 = 4.67\ \mathrm{m/s}$），即模型给出的测点处速度；虚线为固定 $n = 6$ 时的最优结果（e 被推到上界 0.999）。全部 15 个构型都参与标定，未剔除任何点。每个构型只测量一次，故不画误差棒（理由见附录 F）。纵轴为对数坐标，以便同时显示相差约二十倍的三行。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

望涨落为 $\sqrt{2}\times 15\% \approx 21\%$，后两者明显超出，第一行也略高于这一涨落。下降段不清楚：峰后各点只低 14%、22% 与 9%，分别只有上述涨落的 0.7 倍、1.1 倍与 0.4 倍。而理想模型同样预言上升，能区分两种模型的恰恰是峰后的下降，故本批数据只能说与有限最优相容。这与理论并不冲突：表 2 中 $j=0$ 行由 $k=2$ 到 5 只变 13%，相图在峰值附近本来就平，实测峰位与标定模型同口径给出的 $k=3$、5、7 都不矛盾。

2.4 节预言 j 由 0 变 1 使速度下降约一个数量级（表 2 中由 1.0000 降至 0.1068，约 9.4 倍）。实测行峰值比为 $1:0.280:0.137$，即以 $j=0$ 行为基准，$j=1$、2 两行分别低 3.6 倍与 7.3 倍（图 6；逐级看则是 3.6 倍与 2.0 倍）。方向被证实：入射侧是否留空确实是最重要的构型自由度，其影响远大于同行内调整 k 的百分之几十。幅度则取决于拿哪个模型来比：$n=6$ 的理论给 $1:0.107:0.027$，比实测陡得多；改用 3.1 节称量得到的 $n=2.18$ 与 3.3 节标定的 $e=0.872$ 建模，给 $1:0.365:0.182$，与实测的 $1:0.280:0.137$ 已经接近，只高估约 1.3 倍。剩下这 1.3 倍不能再归给球链导磁：3.1 节的称量本来就是在紧贴排列的球链上做的，这一效应已经含在 $n=2.18$ 之内。由实测的行峰值比反推，j 由 0 到 1 一档要求 $n\approx 3.0$、由 1 到 2 一档要求 $n\approx 2.3$，都高于称量给出的 2.18，前一档高得多。可能的原因有两个。其一是一条幂律不足以覆盖整个距离范围：称量只在第 2、3 两格之间定出指数，第 1、2 两格之比已明显偏离幂律（3.1 节），而 j 由 0 变 1 的落差恰恰取决于第 1、2 两格。其二是末端球的运动形式随行而异：$j=0$ 行出射速度高，末端球在整个测速区间内仍在导轨上打滑，测到的是尚未转为滚动的平动速度；$j\geq 1$ 两行速度低，打滑在测速区间之前或之初就已结束，转为纯滚动时平动速度降为原来的 5/7（附录 F）。若如此，$j\geq 1$ 两行相对 $j=0$ 行会系统性偏低，偏低的倍数（约 0.71）与上述高估的倒数（约 0.76）相近。接近段阻力方向相同，但附录 F 表明它对速度的影响不超过 4%，不足以补足这段差距。

3.3 模型标定与理论对比

势能指数已由 3.1 节的称量直接测定，α 与 μ 也已实测；剩下的恢复系数 e 与绝对速度标度 u_0 还没有单独测过，本节由速度数据给出。具体做法是固定 $n=2.18$，用式 (19) 去拟合全部 15 个构型，不剔除任何一点，待定量只有 u_0 与 e。残差取对数形式 $\Sigma[\ln v_{\text{model}}-\ln v_{\text{meas}}]^2$：三行速度相差近二十倍，若直接对速度之差取残差，$j=0$ 行会压倒其余两行；取对数后残差即相对偏差，三行等权。对数残差下 u_0 有解析的最优值，故只需对 e 在 $[0.70, 0.999]$ 内逐点扫描，得

$$e=0.872, \qquad u_0=4.67\ \text{m/s} \qquad (n=2.18\ \text{固定}) \tag{20}$$

2026 丘成桐中学生科学奖 Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖评审公示

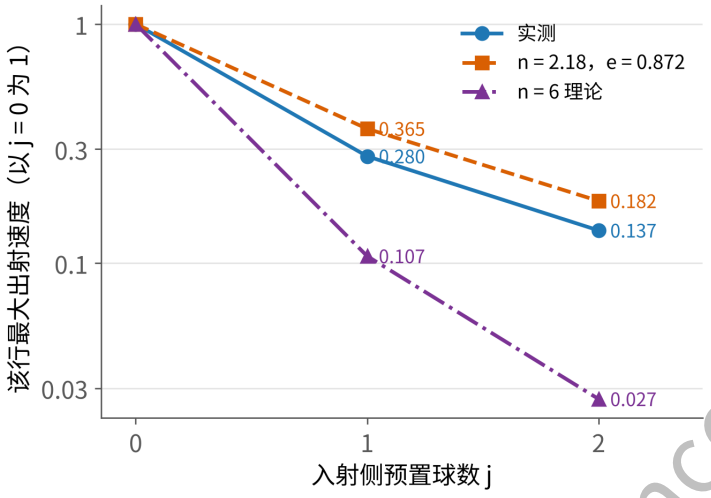


图 6　入射侧每多一枚预置球带来的速度损失。纵轴为各行的最大速度，以 $j=0$ 行为 1；三条曲线都在测点处求值，与实测同口径。实测的下降幅度（3.6 倍、7.3 倍）明显小于 $n=6$ 理论的预言（9.4 倍、37 倍），而与 $n=2.18$、$e=0.872$ 的模型（2.7 倍、5.5 倍）同一量级。

均方相对偏差 15%（14.6%；本章的“偏差”一律指各构型的模型值与实测值之差除以实测值后取均方根），逐组对比见图 5。由雅可比矩阵估得 e 的标准误为 ±0.003、u_0 的标准误为 ±0.23 m/s；留一法给出 $e=0.846$–0.872，只有剔除 $(2,4)$ 时降到 0.846（详见附录 H）。

两个待定量并不简并：u_0 只是整体标度，不进入任何比值；e 则由行内形状与各行碰撞次数的差别决定。若不拟合 e 而直接取钢球的文献值 $e=0.90$，偏差升到 27%。若把势能指数换成偶极模型的 $n=6$，则无论 e 取何值偏差都不低于 59%，且最优 e 被推到搜索上界 0.999，说明 $n=6$ 下无论取什么恢复系数都容纳不下三行的量级关系（图 5 虚线）。“有效指数远小于 6”这一结论因而有两条互不相干的依据：一条是 3.1 节只用静态力比值的称量，一条是本节只用出射速度随构型的变化，后者不论 e 取何值都排除了 $n=6$。

恢复系数 $e=0.872$ 落在钢球常见的 0.85–0.95 内，与文献 [2] 量级一致，但磁体环节的损失、球链中冲量波展宽带来的损失、以及导轨摩擦与滚动的影响都并入了它，应读作整条链的等效恢复系数。

这不能读作“磁体与钢球的相互作用不是偶极型”。式 (11) 的 n 是在假设 (A3) 下写下的，而称量得到的是把 (A3) 的失效、近场效应与第 1 格附近的磁化饱和全部吸收进去的有效指数；它给出的结合能序列（表 5）比表 1 中最平的 $n=3$ 一行还平。

相邻两格之比由理论的 $W_1/W_2=64$ 降到 4.5，差 14 倍。2.2 节曾预言这一比值的实测值应小于理论值，并指出偏差本身即是球链导磁效应的度量，本次给出了这个量；但它同时含有近场效应与第 1 格的磁化饱和，三者由本批数据分不开（接近段

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

表 5　标定后的磁结合能序列（$n=2.18$，$\alpha=1$，$u_0=4.67\ \mathrm{m/s}$）与 $n=6$ 理论值的对比

格号 i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i / mm	10	20	30	40	50	60	70	80
W_i / mJ	9.85	2.17	0.90	0.48	0.30	0.20	0.14	0.11
归一化（标定，×100）	100	22.1	9.1	4.9	3.0	2.0	1.4	1.1
归一化（$n=6$ 理论，×100）	100	1.563	0.137	0.024	0.006	—	—	—

阻力已由附录 F 卡在对速度 4% 以内，可以排除）。

表 5 的绝对值由 u_0 推得，$W_1=\frac{1}{2}mu_0^2 2^{-n}\approx 9.8$ mJ。若照搬式 (E.1) 用实测的 $F_1=18.7$ N 反推，会得到 $W_1=F_1 d_1/n\approx 86$ mJ，大了将近一个数量级。二者之比 $\lambda=W_1/F_1\approx 0.53$ mm，约为 $R/10$，说明第 1 格的峰值力集中在接触面附近极短的距离内，并不携带相应的长程结合能。这正是 3.1 节只用第 2、3 两格定指数、而不用 F_1 的原因，也说明式 (E.1) 不能用于紧贴磁体的第 1 格。

把标定值代回式 (15) 与式 (17)，得标定后的相图预测，列于附录 D 的表 D.4。这里给出的是脱离磁场后的末速度，与第 2 章表 2、表 E.2 同口径；它与图 5 中测点处速度的差别正是式 (19) 的修正：$j=0$ 行 2%–7%，$j=1$ 行 8%–25%（阈值构型 $(1,3)$ 达 167%），$j=2$ 行 38%–107%，而 $(2,4)$、$(2,5)$ 根本没有对应的脱离速度。各行的最优出射球数应为 3、6、9、14，明显大于表 2 按 $n=6$ 给出的 2、4、5、7。

表 D.4 最值得注意的一列是最小可发射球数：2、3、6、11，而理想判据 $k\geq j+2$ 给出 2、3、4、5。2.4 节所说的“实际边界比理想判据更严”，按 $n=6$ 要到 $j=4$ 才出现，按本章标定的参数在 $j=2$ 就出现：模型给出 $\Lambda^2 W_3/W_4=0.63$、$\Lambda^2 W_3/W_5=0.89$，即 $(2,4)$、$(2,5)$ 的末端球虽被弹出，却不足以逃逸到无穷远。

这一预言与实验并不相符。按模型，$(2,4)$ 的末端球应在离磁体中心 62.8 mm 处、即测点之后仅 2.8 mm 处折返，而该组录像在测点之后覆盖了 5.2 mm，且在这段内保持匀速（$R^2=0.997$），已越过预言的折返点；$(2,5)$ 的预言折返点在 138 mm，超出了录像范围，判不了。$(2,4)$ 的矛盾说明，对紧贴阈值的构型，逐次碰撞模型低估了冲量在紧贴球链中的传递效率（或高估了末端球的逃逸势垒）；留一法中只有剔除 $(2,4)$ 时 e 明显下降，也说明这一点对 e 的拉动最大。要定出真正的发射边界，需要按附录 F 末的办法把录像延长到末端球停下或明显远离为止；这也正是 2.3 节所要求的“在论文中说明不发射的判定标准”。

2026 T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

4 结论与展望

本文以入射侧与出射侧的预置球数 (j,k) 为核心变量，研究了磁加速炮的出射动力学与构型优化，得到以下结论。

其一，给出了发射的一般判据。在理想化假设下，单组磁加速炮能够发射的充要条件是 $k \geq j+2$（推论 1）。该结论只用到磁结合能 $W(r)$ 恒为正、且随距离严格单调减小这两点，与它的函数形式无关，因而对任何磁相互作用模型都成立。这补上了已有文献中只有个别构型观察、没有一般条件的空白。

其二，解释了判据边界的位置。$k = j+1$ 时净释放的磁能严格为零（推论 2），且该结论有一个不需任何计算的对称性证明：发射前后的两个构型互为关于磁体的中心平面的镜像，而软磁钢球的相互作用能只依赖磁感应强度的平方，与磁极正负无关。这条预言不含任何可调参数，因而是全文最易证伪、也最能检验模型骨架的一条。

其三，指出了有限最优球数的物理来源。理想模型中出射速度随 k 严格单调上升，不存在有限最优（推论 3）；而实验中每个 j 都对应一个有限的 k^*。本文证明这一差异只能源于碰撞耗散：引入恢复系数后，磁势能增量随 k 的增长赶不上透射因子按 q^{j+k-1} 的衰减，二者的竞争给出式 (17) 的解析判据与完整的构型相图。

其四，用 21 个构型的实验检验了上述结论。$k \leq j+1$ 的六个构型全部不发射，与推论 1 和推论 2 的镜像对称结论相符；$j \leq 2$ 内的发射边界为 $k \geq j+2$，与推论 1 一致。15 个可发射构型的相图复现了“行间陡、行内平”的结构：去掉各行的阈值构型后行内极差只有 14%–22%，而行间峰值以 $j = 0$ 行为基准分别低 3.6 倍与 7.3 倍，入射侧留空的主导作用因而得到证实。三行都在有限的 k 处取到极大，与推论 3 所指的耗散判据相容；但峰后的下降幅度尚未超出本批数据的分散，还不足以单独证明有限最优。

其五，势能指数显著小于偶极模型的取值。本文用静态称量直接测定了这个指数：由第 2、3 格拉脱峰值力之比经式 (G.2) 反解，得 $n = 2.18$，相邻两格结合能之比 $W_1/W_2 = 4.5$；第 1、2 格之比已偏离幂律，说明紧贴磁体处由接触主导。以 $n = 2.18$ 为输入，用全部 15 个可发射构型拟合式 (19)，得等效恢复系数 $e = 0.872$，均方相对偏差 15%；而固定 $n = 6$ 则无论恢复系数取何值偏差都不低于 59%，理论值 64 的结合能之比也被排除。2.2 节曾预言这一比值的实测值应小于理论值，并指出偏差本身即是球链导磁效应的度量；本文给出了这个量，但它同时含有近场效应与第 1 格的磁化饱和，几者由本批数据尚不能分开。另一方面，模型预言 $(2,4)$ 的末端球逃不出，而录像中它已越过预言的折返点，说明逐次碰撞模型低估了紧贴球链中的冲量传递，

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

这是模型最需要改进的环节。

在工程上，本文的两条结论指向电磁发射装置设计中的同一个约束。其一，发射判据 $k \geq j+2$ 说明能量增益是构型的性质而非强度的性质：只要排布不满足这一条件，无论磁体多强、入射速度多高，净释放的磁能都严格非正。换成电磁的语言，就是每一级的势阱必须“前浅后深”，否则加大励磁只是把能量搬进去又原样搬出来。其二，最优出射球数的存在（式 (17)）说明加速链并非越长越好：磁势能增量随链长饱和，而每一次接触的传递效率按 q 逐级相乘，二者的竞争在有限链长处给出极值。这一结构不依赖能量来自永磁还是电流，因而对线圈炮一类逐级加速系统同样适用——增加级数或加长链条之前，必须先确认单级净释放的磁能为正。

在教学上，磁加速炮长期被用作能量转换的演示装置，但通常只停留在“磁能变动能”的定性说明。本文表明，这一装置可以承载相当完整的定量讨论：从势能恒为正、随距离单调减小出发的严格判据、从镜像对称出发的零增益论证、由耗散与磁势能增量竞争而来的有限最优，都在中学与大学低年级的知识范围之内，却又都不是显然的。尤其是镜像对称论证——不做任何计算即可断定某个构型必然不发射——是一个很好的“用对称性代替计算”的例子。

在此基础上，本文的工作还留下若干可以继续推进的方向。其一，把有效指数偏低的成因分开。第 3 章称量测得的指数 2.18 把近场效应、球链导磁与第 1 格的磁化饱和混在一起，而由行峰值比反推的指数（2.3–3.0）又高于它。本文已测了第 1–3 格的峰值力；把称量推广到第 4 格及更远，由式 (G.1) 逐对反解，若各对给出的值系统性不一致，就说明一条幂律不够用；再改用磁导率较低的材料重复，即可把几种效应分开。有限元磁场计算可以给出修正后的 W_i 作为对照。

其二，考察磁化饱和。紧贴磁体的第 1 枚球内部磁感应强度与碳钢的饱和值同量级，故 W_1 很可能被式 (10) 高估。改用不同材料（如磁导率较低的 430 不锈钢）重复实验，可分离饱和效应。

其三，把冲量传播的细节纳入模型。本文把链内传递的全部损失吸收进一个有效恢复系数，而 (2,4) 的结果说明这一处理在阈值附近低估了冲量传递。更完整的处理需要引入赫兹接触与预压缩链中的孤立波，考察冲量波的宽度与链长相当时留在中间球上的能量。

其四，推广至多组串联。本文只处理了单组装置。把本文的构型判据接入级间递推 $K_s = \Lambda^2 K_{s-1} + b$，即可讨论级联能否维持、末速度是否饱和，以及最优构型在多级情形下如何偏移。这是本工作最直接的延伸方向。

其五，扩展构型空间。本文只考虑了单磁体两侧的一维排布。多磁体、非等间

2026 STYU High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

距、不同球径混排等构型能达到多高的出射速度，是一个开放的问题。

致谢

本课题始于一次观看高斯枪视频所带来的好奇：装置不接任何电源，末端钢球却能以远高于入射球的速度被弹出。查阅文献后发现，已有研究虽注意到某些排布不发射，却都只在固定一侧球数下作了个别记录，没有给出同时依赖两侧球数的一般判据；“钢球在磁体两侧如何分布”因而成为一个值得单独研究的自由度。

衷心感谢我们的指导老师张程鑫老师。张老师是我们的物理竞赛主任。在选题阶段，张老师帮助我们判断这个问题的可行性，并提示我们精读相关文献、从中找出真正的空白；在理论推导中，他提醒我们把“能否发射”与“怎样最快”两个问题分开处理；在实验设计与论文撰写中，他提出了许多关键性的改进建议。本次指导为无偿指导，我们未向张老师或任何机构支付任何形式的报酬，也未接受任何校外付费培训或论文代写服务。除张老师上述指导外，本研究未接受他人协助，不含任何他人已完成的研究成果。

全部工作的分工如下。选题与文献调研由我们二人共同完成，以两侧预置球数 (j,k) 为核心变量这一切入点由张程鑫老师提出。第 2 章的理论推导与附录主要由易俊熹完成，含发射判据的证明、镜像对称论证与构型相图；附录 B 的构型能差定理由易俊熹另循一条不依赖碰撞图像的路径独立验算，与正文结果一致。实验主要由吴宇融完成，含装置搭建、21 个构型的发射试验与 15 个构型的速度测量、高速摄影的逐帧标定与拉脱力称量，易俊熹协助记录并复核构型排布。数据分析由吴宇融完成，含曲线拟合、最小二乘标定、留一法与误差分析，全部数值由二人共同核对。论文第 1、2 章及附录由易俊熹执笔，第 3 章由吴宇融执笔，第 4 章由易俊熹执笔，摘要由二人共同完成，图由吴宇融与易俊熹共同绘制。

实验场地由学校物理实验室提供，感谢张老师在高速摄影与测量方面的技术指导。感谢家长在购置设备阶段给予的经济支持，也感谢家人对我们占用大量课余时间的理解与支持。

参考文献

[1] A. Chemin, P. Besserve, A. Caussarieu, N. Taberlet, and N. Plihon, “Magnetic cannon: The physics of the Gauss rifle,” *American Journal of Physics* 85(7), 495–502 (2017). DOI: 10.1119/1.4979653

[2] Å. Andersson, C.-J. Karlsson, and H. Lane, “The Gaussian cannon,” *Emergent Scientist* 1, 6 (2017).

2026 CYU High School Science Award 仅用于2026年丘成桐中学科学奖论文公示

DOI: 10.1051/emsci/2017006

[3] I. R. McNab, “Launch to space with an electromagnetic railgun,” *IEEE Transactions on Magnetics* 39(1), 295–304 (2003). DOI: 10.1109/TMAG.2002.805923

[4] M. Einat and Y. Orbach, “A multi-stage 130 m/s reluctance linear electromagnetic launcher,” *Scientific Reports* 13, 218 (2023). DOI: 10.1038/s41598-022-27022-z

[5] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[6] V. F. Nesterenko, “Propagation of nonlinear compression pulses in granular media,” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 24(5), 733–743 (1983). DOI: 10.1007/BF00905892

[7] S. Sen, J. Hong, J. Bang, E. Avalos, and R. Doney, “Solitary waves in the granular chain,” *Physics Reports* 462(2), 21–66 (2008). DOI: 10.1016/j.physrep.2007.10.007

附录 A 等质量弹性碰撞与牛顿摆型链式传递

引理 A.1（速度交换） 设质量同为 m 的两球碰前速度为 u_A、u_B，碰后为 v_A、v_B。动量守恒与动能守恒给出

$$u_A + u_B = v_A + v_B, \qquad u_A^2 + u_B^2 = v_A^2 + v_B^2 \tag{A.1}$$

将两式分别改写为 $u_A - v_A = v_B - u_B$ 与 $(u_A - v_A)(u_A + v_A) = (v_B - u_B)(v_B + u_B)$，二者相除（碰撞真实发生时 $u_A \neq v_A$）得 $u_A + v_A = v_B + u_B$。与动量守恒联立即得

$$v_A = u_B, \qquad v_B = u_A \tag{A.2}$$

即两球完全交换速度。□

推论 A.1（牛顿摆型传递） N 枚等质量钢球排成一列，第 1 枚以速度 v 运动、其余静止。若碰撞以“每次只有一对球接触”的方式顺序发生，则经 $N-1$ 次碰撞后，只有第 N 枚球以速度 v 运动，其余 $N-1$ 枚全部静止且停留在原位。

证明 对 N 作归纳。$N = 2$ 时由式 (A.2)，第 1 球速度降为 0、第 2 球获得 v。设结论对 $N-1$ 枚球成立；对 N 枚球，第 1 球与第 2 球碰撞后第 1 球静止于原位、第 2 球以速度 v 运动，此时第 $2, \ldots, N$ 枚构成一个 $N-1$ 枚球的同类问题，由归纳假设速度最终完全传递至第 N 枚，其余静止于原位。□

推论 A.1 中“其余球静止且位置未变”这一点，是附录 B 中构型能差定理成立的前提。

推论 A.1 的前提严格成立的条件是球链初始存在微小间隙。磁炮中的钢球被磁力压紧、处于预压缩接触状态，此时冲量以赫兹接触孤立波的形式传播，波包具有

2026 Tsinghua High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

有限宽度，会有少量能量残留在中间球上（弹性链的色散效应）。正文将该效应归入理想化处理，并在 2.2 节把它吸收进恢复系数的有效值中。

对于不等质量的两体碰撞，设质量 m_A 的球以速度 u 撞击静止的质量 m_B，恢复系数为 e。由动量守恒与恢复系数的定义式 (12) 联立，得

$$v_B = \frac{(1+e)\,m_A}{m_A+m_B}\,u, \qquad v_A = v_B - eu \tag{A.3}$$

等质量时 $v_B = \frac{1+e}{2}u$，取 $e = 0.9$ 即每次碰撞速度乘以 0.95；单次等质量碰撞的能量损失比例为

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1-e^2}{2} \tag{A.4}$$

$e = 0.95$、0.90、0.85、0.80 分别对应 4.9%、9.5%、13.9%、18.0%。可见恢复系数从 0.95 降到 0.85，单次损失就翻了近三倍，而链中要连乘 $j+k-1$ 次，故 Λ 对 e 敏感。

正文式 (13) 中的磁体因子 $(1+e)^2\mu/(1+\mu)^2$ 由式 (A.3) 连续应用两次（球 $\to$ 磁体、磁体 $\to$ 球）得到。由 $e>0$ 时碰后恒有 $v_B > v_A$，两球随即分离而不会二次碰撞，故链中碰撞严格按顺序逐对发生，各次的速度因子可逐级相乘。

由式 (A.3)，撞击球自身的残余速度为 $\frac{1-e}{2}u$，$e = 0.9$ 时仅为 5%，残余动能只余 0.25%。这解释了为什么入射球撞击后基本停留在 d_{j+1} 处，与 2.1 节的图像一致。

附录 B　构型能量差定理

正文 2.1 节逐段追踪了加速、碰撞、逃逸三个过程，其中碰撞阶段依赖推论 A.1 的具体图像。本附录给出一条完全独立的推导路径：直接比较体系初、末两个静态构型的总磁能。

由假设 (A3)，含多枚钢球时体系的总磁能为各球贡献之和：

$$U = \sum_{\text{所有球}} U(r_i) = -\sum_{\text{所有球}} W(r_i) \tag{B.1}$$

定理 B.1（构型能差定理）　在假设 (A1)–(A5) 下，

$$\frac{1}{2}mv_{\text{out}}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = U_i - U_f \tag{B.2}$$

证明　由 (A1) 无摩擦与空气阻力，由 (A5) 碰撞不耗散，由 (A4) 无磁滞损耗，故体系机械能与磁能之和守恒。由 (A2) 碰撞瞬时，碰撞期间位置不变、磁力不做功，磁能仅在自由飞行阶段随构型改变。由推论 A.1，碰撞结束后除出射球外所有球均静止于原位，末态动能只由出射球携带。对全过程写能量守恒即得。□

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

初构型：入射侧占据 $d_1,\dots,d_j$，出射侧占据 $d_1,\dots,d_k$，入射球位于 r_0；末构型：入射球已停靠使入射侧变为 $d_1,\dots,d_{j+1}$，末端球已飞离使出射侧剩 $d_1,\dots,d_{k-1}$，被发射的球在无穷远处贡献为零。由式 (B.1)

$$U_i=-\left[\sum_{i=1}^{j}W(d_i)+\sum_{i=1}^{k}W(d_i)+W(r_0)\right],\qquad U_f=-\left[\sum_{i=1}^{j+1}W(d_i)+\sum_{i=1}^{k-1}W(d_i)\right] \tag{B.3}$$

两式相减，入射侧的 $d_1,\dots,d_j$ 与出射侧的 $d_1,\dots,d_{k-1}$ 逐项对消，只余两个端点项：

$$U_i-U_f=W(d_{j+1})-W(d_k)-W(r_0) \tag{B.4}$$

代入式 (B.2)，取 $v_0=0$、$r_0\to\infty$，即重新得到正文式 (7)。两条推导路径一致。该路径不涉及碰撞的任何细节，因而既是对式 (7) 的严格检验，也说明发射阈值 $k\geq j+2$ 与 $k=j+1$ 的零增益这两条结论不依赖牛顿摆图像。

附录 C　一般情形的动力学方程与数值方法

正文式 (15) 建立在无摩擦、无空气阻力且碰撞逐对顺序发生的图像之上。当须计入导轨摩擦与空气阻力，或球链的接触次序不能预先确定时，须对运动方程直接数值积分。设第 i 枚钢球位置为 $x_i(t)$、磁体位置为 $x_M(t)$，则在两次碰撞之间

$$m\ddot{x}_i=-\operatorname{sgn}(x_i-x_M)\frac{nC}{|x_i-x_M|^{n+1}}-\gamma_f\dot{x}_i-\frac{1}{2}\rho_{\text{air}}C_d\pi R^2\dot{x}_i|\dot{x}_i| \tag{C.1}$$

$$M\ddot{x}_M=\sum_i\operatorname{sgn}(x_i-x_M)\frac{nC}{|x_i-x_M|^{n+1}} \tag{C.2}$$

其中 γ_f 为等效摩擦系数、C_d 为阻力系数，式 (C.2) 由牛顿第三定律给出。这是一个非线性、含瞬时约束的常微分方程组，本文采用事件驱动的混合算法求解：

1. 在两次碰撞之间，用四阶龙格–库塔法积分式 (C.1)、(C.2)；
2. 每步后检测所有相邻物体对的间隙，判断是否发生接触；
3. 若接触，按式 (A.3) 瞬时更新速度，并将重叠位置分离至恰好接触，避免同一步内重复触发；
4. 重复至模拟时长结束，取出射侧最外侧钢球的末速度为 v_{out}。

时间步长取 $\Delta t=10^{-6}$ s，经步长减半检验确认收敛。在本文实验对应的参数范围内，该数值解与解析式 (15) 的偏差小于 1%，故正文的定量结果直接采用解析式。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

附录 D　构型相图对参数的敏感性

本附录汇总 2.3 节相图对两个模型参数的敏感性。先看恢复系数：e 越小，Λ 衰减越快，实际发射边界越向右移，表 D.1 给出这一依赖关系。

表 D.1　最小可发射球数随恢复系数的变化（$n=6$，$\mu=1$）

e	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
0.75	2	3	5	7	10
0.80	2	3	4	6	8
0.85	2	3	4	6	7
0.90	2	3	4	5	7
0.95	2	3	4	5	6
1.00	2	3	4	5	6

实测边界与理想边界的偏离量因而构成一条独立于速度测量的 e 标定途径：只需记录每个构型“发射与否”这一二值结果，比速度测量更易做准。但表 D.1 同时给出一条重要限制：$j=0$、$j=1$ 两行的边界在 $e\in[0.75,1]$ 内恒为 2 与 3，对 e 完全不敏感；分辨率集中在 $j\geq 3$。因此这一标定途径要求实验一直测到 $j=3$、4，仅测低 j 构型无法给出 e。

边界附近的出射速度按定义趋于零（$j=4$ 一行的最大相对速度仅 0.0043），此时导轨的滚动阻力可能足以拦住末端球，使实测边界同时受 e 与摩擦影响。故实验中应先独立测定导轨阻力的量级，并在论文中说明“不发射”的判定标准。

这些数值随势能指数 n 变化很明显，表 D.2 给出最优球数随 n 的变化。

表 D.2　最优出射侧球数 k^{*} 对势能指数 n 的依赖（$e=0.90$，$\mu=1$）

n	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
3	3	5	7	9	12
4	2	4	6	8	10
5	2	4	6	7	9
6	2	4	5	7	9

同时，$j=0$ 与 $j=1$ 最优值之比在 $n=6$ 时为 9.4 倍，$n=4$ 时缩小至 4.8 倍。可见表 2 与本附录两表的具体数值对 n 敏感。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学生科学奖论文公示

本附录另收两张正文引用的数值表。表 D.3 给出冲量透射因子对链长与恢复系数的依赖，表 D.4 给出用第 3 章标定参数算出的相图预测（脱离磁场后的末速度）。

表 D.3　冲量透射因子 Λ（$\mu = 1$）

链长 $j+k-1$	$e=0.80$	0.85	0.90	0.95
1	0.729	0.791	0.857	0.927
2	0.656	0.732	0.815	0.904
3	0.590	0.677	0.774	0.881
4	0.531	0.626	0.735	0.859
6	0.430	0.536	0.663	0.817
8	0.349	0.459	0.599	0.776

表 D.4　标定参数（$n = 2.18$ 称量测得，$e = 0.872$，$u_0 = 4.67\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\mu = 1.80$）下脱离磁场后的末速度预测，单位 $\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$

$j\backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	最小 k	最优 k
0	1290	**1396**	1363	1299	1228	1156	1086	1020	956	2	3
1	—	153	413	459	**462**	450	432	411	389	3	6
2	—	—	—	—	125	171	186	**189**	186	6	9
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11	14

$j = 3$ 行在 $k \le 10$ 内都不发射，$k = 11$–16 依次为 37、49、54、55、54、51 $\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$。

附录 E　有量纲算例与模型局限讨论

2.3 节的表 2 以 $(j,k) = (0,2)$ 为 1 作归一，此前各节都未涉及绝对尺度。本附录代入一组具体数值算一个例子，用以检验模型给出的速度量级是否合理，并说明各输入量的不确定度如何传递到出射速度，最后讨论模型的薄弱环节。

原则上，若幂律在第 1 格成立，一次拉脱力测量就能定出模型需要的全部磁学量，也就是式 (11) 中的两个常数 C 与 n，以及由它们算出的各格结合能。由式 (10) 与 $F = nC/r^{n+1}$ 消去常数 C，得

$$W_1 = \frac{F_1 d_1}{n} \tag{E.1}$$

即第 1 格的磁结合能等于该格的拉脱峰值力乘以该格距离、再除以势能指数。配合式 (G.1) 由力比反解出的 n，一次拉脱力测量即可定出整条 W_i 序列，既不需要磁场测

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于 2026 丘成桐中学科学奖论文公示

量，也不需要对拉力–位移曲线积分。不过 3.1 节与 3.3 节表明，本装置第 1 格的峰值力由接触面处的磁通汇聚主导，式 (E.1) 在第 1 格并不成立；本附录的算例只取一组假设的输入，用来检验推导链条的量纲与量级。

算例取 $R = 5$ mm 的碳钢球（密度 7.85 g·cm^{-3}，$m = 4.1$ g）与边长 10 mm 的钕铁硼立方磁体（$M = 7.4$ g），即第 3 章实际使用的器件，故 $\alpha = 1$、$\mu = 1.80$。第 1 格拉脱峰值力取同类磁体常见的量级 $F_1 = 8$ N，并取 $n = 6$、$e = 0.90$。由式 (E.1) 得 $W_1 = 13.3$ mJ，各格结合能与速度标度列于表 E.1。这组设定值并非本装置的实测值（实测的有效指数为 2.18，见 3.1 节），其绝对数值不作为本文的结果。

表 E.1　算例用到的磁学量

量	数值
W_1, W_2, W_3, W_4, W_5	13.33、0.208、0.0183、0.0033、0.0009 mJ
速度标度 $u_0 = \sqrt{2C/(mR^n)}$	20.4 m·s^{-1}
入射球撞击速度 v_1（$j = 0, 1, 2$）	2.55、0.32、0.09 m·s^{-1}

由式 (14) 算得各构型的绝对出射速度（表 E.2）。

表 E.2　算例的绝对出射速度（m·s^{-1}，$e = 0.90$，$\mu = 1.80$）

$j\backslash k$	2	3	4	5	6	7	8
0	1.98	1.91	1.81	1.72	1.64	1.55	1.48
1	—	0.21	0.21	0.20	0.19	0.18	0.18
2	—	—	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
3	—	—	—	0.01	0.02	0.02	0.02

算例的三点结果值得注意。

其一，$j = 0$ 一行给出约 2 m·s^{-1} 的出射速度，与文献 [1] 及一般桌面演示装置报告的量级一致，也与本装置实测的 $j = 0$ 行速度（1.53–1.91 m·s^{-1}）同一量级，说明从式 (E.1) 一路推到式 (14) 这条链子，单位对得上、数量级也对得上。但这只检验了推导本身：算例取的 $n = 6$ 使 $j \geq 1$ 两行比实测低得多，这正是 3.3 节所说的偶极模型容纳不下三行量级关系的表现。

其二，$j = 0$ 时入射球的撞击速度为 2.55 m·s^{-1}，而出射速度为 1.98 m·s^{-1}，损失约 22%。这与推论 3 的 $v_{\text{out}} < v_1$ 一致，其中碰撞耗散与剩余势垒各贡献一部分。

其三，j 由 0 增至 1 时出射速度由 1.98 降至 0.21 m·s^{-1}，约一个数量级，与表 2

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖论文公示

的相对值互相印证。$j \geq 2$ 的构型出射速度已降至厘米每秒量级，此时导轨滚动阻力不再可以忽略，这正是 2.3 节指出的、边界附近判定困难的原因。

各输入量的不确定度按下面的方式传递。由式 (14)，$v_{\text{out}} \propto \sqrt{W} \propto \sqrt{F_1}$，故磁学量的相对误差在开方后减半：$F_1$ 有 10% 的不确定度，只带来出射速度 4.9% 的不确定度。相比之下，恢复系数的影响更大：$(0,2)$ 构型下 e 由 0.90 变到 0.95 使速度上升 8.3%，变到 0.85 使速度下降 7.9%，且链越长这一敏感度越高（由式 (A.3)，$\Lambda \propto q^{j+k-1}$）。

因此在实验标定中，恢复系数的精度比磁学量的精度更值得投入。这与 2.2 节的结论并不矛盾：那里强调拉脱力测量的价值在于检验幂律形式与假设 (A3)（由实测力比与理论值 128 的偏差判断），而不在于测准 W_1 的数值精度。

最后讨论模型的薄弱环节。本章在 2.1 节的理想框架之外引入了三个新的输入：势能指数 n、恢复系数 e、以及磁体环节的有效因子。按可靠性由低到高排列如下。

最薄弱的是假设 (A3)，把每枚钢球视为自由空间中的孤立球体，忽略球链自身的导磁作用。该效应的方向是确定的：真实的 W_2 应大于式 (11) 给出的 $W_1/64$，因而表 2 中 $j \geq 1$ 各行的数值将系统性偏低。这一环节有明确的处理途径，且不需要对磁场分布另行建模：由 2.2 节的拉脱力测量判断其严重程度（比较实测 F_1/F_2 与理论值 128），若偏差显著，则按式 (16) 用实测的链式结合能替换理论值——实测的链式结合能里本来就含有球链导磁的贡献，换上去就不必再对这一效应单独建模。

其次是第 1 格的势能形式。如 2.2 节所述，偶极近似与线性磁化两个前提都在 $i = 1$ 处最先失效，而 W_1 恰是权重最大的一格。同样地，用实测值替换可以绕开这一问题。

再次是恢复系数被当作常数。实际的 e 随碰撞速度缓慢下降，而链中各次碰撞的速度并不相同，故严格而言式 (A.3) 的逐级相乘应使用逐次不同的 e。本文取其在实验速度范围内的有效值。

此外，式 (A.3) 的逐对相乘忽略了一件事：钢球被磁力压紧后，冲量不是集中在一次碰撞里干净地传过去的，而是以有一定宽度的波的形式传播（机制见附录 A），每传一次都会有少量能量留在中间的球上，偏差随链长累积，因而 k 较大时预测的可靠性下降。

最后两项与磁体和钢球的运动形式有关。烧结磁体内部的耗散与冲量波在磁体–钢球界面处的反射未被独立建模，而是并入式 (A.3) 的有效因子，故本文不把 μ 当作一个可以独立调节的参数；假设 (A1) 又把钢球处理为一维平动质点，而实际滚动时约 2/7 的动能储存于转动、碰撞主要传递平动分量（文献 [2] 计入了这一修正）。该效应对各构型同向，不改变定性结论的方向，但影响绝对数值的标定。

2026 Shiu-Ching Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖公示

以上各条是第 2 章模型已知的欠缺。第 3 章的实验对它们的量级作了估计，第 4 章据此提出后续工作的方向。

附录 F　误差分析与讨论

每个构型只测量一次，本文没有重复性数据，图 5 中也不画误差棒。3.1 节的斜率标准误（0.4%–1.9%）只反映同一段录像内打点的分散，不含装置重排、球链对中、释放位置这些每次实验都会改变的因素，当作误差棒会低估一个数量级。分散的量级只能间接估计：15 组相对标定模型的均方相对偏差为 15%，$j=1$ 行 $k=4$ 至 8 五点的对数残差标准差为 12%，与之一致；二者都由同一批数据反推，只能作量级参考，不能代替误差棒。正是这一量级的分散使 $j=0$、1 两行峰后的下降不可分辨。

线性拟合给出的是区间平均速度，而式 (19) 给出的是区间起点的速度。对每组另作二次拟合可得平均加速度：中位数 $-0.49\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，最大的一组（$(0,2)$）为 $-11\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$；除一组略低外，外推到起点的速度比线性拟合值高 0%–25%，中位数 7%，这是一项单边的系统误差。把全部数据换成外推速度重做标定（n 仍取 2.18），得 $e=0.872$、$u_0=5.01\ \mathrm{m/s}$、偏差 16%：e 不变，只有 u_0 上升约 7%。本章的主要结论只依赖 n 与 e，不受影响；u_0 与由它推得的 W_i 的不确定度是单边的：真实值只可能比本文给出的高，u_0 最多高约 7%，W_i 最多高约 15%。

减速的来源随行而异。按标定值算出的区间内残余磁力平均减速，与 $j=2$ 行的实测减速同量级（比值 –0.2 至 1.0，其中 $(2,7)$ 是微弱的正加速度，已在模型可解释的范围之外），说明该行的减速主要就是残余磁力。$j=0$ 行实测到的减速为 3.7–11 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，比残余磁力大 6–13 倍，与钢球在塑料槽中打滑时的滑动摩擦减速 $\mu_k g$（$\mu_k\approx 0.3$–0.5 时为 3–5 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）同一量级：碰撞只传递平动分量，末端球离开球链时是纯平动的，随后在导轨上打滑、被摩擦力带动旋转，直到转为纯滚动，所需时间 $t=2v/(7\mu_k g)$。$v\approx 1.5$–1.9 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时 $t\approx 0.09$–0.18 s，比 $j=0$ 行整个测速区间（0.03–0.07 s）还长，故该行在测速区间内始终处于打滑阶段；$j=2$ 行 $v\lesssim 0.26\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，打滑在 5 mm 内即结束，远在测点之前；$j=1$ 行介于两者之间（$(1,4)$、$(1,5)$ 减速较大，$(1,6)$、$(1,7)$ 很小）。

由此带来两点后果。其一，纯滚动时平动速度降为原来的 5/7，而 $j=0$ 行测到的仍是打滑阶段的平动速度，故各行实测速度的口径并不完全一致，$j\geq 1$ 两行相对 $j=0$ 行可能系统性偏低（见 3.2 节）。其二，打滑与滚动都改变了式 (19) 根号内两项的相对权重，等价于在第一项前乘一个常数因子，其值按不同假设落在 0.7–0.85 之间；本文把它连同导轨摩擦一并吸收进等效恢复系数 e，这也是 e 应读作整条链等效

2026 Shiyuan High School Science Award
仅用于2026年成都中学生科学奖论文公开

值的原因之一。

再看接近段，即式 (H.1) 中的两项修正。由标定的 u_0 可得 $C=\frac{1}{2}mu_0^2R^n$，磁力 $F(r)=nC/r^{n+1}$。导轨的等效滚动阻力系数没有单独测量，取钢球在塑料槽中常见的 $c_r\approx 0.005$–0.01（与打滑已结束的 $(1,6)$、$(1,7)$、$(2,7)$ 几组的 $|a|/g$ 同一量级），释放条件 $F(r_0)=c_rmg$ 给出 $r_0\approx 150$–185 mm。此时起点处未释放的结合能与接近段阻力功合计，占有效释放能 W_{j+1} 的比例为：$j=0$ 行 0.5%–0.8%，$j=1$ 行 2%–4%，$j=2$ 行 5%–8%；对速度的影响为 0.3%–4%，$j=2$ 行最大。它远小于 3.2 节所显示的约 1.3 倍行间落差偏差，故接近段阻力不足以解释后者。

其余几项方向已知，影响更小：槽宽大于球径带来的 d_i 偏差 1% 只对应速度 1.3%；磁体对中有 $k=j+1$ 三个构型都不发射作为证据，但热熔胶是粘弹性材料，应定期复查；球链中冲量波展宽带来的损失与磁体环节的损失一同并入了有效恢复系数。

最值得补做的是下面五项测量，按先后顺序排。一是把拉脱力称量推广到第 4 格及更远，并测出完整的拉力–位移曲线：前者可由式 (G.1) 逐对反解 n，检验一条幂律是否够用；后者直接给出链式结合能 W_i^{exp}，可代入式 (16)，使预测不再依赖幂律假设。二是每个构型重复 3–5 次，这样才谈得上误差棒，也才能把分散压到 5% 以下，使峰后的下降成为可分辨的量。三是把末端球的录像延长到它停下或明显远离为止，给出真正的发射判据，并检验表 D.4 预言的 $(2,4)$、$(2,5)$ 不逃逸、$j=2$ 行最小可发射球数为 6——$(2,4)$ 的现有录像已与这一预言不符（3.3 节）。四是单独测量恢复系数：一球从固定高度撞静止球或球链，由碰后速度定出 e，把 e 由拟合量变为独立输入。五是把测量推进到 $j=3$ 与更大的 k，检验最优球数 9、14（要判定 $k=14$ 是极大，必须测过它）。$v_{\mathrm{out}}\propto\sqrt{F_1}$ 这条标度律本章未检验，它要求换一块磁体后把全部构型重测一遍。

附录 G　拉脱力标定与球链导磁效应的检验

式 (10)、(11) 中的指数可以不依赖任何磁场测量而直接标定。将 i 枚钢球紧贴排列于磁体一侧，缓慢拉脱最外侧那枚，记录脱离前的峰值拉力 F_i。由 $F_i=nC/d_i^{n+1}$，相邻两格的峰值力之比只依赖 n 与 α：

$$\frac{F_i}{F_{i+1}}=\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right)^{n+1}=\left(\frac{\alpha+2i+1}{\alpha+2i-1}\right)^{n+1} \tag{G.1}$$

$\alpha=1$、$n=6$ 时 $F_1/F_2=2^7=128$，$F_2/F_3=(3/2)^7=17.1$。故只需测量两三个峰值力，即可由式 (G.1) 反解

$$n=\frac{\ln(F_i/F_{i+1})}{\ln[(\alpha+2i+1)/(\alpha+2i-1)]}-1,\qquad C=\frac{F_1d_1^{n+1}}{n} \tag{G.2}$$

2026 C. T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学生科学奖公示

由 n 与 C 即得整条 W_i 序列。用不同的 i 各解一次 n，若所得值互相一致，则幂律形式本身得到验证；若系统性不一致，说明用一条幂律描述不了实际的势能分布。

本文的实测按 3.1 节的方法进行：导轨竖直、磁体在下，用细线连接最外侧钢球，以电子吊秤（分度 0.1 N，带峰值锁存）缓慢向上提拉。结果列于表 G.1。

表 G.1　拉脱峰值力的称量结果（$\alpha = 1$）

构型	d_i/mm	峰值力/N	与前一格之比	反解 n	$n = 6$ 时的比值
单球贴磁体 F_1	10	18.7	—	—	—
两球链外侧球 F_2	20	9.8	1.91	−0.07	128
三球链外侧球 F_3	30	2.7	3.63	**2.18**	17.1

由表 G.1 可得四点结论。其一，$n = 6$ 被直接排除：两段比值分别比理论值小 67 倍与 4.7 倍，而 0.1 N 的分度只给 n 带来约 ± 0.05 的不确定度。其二，两段反解出的有效指数随距离上升（$-0.07 \to 2.18$），而幂律要求它是常数，故 $W = C/r^n$ 只是发射尺度上的有效描述；10 mm 那一端由接触主导（磁通经接触面汇聚），不能用。其三，发射过程真正涉及的是 $k \geq 2$ 的势垒（$d \geq 20$ mm），故全文取 $n = 2.18$。其四，第 1 格的力偏离幂律不等于第 1 格的结合能偏离：峰值力是接触量，结合能是长程量。由 3.3 节，$\lambda = W_1/F_1 \approx 0.53$ mm $\approx R/10$，接触处的力尖峰虽高，却不携带相应的能量，故不能由 F_1 经式 (E.1) 反算 W_1。

这一标定方式还提供了对假设 (A3) 的直接检验。式 (11) 把每枚钢球视为处于自由空间的孤立球体，但紧贴排列的钢球本身被磁化，整条球链构成一条低磁阻的磁通路径：磁通经第一枚球进入第二枚球，故第二枚球所处的实际磁环境并非“距磁体 d_2 的自由空间”，其真实结合能应大于式 (11) 的估计。因此实测的 F_1/F_2 应小于理论值 128，而这一偏差量本身即是球链导磁效应强弱的度量。表 G.1 中 $F_1/F_2 = 1.91$，远小于 128，与这一预期一致。

附录 H　实验细节与拟合方法

2.2 节要求磁体在碰撞的那一瞬间能当作不受约束的刚体，热熔胶满足这个要求：按室温杨氏模量 10–50 MPa、粘接面积 0.5–2 cm²、胶层厚 1–2 mm 估算，等效刚度 $k = EA/t$ 对应的固有周期为 0.17–1.1 ms，比碰撞持续时间 $\tau_c \sim 10\ \mu$s 长一到两个数量级，胶层传递的冲量至多为磁体动量变化的 0.2%–7%。若改用螺钉把磁体直接拧死在导轨上，约束就会在碰撞期间参与作用，式 (A.3) 的磁体因子将显著下降；本文没有做这一对照实验。

2026 S. T. Yau High School Science Award 仅用于 2026 丘成桐中学生科学奖公示

式 (6) 假设入射球自无穷远静止释放。我们不控制入射速度，而是把它压到可忽略：把球置于远处，用手极缓慢推近，每推一小段即松手，直到松手后球能自行继续运动。此时磁力恰等于导轨的最大静阻力 f_s，释放速度为零，可取 $v_0 = 0$。与理想假设相比只差起点 r_0 处未释放的结合能 $W(r_0)$ 与接近段的阻力功两项，故式 (6) 应写作

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = W_{j+1} - W(r_0) - f_s(r_0 - d_{j+1}) \tag{H.1}$$

附录 F 估计这两项合计使有效释放能下降 0.5%（$j = 0$）至 8%（$j = 2$）。

出射速度用 240 f/s 高速摄影逐帧读取末端球位置，相邻两点的时间间隔为 1/240 s，自末端球离开初始位置 2 cm 处开始取点，以位移–时间的线性拟合斜率作为实测速度。这一距离需要特别说明：$2\ \mathrm{cm} = 4R$ 恰好是两个格距：末端球原在第 k 格，测点正落在第 $k+2$ 格。故测到的不是式 (14) 中“脱离磁场后”的末速度，而是只逃逸两格时的速度，对应的势垒是 $W_k - W_{k+2}$ 而非 W_k。正文第 3 章此后一律采用式 (19) 与实验数据比较。

拟合时势能指数固定为称量值 $n = 2.18$，α 与 μ 取实测值，待定量只有 e 与 u_0。两者并不简并，各由数据的不同特征定住：u_0 只是整体标度，不进入任何比值；e 则由行内形状与各行碰撞次数的差别定：同一行每增一枚出射球，链中多一次碰撞，透射因子乘 q，峰的位置与峰后的降幅即是 e 的印记。由雅可比矩阵估得二者的标准误为 $e \pm 0.003$ 与 $u_0 \pm 0.23\ \mathrm{m/s}$，相关系数 -0.54。留一法检验（每次剔除一个构型重拟合）给出 $e = 0.846$ 至 0.872，只有剔除 $(2,4)$ 时降到 0.846；该点是 $j = 2$ 行的阈值构型，对 e 的拉动最大，而 3.3 节表明模型在这一点上低估了冲量传递，这也说明阈值附近的构型最值得补测。

这一结果对处理方式不敏感。不拟合 e 而取钢球的文献值 0.90 时，偏差为 27%；取 0.95 时升到 42%。固定 $n = 6$ 只拟合 u_0 与 e 时，最小偏差为 59%，且最优 e 被推到搜索上界 0.999（e 在 0.85–0.95 内时偏差为 67%–89%），说明 $n = 6$ 下无论取什么恢复系数都容纳不下三行的量级关系。改用附录 F 的外推速度重拟合得 $e = 0.872$，偏差 16%。各条都指向同一结论：在称量测得的 $n = 2.18$ 下，等效恢复系数约为 0.87；偶极模型的 $n = 6$ 与速度数据不相容。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示